فصل پنجم :حد و پیوستگی

درس اول : مفهوم حد و فرایند های حدی

درس دوم : حد های یک طرف (حد چپ و حد راست)

درس سوم : قضایای حد

درس چهارم : محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

درس پنجم : پیوستگی

درس اول : مفهوم حد و فرایند های حدی

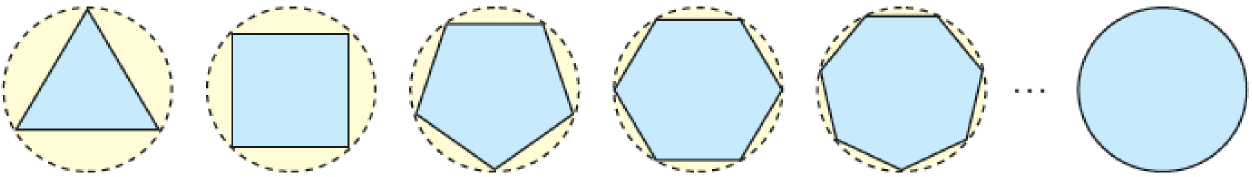
بیشتر پدیده های طبیعی پس از مدل سازی به صورت یک تابع در می آیند و گاهی لازم است رفتار این توابع را در نزدیکی یک نقطه مورد ارزیابی قرار دهیم . مفهوم « حد » ابزار مناسبی برای این کار است .

به عنوان مثال ریاضی دانان بعد از اینکه دانستند نسبت محیط به قطر دایره عدد ثابتی است در صدد بر آمدند تا این عدد ثابت را با دقت زیاد بدست آورند . آنها با رسم چند ضلعی های منتظم محاطی (و البته محیطی) و افزایش تعداد اضلاع آن به این هدف دست یابند .

عدد π تا ۱۰ رقم اعشار در بیت زیر آمده است . آن را کشف کنید !!!

خـــــرد و دانـــــش و آگـــــاهی دانشـــــمندان   ره ســـــر منـــــزل مقصـــــود بمـــــا آمـــــوزد

دایره زیر را که دارای شعاع یک است در نظر بگیرید :



اگر مساحت n ضلعی درون دایره را با A_n نمایش دهیم داریم :

n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
A_n	۱/۲۹۹۰۳	۲	۲/۳۷۷۶۴	۲/۵۹۸۰۷	۲/۷۳۶۰۸	۲/۸۲۸۴۲	۲/۸۹۲۵۴	۲/۹۳۸۹۲	۳/۱۴۱۰۷	۳/۱۴۱۳۶	۳/۱۴۱۴۶	۳/۱۴۱۵۰	۳/۱۴۱۵۷

با زیاد شدن تعداد اضلاع چند ضلعی ، مساحت آن به عدد π که مساحت دایره است ، نزدیک می شود .

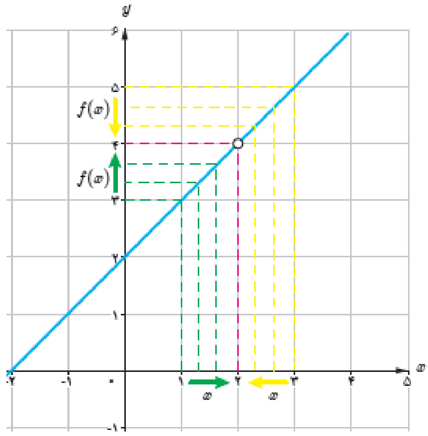
حال فرض کنید می خواهیم رفتار تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲}$ را در اطراف عدد $x=۲$ بررسی کنیم .

از آنجایی که تابع در ۲ تعریف نشده است پس در این نقطه مقدار ندارد ولی به ازای مقادیر غیر از ۲ می توان تابع را ساده کرد و $f(x)=x+۲$ را بدست آورد . حال مقادیر تابع را در اطراف ۲ بررسی می کنیم :

x از چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود x از راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود

x	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	→	۲	←	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	→	?	←	۴/۰۰۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۵	۵

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود



با نزدیک شدن x به ۲ از هر دو طرف ، مقدار تابع به عدد ۴ نزدیک می شود .

