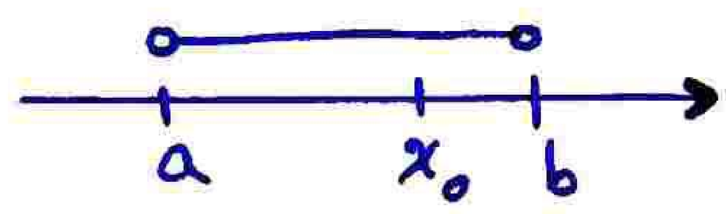
فصل ۵ : حد و پیوستگی

1 : همسایگی و همسایگی محذوف :

بازه‌ی $(1,5)$ را در نظر بگیرید، واضح است که ۲ عضوی از این بازه می‌باشد، بنابراین گوییم $(1,5)$ یک همسایگی برای عدد ۲ است.

همچنین ۳٫۷ نیز درون بازه‌ی $(1,5)$ است پس این بازه یک همسایگی برای ۳٫۷ نیز است.

در حالت کلی : اگر x_0 یک عدد حقیقی متعلق به بازه‌ی (a,b) باشد، گوییم (a,b) یک همسایگی برای عدد x_0 است :



مثال : سه همسایگی برای عدد ۱٫۵- بنویسید.

بازه‌هایی همچون $(-2,-1)$ ، $(-2,100)$ و $(-100,5)$ و ... همسایگی‌هایی برای ۱٫۵- هستند زیرا ۱٫۵- عضو هر کدام از آنهاست.

توجه : همسایگی یک عدد، به صورت بازه‌ی باز همچون (a,b) می‌باشد که a و b هیچکدام $+\infty$ یا $-\infty$ نباشند بنابراین بازه‌های $[-1,2)$ ، $(-1,2]$ ، $[-1,2]$ ، $(-\infty,3)$ و $(2,+\infty)$ همسایگی محسوب نمی‌شوند.

مثال : کدامیک از موارد زیر نمایشگر یک همسایگی است؟

الف) $x > x^2 \longrightarrow x - x^2 > 0$

$-\infty$		0		1		$+\infty$
	$-$	0	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= (0,1)$ یک همسایگی است.

ب) $|x-3| < 2 \longrightarrow -2 < x-3 < 2 \xrightarrow{+3} 1 < x < 5 \Rightarrow$ مجموعه جواب $= (1,5) \to$ همسایگی است

پ) $|x+1| > 3 \longrightarrow \begin{cases} x+1 > 3 \Rightarrow x > 2 \\ x+1 < -3 \Rightarrow x < -4 \end{cases} \Rightarrow$ مجموعه جواب $= (-\infty,-4) \cup (2,+\infty)$ همسایگی نیست

ت) $|x-2| \leq 5 \longrightarrow -5 \leq x-2 \leq 5 \xrightarrow{+2} -3 \leq x \leq 7 \Rightarrow$ مجموعه جواب $= [-3,7]$ همسایگی نیست

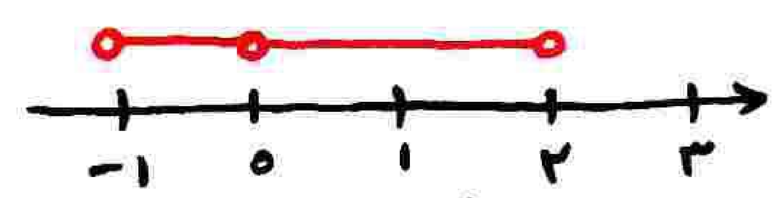
مثال : به ازای چه مقادیری از x ، بازه‌ی $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی ۲ است؟

$$2 \in (x-1, 2x+3) \Rightarrow \begin{cases} x-1 < 2 \Rightarrow x < 3 \\ 2x+3 > 2 \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow -\frac{1}{2} < x < 3$$

نکته: اجتماع دو همسایگی یک عدد، یک همسایگی برای آن عدد می باشد. همچنین اشتراک آنها نیز یک همسایگی برای آن عدد است.

توجه: اگر از همسایگی (a,b) عددی مانند x_0 را حذف کنیم، آن را به عنوان یک همسایگی محذوف x_0 معرفی می کنیم و به صورت $(a,b)-\{x_0\}$ یا $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ نمایش می دهیم.

به عنوان نمونه $(-1,2)-\{0\}$ یک همسایگی محذوف صفر است، که به صورت $(-1,0)\cup(0,2)$ نیز نمایش می دهیم:



مثال: کدام یک از موارد زیر نمایشگر یک همسایگی محذوف است؟

الف) $0<|x-4|<5$

می دانیم، همواره قدر مطلق نامنفی است یعنی $|x-4|\geq 0$ است پس از $0<|x-4|$ نتیجه می شود که:

$$|x-4|\neq 0 \Rightarrow x-4\neq 0 \Rightarrow x\neq 4$$

از طرفی: $|x-4|<5 \Rightarrow -5<x-4<5 \xrightarrow{+4} -1<x<9$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=(-1,9)-\{4\}$

همسایگی محذوف 4 است.

ب) $\frac{1}{|x-2|}>1$

$x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$

$$\frac{1}{|x-2|}>1 \xrightarrow{\times|x-2|} 1>|x-2| \Rightarrow -1<x-2<1 \xrightarrow{+2} 1<x<3$$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=(1,3)-\{2\}$

همسایگی محذوف 2 است

پ) $\frac{x+1}{x^2}>0$

$-\infty$		-1		0		$+\infty$
	$-$	0	$+$	ت ن	$+$	

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=(-1,+\infty)-\{0\}$

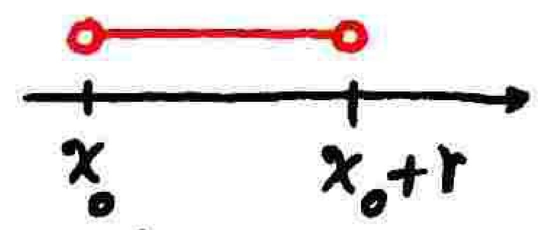
همسایگی محذوف نیست

مثال: به ازای چه مقدار از m، اجتماع روبرو، یک همسایگی محذوف است؟ $(2,2m-1)\cup(m+2,11)$

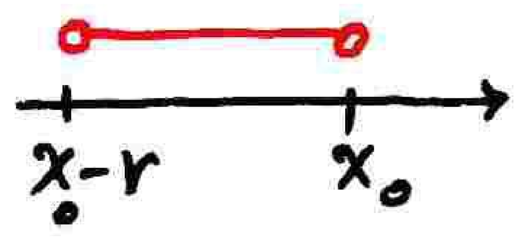
به شرطی $(a,x_0)\cup(x_1,b)$ یک همسایگی محذوف است که $x_1=x_0$ باشد، بنابراین:

$$2m-1=m+2 \Rightarrow m=3$$

توجه: اگر x_0 عدد حقیقی دلخواه و r عدد مثبتی باشد آنگاه بازه‌ی (x_0, x_0+r) یک همسایگی راست x_0 معرفی می‌شود:



همچنین بازه‌ی (x_0-r, x_0) یک همسایگی چپ x_0 است:



به طور مثال بازه‌ی $(2,5)$ یک همسایگی راست عدد ۲ و یک همسایگی چپ عدد ۵ است.

مثال: k را چنان بیابید که بازه‌ی $(3k-1, k+4)$ یک همسایگی راست عدد ۴ باشد.

$$3k-1=4 \Rightarrow k=\frac{5}{3}$$

مثال: درصورتی که مجموعه جواب نامعادله $x^2+ax+b<0$ یک همسایگی راست ۱ و یک همسایگی چپ ۴ باشد، a و b را بیابید.

واضح است که آن همسایگی به صورت $(1,4)$ باشد، یعنی مجموعه جواب نامعادله $(1,4)$ است.

پس $x=1$ و $x=4$ ریشه‌های چندجمله‌ای x^2+ax+b هستند. پس این چندجمله‌ای به صورت $(x-1)(x-4)$ یعنی x^2-5x+4 است، درنتیجه: $a=-5$ و $b=4$

حل چند نمونه سوال

۱- یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای عدد ۲ بنویسید.

$(1,3)$: همسایگی ؛ $(1,3)-\{2\}$: همسایگی محذوف ؛ $(2,3)$: همسایگی راست ؛ $(1,2)$: همسایگی چپ

۲- به ازای چه مقادیری از m، مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^2+mx-3<0$ یک همسایگی عدد ۳ است؟

باید به ازای $x=3$، نامساوی برقرار باشد پس: $9+3m-3<0 \Rightarrow m<-2$

۳- دامنه‌ی کدام یک از توابع زیر یک همسایگی یا همسایگی محذوف است؟

الف) $y=\frac{x^2+1}{x-1} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty) \Rightarrow$ همسایگی و همسایگی محذوف نیست

ب) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow 1-x^2>0$

$-\infty$		-1		1		$+\infty$
	$-$	0	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow D=(-1,1) \to$ همسایگی است

پ) $y = \log_x (4 - x^2)$

$$\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \Rightarrow & \begin{array}{ccccccc} -\infty & & -2 & & 2 & & +\infty \\ & - & \vert & + & \vert & - & \end{array} \Rightarrow -2 < x < 2 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D = (0, 2) - \{1\}$$

همسایگی محذوف 1 است.

۴- به ازای چه مقادیری از m مجموعه‌ی $(2, m^2-1) \cup (m+5, 4)$ یک همسایگی محذوف است؟

ابتدا مجموعه را به صورت $(2, m^2-1) \cup (m+5, 4)$ مرتب می‌کنیم. بنابراین:

$m^2 - 1 = m + 5 \Rightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Longrightarrow (m-3)(m+2) = 0$

$m = 3 \longrightarrow$ مجموعه $= (2, 8) \cup (8, 4) \longrightarrow$ بازه‌ی $(8, 4)$ غیرمنطقی است $\Rightarrow$ $m=3$ غیرقابل قبول

$m = -2 \Rightarrow$ مجموعه $= (2, 3) \cup (3, 4) \longrightarrow$ همسایگی محذوف عدد ۳ است

۵- درصورتی که $(0, m+n) \cup (7, mn+2)$ همسایگی محذوف عدد ۵ باشد مقدار m^2+n^2 را بدست آورید.

مرتب $\Rightarrow (0, m+n) \cup (mn+2, 7) \Longrightarrow m+n = 5$ و $mn+2 = 5 \Rightarrow mn = 3$

$m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn = (5)^2 - 2(3) = 25 - 6 = 19$

۶- a و b را چنان بیابید که بازه‌ی $(2a-b, a+b)$ یک همسایگی راست عدد ۳ و یک همسایگی چپ عدد ۵ باشد.

بنابراین: $(2a-b, a+b) = (3, 5) \Longrightarrow \begin{cases} 2a - b = 3 \\ a + b = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = \frac{8}{3}, b = \frac{7}{3}$

۷- با فرض $a < b$، حداقل اختلاف دو مقدار a و b را چنان بیابید که اشتراک همسایگی‌های $(a-1, a+1)$ و $(b-1, b+1)$ برابر تهی باشد.

