

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

روش های حل معادله درجه دوم

معادله $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $a \neq 0$ یک معادله درجه دوم است.

روش Δ (روش کلی):

$$\Delta = b^2 - 4ac, x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 & \text{۲ ریشه حقیقی ساده} \\ \Delta = 0 & \text{۱ ریشه مضاعف} \\ \Delta < 0 & \text{ریشه ندارد} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

تذکر: اگر a و c مختلف علامه باشند قطعاً $\Delta > 0$ است.

روش های سرعتی حل معادله درجه دوم در موارد خاص:

۱- اگر $c = 0$ باشد کافی است از x فاکتور بگیریم که قطعاً یکی از دو جواب $x = 0$ خواهد بود.

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{b}{a}$$

۲- اگر $b = 0$ باشد یا معادله به فرم $(\dots)^2 = k$ باشد. ساده تر است از خاصیت ریشه زوج استفاده کنیم:

$$\begin{cases} u^2 = k \xrightarrow{k > 0} u = \pm \sqrt{k} \\ u^2 = k \xrightarrow{k < 0} \text{جواب ندارد} \\ u^2 = 0 \rightarrow u = 0 \end{cases}$$

یک ریشه دو بار تکرار $\Rightarrow u = 0$ یا $u \times u = 0 \rightarrow u = 0$ ریشه مضاعف

۳- اگر مجموع ضرایب صفر باشد ($a + b + c = 0$) آنگاه حتماً یک ریشه $x = 1$ و ریشه دیگر $x = \frac{c}{a}$ است.

اثبات: وقتی $x = 1$ ریشه معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است در آن صدق می کند یعنی $a + b + c = 0$ است و از طرفی حاصل ضرب ریشه ها $\frac{c}{a}$ است پس

باید ریشه دیگر $x = \frac{c}{a}$ باشد.

۴- اگر بین ضرایب معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ رابطه $a + c = b$ برقرار باشد حتماً یک ریشه $x = -1$ و ریشه دیگر $x = -\frac{c}{a}$ است.

اینو ریگه هتماً شما اثبات کنید.

۵- اگر موارد سرعتی ۱ تا ۴ نباشد و $a = 1$ نیز باشد شاید بتوان به کمک تجزیه با اتحاد جمله مشترک زودتر از روش Δ به جواب رسید!

یادآوری: جواب معادله در معادله صدق می کند.

تذکر: یک ریشه مضاعف دارد یعنی دو ریشه برابرند و تفاضل دو ریشه صفر است.

حل معادله درجه دوم به روش تغییر متغیر

گاهی می توان با u یا t (یک متغیر جدید) قرار دادن عبارتی که در معادله دیده می شود معادله غیر درجه ۲ را به معادله درجه ۲ تبدیل کرده و حل کنیم .

$$\text{معادله درجه ۴ دو مجذوری} \\ ax^4 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2=u} au^2 + bu + c = 0$$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2=t} at^2 + bt + c = 0$$

۱- کدام معادله زیر دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز ساده است؟ (کتاب درسی)

$$(1) \quad x^4 + 3x^2 + 2 = 0 \quad (2) \quad 2x^4 - 7x^2 - 4 = 0 \quad (3) \quad x^4 - 2x^2 + 3 = 0 \quad (4) \quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

۲- کوچکترین ریشه معادله $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$ کدام است؟ (کتاب درسی)

$$(1) \quad 4 - 2\sqrt{2} \quad (2) \quad \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \quad (3) \quad -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \quad (4) \quad -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

۳- کوچکترین ریشه معادله $4x^6 + 1 = 5x^3$ کدام است؟ (کتاب درسی)

$$(1) \quad -\sqrt[3]{4} \quad (2) \quad \frac{\sqrt[3]{2}}{4} \quad (3) \quad \frac{-1}{\sqrt[3]{4}} \quad (4) \quad \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

۴- معادله $2(x + \frac{1}{x})^2 - 5(x + \frac{1}{x}) + 2 = 0$ چند ریشه دارد؟

(۱) فقط یک ریشه مضاعف (۲) یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده

(۳) دو ریشه متمایز (۴) فاقد ریشه حقیقی

۵- معادله $(x^2 - 2x)^2 - 4x^2 + 8x - 5 = 0$ چند ریشه متمایز دارد؟

$$(1) \quad 3 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad 4$$

۶- معادله $(x^2 + x - 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) + 2 = 0$ چند جواب دارد؟

$$(1) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad 4$$

روابط بین ریشه های معادله درجه دوم

** اگر $x = \beta, x = \alpha$ ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0, \Delta > 0$) باشند می توان ثابت کرد:

۱) مجموع ریشه ها $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

۲) حاصل ضرب ریشه ها $P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

۳) قدر مطلق تفاضل ریشه ها $q = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۴) مجموع مربعات ریشه ها $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = s^2 - 2p$

۵) مجموع مکعبات ریشه ها $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = s^3 - 3ps$

۶) $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = (s^2 - 2p)^2 - 2p^2$

۷) $\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^3 + \beta^3) - \alpha^2\beta^3 - \beta^2\alpha^3 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^3 + \beta^3) - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)$

۸) $\alpha^6 + \beta^6 = (\alpha^3 + \beta^3)^2 - 3\alpha^3\beta^3 = (s^3 - 3ps)^2 - 3p^3(s^3 - 2p)$

۹) $|\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}| = A \Rightarrow A^2 = \alpha + \beta \pm 2\sqrt{\alpha\beta} = s \pm 2\sqrt{p} \Rightarrow A = \sqrt{s \pm 2\sqrt{p}}$

✓ دانش آموز قویم ضرورتی ندره جواب نوبی روابط ۶ تا ۹ بالا رو فقط کنی چون ممکنه فراموش بشه. پس روش مناسبه اونارو قویم یاد بگیر!!

۷- مجموع معکوس ریشه های معادله $y = 0$ $5x^2 + 3x - 1 = 0$ کدام است؟ (مشابه کتاب درسی)

۵ (۱) -۵ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $-\frac{1}{5}$ (۴)

۸- اگر α, β ریشه های معادله $0 = -x^2 + 2x + 1$ باشند حاصل $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ کدام است؟

۲ (۱) -۲ (۲) ۱۴ (۳) -۱۴ (۴)

۹- اگر α, β ریشه های معادله $0 = 4x^2 - 12x + 1$ باشند مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چه قدر است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۱۰- اگر به هر یک از ریشه های معادله $x^2 + ax - 2 = 0$ یک واحد افزوده شود حاصل ضرب دو عدد حاصل کدام است؟ (سنجش)

- (۱) $a - 1$ (۲) $-a + 1$ (۳) $-a - 1$ (۴) $a + 1$

😊 دانش آموز عزیزم فسته نباشی، تا اینجا هم روابط بین ریشه ها رو خوب تمرین کردی و هم روش تغییر متغیر رو قبلاً یاد گرفته بودی. حالا می‌فوییم در دو سوال بگیری این دو تا موضوع رو با هم ترکیب کنیم.