بیایید درستی این مطلب را از روی نمودار تابع بررسی کنیم :

در این صورت می گوییم وقتی $x \to ۲$ (x به ۲ میل می کند)

حد تابع برابر ۴ است و می نویسیم :

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = ۴$$

تمرین : تابع $f(x) = \begin{cases} x+۱ & x \neq ۲ \\ ۱ & x = ۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید .

الف) جدول زیر را کامل کنید .

x	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۱/۹۹۹۹	$\to$	۲	$\leftarrow$	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱
$f(x)$					$\to$		$\leftarrow$				

ب) حد تابع در ۲ چقدر است ؟

ج) مقدار تابع در ۲ چقدر است ؟

د) نمودار تابع را رسم و رابطه حدتابع با مقدار تابع در یک نقطه را بیان کنید .

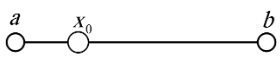
همسایگی و همسایگی محذوف یک عدد :

برای عدد $x_۰$ هر بازه باز شامل $x_۰$ را یک همسایگی این عدد می نامند .

یعنی اگر $x_۰ \in (a,b)$ آنگاه (a,b) یک همسایگی $x_۰$ است .

اگر خود $x_۰$ را از این بازه حذف کنیم ، مجموعه $(a,b)-\{x_۰\}$

را همسایگی محذوف عدد $x_۰$ می نامند .



همسایگی راست و چپ یک عدد :

اگر $r>0$ ، در این صورت بازه (x_0,x_0+r) را یک همسایگی راست و بازه (x_0-r,x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می نامیم .

تمرین : یک همسایگی ، یک همسایگی محذوف ، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای عدد ۲ بنویسید .

تمرین : آیا بازه $(1,2)$ یک همسایگی عدد ۱ است ؟ چرا ؟

تمرین : نشان دهید مجموعه جواب نامعادله $|x-x_0|<r$ یک همسایگی متقارن برای x_0 است .

تمرین : آیا می توانید مانند تمرین قبل یک همسایگی متقارن محذوف برای x_0 تعریف کنید .

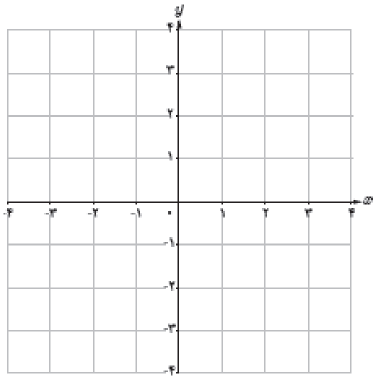
تعریف حد یک تابع :

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف عدد a تعریف شده باشد . می گوییم « حد تابع f وقتی x به a میل می کند برابر عدد حقیقی L است » ، هر گاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد ، به شرط آنکه متغیر x از دو طرف به قدر کافی به a نزدیک شود . در این صورت می نویسیم : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

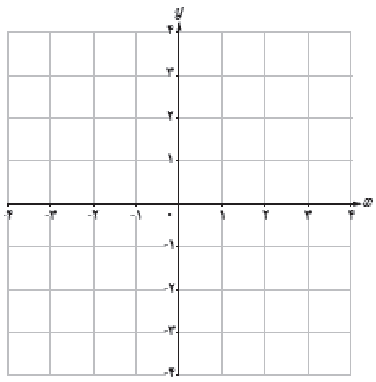
تمرین : آیا تابع $y=\sqrt{x-2}$ در $x=2$ حد دارد ؟ چرا ؟

تمرین : برای هر مورد زیر نمودار تابعی را رسم کنید .

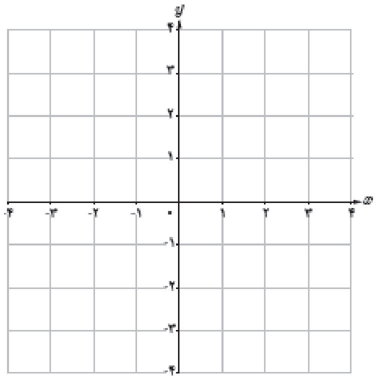
الف) در همسایگی راست ۲ تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن خیر .



