ریاضی خور یازدهم (تجربی)

به سبک آبادانی

- ✓ موشکافی مسائل کتاب درسی
- ✓ مسائلی از امتحانات نهایی آبادان و حومه!

نویسنده: حسین ایزن

ریاضی خور یازدهم (تجربی)

به سبک آبادانی

(نسخه دست نویس- بخش اول)

- ✓ موشکافی مسائل کتاب درسی
- ✓ مسائلی از امتحانات نهایی آبادان و حومه!

حسین ایزن

مقدمه

به لطف خدا نوشتن قسمت اول کار جدید من یعنی ریاضی خور یازدهم (تجربی) به سبک آبادانی هم تموم شد بر خلاف کتاب های قبلی قصد دارم نسخه اولیه این کتاب رو به صورت دست نویس منتشر کنم این کارم هم چنتا دلیل داره:

اول اینکه نسخه آزمایشی کتاب ریاضی یازدهم تجربی به تازگی منتشر شده و نسخه نهایی هنوز بیرون نیومده

دوم اینکه بچه های زرنگی که می خوان درسای سال آینده رو پیش خوانی کنن منبعی واسه درس ریاضی ندارن

سوم اینکه به خاطر حجم زیاد مطالب ریاضی یازدهم، تایپ و صفحه آرایی کتاب زمان زیادی می بره و عملا کتاب به موقع به دست بچه ها نمیرسه

بنابراین من سعی می کنم هر دو سه هفته یکبار یک بخش از کتاب ریاضی خور رو پاکنویس و اسکن کنم و واستون بزارم روی اینترنت. هر چند کیفیت اسکن اونطور که می خواستم نشد ولی مطمئن باشید که از خوندن کتاب لذت می برید.

در مورد سبک نوشتن کتاب هم باید خدمتتون عرض کنم که حتی الامکان سعی کردم چهارچوب های کتاب درسی رو رعایت کنم یعنی اول از همه تمرین ها و مسائل کتاب درسی رو با هم بررسی می کنیم و در پایان هر درس هم قسمتی تحت عنوان مسائل امتحانات نهایی آبادان و حومه! قرار دادم که مخصوص بچه های زرنگ تر هست.

بعد از هر مبحث هم چنتا تمرین قرار دادم که می تونید راهنمایی و جواب تمرین ها رو در کانال تلگرام ریاضی خور @riazikhor ببینید. اگرم در مورد مطالب کتاب سوالی دارید از طریق تلگرام به همین شماره ای که دادم پیغام بدید.

مثل همیشه سعی کردم که حاصل کارم کم اشتباه از آب در بیاد امیدوارم این تلاش مورد قبول دانش آموزان سرزمینم و دبیران عزیز قرار بگیره. مشتاقانه پذیرای نظرات ارزشمند همه عزیزان هستم.

در آخر لازمه تشکر ویژه ای داشته باشم از مدیران محترم سایت های پی سی دانلود ، کنکور (http://konkur.in)، ریاضی سرا (http://riazisara.ir) پارس بوک (www.parsbook.org)، کتابناک (http://ketabnak.com) و ... که زحمت انتشار کتابهای قبلی من رو بر عهده گرفتن.

و اما روشهای ارتباط:

کانال تلگرام ریاضی خور @riazikhor

SMS: 0938 572 5274

وبلاگ انتگرال خور: integralkhor.blogfa.com

ایمیل انتگرال خور: integralkhor@gmail.com

حسین ایزن

آبادان - ۴ تیرماه ۱۳۹۶

چون دوستان زیادی از من در مورد کتابهام سوال می کنن خدمتتون بگم که فعلا این سه کتاب از من چاپ شده که در زیر عکسشون رو ملاحظه می کنید و برای تهیه این کتابها کافیه به کتابفروشی های معتبر شهر خودتون مراجعه نکنید !! چون همشون به صورت رایگان در اینترنت در دسترس همه هستن. (بگذریم که عده ای این کتابها رو به اسم خودشون به ملت می فروشن!!)

اولین کتابم انتگرال خور (جلد اول) هستش که حدود پنج سال پیش منتشر شده و در مورد انتگرال نامعین هست و بیشتر به کار دانش جوها میخوره البته دانش آموزای زرنگ و علاقمند هم چیزهای جالبی توی این کتاب پیدا می کنن. این کتاب علاوه بر ایران در افغانستان هم طرفدارای زیادی داره!