$(a-1, a+1) \cap (b-1, b+1) = \varnothing \Longrightarrow a+1 \leqslant b-1 \Rightarrow 2 \leqslant b-a$

بنابراین حداقل اختلاف دو عدد a و b برابر ۲ است.

۲- مفهوم حد و فرایندهای حدی :

وقتی از حد صحبت می‌کنیم مجبور هستیم به جای صحبت از مقادیر مشخص و دقیق، در مورد نزدیک شدن بسیار بسیار زیاد به یک عدد صحبت کنیم. به این مفهوم "میل کردن" گفته می‌شود.

وقتی متغیر x به سمت عددی مانند ۲ میل کرده و بسیار بسیار به آن نزدیک می‌شود، اما به آن نمی‌رسد را با نماد $x \to ۲$ نمایش می‌دهیم. در این حالت x ممکن است هر یک از مقادیر همسایگی چپ ۲ یعنی ۱٫۹ ، ۱٫۹۹ ، ۱٫۹۹۹ و ... یا مقادیر همسایگی راست ۲ مانند ۲٫۱ ، ۲٫۰۱ ، ۲٫۰۰۱ و ... را گرفته ولی هیچگاه $x=۲$ را نخواهد گرفت.

مفهوم عامیانه‌ی حد این است که وقتی مقدار x به سمت یک عدد خاص مانند a میل کند $(x \to a)$ مقدار L در تابع $f(x)=L$ به چه عددی میل می‌کند؟ جواب این سؤال همان حد تابع $f(x)$ در $x=a$ است که به صورت $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ نوشته می‌شود.

به عنوان نمونه رفتار تابع $f(x) = x + ۵$ را در همسایگی $x=۳$ بررسی می‌کنیم. برای این منظور مقادیر تابع f را به ازای برخی مقادیر کوچکتر از ۳، که به تدریج از سمت چپ به ۳ نزدیک می‌شوند و نیز برخی مقادیر بزرگتر از ۳، که به تدریج از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شوند، محاسبه می‌کنیم:

x	۲٫۹	۲٫۹۹	۲٫۹۹۹	$\longrightarrow$	۳	$\longleftarrow$	۳٫۰۰۱	۳٫۰۱	۳٫۱
$f(x)$	۷٫۹	۷٫۹۹	۷٫۹۹۹	$\longrightarrow$	۸	$\longleftarrow$	۸٫۰۰۱	۸٫۰۱	۸٫۱

با توجه به جدول فوق، مشاهده می‌کنیم که، با نزدیک شدن x به عدد ۳ (از راست و چپ) مقادیر $f(x)$ به عدد ۸ نزدیک می‌شوند، بنابراین گوییم حد تابع $f(x)$ در $x=۳$ برابر ۸ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to ۳} f(x) = ۸$$

مثال : با بررسی رفتار تابع $f(x) = \frac{x^۲ - ۴}{x - ۲}$ در همسایگی $x=۲$ ، به کمک جدول مقادیر، حد آن را در $x=۲$ بدست آورید.

تابع $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ به ازای هر حقیقی x به جز ۲ تعریف شده است. لذا به ازای هر $x\neq 2$ ، ضابطه‌ی تابع را می‌توان ساده کرد:

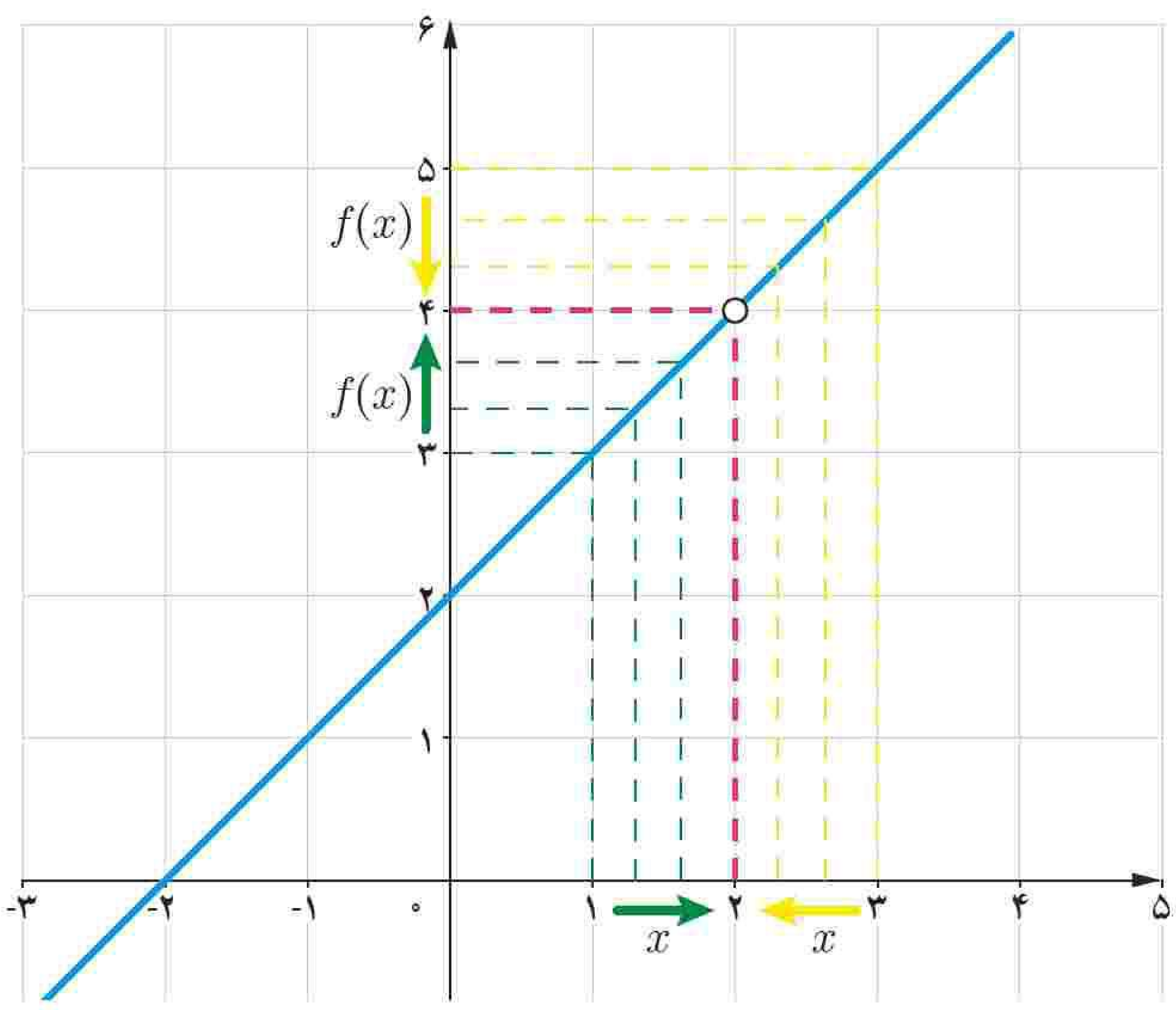
$$f(x)=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=x+2$$

بنابراین جدول مقادیر زیر را برای $f(x)=x+2$ در همسایگی محذوف ۲ می‌نویسیم:

x	۱٫۹	۱٫۹۹	۱٫۹۹۹	$\to$	۲	$\leftarrow$	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۱
$f(x)$	۳٫۹	۳٫۹۹	۳٫۹۹۹	$\to$	۴	$\leftarrow$	۴٫۰۰۱	۴٫۰۱	۴٫۱

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=4$$

توجه: روش دیگر برای بررسی رفتار تابع $f(x)$ در همسایگی $x=a$ ، استفاده از نمودار آن تابع است. به عنوان نمونه، مثال قبل را بررسی می‌کنیم.

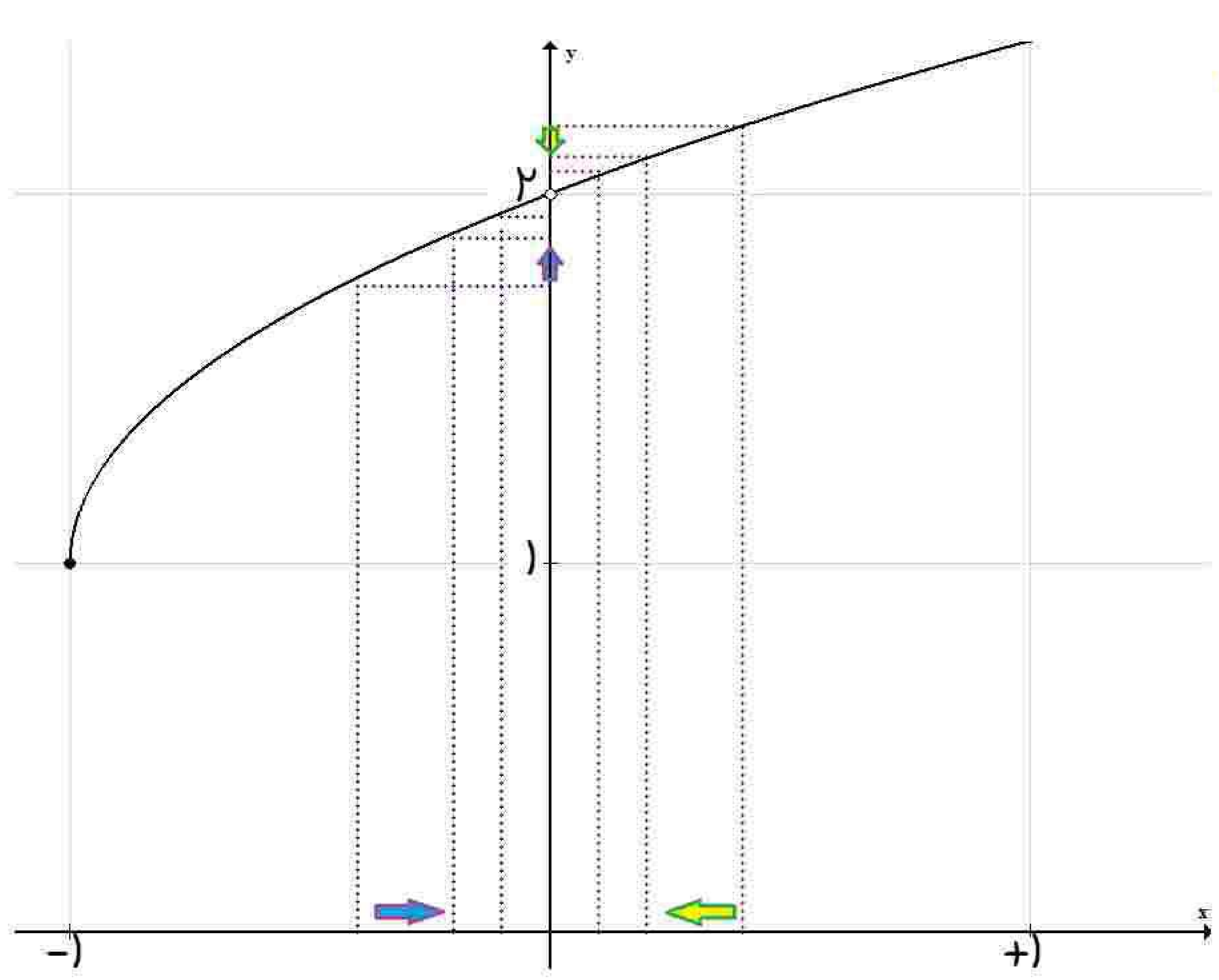


طبق شکل روبرو، نمودار تابع $f(x)=x+2$ ؛ $x\neq 2$ رسم شده و مشاهده می‌شود، وقتی x را با مقادیر بزرگتر یا کوچکتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌کنیم، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند بنابراین: $\lim_{x\to 2} f(x)=4$

مثال: با استفاده از نمودار، حد تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ را در $x=0$ بدست آورید.