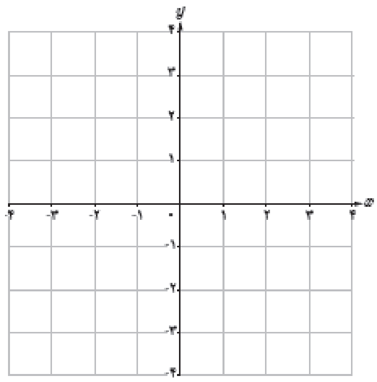
ب) در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد با مقدار تابع در آن نقطه برابر نباشد .



ج) دو تابع g,f رسم کنید که یکی فقط در همسایگی راست ۳ و دیگری فقط در همسایگی چپ ۳ تعریف شده باشد و $f(3) \neq g(3)$.



تمرین : تابع $f(x)=\begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$ را رسم کنید و مقدار $\lim\limits_{x \to -1} f(x), \lim\limits_{x \to \sqrt{2}} f(x)$ را در صورت وجود بیابید .



تمرین : تمرین های صفحه ۱۲۰ تا ۱۲۲ را حل کنید .

درس دوم : حد های یك طرفه (حد چپ و حد راست)

قبلاً دیدیم که تابع $y=\sqrt{x-2}$ در $x=2$ حد ندارد (چون در همسایگی چپ ۲ تعریف نشده است) ولی می توانیم رفتار این تابع را در سمت راست ۲ بررسی کنیم . گاهی اوقات لازم است رفتار تابعی را در یک طرف مقدار مشخصی از x بررسی کنیم .

حد راست :

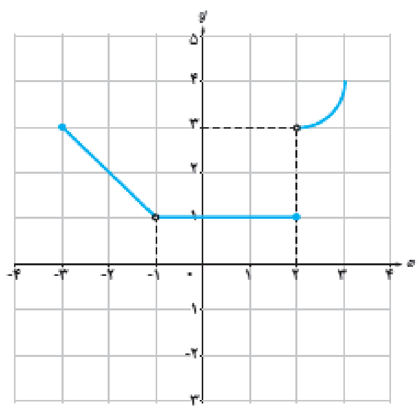
اگر تابع f در همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوییم حد راست تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد L_1 است ، هرگاه مقادیر تابع f به هر اندازه دلخواه بتواند به L_1 نزدیک شود ، به شرط آنکه متغیر x به اندازه کافی از سمت راست به a نزدیک شود . و می نویسیم : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_1$

حد چپ :

اگر تابع f در همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوییم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد L_2 است ، هرگاه مقادیر تابع f به هر اندازه دلخواه بتواند به L_2 نزدیک شود ، به شرط آنکه متغیر x به اندازه کافی از سمت چپ به a نزدیک شود . و می نویسیم : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_2$

نتیجه : تابع f در نقطه a دارای حد است هرگاه حد چپ و راست موجود و با هم برابر باشند . (اگر حد چپ و راست در یک نقطه برابر نباشند تابع در آن نقطه حد ندارد)

تمرین : حدهای زیر را در صورت وجود بیابید .

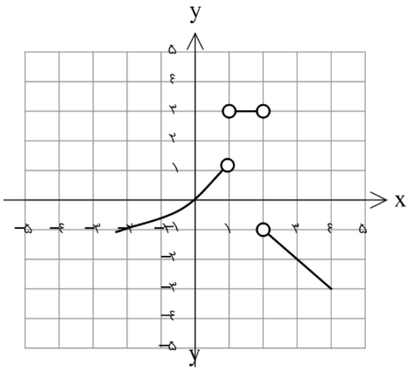


$\lim\limits_{x\to 2} f(x)\ \dots$ $\quad\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\ \dots$ $\quad\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\ \dots$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)\ \dots$ $\quad\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\ \dots$ $\quad\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\ \dots$