روشهای عدم موفقیت در کنکور اسم دومین کتاب من هست که چند ماهیه منتشر شده و البته به معروفیت انتگرال خور نیست. این کتاب در اصل برای دانش آموزای دبیرستانی که قصد شرکت در کنکور سراسری رو دارن نوشته شده و حاصل تجربیات من در زمینه کنکور هست. این کتاب به زبان طنز نوشته شده و میتونه واسه دانش جوهایی که میخوان کنکور ارشد بدن و کلا واسه کسایی که دنبال شیوه های مناسب مطالعه هستن مفید باشه.

و اما سومین کتاب من اسمش دنباله خور هست این کتاب در مورد دنبا له های حسابی و هندسی صحبت می کنه و برای دانش آموزای دبیرستانی و داوطلبان کنکور نوشته شده.

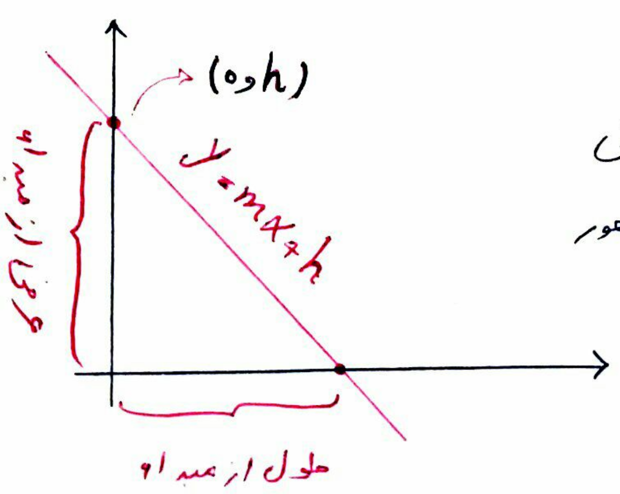
سلام

اولین فصل از کتاب ریاضی یازدهم تجربی شامل سه درس هستش که درس اول به هندسه تحلیلی، درس دوم به معادلات درجه دوم و سهمی و درس سوم به معادلات گویا و گنگ اختصاص داره و به نظر من مهمترین و درعین حال سوال خیزترین فصل کتاب هست پس خوب حواستون رو جمع کنید که این فصل رو با هم بترکونیم! پس بریم سراغ درس اول.

درس اول : هندسه تحلیلی

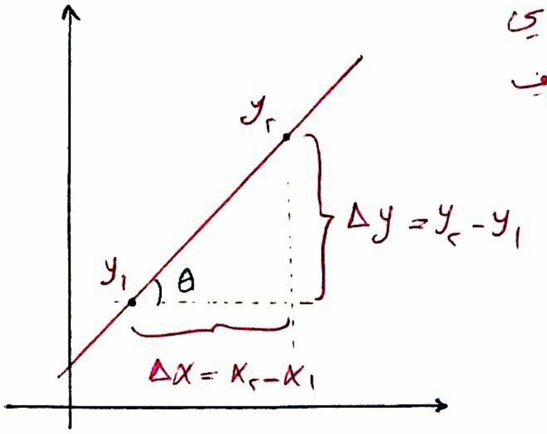
مبحث هندسه تحلیلی در واقع دنباله همون مباحث مربوط به معادله خط هست که در فصل ششم سال نهم خوندید (البته بچه های آبادان اینها رو توی دبستان می خونن!)

یادتون هست که صورت کلی معادله خط به شکل $ax+by=c$ هست که البته ما ترجیح می دیم که اون رو به صورت $y=mx+h$ بنویسیم که در این حالت m شیب خط و h عرض از مبداء خط می باشد.



یادآوری:

عرض محل برخورد خط به محور yها را عرض از مبداء و طول محل برخورد خط با محور xها رو طول از مبداء خط می نامیم.



از طرفی شیب خط رو به صورت نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی خط به صورت زیر تعریف کردیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

شیب خط در واقع تانژانت زاویه‌ای هست که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازه. (نگید که تعریف تانژانت یادتون رفته! ...)

$$\tan\theta = m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

خب بریم یه مثال دست‌گرمی باهم حل کنیم.

<u>مثال</u>: شیب و عرض از مبداء خطوط زیر را بدست آورید.