۱۱- مجموع ریشه های معادله $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟ (تجربی داخل ۹۰)

- (۱) -4 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 4

۱۲- اگر α, β ریشه های معادله $x^3 - 5x^2 = 8$ باشند، حاصل $\alpha^3 + \alpha\beta + \beta^3$ کدام است؟

- (۱) 6 (۲) -6 (۳) 3 (۴) -3

😊 فب مدل های بالا رو هم که یاد گرفتین. سوال بگیری کمی تفاوت داره و بایر به این نکته دقت کنید که α, β ریشه های معادله در اون صدق میکنن و به جای x قرار میگیرن.

۱۳- اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند حاصل $\alpha^2 + 3\beta$ کدام است؟

- (۱) 7 (۲) 8 (۳) 9 (۴) 10

گاهی در مسائل روابط بین ریشه ها، مجهولی مانند m یا a در معادله وجود دارد که با نوشتن رابطه بر حسب S و P آن مجهول بدست می آید. فقط باید دقت کنید که در پایان با جایگذاری مجهول بدست آمده در معادله شرط $\Delta > 0$ برقرار باشد.

۱۴- به ازای کدام مقدار m مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله $mx^2 - (m + 3)x + 5 = 0$ برابر ۶ است؟ (تجربی داخل ۹۳)

- (۱) $\frac{-9}{5}$ (۲) 1 (۳) $1, \frac{-9}{5}$ (۴) $\frac{-9}{5}, -1$

۱۵- معادله $2x^2 - 2x + 5 - m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی ساده α, β است. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $4\alpha\beta > 1$ (۲) $4\alpha\beta < 1$ (۳) $2\alpha\beta > 1$ (۴) $2\alpha\beta < 1$

ممکن است رابطه داده شده بین ریشه ها به راحتی بر حسب S و P نوشته نشود در این حالت باید با ضرب یا جمع طرفین در عبارتی، S یا P را ساخت و حداقل یکی از ریشه ها را بدست آورد. می دانیم ریشه معادله در معادله صدق می کند پس مجهول مورد نظر بدست می آید.

۱۶- در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است مجموع دو ریشه مثبت کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

- (۱) $3/5$ (۲) 4 (۳) $4/5$ (۴) 5

۱۷- به ازای کدام مقدار a در معادله درجه دوم $x^2 - 6x + 2a = 1$ یک ریشه جذر ریشه دیگر است؟

- (۱) $\frac{9}{2}$ (۲) $\frac{-15}{2}$ (۳) 5 (۴) -13

نکته: وقتی معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه قرینه هم و دو ریشه معکوس هم دارد که:

اولاً: $b = 0$ باشد. ثانیاً: a و c مختلف علامه باشند.

$$\text{اثبات} \begin{cases} \alpha = -\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow s = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0 \\ \Delta > 0 \Rightarrow -4ac > 0 \Rightarrow -4ac > 0 \Rightarrow a.c < 0 \Rightarrow \text{a و c مختلف علامه} \end{cases}$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

$$-x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

۱۸- به ازای کدام مقدار a ریشه های معادله $2ax^2 + (a+2)x + a = 1$ قرینه یکدیگرند؟

- (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) هیچ مقدار a

نکته: وقتی معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه متمایز معکوس هم دارد که:

اولاً: $a = c$ باشد. ثانیاً: $\Delta > 0$ باشد

$$\text{اثبات} \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \alpha\beta = 1 \Rightarrow p = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow a = c \\ \Delta > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه متمایز} \end{cases}$$

تذکر: ابتدا با شرط $a = c$ مجهول مورد نظر را بدست آورده سپس در معادله جایگذاری کرده و Δ را محاسبه می کنیم اگر $\Delta > 0$ باشد قابل قبول است.

۱۹- به ازای کدام مقدار m ریشه های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟ (تجربی خارج ۹۰)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

بررسی علامت ریشه های معادله درجه دوم

جدول زیر را به خاطر بسپارید.

| علامت ریشه ها | شرایط لازم و کافی |
|----------------------------|---|
| دو ریشه مختلف علامه | $p < 0$ بررسی شرط Δ لازم نیست!! (چرا؟) |
| دو ریشه هم علامت | $\Delta > 0, p > 0$ |
| دو ریشه مثبت | $s > 0, p > 0, \Delta > 0$ |
| دو ریشه منفی | $s < 0, p > 0, \Delta > 0$ |
| یک ریشه صفر و یک ریشه مثبت | $s > 0, p = 0 (c = 0)$ (شرط Δ لازم نیست) |
| یک ریشه صفر و یک ریشه منفی | $s < 0, p = 0$ |

۲۱- کدام معادله زیر دو ریشه مثبت دارد؟ (کتاب درسی)

$$(1) \quad x^2 + 6x + 3 = 0 \quad (2) \quad x^2 + 6x - 3 = 0 \quad (3) \quad x^2 - 2x + 3 = 0 \quad (4) \quad -x^2 + 3x - 1 = 0$$

۲۲- به ازای کدام مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور x ها را در هر دو طرف مبداء مختصات قطع می کند؟ (ریاضی خارج ۹۵)

$$(1) \quad m > 1 \text{ یا } m < -2 \quad (2) \quad -2 < m < 1 \quad (3) \quad \text{فقط } m < -2 \quad (4) \quad \text{فقط } m > 1$$

۲۳- به ازای کدام مقدار a معادله درجه دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دارای دو ریشه مثبت است؟ (ریاضی داخل ۹۶)

$$(1) \quad -2 < a < 2 \quad (2) \quad 2 < a < 5 \quad (3) \quad 2 < a < 14 \quad (4) \quad 5 < a < 14$$

۲۴- به ازای کدام مقادیر m منحنی به معادله $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ محور x ها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند؟

(ریاضی داخل ۹۵)

$$(1) \quad m > 2 \quad (2) \quad -1 < m < 2 \quad (3) \quad \text{هر مقدار } m \quad (4) \quad \text{هیچ مقدار } m$$