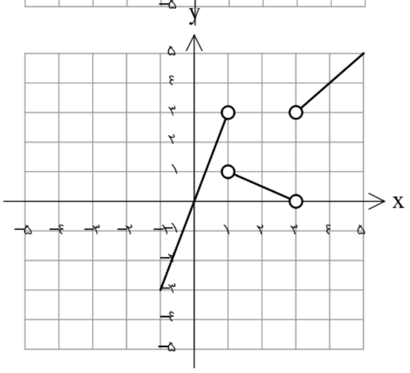
$\lim\limits_{x\to -3} f(x)\ \dots$ $\quad\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)\ \dots$ $\quad\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)\ \dots$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)\ \dots$ $\quad\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ \dots$ $\quad\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ \dots$

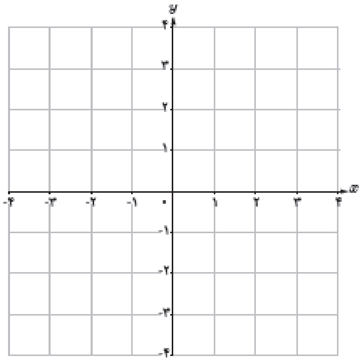


تمرین : نمودار تابع f داده شده است . مقدار $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(3-x^2\right)$ را بیابید.

(راهنمایی : با توجه به اینکه $x<1$ است محدوده $t=3-x^2$ را یافته و ...)



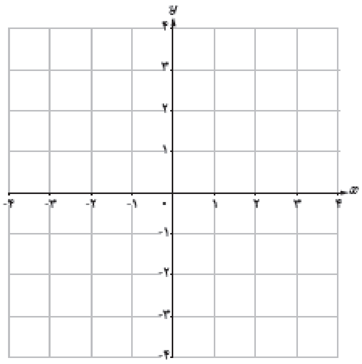
تمرین : نمودار تابع f داده شده است . مقدار $\lim\limits_{x\to 1^-} fof\left(x\right)$ را بیابید.



تمرین : نموداری از یک تابع رسم کنید که :

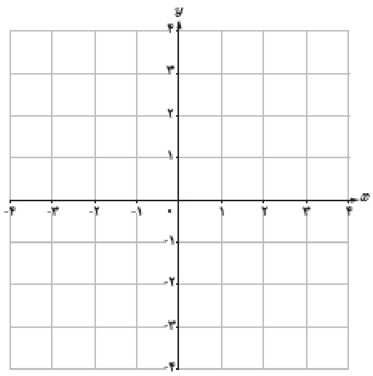
الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد

و در این نقطه حد داشته باشد .



ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد

ولی در این نقطه حد نداشته باشد .



ج) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد

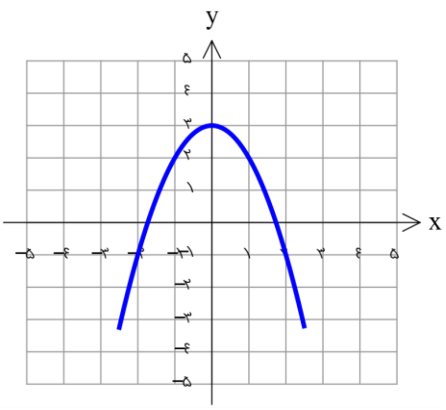
و در این نقطه حد نداشته باشد .

تمرین : مقدار حد راست تابع $f(x)=\frac{[x]}{x}$ در $x=0$ چقدر است ؟

تمرین : با توجه به دامنه تابع $f(x)=\frac{x-1}{3-[x]}$ ، در مورد حد راست این تابع چه می توان گفت ؟

تمرین : با توجه به دامنه تابع $f(x)=\sqrt{|x|(x^2-1)}$ در چه نقطه ای نه حد راست وجود دارد نه حد چپ ؟

تمرین : با توجه به نمودار مقابل مقدار $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)]-[\lim\limits_{x\to 0}f(x)]$ را بیابید .



تمرین : تمرین های صفحه ۱۲۷ تا ۱۲۹ را حل کنید .