تابع f به ازای $x=0$ تعریف نشده است. لذا به ازای $x\neq 0$ ، ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

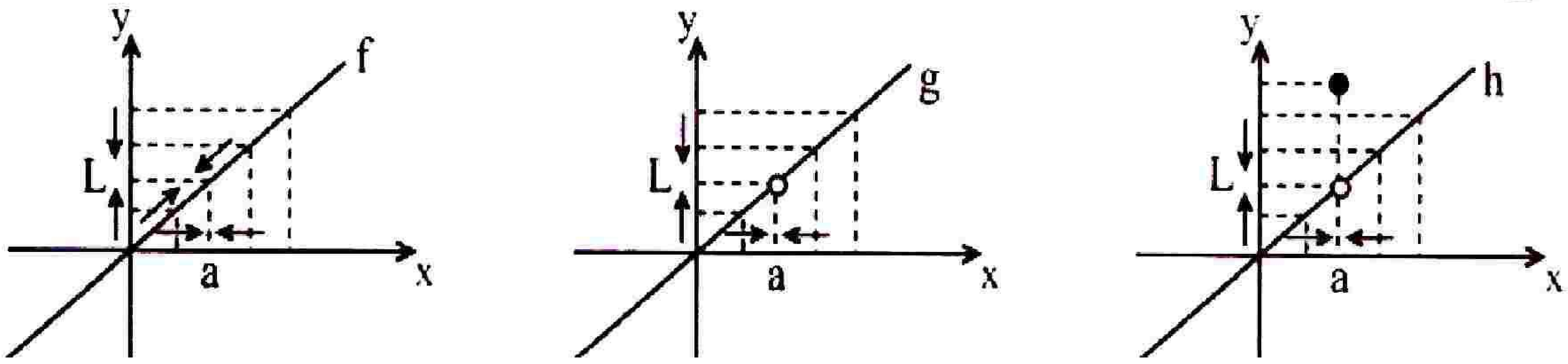
$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}{\cancel{x}}=\sqrt{x+1}+1$$



بنابراین نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+1}+1$ ؛ $x\neq 0$ را رسم می‌کنیم. مطابق شکل، وقتی x را با مقادیر بزرگتر یا کوچکتر از صفر به صفر نزدیک می‌کنیم، مقادیر f به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، بنابراین

$$\lim_{x\to 0} f(x)=2$$

توجه: حد تابع در یک نقطه به مقدار تابع در آن نقطه اصلاً بستگی ندارد. بلکه فقط و فقط به رفتار تابع در اطراف آن نقطه بستگی دارد. به نمودارهای زیر توجه کنید:



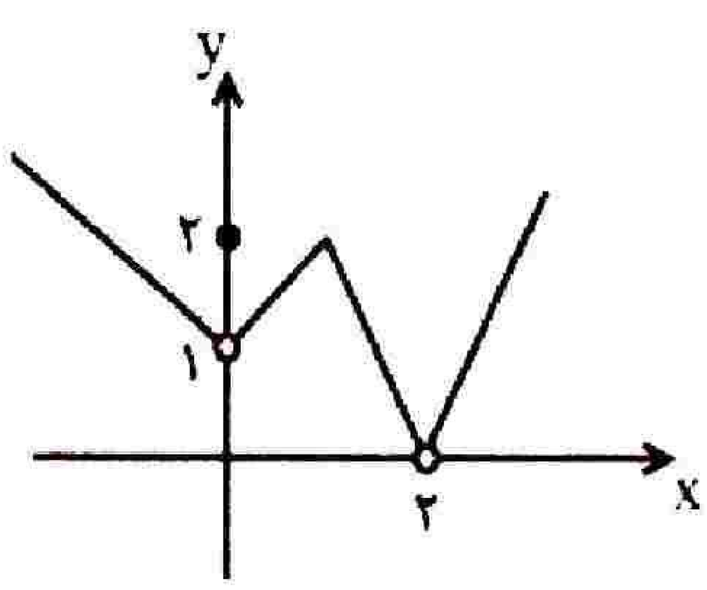
در هر سه تابع f ، g و h ، وقتی مقدارهای متغیر x به عدد a نزدیک می‌شوند، مقدارهای تابع، به عدد L نزدیک می‌شوند و در نتیجه حد هر کدام از توابع در $x=a$ برابر L است.

بنابراین مشاهده می‌شود که:

① حد تابع در یک نقطه به مقدار آن در آن نقطه ارتباطی ندارد (تابع h)

② لزومی ندارد که تابع در آن نقطه تعریف شده باشد (تابع g)

مثال: در شکل مقابل مطلوبست محاسبه‌ی $f(0)$ ، $f(2)$ ، $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to 2} f(x)$.



$f(0)=2$ ، $f(2)=$ تعریف نشده است

$\lim_{x\to 0} f(x)=1$ ، $\lim_{x\to 2} f(x)=0$

نکته مهم: شرط لازم برای این که تابع f در $x=a$ دارای حد باشد، آن است که، تابع در همسایگی a تعریف شده باشد و اگر حداقل در یکی از همسایگی های راست یا چپ a تعریف نشده باشد، گوییم تابع f در $x=a$ حد ندارد.

مثال: توضیح دهید که چرا توابع زیر در نقطه‌ی تعیین شده حد ندارند.

الف) $f(x)=\sqrt{x+3}$ (نقطه‌ی $x=-3$)

دامنه‌ی تابع: $x+3\geq 0 \Rightarrow x\geq -3 \Rightarrow D_f=[-3,+\infty) \Rightarrow$ همسایگی چپ ۳- تعریف نشده

$\Rightarrow$ f در $x=-3$ حد ندارد

ب) $f(x)=\sqrt{2-x}$ (نقطه‌ی $x=2$)

دامنه‌ی تابع: $2-x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 2 \Rightarrow D_f=(-\infty, 2] \Rightarrow$ همسایگی راست ۲ تعریف نشده

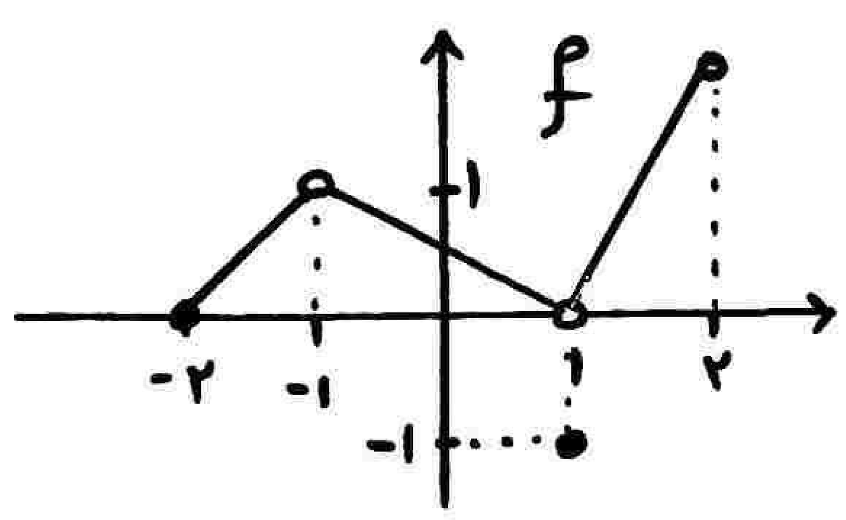
$\Rightarrow$ f در $x=2$ حد ندارد

پ) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}$ (نقطه‌ی $x=\frac{1}{2}$)

دامنه‌ی تابع: $\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{2} \\ 1-2x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_f=\{\frac{1}{2}\} \Rightarrow$ هیچ همسایگی برای $\frac{1}{2}$ قابل تعریف نیست

$\Rightarrow$ f در $x=\frac{1}{2}$ حد ندارد

مثال: برای تابع f که نمودار آن داده شده است، مقادیر زیر را محاسبه نمایید.



الف) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \rightarrow$ حد وجود ندارد زیرا همسایگی چپ ۲- تعریف نشده

ب) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)=1$

پ) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)=0$

ت) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \rightarrow$ حد وجود ندارد زیرا همسایگی راست ۲ تعریف نشده است

ث) $\lim\limits_{x \to 0} [f(x)] \rightarrow$ همان طور که از شکل مشخص است، در همسایگی محذوف صفر، f مقادیری بین صفر و یک دارد، که جزء صحیح آنها صفر خواهد بود بنابراین: $\lim\limits_{x \to 0} [f(x)]=0$

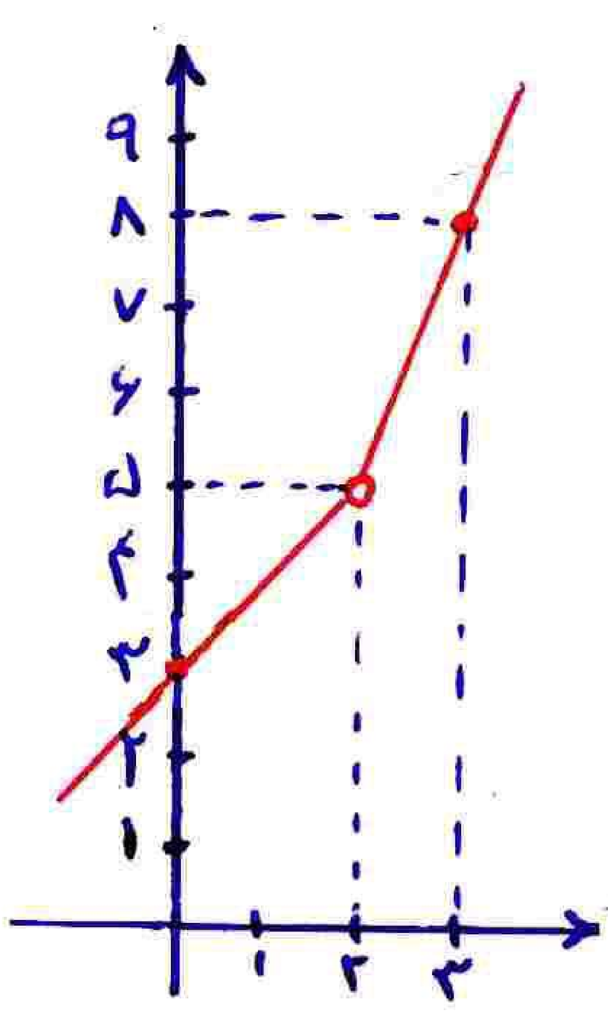
حل چند نمونه سؤال

۱- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & , x>2 \\ x+3 & , x<2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. با رسم نمودار و با نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲، مقدار $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ را بدست آورید.