الف) $2y + x = 3$

حواستون باشه که برای بدست آوردن شیب و عرض از مبداء خط باید معادله خط رو به صورت $y = mx + h$ بنویسیم.

$$2y + x = 3 \Rightarrow 2y = -x + 3 \xRightarrow{\div 2} y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

که در این حالت ضریب x میشه m یا شیب خط و عدد ثابت میشه عرض از مبداء

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{2} \qquad h = \frac{3}{2}$$

البته اگر $x=0$ رو در معادله قرار بدیم مقدار عرض از مبداء مستقیماً درمیاد (چرا؟)

$$x=0 \Rightarrow 2y + 0 = 3 \Rightarrow y = h = \frac{3}{2}$$

ب) $\frac{x-2}{3}+5y=0$

$$\Rightarrow 5y=-\frac{x-2}{3}=-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\xrightarrow{\div 5} \boxed{y=-\frac{1}{15}x+\frac{2}{15}}$$

$\boxed{m=-\frac{1}{15}}$ شیب خط $\qquad$ $\boxed{h=\frac{2}{15}}$ عرض از مبدأ

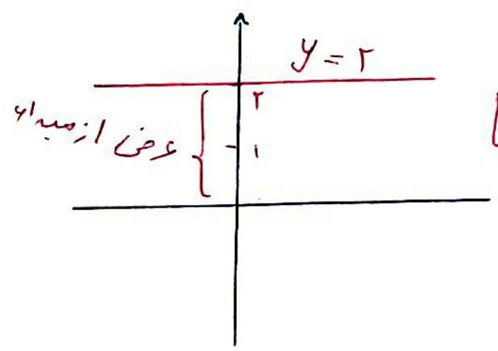
ج) $y-2x=0 \Rightarrow \boxed{y=2x} \quad \boxed{m=2} \quad \boxed{h=0}$

یادآوری: $y=mx$ صورت کلی خط‌هایی هست که از مبدأ مختصات می‌گذرند و عرض از مبدأ آنها صفر است.

د) $y-3=0 \Rightarrow \boxed{y=3} \Rightarrow \boxed{m=0} \quad \boxed{h=3}$

یادآوری: $y=k$ صورت کلی خطوط افقی است که شیب آنها برابر صفر است.

مثلاً



$\Rightarrow \quad m=0 \quad h=2$

آقا اجازه، از کجا فهمیدید شیب خط صفر هست؟

استاد: کاری نداره پسر! دو نقطهٔ دلخواه روی خط در نظر بگیر و شیب رو حساب کن. فقط حواست باشه که توی خط بالا y تمام نقاط برابر ۲ هست.

$$A(1,2)\ ,\ B(3,2) \Rightarrow m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-2}{3-1}=\frac{0}{2}=\boxed{0}$$

اینطوری هم میشه گفت که $y=2$ در واقع بوده $y=(0)x+2$ یعنی ضریب x که شیب خط هست صفر بوده واسه همین اصلاً ننوشتیم.

معادله خط

همانطور که می دونید برای رسم خط به مختصات دو نقطه از خط نیاز داریم. به همین صورت برای نوشتن معادله خط هم مختصات دو نقطه از خط مورد نیاز هست. به طور کلی معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می گذرد از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\boxed{y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)}$$

که عبارت $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ همون شیب خط هست. بنابراین می تونیم معادله خط رو به صورت قشنگ تر زیر بنویسیم:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

دقت کنید در بسیاری از مسائل به جای مختصات دو نقطه، مختصات یک نقطه و شیب خط به ما داده میشه که در واقع کار ما رو ساده کردن که می تونیم مستقیماً از معادله بالا استفاده کنیم.

توجه: دقت کنید که توی دو تا فرمول بالا y و x رو با آبی و بقیهٔ پارامترها رو با قرمز نوشتم. دلیل این کار اینه ست که حواستون باشه که x_1 و y_1 و x_2 و y_2 اعدادی هستن که باید از مسئله در معادلهٔ خط جایگذاری کنیم اما x و y به همین صورت باقی می مونن.

حالا بریم یه مثال دست گرمی باهم حل کنیم:

مثال: معادله خطوط زیر را بنویسید.

الف) خطی که از دو نقطهٔ (۰ و ۲) و (۲ و ۳) می‌گذرد.

$x_1\ y_1$ $x_2\ y_2$

اول شیب خط رو بدست بیاریم.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{۲ - ۰}{۳ - ۲} = \frac{۲}{۱} = \boxed{۲}$$

حالا با خیال راحت معادله خط رو می‌نویسیم!

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - ۰ = ۲(x - ۲)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = ۲x - ۴}$$

ب) خطی که از نقطهٔ (۲ و ۰) می‌گذرد و شیب آن برابر $\frac{۳}{۲}$ باشد.