۲۵- به ازای کدام مقادیر a معادله $(a-1)x^2 - ax + 10 = 0$ دو ریشه در طرفین $x=2$ دارد؟

$$(1) \quad -2 < a < 1 \quad (2) \quad -3 < a < 1 \quad (3) \quad -1 < a < 3 \quad (4) \quad -3 < a < 0$$

معادله درجه ۴ دو مجذوری

$$\textcircled{1} \quad ax^4 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2=t} \textcircled{2} \quad at^2 + bt + c = 0$$

الف) وقتی معادله $\textcircled{1}$ دارای چهار ریشه حقیقی ساده است که معادله $\textcircled{2}$ دارای دو ریشه مثبت باشد یعنی: $s > 0, p > 0, \Delta > 0$ (اشتراک)

ب) وقتی معادله $\textcircled{1}$ دارای سه ریشه حقیقی ساده است که معادله $\textcircled{2}$ دارای یک ریشه صفر و یک ریشه مثبت باشد یعنی: $s > 0, p = 0 (c = 0)$

ج) وقتی معادله $\textcircled{1}$ دارای دو ریشه حقیقی ساده است که معادله $\textcircled{2}$ دارای دو ریشه مختلف علامه باشد ($p < 0$) یا یک ریشه مضاعف مثبت داشته باشد.

$$\left(-\frac{b}{a} > 0, \Delta = 0\right)$$

د) وقتی معادله $\textcircled{1}$ فقط یک ریشه حقیقی ساده دارد که معادله $\textcircled{2}$ یک ریشه مضاعف صفر یا یک ریشه منفی و یک ریشه صفر داشته باشد.

ه) وقتی معادله $\textcircled{1}$ فاقد ریشه حقیقی است که معادله فاقد ریشه حقیقی باشد ($\Delta < 0$) یا دو ریشه ساده منفی داشته باشد یا یک ریشه مضاعف منفی داشته باشد.

تذکر: ریشه های غیر صفر معادله درجه ۴ دو مجذوری همواره به صورت قرینه هم هستند پس مجموع ریشه ها در این معادلات همواره برابر صفر است.

$$\begin{cases} x^2 = t_1 \xrightarrow{t_1 > 0} x = \pm \sqrt{t_1} \\ x^2 = t_2 \xrightarrow{t_2 > 0} x = \pm \sqrt{t_2} \end{cases}$$

۲۶- معادله $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$ دارای ریشه حقیقی است که مجموع این ریشه ها برابر است؟

$$(1) \quad \text{چهار، صفر} \quad (2) \quad \text{دو، صفر} \quad (3) \quad \text{چهار، } \frac{-5}{2} \quad (4) \quad \text{دو، } \frac{-5}{2}$$

۲۷- معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ دارای ریشه حقیقی است و مجموع مربعات ریشه های آن برابر می باشد ؟

- (۱) ۳، ۴ (۲) ۶، ۴ (۳) ۳، ۲ (۴) ۶، ۲

۲۸- اگر معادله $x^2 - (m+2)x + m + 5 = 0$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ (تجربی داخل ۸۵)

- (۱) $m < -4$ (۲) $m > 4$ (۳) $-4 < m < 4$ (۴) $4 < m < 9$
(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۳ (۴) ۳

نکته: اگر s و p مجموع و حاصل ضرب ریشه های یک معادله درجه دوم باشند آن معادله به صورت $x^2 - sx + p = 0$ است.

نکته: یکی از روش های نوشتن معادله جدید از روی معادله قدیم روش تغییر متغیر است.

۲۹- ریشه های معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ به صورت $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ است. مقدار $a - b$ کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

۳۰- محیط مستطیلی ۱۱ cm و مساحت آن 6 cm^2 است. عرض این مستطیل چند cm است؟ (کتاب درسی)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۳۱- اگر α, β ریشه های معادله $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب های معادله $8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\{\alpha^2 \beta, \alpha \beta^2\}$ است؟ (تجربی خارج ۹۴)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۳۲- ریشه های کدام معادله از معکوس ریشه های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کمتر است؟ (تجربی داخل ۹۴)

(۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$

(۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

روش های سرعتی در نوشتن معادله جدید

بر اساس روش تغییر متغیر در نوشتن معادله جدید می توان به مجموعه ای از تکنیک های سرعتی در این زمینه دست پیدا کرد که برای موارد خاص پاسخگو هستند.

توجه داشته باشید روش اصلی همان روش S و p است .

نکته: برای اینکه معادله ای بنویسیم که ریشه هایش k واحد از ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ بیشتر باشد کافی است x را به $x - k$ تبدیل کنیم و بر عکس .

$$\text{اثبات) } t = x + k \Rightarrow x = t - k \Rightarrow a(t - k)^2 + b(t - k) + c = 0$$

در پایان چون t یک متغیر است می توانیم به جای x ، t قرار دهیم :

$$a(x - k)^2 + b(x - k) + c = 0$$

نکته: برای اینکه معادله ای بنویسیم که ریشه هایش k برابر ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد کافی است x را به $\frac{x}{k}$ تبدیل کنیم .

نکته: برای اینکه معادله ای بنویسیم که ریشه هایش قرینه ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد باید x را به $-x$ تبدیل کنیم یعنی کافی است فقط b را قرینه کنیم : $ax^2 + bx + c = 0$

نکته: برای اینکه معادله ای بنویسیم که ریشه هایش معکوس ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد باید x را به $\frac{1}{x}$ تبدیل کنیم یعنی کافی است جای a و c را عوض کنیم .

$$\text{اثبات) } \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c = 0 \xrightarrow{\times x^2} a + bx + cx^2 = 0 \Rightarrow cx^2 + bx + a = 0$$

۳۳- ریشه های معادله ی درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ یک واحد از ریشه های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است. b کدام است ؟ (تجربی داخل ۸۷)

$$(1) -2 \quad (2) -1 \quad (3) \frac{2}{3} \quad (4) \frac{4}{3}$$

۳۴- ریشه های کدام معادله معکوس و قرینه ریشه های معادله $x^2 - 5x - 3 = 0$ است ؟

$$(1) x^2 + 5x - 3 = 0 \quad (2) 3x^2 + 5x + 1 = 0 \quad (3) 3x^2 + 5x - 1 = 0 \quad (4) 3x^2 - 5x - 1 = 0$$

۳۵- اگر هر یک از ریشه های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ دو برابر معکوس هر یک از ریشه های معادله ی $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد a کدام است ؟

(تجربی داخل ۸۶)

$$(1) -14 \quad (2) -12 \quad (3) -8 \quad (4) -6$$

نوشتن معادله با داشتن یک ریشه

مشاهده کردید که وقتی دو ریشه معادله درجه دوم معلوم باشد، چطور می توان معادله را نوشت.