$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & , x>2 \\ x+3 & , x<2 \end{cases}$

x	2	3
y	5	8

x	2	0
y	5	3

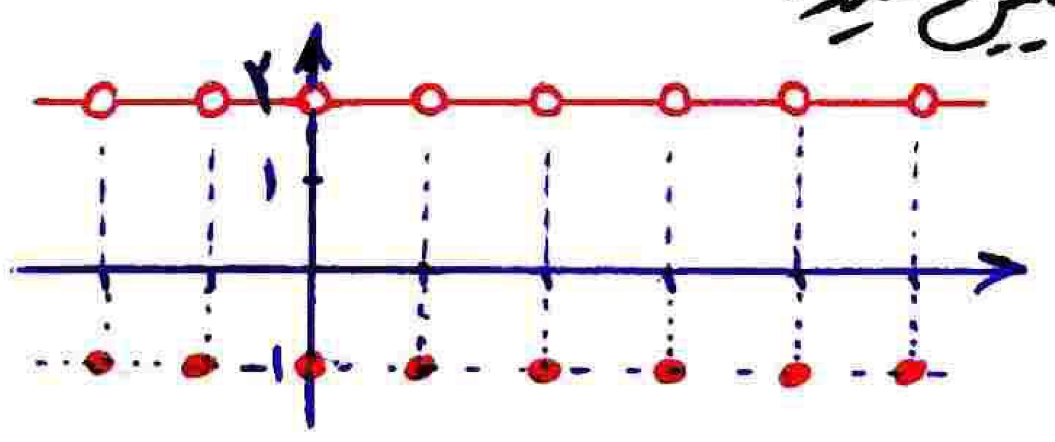


x	1.9	1.99	1.999	$\rightarrow$ 2 $\leftarrow$	2.001	2.01	2.1
y	4.9	4.99	4.999	$\rightarrow$ 5 $\leftarrow$	5.003	5.03	5.3

طبق جدول و همچنین با توجه به شکل نمودار تابع، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x \to 2} f(x)=5$$

۲- نمودار تابع $g(x)=\begin{cases}-1 & , x\in Z\\ 2 & , x\notin Z\end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن حد تابع را در $x=1$ و $x=\sqrt{2}$ محاسبه نمایید، در صورتی که $a\in \mathbb{R}$، حد تابع در $x=a$ را تعیین کنید.

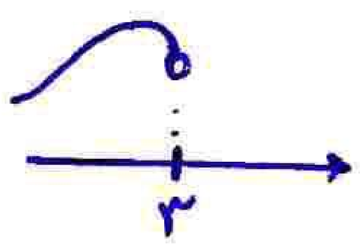


مطابق شکل در همسایگی محذوف اعداد 1 , $\sqrt{2}$ مقادیر تابع g برابر 2 است بنابراین: $\lim_{x\to 1} g(x)=2$, $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)=2$

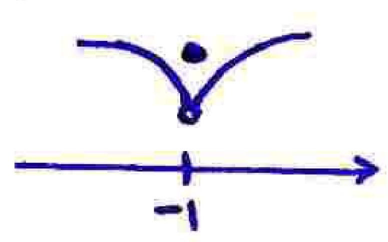
همچنین در همسایگی محذوف هر عدد حقیقی دلخواه همچون a، مقادیر تابع g برابر 2 است، بنابراین:

$$\lim_{x\to a} g(x)=2$$

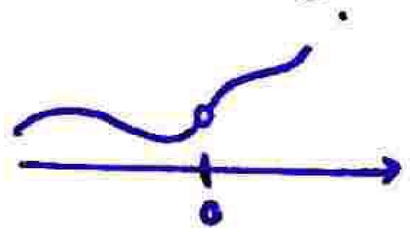
۳- نمودار تابع f را در شرایط زیر رسم کنید.



الف) f در همسایگی چپ 3 تعریف شده ولی در همسایگی راست آن تعریف نشده باشد.



ب) f در $x=-1$ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.



پ) f در $x=0$ دارای حد باشد ولی $f(0)$ موجود نباشد.

۴- به کمک جدول مقادیر، حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}x^2 & , x>0\\ 0 & , x\leq 0\end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0} f(x)=?$

x	-0.1	-0.01	-0.001	$\to 0 \leftarrow$	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0	0	0	$\to 0 \leftarrow$	0.000001	0.0001	0.01

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0$

ب) $\lim_{x\to \frac{3}{2}} 2[x]+1=? \longrightarrow f(x)=2[x]+1$

x	1.35	1.4	1.45	$\to \frac{3}{2} \leftarrow$	1.55	1.6	1.65
$f(x)$	3	3	3	$\to 3 \leftarrow$	3	3	3

$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{3}{2}} f(x)=3$

پ) $\lim_{x\to 1} |x-1|=? \longrightarrow f(x)=|x-1|$

x	0.9	0.99	0.999	$\to 1 \leftarrow$	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	$\to 0 \leftarrow$	0.001	0.01	0.1

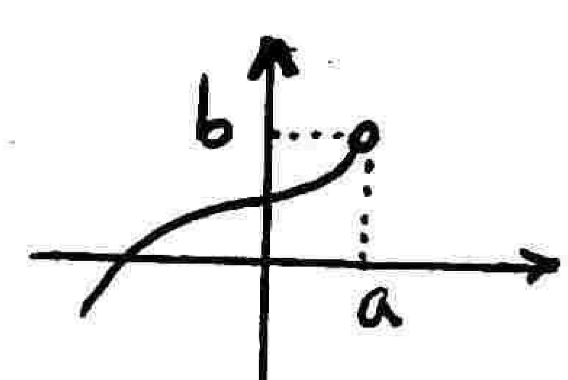
$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=0$

۳- حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست)

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی راست نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده و با نزدیک شدن متغیر x به a مقدار تابع به L_1 نزدیک شود، در این صورت گوییم حد راست تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a برابر L_1 است و می‌نویسیم: $\lim_{x\to a^+} f(x)=L_1$

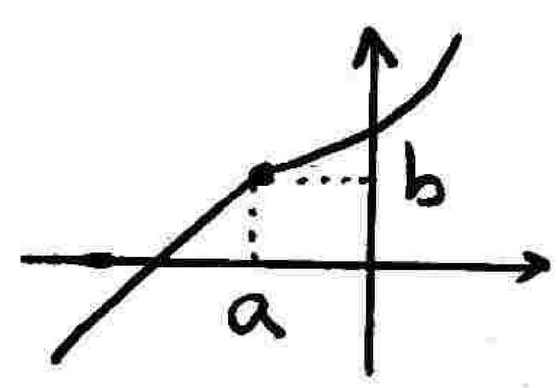
همچنین اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی چپ نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده و با نزدیک شدن متغیر x به a، مقدار تابع به L_2 نزدیک شود، گوییم حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a برابر L_2 است و می‌نویسیم: $\lim_{x\to a^-} f(x)=L_2$

مثال: در هر یک از توابع زیر، حدهای راست و چپ را در نقطه‌ی a (در صورت وجود) تعیین کنید:



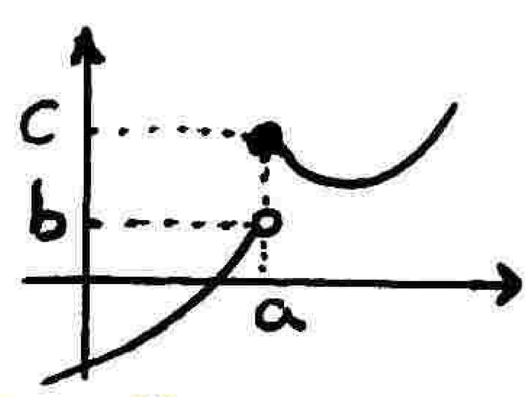
$\lim_{x\to a^+} f(x) \to$ وجود ندارد

$\lim_{x\to a^-} f(x)=b$



$\lim_{x\to a^+} f(x)=b$

$\lim_{x\to a^-} f(x)=b$



$\lim_{x\to a^+} f(x)=c$

$\lim_{x\to a^-} f(x)=b$

نکته مهم: حد تابع f در نقطه‌ی $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع در a موجود و برابر باشند.

مثال: با رسم جدول، حد تابع $f(x)=\begin{cases} x & , x\geq 2 \\ 1-x & , x<2 \end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید.

x	۱٫۹	۱٫۹۹	۱٫۹۹۹	$\longrightarrow$ ۲ $\longleftarrow$	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۱
$f(x)$	۰٫۹-	۰٫۹۹-	۰٫۹۹۹-	$\longrightarrow$ ۱- ۲ $\longleftarrow$	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۱

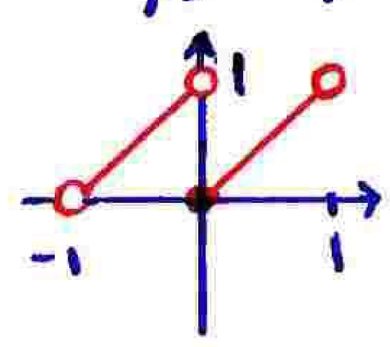
$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=-1$ و $\lim_{x\to 2^+} f(x)=2 \Rightarrow$ تابع f در $x=2$ حد ندارد

مثال: به کمک رسم نمودار، حد تابع $f(x)=x-[x]$ را در $x=0$ بررسی نمایید.

نمودار تابع را در یک همسایگی صفر مثلاً بازه $(-1,1)$ رسم می‌کنیم:

$-1<x<0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow y=x+1$

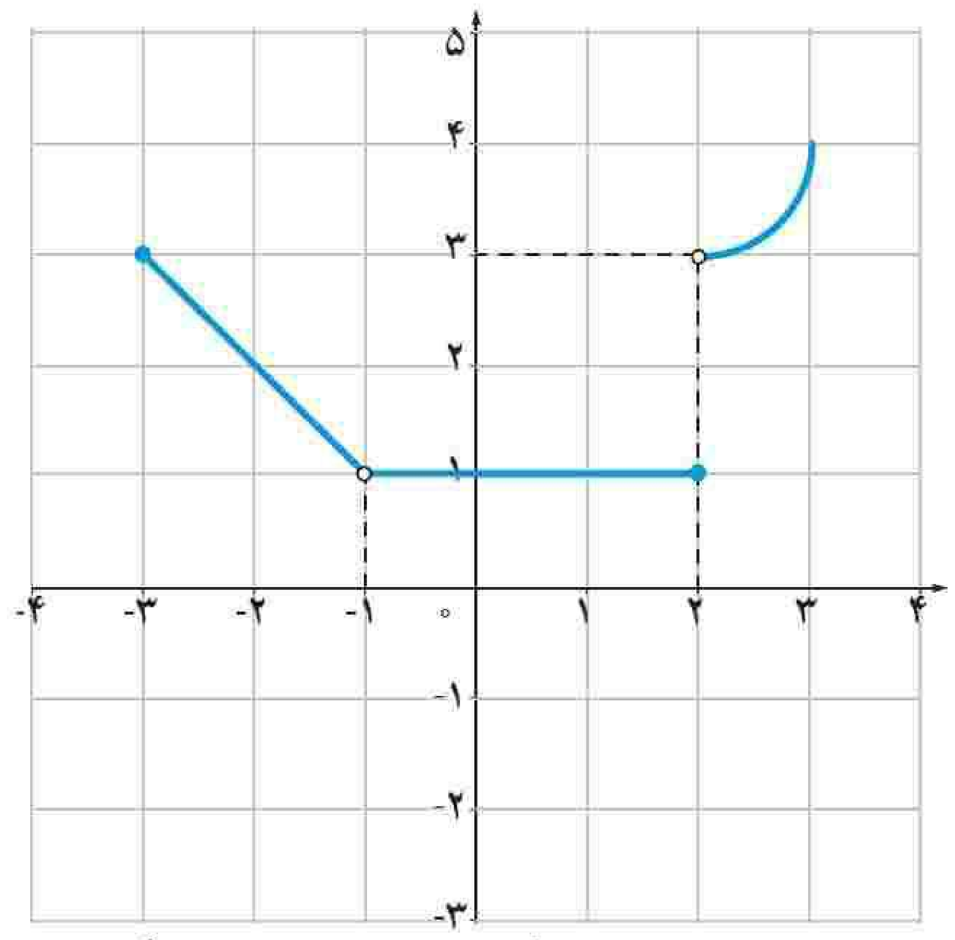
$0<x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow y=x$



$\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\Longrightarrow$ تابع در $x=0$ حد ندارد

مثال: با توجه به نمودار f ، حدهای خواسته شده را ، در صورت وجود ، به دست آورید.