درس سوم : قضایای حد

در بخشهای قبل به کمک جدول و نمودار حد توابع را بررسی کردیم و در این قسمت می خواهیم به کمک قضایایی که می آموزیم بدون استفاده از جدول یا نمودار به بررسی حد توابع بپردازیم .

قضیه ۱:

حد تابع ثابت $f(x)=c$ در همه نقاط دارای حد c است : $\lim\limits_{x\to a} c = c$

حد تابع همانی $f(x)=x$ در هر نقطه مانند a برابر با a است : $\lim\limits_{x\to a} x = a$

قضیه ۳: اگر دو تابع $f(x), g(x)$ دارای حد $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$ باشند ، داریم :

الف) حد مجموع برابر با مجموع حد هاست : $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$

ب) حد تفاضل برابر با تفاضل حد هاست : $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$

ج) حد ضرب برابر با ضرب حد هاست : $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) . \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 . L_2$

د) حد خارج قسمت برابر با خارج قسمت حد هاست : $;L_2 \neq 0$ $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

نتایج قضیه ۳ : اگر تابع $f(x)$ در نقطه a حد داشته باشد :

۱) $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

۲) $\lim\limits_{x\to a} f^n(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$

۳) $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

٤) برای هر تابع چند جمله ای $p(x)=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1 x+b_0$ داریم : $\lim\limits_{x\to a} p(x)=p(a)$

قضیه ۴ : اگر تابع $f(x)$ در نقطه a حد داشته باشد :

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim_{x\to a} f(x)\right|$$

توجه !!! : دقت شود در مورد تابع جز صحیح همان طور که در درس قبل دیدیم لزوماً $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ با $\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$ برابر نیست .

قضیه ۵ : برای هر عدد حقیقی a داریم :

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$$

$$\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

تمرین : حد توابع زیر را بیابید .

١) $\lim\limits_{x\to -1} x^{3}=$

٢) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^{4}-3|x|+1)=$

٣) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{2}+1}{3x^{2}-2x-1}=$

٤) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{1-x}{[x]-x}=$

٥) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}}{x-3}=$

۶) $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{۱ - \sin x}{\cos x} =$

۷) $\lim\limits_{x \to ۲^+} \frac{\sqrt{x - ۲}}{[x] + ۲} =$

۸) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{|\sin x|}{x + \pi} =$

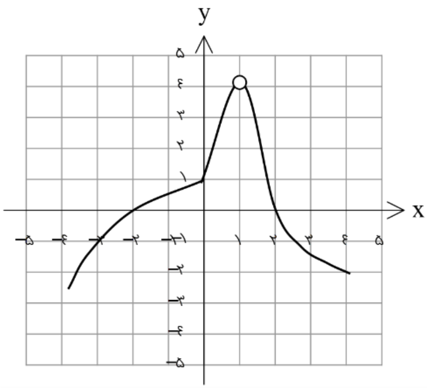
تمرین : اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ + ۱ & x > ۱ \\ x - ۲a & x < ۱ \end{cases}$ در $x = ۱$ حد داشته باشد ، مقدار a را بیابید .

تمرین : اگر تابع f در ۱ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{۲f(x) - ۱}{f(x) + ۱} = ۱$ ، آنگاه مقدار $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$ را بیابید .

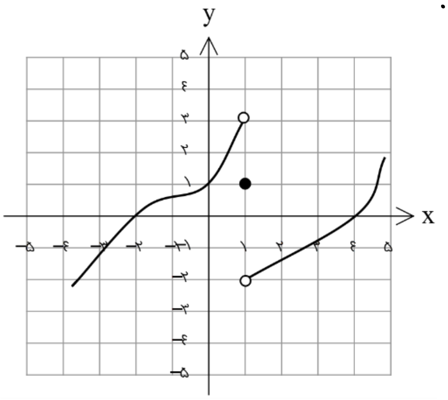
تمرین : اگر توابع f وg در ۱ حد داشته باشند و $\lim\limits_{x \to ۱}(۲f + g)(x) = ۳$ و $\lim\limits_{x \to ۱}(f - ۳g)(x) = ۵$ ، حاصل

$\lim\limits_{x \to ۱}(\frac{f}{g})(x)$ را بیابید . (راهنمایی : می توانید حد تابع f و g در ۱ را $L_۱, L_۲$ نام گذاری کنید .)