اما اگر فقط یکی از ریشه ها را داشته باشیم برای نوشتن معادله کافی است x را برابر آن ریشه قرار دهیم. و اگر با ریشه ای گنگ به دنبال نوشتن معادله ای با ضرایب گویا هستیم به گونه ای طرفین را به توان ۲ می رسانیم تا رادیکال ها حذف شوند.

۳۶- در معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ با ضرایب گویا، یکی از ریشه ها $۲\sqrt{3} - 1$ است. $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۹ (۳) -۹ (۴) -۱۳

ترکیب معادله درجه دوم با مباحث دنباله ها

سه جمله متوالی دنباله حسابی $a, b, c \Rightarrow 2b = a + c$

سه جمله متوالی دنباله هندسی $a, b, c \Rightarrow b^2 = ac$

حاصل ضرب آنها $= \sqrt{\text{مجموع آنها}}$ و واسطه هندسی دو عدد و $\frac{\text{مجموع آنها}}{۲} =$ واسطه حسابی دو عدد

۳۷- اگر β, α ریشه ها معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند، واسطه هندسی آنها چقدر از واسطه حسابی آنها کمتر است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۳۸- اگر β, α دو ریشه حقیقی معادله $(m^2 - 1)x^2 - 4x + m = 0$ باشند. به ازای کدام مقدار m اعداد $\beta, \frac{1}{\alpha}, \alpha$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۲ (۴) -۲

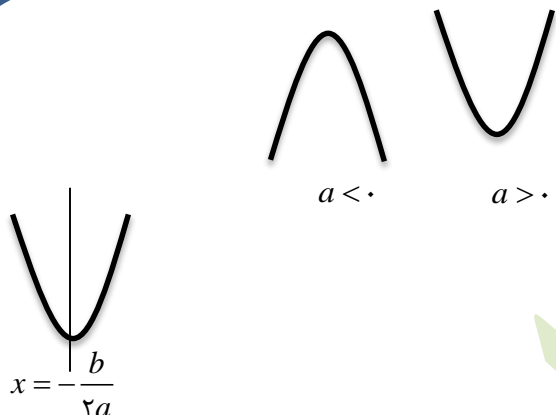
۳۹- β, α دو ریشه معادله $2x^2 + (m-2)x - 1 = 0$ می باشند. اگر $\beta, \alpha, ۲$ تشکیل یک دنباله ی هندسی بدهند، واسطه حسابی β, α کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

تابع درجه ۲ (سهمی)

مشخصات سهمی در فرم گسترده:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 : \text{ تابع درجه ۲ (سهمی)}$$



$$s \begin{cases} x_s = -\frac{b}{2a} \\ y_s = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

مختصات رأس سهمی در فرم گسترده:

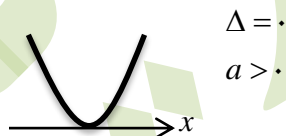
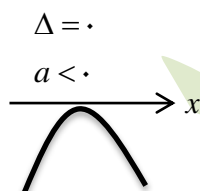
محور تقارن سهمی خط $x = -\frac{b}{2a}$ می باشد که همان طول رأس سهمی است.

عرض رأس $y = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ یا $y = -\frac{\Delta}{4a}$ همان بیشترین مقدار (max) یا کمترین مقدار (min) تابع است. اگر $a > 0$ باشد min و اگر $a < 0$ باشد max دارد.

$$\begin{cases} \text{برد} = [\min, +\infty) \leftarrow a > 0 \\ \text{برد} = (-\infty, \max] \leftarrow a < 0 \end{cases}$$

برد تابع درجه دوم:

اگر $\Delta = 0$ باشد آنگاه عرض نقطه min یا max تابع صفر است $\left(y = \frac{-\Delta}{4a}\right)$ یعنی رأس سهمی روی محور x ها واقع است و نمودار سهمی بر محور



x ها مماس می باشد:

۴۰- اگر بیشترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد مقدار k کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۴

۴۱- حدود m کدام باشد تا مینیمم تابع $y = mx^2 + (3-m)x + 2m - 1$ در ربع سوم باشد؟

- (۱) $0 < m < 3$ (۲) $0 < m < 1$ (۳) $-\frac{9}{7} < m < 1$ (۴) $-\frac{9}{7} < m < 0$

۴۲- به ازای کدام مقادیر a سهمی $y = (a-1)x^2 + 2x + a$ ، ماکزیمی روی نیمساز ناحیه دوم دارد؟

- (۱) $a = -1$ یا $a = 2$ (۲) فقط $a = -1$ (۳) فقط $a = 2$ (۴) هیچ مقدار a

مشخصات سهمی در فرم مربع

$y = a(x-h)^2 + k$ ($a \neq 0$) ضابطه یک سهمی است که بر اساس انتقال نمودار مختصات رأس آن به صورت زیر است .

$$S \begin{cases} x_s = h \rightarrow \text{محور تقارن سهمی} \\ y_s = k \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow \min = k \\ a < 0 \Rightarrow \max = k \end{cases} \end{cases}$$

همان ریشه داخل پرانتز در این مدل $x = h \rightarrow$ محور تقارن سهمی $x_s = h \rightarrow$

۴۳- در نمودار سهمی $y = 3 - (2x+1)^2$ مختصات رأس سهمی کدام است ؟

$$(1) (-1, 3) \quad (2) (-1, -3) \quad (3) \left(\frac{1}{2}, 3\right) \quad (4) \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$$

۴۴- خط $x = 3$ محور تقارن سهمی به معادله $y = 5(ax+6)^2 + a - 2$ است . این سهمی چگونه است ؟

- (۱) کمترین مقدار آن صفر است .
 (۲) بیشترین مقدار آن صفر است .
 (۳) بیشترین مقدار آن -4 است .
 (۴) کمترین مقدار آن -4 است .

مشخصات سهمی در فرم دو پرانتزی

$y = a(x-x_1)(x-x_2) + k$ ($a \neq 0, x_1, x_2, k \in \mathbb{R}$) یک سهمی (تابع درجه ۲) است که به دلیل تقارن مختصات رأس آن به صورت زیر است :

$$S \begin{cases} x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_s = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \end{cases}$$

تذکر: اگر $k = 0$ باشد آنگاه x_1, x_2 همان ریشه های معادله $f(x) = 0$ و نقاط برخورد سهمی با محور x ها هستند .