$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ → وجود ندارد $\qquad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1 \qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=3$

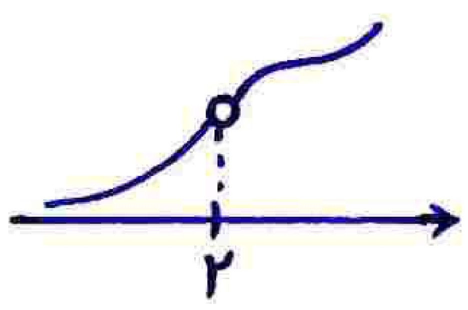
$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1 \qquad \lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)=1 \qquad \lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ → وجود ندارد $\qquad \lim\limits_{x\to (-3)^-} f(x)$ → وجود ندارد $\qquad \lim\limits_{x\to (-3)^+} f(x)=3$

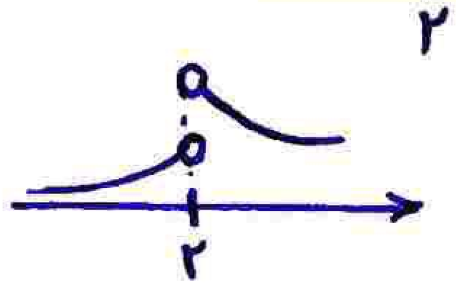
$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1 \qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1 \qquad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$

مثال: نموداری از یک تابع رسم کنید که:

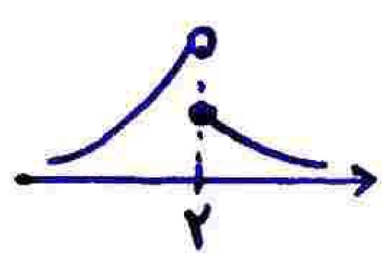
الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد داشته باشد.



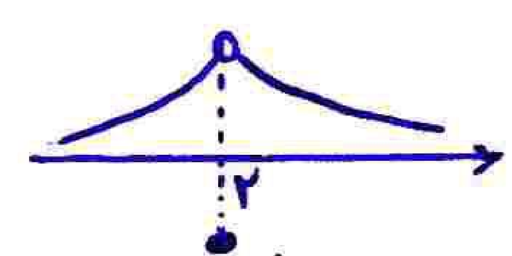
ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد نداشته باشد.



پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد نداشته باشد.



ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه‌ی ۲ یکسان نباشد.



نکته: اگر دو تابع در یک همسایگی محذوف a با هم برابر باشند، مقدار حد آنها در نقطه‌ی a ، دارای وضعیت یکسان است. یعنی اگر یکی دارای حد باشد، دیگری نیز دارای حد است و اگر یکی از آنها دارای حد نباشد دیگری نیز حد ندارد.

* این نکته برای حدهای راست و چپ نیز صادق است *

مثال: مقدار حد راست تابع $f(x)=\frac{[x]}{x}$ را در نقطه‌ی $x=0$ به دست آورید.

همسایگی راست صفر را به صورت بازه‌ی (۰و۱) در نظر می‌گیریم، می‌دانیم در این بازه $[x]=0$ است و در نتیجه تابع f با تابع ثابت $y=0$ برابر است، بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 0^+} 0=0$$

حل چند نمونه سوال

۱- تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را در نظر بگیرید.

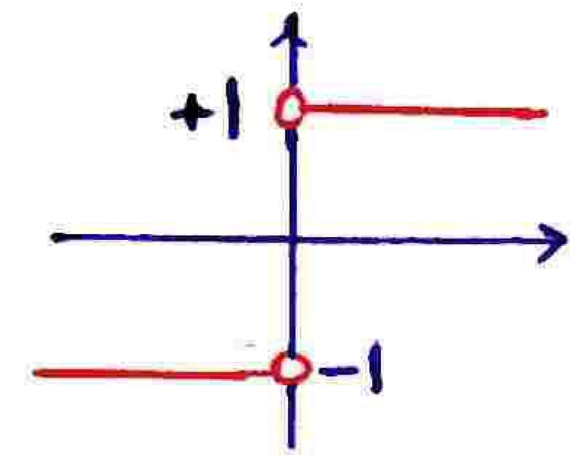
الف) با استفاده از جدول حد تابع را در $x=0$ بررسی کنید.

x	$-0/1$	$-0/01$	$-0/001$	$\to 0 \leftarrow$	$0/001$	$0/01$	$0/1$
$f(x)$	-1	-1	$-1 \to -1$		$1 \leftarrow 1$	1	1

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x} \to$ وجود ندارد

ب) نمودار تابع f را رسم کرده و به کمک آن، حد تابع را در $x=0$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x} & x>0\\ \frac{-x}{x} & x<0\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



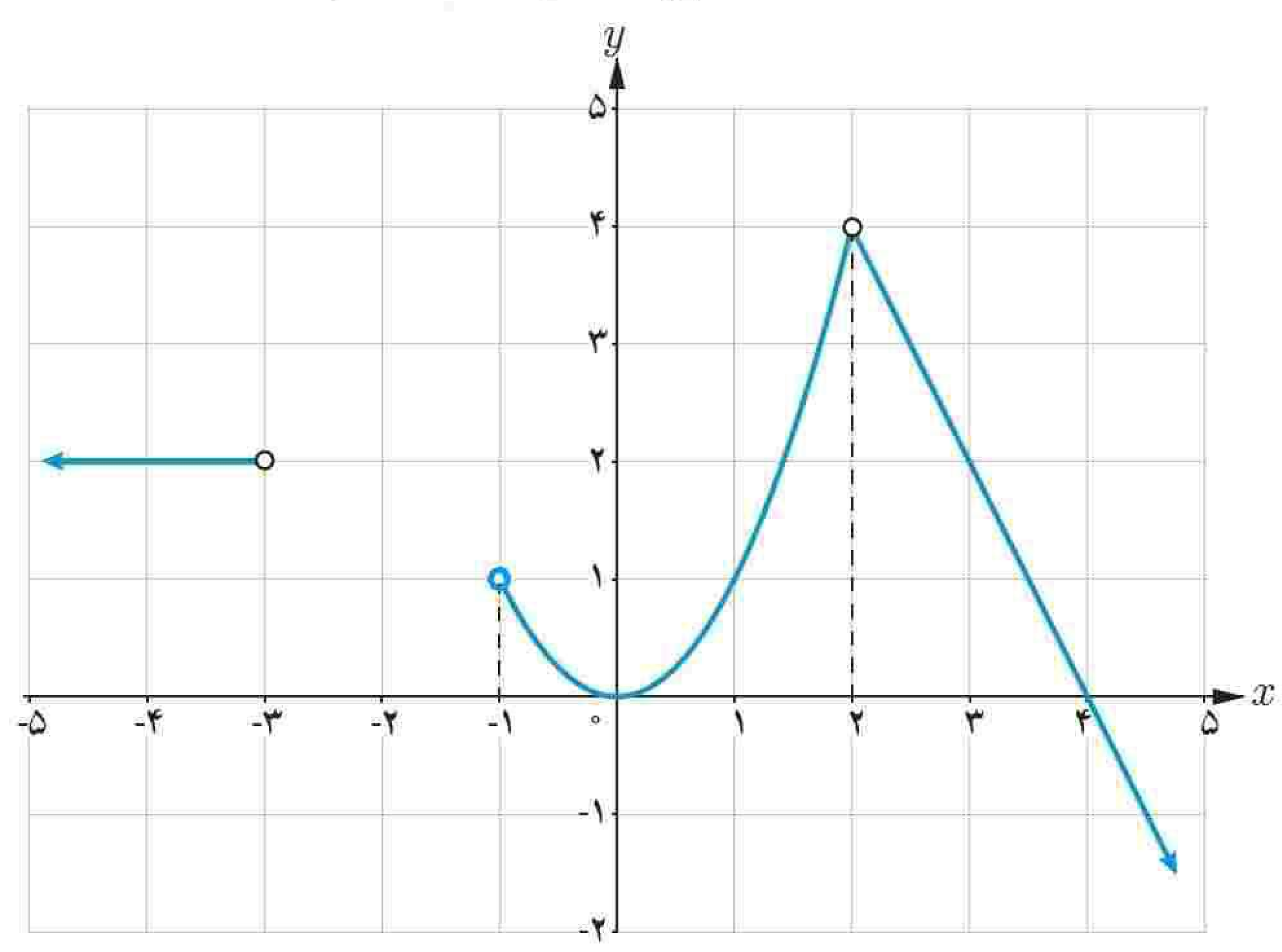
طبق شکل $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \to$ وجود ندارد

۲- نمودار تابع f با ضابطه‌ی زیر را رسم کرده و به کمک آن مقادیر خواسته شده‌ی زیر را بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases}-2x+8 & , x>2\\ x^2 & , -1<x<2\\ 2 & , x<-3\end{cases}$$

x	2	3
y	4	2

x	-1	0	2
y	1	0	4



الف) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ $f(0)=0$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$ $f(2)=$ تعریف نشده

$f(-1)=1$ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=$ وجود ندارد $\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)=$ وجود ندارد $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)=1$

$f(-3)=$ تعریف نشده $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=$ وجود ندارد $\lim\limits_{x\to (-3)^-} f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to (-3)^+} f(x)=$ وجود ندارد

ب) در همسایی راست ۴، مقدار تابع بین ۱- و صفر است، بنابراین جزءصحیح آن ۱- می باشد $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 4^+}[f(x)]=-1$

در همسایی چپ ۴، مقدار تابع بین صفر و ۱ است، بنابراین جزءصحیح آن صفر باشد $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 4^-}[f(x)]=0$

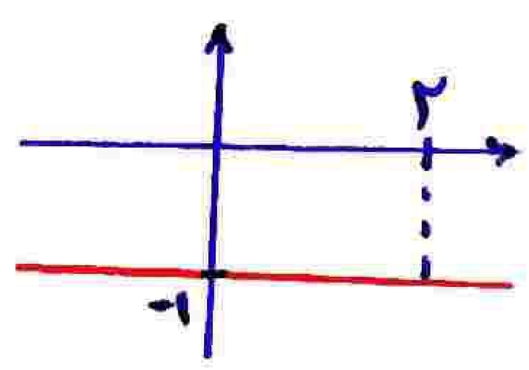
$\lim\limits_{x\to 4}[f(x)]=$ وجود ندارد

ب) درهمسایگی -4 ، مقدار تابع ثابت و برابر ۲ می‌باشد، لذا جزء صحیح آن ۲ است ⟵ $\lim_{x\to(-4)}[f(x)]=2$

درهمسایگی صفر، مقدار تابع بین دو عدد صفر و یک می‌باشد که جزء صحیح آن صفر است ⟵ $\lim_{x\to 0}[f(x)]=0$

درهمسایگی ۲، مقدار تابع بین دو عدد ۳ و ۴ می‌باشد که جزء صحیح آن ۳ است ⟵ $\lim_{x\to 2}[f(x)]=3$

۳- مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطه‌ی ۲ مساوی -1 باشد.