تمرین : نمودار تابع f داده شده است . حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(fof)(x+1)}{xf(x)}$ را بیابید .



تمرین : نمودار تابع f داده شده است . حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)+f(\frac{1}{x})}{[f(\frac{1}{x})]}$ را بیابید .



نکته مهم : اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد و تابع g در این نقطه حد نداشته باشد ، آنگاه تابع های $f\pm g$ و $\frac{g}{f}$ در این نقطه حد ندارند ولی توابع $f.g$ و $\frac{f}{g}$ ممکن است حد داشته باشند .

مثال : تابع $f(x)=[x]$ در $x=0$ حد ندارد . (تابع جز صحیح در هیچ نقطه صحیحی حد ندارد) و تابع $g(x)=x$ در $x=0$ دارای حد است و حاصل ضرب آنها نیز در این نقطه حد دارد : $\lim\limits_{x\to 0}(f.g)(x)=\lim\limits_{x\to 0}x[x]=0$

مثال : تابع $f(x)=\frac{x}{|x|}$ در $x=0$ حد ندارد . و تابع $g(x)=x$ در $x=0$ دارای حد است و تابع $\frac{f}{g}$ نیز در این نقطه حد دارد : $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f}{g})(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\times\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$

نکته مهم : اگر تابع f و g در $x=a$ حد نداشته باشند ، ممکن است تابع های $f\pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ و fog ممکن است حد داشته باشند .

مثال : تابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=۱-[x]$ در $x=۰$ حد ندارد ولی : $\lim\limits_{x\to ۰}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to ۰}۱=۱$

مثال : تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ و $g(x)=\frac{x}{|x|}$ در $x=۰$ حد ندارد ولی : $\lim\limits_{x\to ۰}(f.g)(x)=\lim\limits_{x\to ۰}۱=۱$

مثال : تابع $f(x)=\begin{cases}-۲ & x>۱\\ ۲ & x<۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-۱ & x>۱\\ ۱ & x<۱\end{cases}$ در $x=۱$ حد ندارد ولی : $\lim\limits_{x\to ۱}(\frac{f}{g})(x)=\lim\limits_{x\to ۱}۲=۲$

مثال : تابع $f(x)=\begin{cases}-۲ & x>۱\\ ۲ & x<۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-۱ & x>۱\\ -۲ & x<۱\end{cases}$ در $x=۱$ حد ندارد ولی : $\lim\limits_{x\to ۱}(fog)(x)=\lim\limits_{x\to ۱}۲=۲$

تمرین : مقدار $\lim\limits_{x\to -۱}([x]+[-x])$ را در صورت وجود بیابید .

تمرین : مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}[\sin x]$ را بیابید .

تمرین : تمرین های صفحه ۱۳۹ و ۱۴۰ را حل کنید .

درس چهارم : محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

فرض کنید می خواهیم حد تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنیم . طبق قضایای حد چون حد صورت و مخرج برابر صفر است نمی توان نتیجه ای گرفت به این حالت ، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ گفته می شود . بنابراین برای رفع ابهام ، به کمک اتحادهای جبری و مثلثاتی سعی می کنیم ابتدا تابع را ساده و سپس حد آن را بیابیم .

الف) توابع گویا : برای رفع ابهام در این حالت باید صورت و مخرج را تجزیه می کنیم تا عامل صفر شونده در صورت و مخرج مشخص شود ، سپس با حذف این عامل از تابع دوباره حد می گیریم .

تمرین : مقدار حد های زیر را بیابید .

۱) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2-4}{x^2+x-2}=$

۲) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x[x]-4}{x^2-4}=$

۳) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3+x)(2+3x)-6}{11x}=$

۴) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-3x-2}=$

ب) توابع گنگ : با استفاده از ساخت اتحاد مزدوج یا چاق و لاغر عبارت را گویا کرده و مانند قسمت قبل عمل می کنیم .

تمرین : مقدار حد های زیر را بیابید .