۴۵- نمودار سهمی با ضابطه $y = -2(x+1)(x+3) - 1$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی گذرد ؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۴۶- اگر $x = 1$ محور تقارن نمودار سهمی $f(x) = 2(x+a)(3-x) + 1$ باشد آنگاه

- (۱) بیشترین مقدار سهمی برابر ۱ است
 (۲) بیشترین مقدار سهمی برابر ۹ است
 (۳) کمترین مقدار سهمی برابر ۱ است
 (۴) کمترین مقدار سهمی برابر ۹ است

مسائل کاربردی ماکزیمم و مینیمم تابع ۲ (بهینه سازی)

کافی است آنچه قرار است بهینه شود (کمترین یا بیشترین مقدار) را بر حسب متغیر یا متغیرهای موجود بنویسیم سپس تک متغیره کنیم تا به تابعی درجه ۲

برسیم و می دانیم که بیشترین یا کمترین مقدار تابع درجه ۲ برابر $y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ است .

۴۷- راکتی به طور عمودی رو به بالا تشکیل شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می گیرد که معادله آن به صورت

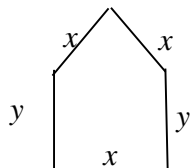
$$h(t) = 10 \cdot t - 5t^2 \text{ است. چند ثانیه طول می کشد تا این راکت پس از پرتاب به زمین برگردد؟ (کتاب درسی)}$$

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴) ۴۰

۴۸- در سؤال قبل ارتفاع نقطه اوج راکت کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) ۱۰۰۰ متر (۲) ۵۰۰ متر (۳) ۹۵۰ متر (۴) ۲۲۵ متر

۴۹- یک پنجره به شکل مستطیل است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴ متر باشد بیشترین مساحت ممکن این پنجره کدام است؟



$$\frac{4}{6 - \sqrt{3}} \quad (۴)$$

$$\frac{8}{6 - \sqrt{3}} \quad (۳)$$

$$\frac{16}{6 - \sqrt{3}} \quad (۲)$$

$$\frac{32}{6 - \sqrt{3}} \quad (۱)$$

نکته: اگر مجموع چند عبارت مثبت عدد ثابتی باشد وقتی حاصل ضرب آنها ماکزیمم است که باهم برابر باشند.

$$x + y = c \xrightarrow{x=y=\frac{c}{2}} (xy)_{\max} = \frac{c}{2} \times \frac{c}{2} = \frac{c^2}{4}$$

$$\text{اثبات: } f = xy \xrightarrow{y=c-x} f = x(c-x) = -x^2 + cx$$

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-c}{-2} = \frac{c}{2}, y = c - x = c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}$$

نکته: اگر حاصل ضرب چند عبارت مثبت برابر مقدار ثابتی باشد وقتی مجموع آنها مینیمم است که باهم برابر باشند.

$$xy = c \xrightarrow{x=y=\sqrt{c}} (x+y)_{\min} = \sqrt{c} + \sqrt{c} = 2\sqrt{c}$$

۵۰- حاصل ضرب دو عدد مثبت برابر ۹ است کمترین مقدار مجموع آن دو عدد کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۱۸ (۳) ۶ (۴) ۴/۵

۵۱- از بین مستطیل های که محیط آن ها ۳۲ است. بیشترین مساحت ممکن کدام است؟

- (۱) ۲۵۶ (۲) ۶۴ (۳) ۱۶ (۴) ۵۱۲

۵۲- با طنابی به طول ۱۰۰ متر می خواهیم زمین مستطیل شکل را در حاشیه یک رودخانه از سه طرف دیگر محصور کنیم. بیشترین مساحت ممکن کدام است؟

- (۱) ۲۵۰۰ (۲) ۶۲۵ (۳) ۷۵۰ (۴) ۱۲۵۰

۵۳- استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۵۰۰ متر باشد. بیشترین مساحت ممکن برای مستطیل کدام است؟ (کتاب درسی)

$$\frac{25000}{\pi} \quad (۴) \quad \frac{62500}{\pi} \quad (۳) \quad \frac{31250}{\pi} \quad (۲) \quad \frac{6250}{\pi} \quad (۱)$$

۵۴- در سؤال قبل بیشترین مساحت ممکن برای کل زمین استادیوم کدام است؟ (کتاب درسی)

$$\frac{25000}{\pi} \quad (۴) \quad \frac{62500}{\pi} \quad (۳) \quad \frac{31250}{\pi} \quad (۲) \quad \frac{6250}{\pi} \quad (۱)$$

نوشتن معادله سهمی بر اساس مشخصاتی معلوم از آن

الف) اگر مختصات سه نقطه از سهمی معلوم باشد می توان با توجه به اینکه این نقاط در معادله سهمی صدق می کند با فرم گسترده $y = ax^2 + bx + c = 0$ و جایگذاری آن سه نقطه و تشکیل یک دستگاه سه معادله و سه مجهول ضابطه سهمی را بدست آورد.

۵۵- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقطه ای به طول ۱ و محور y ها را در نقطه ای به عرض ۶- قطع کرده و از نقطه $(-۲, -۶)$ می گذرد، $f(-۱)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۸۹)

$$-۴ \quad (۴) \quad -۵ \quad (۳) \quad -۷ \quad (۲) \quad -۸ \quad (۱)$$

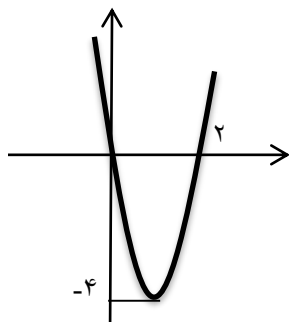
ب) اگر مختصات رأس سهمی معلوم باشد $s(h, k)$ کافی است با توجه به فرم مربع معادله $y = a(x-h)^2 + k$ را نوشته و تک مجهول a را با معلوم بودن نقطه ای دیگر از سهمی بدست آوریم.

تذکر: حتی اگر در صورت مسئله فرم گسترده نوشته شده باشد شما در این حالت که مختصات رأس معلوم است از فرم مربع استفاده کنید چون سرعت بالاتری نسبت به سه معادله و سه مجهول دارد.