تابع ثابت $f(x)=-1$ در نقطه‌ی $x=2$ دارای حد -1 است به عبارت دیگر $\lim_{x\to 2}-1=-1$.

۴- در هر یک از توابع زیر، با توجه به دامنه‌ی تابع، وجود یا عدم وجود حد تابع را در نقطه‌ی داده شده تعیین کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ (نقطه‌ی $x=1$)

دامنه تابع: $x^2-x\geq 0$

$$\begin{array}{ccccccc} -\infty & & 0 & & 1 & & +\infty \\ & + & 0 & - & 0 & + & \end{array} \Rightarrow D_f=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$$

همسایگی چپ ۱ برای تابع f تعریف نشده بنابراین تابع f در $x=1$ حد ندارد

ب) $g(x)=\dfrac{x}{[x]-2}$ (نقطه‌ی $x=2$)

دامنه تابع: $[x]-2=0 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow 2\leq x<3 \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-[2,3)$

همسایگی راست ۲، برای تابع g تعریف نشده بنابراین تابع g در $x=2$ حد ندارد.

۵- $\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$ به چه معنی است؟

وقتی $\lim_{x\to a} f(x)=L$ آنگاه $\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]=[L]$ است و هیچ معنی و مفهوم دیگری ندارد.

به عنوان نمونه:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=5 \Rightarrow \left[\lim_{x\to 2} f(x)\right]=[5]=5$$

$$\lim_{x\to 2} g(x)=5/3 \Rightarrow \left[\lim_{x\to 2} g(x)\right]=[5/3]=5$$

۳ـ قضایای حد :

1. تابع ثابت $f(x)=c$ در همهٔ نقاط حد دارد و $\lim_{x\to a} c = c$.

مثال: $\lim_{x\to -0/4} 2 = 2$ $\quad \lim_{x\to 2} \sqrt{5} = \sqrt{5}$ $\quad \lim_{x\to 0} \pi = \pi$

2. تابع همانی $f(x)=x$ در همهٔ نقاط حد دارد و $\lim_{x\to a} x = a$.

مثال: $\lim_{x\to 0/2} x = 0/2$ $\quad \lim_{x\to -\sqrt{3}} x = -\sqrt{3}$ $\quad \lim_{x\to 0} x = 0$

3. اگر دو تابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ ، آنگاه :

الف) $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$

ب) $\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = L_1 . L_2$

پ) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ (به شرط $L_2 \neq 0$)

مثال: اگر $\lim_{x\to 2} f(x) = 8$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -1$ مطلوبست :

الف) $\lim_{x\to 2}(f(x) - g(x)) = 8-(-1) = 9$

ب) $\lim_{x\to 2}(x + f(x).g(x)) = 2 + 8\times(-1) = 2-8 = -6$

پ) $\lim_{x\to 2} \frac{x+g(x)}{3-f(x)} = \frac{2+(-1)}{3-8} = -\frac{1}{5}$

مثال: فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و c یک عدد حقیقی دلخواه است، نشان دهید :

الف) $\lim_{x\to a} c f(x) = c.L$

اثبات: $\lim_{x\to a} c f(x) = \lim_{x\to a} c \times \lim_{x\to a} f(x) = c.L$

ب) $\lim_{x\to a} f^2(x) = L^2$

اثبات : $\lim_{x\to a} f^2(x) = \lim_{x\to a}(f(x).f(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} f(x) = L.L = L^2$

پ) $\lim_{x\to a}(-f(x)) = -L$

اثبات: $\lim_{x\to a}(-f(x)) = \lim_{x\to a}(-1) \times \lim_{x\to a} f(x) = (-1)\cdot L = -L$

ت) $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$ (به شرط $L\neq 0$)

اثبات: $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to a} 1}{\lim_{x\to a} f(x)} = \frac{1}{L}$

مثال: با فرض $\lim_{x\to\pi} f(x) = 3$ و $\lim_{x\to\pi} g(x) = -2$، مطلوبست:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{5f^2(x)-7x}{3g(x)+10} = \frac{5(9)-7\pi}{3(-2)+10} = \frac{45-7\pi}{4}$$

مثال: اگر $\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)+7}{3} = 5$، آنگاه مقدار $\lim_{x\to 0} f(x)$ را بدست آورید.

گیریم $\lim_{x\to 0} f(x) = A$ باشد، بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)+7}{3} = \frac{2A+7}{3} = 5 \Rightarrow 2A+7 = 15 \Rightarrow 2A = 8 \Rightarrow A = 4 \rightsquigarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 4$$

مثال: تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{x^2-1} = 4$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{x^2-1} = \frac{\lim_{x\to 2} g(x)}{4-1} = \frac{\lim_{x\to 2} g(x)}{3} = 4 \Rightarrow \lim_{x\to 2} g(x) = 12$$

بنابراین باید تابع g را چنان یافت که حد آن در نقطه‌ی $x=2$ برابر 12 شود.

$g(x) = 12$ (تابع ثابت) ، $g(x) = 6x$ و $g(x) = \frac{24}{x}$ و ...

بی‌شمار تابع دیگر برای g قابل تعریف است.

نکته مهم: قضایای $\boxed{2}$ و $\boxed{3}$ قابل تعمیم هستند. به این ترتیب که اگر n یک عدد طبیعی و توابع f_1 و f_2 و ... و f_n همگی در نقطه $x=a$ حد داشته باشند، آنگاه:

الف) $\lim_{x\to a}(f_1(x)+\dots+f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \dots + \lim_{x\to a} f_n(x)$

ب) $\lim_{x\to a}(f_1(x)\times\dots\times f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \times \dots \times \lim_{x\to a} f_n(x)$

پ) $\lim_{x\to a} f^n(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$

ت) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

قضیه: هر چند جمله‌ای مانند $p(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0$ در هر نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله‌ای در نقطه‌ی a برابر است. یعنی: $\lim\limits_{x\to a}p(x)=p(a)$

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -2}(3x^2+5x+1)=12-10+1=3$

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{x^4+1}=\dfrac{2-1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{3}}\dfrac{(x+\pi)(3x+5)}{(3x+6)(x^4+1)}=\dfrac{(-\frac{5}{3}+\pi)(0)}{(1)(-\frac{125}{27}+1)}=0$

قضیه: اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a نامنفی باشد و در نقطه‌ی a دارای حد باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}\qquad (n\in\mathbb{N})$$

مثال: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}}{3x-4}=\dfrac{\sqrt{2-1}}{3-4}=\dfrac{1}{-1}=-1$

تذکر مهم: در صورتی که $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ باشد، برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}$ باید به دامنه‌ی تابع $\sqrt{f(x)}$ توجه کرد.

مثال: حدهای زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-x^2}$

با توجه به صفر شدن عبارت زیر رادیکال باید دامنه را حساب کرد:

$x-x^2\geq 0$ $\quad$ $-\infty \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$ ؛ $-\ \ +\ \ -$ $\Rightarrow D=[0,1]$ $\Rightarrow$ همسایگی راست تعریف شده!

$\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x-x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x-x^2}=$ وجود ندارد $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x-x^2}=$ وجود ندارد

ب) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{-x^2+4x-4}$ ← عبارت زیر رادیکال صفر می‌شود

$-x^2+4x-4\geq 0$ $\quad$ $-\infty \quad 2 \quad +\infty$ ؛ $-\ \ -$ $\Rightarrow D=\{2\}$ ← هیچ همسایگی برای ۲ تعریف نشده

$\Longrightarrow$ حد وجود ندارد

ب) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{x^2+6x+9}$ عبارت زیر رادیکال صفر می‌شود

$\Rightarrow x^2+6x+9\geq 0$ $\quad \begin{array}{cccc} -\infty & & -3 & +\infty \\ & + & 0 & + \end{array}$ $\Rightarrow D=\mathbb{R}$ همسایگی -3 تعریف شده است

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -3}\sqrt{x^2+6x+9}=0$

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|L|$.

مثال: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|x-2|+3|1-x|}{|x-4|+x}=\dfrac{|2|+3|-3|}{|0|+4}=\dfrac{2+9}{4}=\dfrac{11}{4}$

قضیه: برای هر عدد حقیقی a، $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$ و $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

مثال: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}(2\cos^2 x-\sin x)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

مثال: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{|\cos x|}{x-\pi}=\dfrac{0}{\frac{\pi}{2}-\pi}=0$

مثال: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x+\cos x}=\dfrac{0}{0+1}=0$

توجه: ۱- اگر $a\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$، $(k\in\mathbb{Z})$، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$.

۲- اگر $a\neq k\pi$؛ $(k\in\mathbb{Z})$، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\cot x=\cot a$.

مثال: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}(\tan^2 2x+\sqrt{3}\cot x)=\tan^2\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\cot\frac{\pi}{6}=(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}(\sqrt{3})=3+3=6$

مثال: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{8}}(\tan x.\cot x)=\tan\frac{\pi}{8}\times\cot\frac{\pi}{8}=1$

محاسبهٔ حد توابع شامل جزء صحیح:

فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، در این صورت:

الف: اگر L عدد ناصحیح باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]=[L]$.

مثال: $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{4x+5}{x-1}\right]=\left[\dfrac{17}{2}\right]=8$

مثال: $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} [\sin x]+2[x]+\cos x=\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]+2\left[\frac{\pi}{3}\right]+\frac{1}{2}=0+2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

ب: اگر a عدد صحیح باشد، آنگاه باید تعیین کنیم که وقتی $x\to a^+$ یا $x\to a^-$، مقادیر $f(x)$ به کدامیک از مقادیر a^+ یا a^- یا دقیقاً a نزدیک می‌شود و بر اساس آن، حاصل حد را به دست آورد.