۱) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱-\sqrt{x}}{x-۱}=$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^{۲}-۴}{\sqrt{۴x+۱}-۳}=$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt[۳]{x}-۱}{x-۱}=$

۴) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{\sqrt{۵-x}-۱}=$

ج) توابع مثلثاتی : از حد های زیر و اتحاد های مثلثاتی بهره می بریم .

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱ \quad , \quad \lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sin x}=۱$$

تمرین: مقدار حد های زیر را بیابید .

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} =$

۲) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} =$

۳) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} =$

۴) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} =$

د) روش تغییر متغیر : گاهی اوقات با یک تغییر متغیر مناسب می توان مساله را ساده تر کرد سپس به حل آن پرداخت .

مثال : مقدار $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx}$ را بیابید . (به خاطر بسپارید)

حل : با فرض $ax = t$ داریم : $x = \frac{1}{a}t$ در نتیجه $t \to 0$, $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{\frac{b}{a}t} = \frac{a}{b} \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$

به عنوان مثال برای حل حد $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\sin 4x + \sin 2x}$ کافیست صورت و مخرج را بر x تقسیم کنیم .....

تمرین : مقدار حد های زیر را بیابید .

۱) $\lim_{x \to ۱} \frac{x - ۴\sqrt{x} + ۳}{۱ - x^{۲}} =$

۲) $\lim_{x \to ۱} \frac{۱ - \sqrt[۳]{x}}{۱ - \sqrt{x}} =$

۳) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} =$

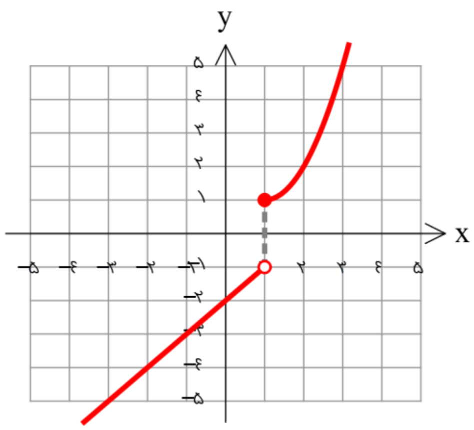
۴) $\lim_{x \to a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} =$

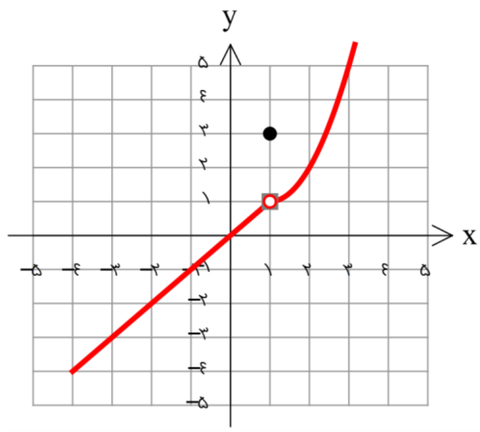
۵) $\lim_{x \to ۲^{+}} \frac{\sqrt{۴ - \sqrt{x - ۲}} - ۲}{\sqrt{x - ۲}} =$

تمرین : تمرین های صفحه ۱۴۴ را حل کنید .

درس پنجم : پیوستگی

گاهی اوقات می بینیم که نمودار یک تابع در یک یا چند نقطه از هم گسسته شده است اگر دقت کنیم می بینیم که در این نقاط یا حد وجود ندارد و یا اگر وجود دارد مقدار تابع در آن نقطه با حد تابع متفاوت است . به نمودار های زیر توجه کنید :





در نتیجه

پیوستگی : برای آنکه تابع در یک نقطه پیوسته باشد باید در آن نقطه :

الف) مقدار داشته باشد .

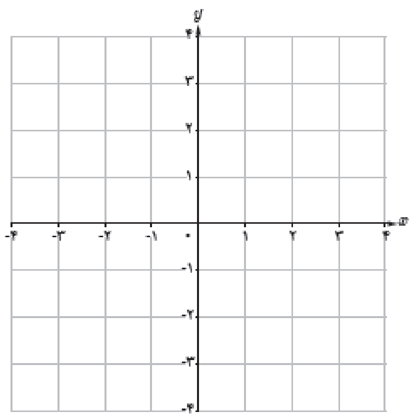
ب) حد داشته باشد .