تذکر: دقت کنید گاهی طول رأس را نمی دهند ولی در عوض ریشه های معادله (برخورد با محور x ها) معلوم است و ما می دانیم که به دلیل تقارن، رأس وسط دو ریشه است.

۵۶- تابع درجه دوم $y = f(x)$ در $x = 2$ ماکزیمی برابر ۳ دارد. اگر نمودار این سهمی محور x ها را به طول ۱ قطع کند. عرض نقطه برخورد نمودار سهمی با محور y ها کدام است؟

$$-۴ \quad (۱) \quad -۹ \quad (۲) \quad -۸ \quad (۳) \quad -۱۰ \quad (۴)$$

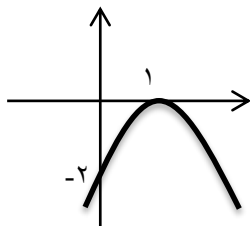


۵۷- نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. مقدار $f(-۱)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

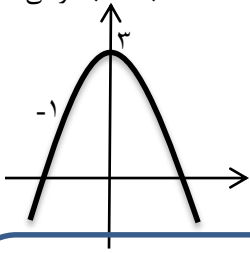
$$۱۲ \quad (۴) \quad ۸ \quad (۳) \quad ۶ \quad (۲) \quad ۳ \quad (۱)$$

۵۸- نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ مطابق شکل است. b کدام است؟ (کتاب درسی)

$$-۴ \quad (۴) \quad ۴ \quad (۳) \quad -۲ \quad (۲) \quad ۲ \quad (۱)$$



۵۹- نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. نمودار $y = f(x-2)$ محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟ (مشابه کتاب درسی)



-۸ (۴)

-۴ (۳)

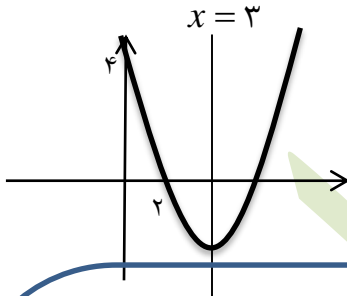
-۲ (۲)

(۱) ۰

(ج) اگر دو ریشه سهمی یعنی طول نقاط برخورد نمودار با محور x ها معلوم باشد: α, β

کافی است معادله سهمی را به فرم دو پرانتزی $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ نوشته و با توجه به معلوم بودن نقطه ای دیگر از سهمی تک مجهول a آوریم.

دقت کنید گاهی یک ریشه به همراه محور تقارن (طول رأس) را می دهند که ما می توانیم با توجه به تقارن سهمی ریشه دیگر را بدست آورده و دو پرانتزی بنویسیم



۶۰- نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. $f(1)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۳ (۴)

۲ (۳)

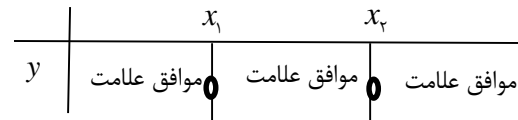
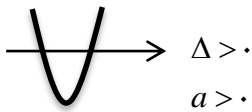
 $\frac{3}{2}$ (۲)

(۱) ۱

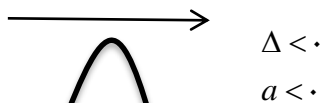
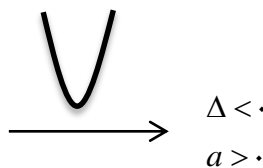
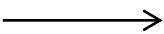
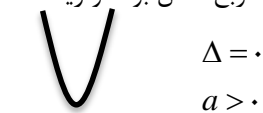
وضعیت نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ با محور x ها

می دانیم ریشه های معادله $f(x) = 0$ همان طول نقاط برخورد $y = f(x)$ با محور x ها ($y = 0$) هستند پس با توجه به Δ وضعیت نمودار سهمی را با محور x ها بررسی می کنیم.

(الف) اگر $\Delta > 0$ باشد نمودار سهمی در دو نقطه محور x ها را قطع می کند ($y = 0$) \Leftrightarrow همان ریشه های معادله $f(x) = 0$



(ب) اگر $\Delta = 0$ باشد نمودار سهمی بر محور x ها مماس است و رأس روی محور x هاست. و به عبارت دیگر معادله سهمی مربع کامل بوده و ریشه مضاعف دارد.



(ج) اگر $\Delta < 0$ باشد نمودار سهمی محور x ها را قطع نمی کند.

۶۱- به ازای کدام مقدار m نمودار سهمی $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$ مماس بر محور x ها و بالای آن است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{5}{2}$

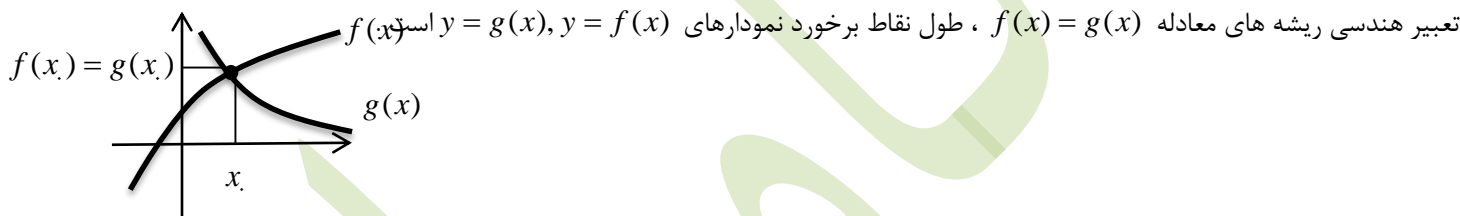
۶۲- نمودار سهمی $y = x^2 + bx + c$ بر محور x ها مماس بوده و خط $x = 2$ محور تقارن آن است. عرض نقطه برخورد نمودار سهمی با محور y ها کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۱ (۴) -۱

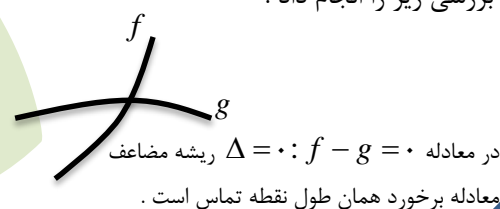
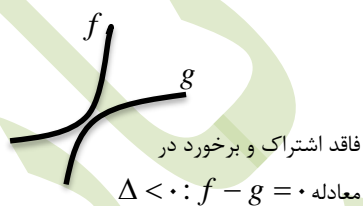
۶۳- به ازای کدام مقدار a نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x + a$ همواره بالای محور x هاست؟ (ریاضی خارج ۹۶)

- (۱) $a < 1$ (۲) $a < -2$ (۳) $a > 3$ (۴) $-2 < a < 1$

وضعیت دو نمودار $y = f(x)$, $y = g(x)$ با هم



در واقع به معادله $f(x) = g(x)$ یا همان $f - g = 0$ معادله برخورد دو تابع می گوئیم حال اگر $(f - g)$ درجه ۲ باشد می توان با توجه به Δ بررسی زیر را انجام داد.