مثال: $\lim_{x\to 3}[2x]$

وقتی $x\to 3$، درون جزء صحیح، عدد صحیح 6 می‌شود. بنابراین باید حدهای چپ و راست را بررسی کرد:

حد راست: وقتی $x\to 3^+$ یعنی x از مقادیر بیشتر از 3 به سمت 3 در حال حرکت است به طور مثال مقادیر x به صورت $3/1$ و $3/01$ و ... می‌باشد لذا مقدار $2x$ به صورت $6/2$، $6/02$ و ... بوده که نتیجه می‌شود جزء صحیح آن 6 می‌باشد پس:

$$\lim_{x\to 3^+}[2x]=6$$

حد چپ: وقتی که $x\to 3^-$ یعنی x از مقادیر کمتر از 3 به سمت 3 در حال حرکت است، به طور مثال مقادیر x به صورت $2/9$ و $2/99$ و ... می‌باشد لذا مقدار $2x$ به صورت $5/8$ و $5/98$ و ... بوده که جزء صحیح آن 5 خواهد شد پس:

$$\lim_{x\to 3^-}[2x]=5$$

$\Longleftarrow$ حد راست $\neq$ حد چپ $\Longleftarrow$ حد وجود ندارد

توجه: روش دیگر برای تعیین حدهای چپ و راست آن است که به شکل زیر عمل کنیم:

$$x\to 3^+ \Rightarrow x>3 \xrightarrow{\times 2} 2x>6 \Rightarrow \lim_{x\to 3^+}[2x]=[6^+]=6$$

$$x\to 3^- \Rightarrow x<3 \xrightarrow{\times 2} 2x<6 \Rightarrow \lim_{x\to 3^-}[2x]=[6^-]=5$$

$\Leftarrow$ حد وجود ندارد

مثال: $\lim_{x\to 6^+}\left[\frac{x}{2}\right]-\left[\frac{-x}{3}\right]$ را محاسبه کنید.

$$x>6 \xRightarrow{\div 2} \frac{x}{2}>3 \Rightarrow \lim_{x\to 6^+}\left[\frac{x}{2}\right]=3$$

$$x>6 \xRightarrow{\div(-3)} -\frac{x}{3}<-2 \Rightarrow \lim_{x\to 6^+}\left[\frac{-x}{3}\right]=-3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 6^+}\left[\frac{x}{2}\right]-\left[\frac{-x}{3}\right]=3-(-3)=6$$

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید

الف) $\lim_{x\to 2} \frac{[x]+x}{7+[-x]}$

$\lim_{x\to 2^+}\frac{[x]+x}{7+[-x]} = \frac{2+2}{7+(-3)} = 1$ و $\lim_{x\to 2^-}\frac{[x]+x}{7+[-x]} = \frac{1+2}{7+(-2)} = \frac{3}{5}$ ⇐ حد وجود ندارد

ب) $\lim_{x\to 0}[x][x+1]$

$\lim_{x\to 0^+}[x][x+1] = 0\times 1 = 0$ و $\lim_{x\to 0^-}[x][x+1] = -1\times 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}[x][x+1]=0$

نکته مهم: هنگامی که تابع شامل جزء صحیح در مخرج کسر باشد و حد آن از یک طرف صفر شود باید به دامنه‌ی تابع توجه کرد.

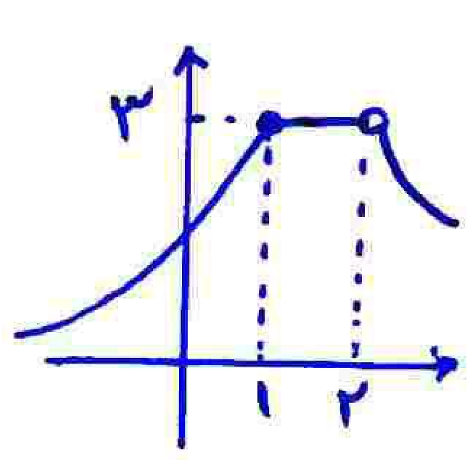
مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{[x]}$ ← مخرج کسر در حالت $x\to 0^+$، صفر خواهد شد

دامنه تابع: $[x]=0 \Rightarrow 0\le x<1 \Rightarrow D=\mathbb{R}-[0,1)$ ⇐ همسایگی راست صفر تعریف نشده

بنابراین حد راست وجود ندارد ولی $\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{[x]} = \frac{0}{-1} = 0$ ⇐ تابع در $x=0$ حد ندارد

حل نمونه سؤال هایی از حد

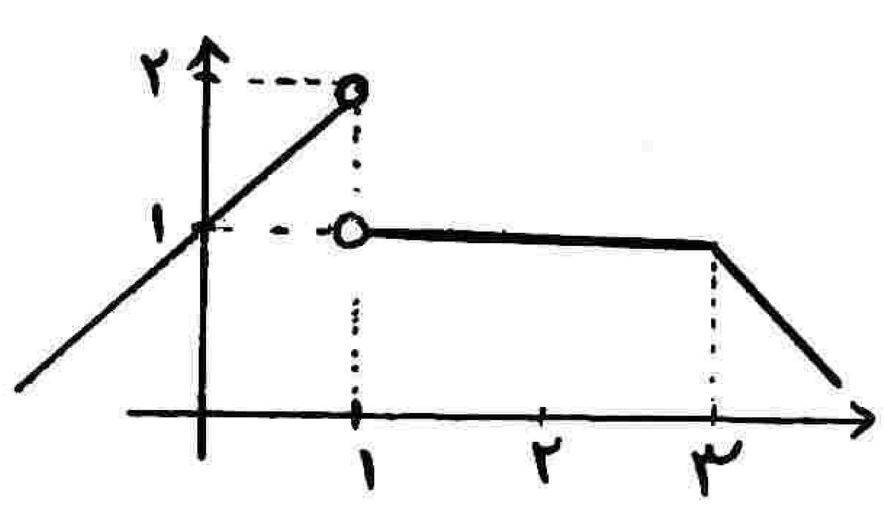
۱- فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim_{x\to 1}f(x)=3$ و $\lim_{x\to 2}f(x)=3$. آیا می‌توان گفت f حتماً تابع ثابت است؟



خیر، بی شمار تابع تحت شرایط سؤال می‌توان مطرح کرد که یکی از آنها تابع ثابت است.

به عنوان نمونه، تابعی که نمودار آن به شکل روبرو رسم شده است:

همچنین تابع $f(x)=(x-1)(x-2)+3$ و بسیار تابع دیگر.



۲- با توجه به نمودار تابع f، مقدار $\lim_{x\to 3^+}f(f(x))$ را بدست آورید.

وقتی متغیر x از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود، تابع $f(x)$ از مقادیر کمتر از یک به یک میل می‌کند یعنی $f(x)\to 1^-$. بنابراین:

$$\lim_{x\to 3^+}f(f(x)) = f(1^-) = 2$$

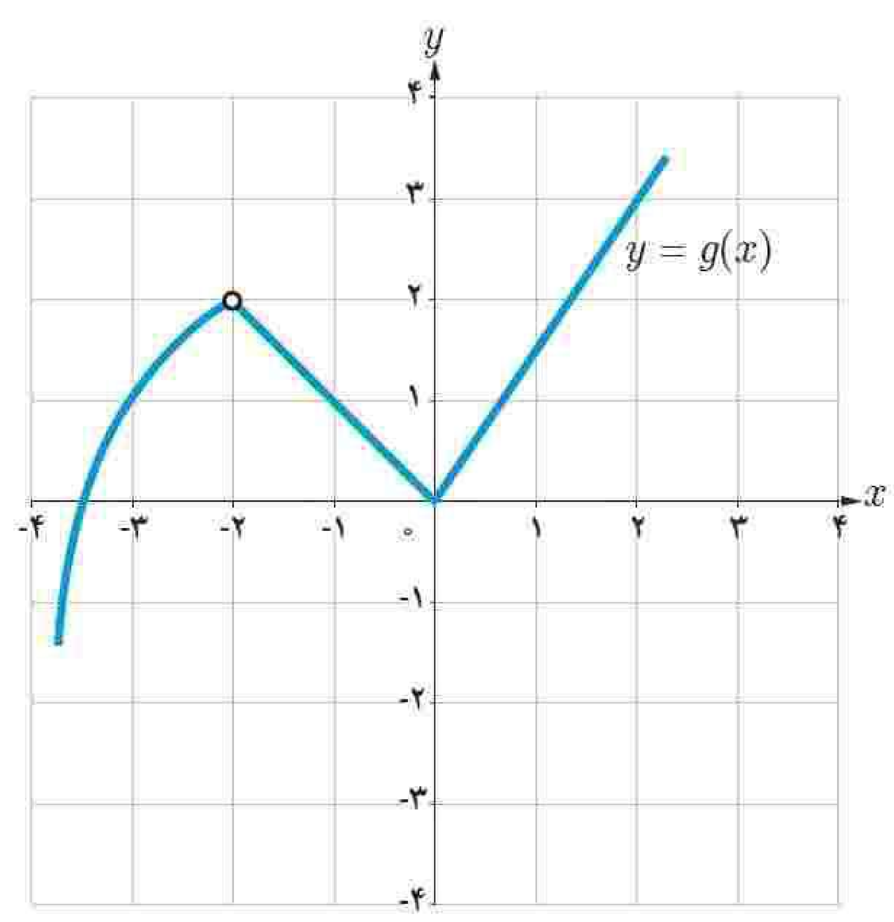
۳- نشان دهید اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ آنگاه $\lim_{x\to a}(f(x)-L)=0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

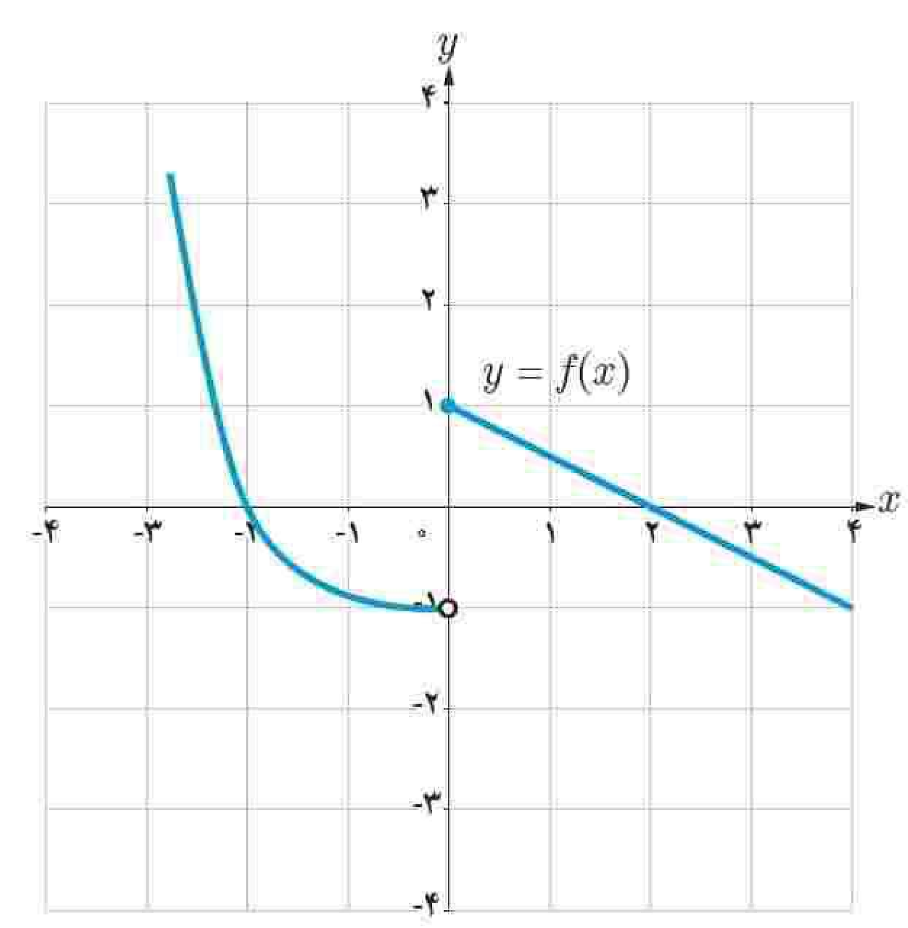
$$\lim_{x\to a}(f(x)-L)=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}L=L-L=0$$

عکس این مطلب نیز صحیح است. با فرض $\lim_{x\to a}(f(x)-L)=0$ ، ثابت می‌کنیم $\lim_{x\to a}f(x)=L$ است:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L)=0 \Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}L=0 \Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}L \Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)=L$$

۴- در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.