ج) حد تابع با مقدار تابع برابر باشد . $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

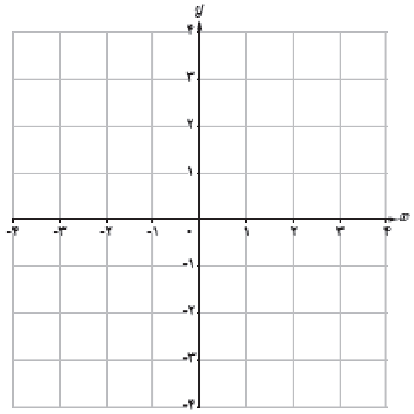
در غیر این صورت تابع را در آن نقطه ناپیوسته می گویند .

تمرین : نمودار تابعی را رسم کنید که :

الف) در ۱ حد داشته و مقدار داشته ولی پیوسته نباشد .

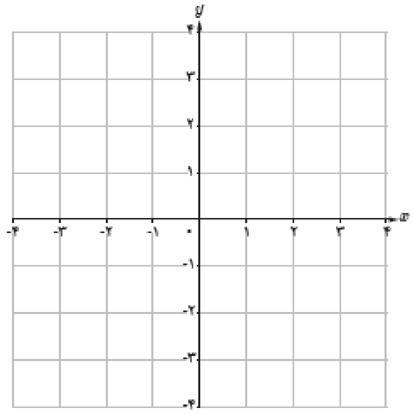


ب) در ۱ مقدار نداشته و حد داشته باشد .



ج) در دو نقطه نا پیوسته باشد که در یکی حد داشته

و در دیگری حد نداشته باشد .



تمرین : تابع $f(x)=\frac{x^{2}-4}{x-2}$ از نظر پیوستگی در $x=2$ چگونه است ؟

تمرین : تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^{2}-4}{x-2} & x\neq 2\\ 4 & x=2\end{cases}$ از نظر پیوستگی در $x=2$ چگونه است ؟

تمرین : پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+3 & x<0\\ 2 & x=0\\ \frac{x+|x|}{\sin x} & x>0\end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید .

تمرین : مقدار a را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x^{۲}+a & x\geq -۱ \\ \dfrac{|x+۱|}{x+۱} & x<-۱ \end{cases}$ در $x=-۱$ پیوسته باشد .

تمرین : مقدار a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x} & x>۰ \\ ۲a+b & x=۰ \\ \dfrac{\sqrt{x+۱}-۱}{x} & x<۰ \end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته باشد .

تمرین : تابع $y=[\cos x], y=[\sin x]$ در $x=\pi$ از نظر پیوستگی چگونه هستند ؟

پیوستگی راست : تابع f در a از راست پیوسته است (پیوستگی راست دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

پیوستگی چپ : تابع f در a از چپ پیوسته است (پیوستگی چپ دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

تمرین : تابع $f(x)=x-[x]$ در نقاط صحیح چه نوع پیوستگی را دارد ؟

پیوستگی در بازه : تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته است اگر و تنها اگر در هر نقطه (a,b) پیوسته باشد و در b پیوستگی چپ و در a پیوستگی راست داشته باشد .

تمرین : تابع $y=[x]$ در بازه $[۱,۲]$ از نظر پیوستگی چگونه است ؟

تمرین : تابع $y=[x^۲]$ در بازه $(۲,k)$ پیوسته است . حداکثر مقدار k را بیابید .

تمرین : تابع $y=\left[\frac{x+۱}{۲}\right]$ در بازه $(۱,k)$ فقط یک نقطه ناپیوستگی دارد . حداکثر مقدار k چقدر است ؟

تمرین : بزرگ ترین بازه ای که تابع $y=۱-\sqrt{۲x-۳}$ در آن پیوسته است را بنویسید .

تمرین : تمرین های صفحه ۱۵۱ را حل کنید .

پایان