۶۴- منحنی به معادله $y = (2x+1)(x+8)$ با خطوط $y = mx$ نقطه مشترکی ندارند. مجموعه مقادیر m کدام است؟ (ریاضی داخل ۸۸)

- (۱) $9 < m < 25$ (۲) $15 < m < 23$ (۳) $7 < m < 15$ (۴) $5 < m < 13$

۶۵- نمودارهای دو تابع با ضابطه های $y = 2x + b$, $y = 2x^2 + ax + b$ در نقطه ای به طول ۲ بر روی محور x ها متقاطع اند. مختصات تقاطع دیگر آنها کدام است؟

- (۱) $(0, 0)$ (۲) $(2, 0)$ (۳) $(0, 4)$ (۴) $(0, -4)$

۶۶- به ازای کدام مقدار a سهمی $y = x^2 + ax + 9$ بر نیمساز ناحیه سوم، در آن ناحیه مماس است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) ۷ (۴) -۷

۶۷- خط $y = m$ از سهمی $y = x^2 - 2x$ و تری به طول ۶ جدا می کند. m کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۸ (۳) ۸ (۴) -۳

تشخیص علامت Δ, c, b, a از روی نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$

علامت Δ : علامت Δ از روی وضعیت نمودار با محور x ها مشخص می شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{دو نقطه برخورد با محور } x \text{ ها} \\ \text{مماس بر محور } x \text{ ها} \\ \text{فاقد برخورد با محور } x \text{ ها} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \Delta > 0 \\ \Delta = 0 \\ \Delta < 0 \end{array}$$

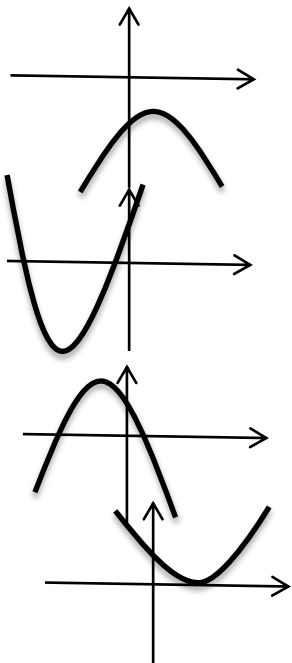
علامت a : اگر سهمی رو به بالا \cup باشد $a > 0$ و اگر سهمی رو به پایین \cap باشد $a < 0$ است.

علامت c : $y = c$ در واقع عرض نقطه برخورد سهمی با محور y ها است ($x = 0$)

علامت b : می توان با توجه به علامت طول رأس $x = -\frac{b}{2a}$ و داشتن علامت a علامت b را بدست آورد اما راه ساده تر این است:

اگر در نقطه ای برخورد نمودار با محور y ها، نمودار صعودی باشد $b > 0$ و اگر نزولی باشد $b < 0$

تذکر مهم: همانطور که قبلاً اشاره شد در حالتی که a و c مختلف علامه هستند و نمودار دارای دو ریشه مختلف علامه بوده و از هر چهار ناحیه گذشته است. نیازی به بررسی شرط $\Delta > 0$ نیست چون خود به خود برقرار است.



۶۸- با توجه به نمودار شکل مقابل کدام گزینه نادرست است؟ (کتاب درسی)

$$\Delta < 0 \quad (1) \quad b < 0 \quad (2) \quad a < 0 \quad (3) \quad c < 0 \quad (4)$$

۶۹- به ازای کدام مقادیر m نمودار سهمی $y = mx^2 + (m+1)x + 2m - 1$ به صورت زیر است؟

$$m > -1 \quad (1) \quad m > \frac{1}{2} \quad (2) \quad 0 < m < 1 \quad (3) \quad \frac{1}{2} < m < 1 \quad (4)$$

۷۰- به ازای کدام مقادیر a نمودار سهمی $y = (a-2)x^2 - (a-1)x + a$ مطابق شکل زیر است؟

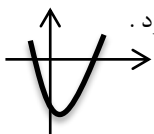
$$1 < a < 2 \quad (1) \quad 0 < a < 2 \quad (2) \quad 0 < a < 1 \quad (3) \quad \text{هیچ مقدار } a \quad (4)$$

۷۰- به ازای چند مقدار مختلف m ، نمودار سهمی $y = mx^2 + (m-1)x + m$ می تواند مطابق شکل زیر باشد؟

$$(1) \text{ صفر} \quad (2) 1 \quad (3) 2 \quad (4) \text{ بی شمار}$$

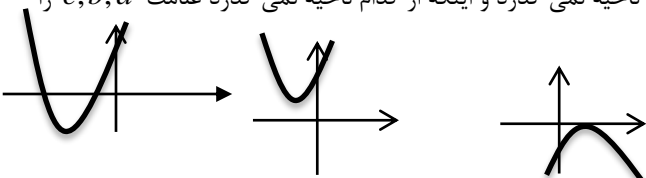
مسائل مربوط به نمودار یک سهمی و گذر از نواحی مختلف محورهای مختصات

در واقع این تیپ مسائل مانند تیپ قبلی علامت Δ, c, b, a هستند اما در اینجا نمودار داده نشده است و با توجه به مسئله باید نمودار را رسم کرد.



اگر دو ریشه مختلف علامه باشند ($p < 0$) و نمودار سهمی از هر ۴ ناحیه می گذرد. بررسی شرط Δ هم لازم نیست.

اگر دو ریشه هم علامت باشند ($\Delta > 0, p > 0$) نمودار سهمی از سه ناحیه گذشته و از یک ناحیه نمی گذرد و اینکه از کدام ناحیه نمی گذرد علامت c, b, a را مشخص می کند. در حالت $\Delta \leq 0$ نمودار سهمی فقط از دو ناحیه می گذرد.