الف) $\lim_{x\to -2}(2g(x)-f(x))$

$$=2\lim_{x\to-2}g(x)-\lim_{x\to-2}f(x)$$

$$=2\times 2-0=4$$

ب) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{0}{1}=0\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{0}{-1}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$$

ب) $\lim_{x\to -3}-3\sqrt{g(x)}=-3\sqrt{1}=-3$

ت) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)}$ ⟿ $\lim_{x\to 2^+}\sqrt{f(x)}=\sqrt{0^-}\Rightarrow$ حد وجود ندارد ، $\lim_{x\to 2^-}\sqrt{f(x)}=0$

$\Rightarrow$ حد وجود ندارد

ث) $\lim_{x\to -1}[g(x)]$ ⟿ $\lim_{x\to(-1)^-}[g(x)]=[1^+]=1$ ، $\lim_{x\to(-1)^+}[g(x)]=[1^-]=0 \Rightarrow$ حد وجود ندارد

۵- مقدار b را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+[x]}{|x|} & x<-1\\ 3x+b & x>-1\end{cases}$ در $x=-1$ حد داشته باشد.

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}3x+b=-3+b$$

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+[x]}{|x|}=\frac{1+(-2)}{1}=-1$$

$\xrightarrow{\text{حد چپ = حد راست}} -3+b=-1\Rightarrow b=2$

۶- فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطهٔ a تعریف شده‌اند.

الف) اگر $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ موجود باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود دارند؟ چرا؟

خیر، به عنوان نمونه توابع $f(x)=\begin{cases}4 & x\leq 2\\ 3 & x>2\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-2 & x\leq 2\\ -1 & x>2\end{cases}$، هر دو در $x=2$ حد ندارند ولی مجموع آنها تابع ثابت $y=f(x)+g(x)=2$ شده که $x=2$ دارای حدی برابر 2 است.

ب) ثابت کنید اگر $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ و $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود باشند آنگاه $\lim_{x\to a} g(x)$ نیز وجود دارد.

طبق قضایای حد، اگر دو تابع حد داشته باشند تفاضل آنها نیز دارای حد است. دو تابع $f+g$ و f در $x=a$ حد دارند بنابراین تابع $g=(f+g)-f$ نیز در $x=a$ حد خواهد داشت.

پ) اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟

$f+g$ در a حد ندارد، اثبات این ادعا به کمک برهان خلف ساده است:

گیریم $f+g$ در a حد داشته باشد، از طرفی f در a حد دارد، پس تفاضل آنها یعنی $g=(f+g)-f$ در a حد خواهد داشت که با فرض سؤال تناقض دارد.

ت) اگر توابع f و g هیچکدام در نقطهٔ a دارای حد نباشند در مورد حد تابع $f+g$ چه می‌توان گفت؟

ممکن است $f+g$ در a حد داشته باشد (به پاسخ قسمت «الف» توجه شود)

و امکان دارد $f+g$ در a حد نداشته باشد. به طور مثال توابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=[x]+1$ هر دو در $x=2$ حد ندارند، مجموع آنها نیز در $x=2$ حد ندارد - (بررسی کنید)

۷- حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-\cos x}{|x|+\cos 2x} = \dfrac{0-1}{0+1} = -1$

ب) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\left([x]+\left[\frac{x}{2}\right]+[-x]\right) = 1+0+(-2)=-1$

پ) $\lim\limits_{x\to 0}[\sin x]$

$\lim\limits_{x\to 0^+}[\sin x] \xrightarrow{0<\sin x<1 \text{ و } 1} =0$ (درست: 0^+ در ناحیه‌ی اول دایره مثلثاتی)

$\lim\limits_{x\to 0^-}[\sin x] \xrightarrow{-1<\sin x<0 \text{ و } 1} =-1$ (درست: 0^- در ناحیه‌ی چهارم دایره مثلثاتی)

$\Leftarrow$ حد وجود ندارد

ت) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}[\sin x]$

$\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^+}[\sin x] \xrightarrow{0<\sin x<1 \text{ و } 1} =0$ (درست: $(\frac{\pi}{2})^+$ در ناحیه‌ی دوم دایره مثلثاتی)

$\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^-}[\sin x] \xrightarrow{0<\sin x<1 \text{ و } 1} =0$ (درست: $(\frac{\pi}{2})^-$ در ناحیه‌ی اول دایره مثلثاتی)

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}[\sin x]=0$

ث) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin x}$

دامنه: $1-\sin x\geq 0 \Rightarrow \sin x\leq 1 \longrightarrow$ همواره برقرار است $\Rightarrow D=\mathbb{R}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin x}=0$

ج) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{[x]-3}$

دامنه: $[x]-3=0 \Rightarrow [x]=3 \Rightarrow 3\leq x<4 \Rightarrow D=\mathbb{R}-[3,4) \longrightarrow$ همسایگی راست ۳ تعریف نشده

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{[x]-3}$ وجود ندارد $\Longleftarrow$ $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{[x]-3}=\dfrac{1}{2-3}=-1$ ، حد راست وجود ندارد $\Leftarrow$

چ) $\lim\limits_{x\to 0.1}\left[\frac{1}{x}\right]$

حد چپ: $x<\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{x}>10 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0.1^-}\left[\frac{1}{x}\right]=[10^+]=10$

حد راست: $x>\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{x}<10 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0.1^+}\left[\frac{1}{x}\right]=[10^-]=9$

$\Leftarrow$ حد وجود ندارد

ح) $\lim\limits_{x\to 2}([x]+[-x])$

$\lim\limits_{x\to 2^+}([x]+[-x]) = 2+(-3)=-1$

$\lim\limits_{x\to 2^-}([x]+[-x]) = 1+(-2)=-1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}([x]+[-x])=-1$

۸- با فرض $f(x)=\begin{cases}x^2+x & x>2\\ ax+b & x<2\end{cases}$ ، a و b را چنان بیابید که تابع f در $x=2$ دارای حد بوده و $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$ باشد.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+x)=4+2=6 \quad , \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax+b)=2a+b$$

طبق فرض تابع در $x=2$ دارای حد است $\Longrightarrow 2a+b=6$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1} ax+b=-a+b=0$$

$\xrightarrow{\text{حل دستگاه معادلات}} a=b=2$

۹- به ازای چه مقدار از m تابع $f(x)=2[x]-m[x+1]+x$ در $x=5$ دارای حد است؟

$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=2(5)-m(6)+5=15-6m$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=2(4)-m(5)+5=13-5m$$

$\Longrightarrow 15-6m=13-5m \Longrightarrow m=2$

۱۰- اگر $f(x)=\begin{cases}x+a[x]+1 & x\leq 0\\ \sin x+2a\cos x & x>0\end{cases}$ ، a را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)+\lim_{x\to 0^-} f(x)+f(0)=-7$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\sin x+2a\cos x)=0+2a(1)=2a$$

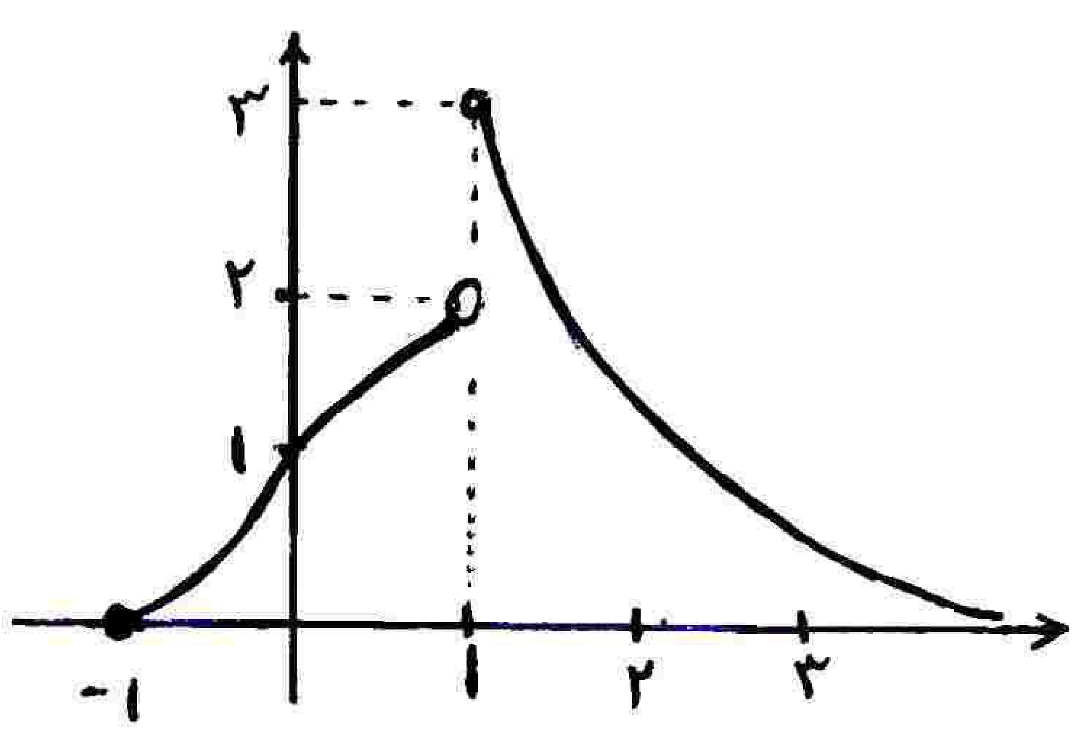
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+a[x]+1)=0+a(-1)+1=-a+1$$

$$f(0)=0+a[0]+1=1$$

$\xrightarrow{+} 2a+(-a+1)+1=-7$

$\Longrightarrow a=-9$

۱۱- با توجه به نمودار تابع f در شکل روبرو حدهای زیر را محاسبه نمایید.



الف) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(-x)$

$x<-1 \Longrightarrow -x>1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(-x)=f(1^+)=3$

ب) $\lim\limits_{x\to 3} f(x-3)$

وقتی $x\to 3$ ، آنگاه $x-3$ به صفر نزدیک می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

حد $=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$