۷۱- به ازای کدام مقادیر m نمودار $y = mx^2 + 4x + m - 2$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد؟ (سنگش ۹۱)

- (۱) $0 < m < 2$ (۲) $-2 < m < 0$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) $0 < m < 1$

۷۲- به ازای کدام مقادیر a منحنی به معادله $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (ریاضی داخل ۸۹)

- (۱) $a \leq -2$ (۲) $a > -2$ (۳) $a > 0$ (۴) $-2 \leq a < 0$

۷۳- به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ فقط از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) $-6 < a < 0$ (۲) $a < -6$ (۳) $0 < a < 2$ (۴) $-6 < a < 2$

فیب‌ها کلمه «فقط» رو از سوال قبلی برمی‌داریم و همیشه به سوال «شوار و ففن» آگه سوال بعری رو درست حل کردی به فودت افتخار کن که به نابغه ریاضی هستی 🎁 و آگه هم نتونستی حل کنی ناامید نشو 😊 این اولین سوال در کنگور ریاضی سال ۱۳۹۲ بود، یارمه حال فیلپا رو همون ابتدای افتضاصیه کنگور گرفت 🇮🇷

۷۴- به ازای کدام مقادیر a نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (ریاضی داخل ۹۲)

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$ (۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$

معادلات گویا

در معادلات گویا پس از حل معادله باید حتماً جواب‌ها را در مخرج کسر اصل بررسی کنیم اگر مخرج را صفر کند آن ریشه غ ق است.

$$\frac{p}{q} = 0 \Rightarrow p = 0 \quad (\text{بررسی } q \neq 0)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow \text{طرفین وسطین} \Rightarrow AD = BC$$

دو طرف را در مخرج مشترک کلیه کسرها ضرب می‌کنیم تا از حالت کسری خارج شود \Rightarrow اگر شامل بیش از ۲ کسر

۷۵- معادله $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x}$ چند جواب دارد؟ (کتاب درسی)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۷۶- اگر $x = -9$ یک جواب معادله $\frac{a+1}{x} - \frac{a}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$ باشد. جواب دیگر معادله کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) ۹ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) جواب دیگری ندارد.

۷۷- نقاشی ساختمانی را در ۲۰ روز رنگ آمیزی می‌کند و نقاش دیگری همان ساختمان را در ۳۰ روز رنگ آمیزی می‌کند، هر دو نقاش با هم این ساختمان را در چند روز می‌توانند رنگ آمیزی کنند؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۷۸- اگر دو ماشین چمن زنی با هم کار کنند می توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار ماشین A دو برابر ماشین B باشد. ماشین A به تنهایی در چند ساعت می تواند چمن کل زمین را کوتاه کند؟ (کتاب درسی)

- ۶(۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۷۹- علی کاری را به تنهایی در ۲ ساعت انجام می دهد و اگر رضا به او کمک کند این کار را در ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه انجام می شود. اگر رضا بخواهد به تنهایی این کار را انجام دهد چقدر زمان می برد؟ (کتاب درسی)

- ۲(۱) ساعت ۳ (۲) ساعت ۴ (۳) ساعت ۵ (۴) ساعت

۸۰- یازده کیلو رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده اند. با تبخیر چند کیلوگرم محلول به ۵۰ درصد می رسد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

- ۰/۴(۱) ۰/۵ (۲) ۰/۶ (۳) ۰/۸ (۴)

حل معادلات گنگ

در برخی معادلات گنگ کافی است یک رادیکال را در یک طرف نگه داشته و سپس طرفین را به توان ۲ برسانیم تا رادیکال حذف شود و در پایان باید حتماً در جوابها را در معادله اصلی امتحان کنیم چون اگر زیر رادیکال فرجه زوج یا حاصل آن منفی شود آن جواب غ ق است.

۸۱- معادله $2x = 1 - \sqrt{2-x}$ چند جواب دارد؟ (کتاب درسی)

- ۱(۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر(۱)

۸۲- اگر $x = 3$ یک ریشه معادله $\sqrt{x+a} - \sqrt{2x-5} = 1$ باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟ (کتاب درسی)

- ۱(۱) $x = 12$ (۲) $x = 15$ (۳) $x = 8$ (۴) ریشه دیگری ندارد.

نکته: معادله به فرم $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ به معادله درجه دوم $at^2 + bt + c = 0$ تبدیل می شود که می تواند از صفر تا دو جواب داشته باشد.

$$x + 3\sqrt{x} - 4 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 + 3t - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1 \\ \sqrt{x} = -4 \rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

وقتی معادله ① دارای دو ریشه حقیقی است که معادله ② دو ریشه مثبت یا صفر داشته باشد. $(s > 0, p \geq 0, \Delta > 0)$

۸۳- به ازای کدام مقادیر a معادله $x - 2\sqrt{x} + a = 2$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

- ۱) $2 < a < 3$ (۲) $2 \leq a < 3$ (۳) $2 < a < 4$ (۴) $2 \leq a < 4$

۸۴- به ازای کدام مقادیر m از معادله $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب حاصل می شود؟ (تجربی داخل ۸۸)

- ۱) $-\frac{3}{2} < m < 2$ (۲) $0 < m < 2$ (۳) $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$ (۴) $2 < m < 3$

۸۵- حاصل ضرب ریشه های معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

۸۶- در معادله $x - 9\sqrt{x} + 4 = 0$ مجموع معکوس ریشه ها کدام است؟

 $\frac{73}{16}$ (۴) $\frac{81}{16}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۱)

گاهی بدون حل یک معادله گنگ می توان تشخیص داد جواب حقیقی ندارد یا تک جواب آن را در صورت وجود بدست آورد چند نکته زیر شما را در تشخیص سریع این قضیه کمک می کند .

الف (مجموع چند عبارت مثبت هیچ گاه صفر یا منفی نمی شود .

ب (مجموع چند عبارت نامنفی فقط زمانی صفر می شود که همگی همزمان با هم صفر شوند .

ج (اگر $\sqrt{a} = b$ می دانیم باید هم $a \geq 0$ و هم $b \geq 0$ باشد .

۸۷- چه تعدادی از معادلات زیر دارای ریشه حقیقی هستند؟ (کتاب درسی)

الف) $\sqrt{t} + 2 = 0$ (۱) صفر ب) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$ (۲) ۱ ج) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 5$ (۳) ۲ د) $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 0$ (۴) ۳ ه) $\sqrt{x-3} + x = 2$ (۴) ۳

۸۸- معادله $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-x-2} = 0$ چند ریشه دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۸۹- معادله $\sqrt{x-2} + x^2 = x + 2$ چند جواب دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)