$\boxed{m = \frac{۳}{۲}}$ خب اینجا کار ما راحت شده!

$$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - ۲ = \frac{۳}{۲}(x - ۰)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{۳}{۲}x + ۲}$$

یک روش دیگه برای نوشتن معادله خط استفاده از فرم $y = mx + h$ می‌باشه

این روش به خصوص زمانی که یکی از نقاط داده شده عرض از مبداء خط باشه مفید است.

* حواستون باشه که عرض از مبداء خط به صورت (h و ۰) داده میشه یعنی نقطه‌ای که طولش صفر باشه عرض اول نقطه میشه عرض از مبداء

مثال: معادله خطوط خواسته شده را با استفاده از فرمول $y = mx + h$ بنویسید.

الف) معادله خطی که از دو نقطه $A(0,7)$ و $B(3,1)$ بگذرد.

عرض از مبدا h است

چون خط خواسته شده از دو نقطه A و B می گذرد بنابراین مختصات این دو نقطه در معادله خط صدق می کنند.

بنابراین معادله خط رو به صورت $y = mx + h$ فرض می کنیم و مختصات A و B را در خط جایگذاری می کنیم.

$A(0,7) \Rightarrow 7 = m(0) + h \Rightarrow h = 7$ عرض از مبدا

$B(3,1) \Rightarrow 1 = m(3) + 7 \Rightarrow 1 = 3m + 7$

$3m = -6 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow y = -2x + 7$ معادله خط

ب) معادله خطی که از دو نقطه $A(2,0)$ و $B(3,2)$ بگذرد.

$A(2,0) \Rightarrow 0 = m(2) + h \Rightarrow 2m + h = 0$ (1)

$B(3,2) \Rightarrow 2 = m(3) + h \Rightarrow 3m + h = 2$ (2)

روابط (1) و (2) تشکیل یک دستگاه ۲ معادله دو مجهول را می دهند که با حل آن مقادیر m و h بدست میاد.

$$\begin{cases} 2m + h = 0 \\ 3m + h = 2 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} -2m - h = 0 \\ 3m + h = 2 \end{cases}$$

جمع دو معادله

$\Rightarrow 3m - 2m = 2$

$\Rightarrow m = 2$

$3m + h = 2 \Rightarrow 3(2) + h = 2 \Rightarrow h = -4$

$\Rightarrow y = 2x - 4$ معادله خط

خطوط موازی و عمود برهم

در سال نهم یاد گرفتیم که شرط موازی بودن دو خط این هست که شیب آنها برابر باشد.

مثلاً شیب دو خط $y+2x=1$ و $2y=3-4x$ باهم برابر است پس این دو خط باهم موازی هستند. (یک حالت خاص از خطوط موازی زمانی هست که دو خط برهم منطبق باشند که بعداً در موردش صحبت می‌کنیم)

به همین صورت میشه نشون داد که شرط عمود بودن دو خط این هست که حاصل ضرب شیب های آنها برابر -1 باشه. مثلاً دو خط زیر برهم عمودند:

$$L_1: \quad y+2x=3 \qquad\qquad L_2: \quad 2y=x-5$$

$$y+2x=3 \Rightarrow y=-2x+3 \Rightarrow \boxed{m_1=-2}$$

$$2y=x-5 \xrightarrow{\div 2} y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{m_2=\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1 \cdot m_2=-1} \Rightarrow \boxed{L_1 \perp L_2}$$ خط L_1 بر L_2 عمود است

به عبارت دیگه:

دو خط غیر موازی با محورهای مختصات برهم عمودند هرگاه حاصل ضرب شیب‌ها آنها برابر (-1) باشه یعنی $m \cdot m'=-1$ به عبارت دیگر شیب هرکدام عکس و قرینهٔ شیب دیگری باشد.

مثال: در هر قسمت مشخص کنید که خطوط داده شده نسبت به هم چه وضعیتی دارند.

الف) $L: \; y=5x-2$ $\qquad\qquad$ $d: \; y=-\frac{1}{5}x+3$

$L \Rightarrow \boxed{m=5}$ $\qquad\qquad$ $d \Rightarrow \boxed{m'=-\frac{1}{5}}$

$$\Rightarrow \boxed{m \cdot m'=5\left(-\frac{1}{5}\right)=-1} \quad \boxed{L \perp d}$$ خط L بر خط d عمود است.

ب) $L: 2x - 3y + 3 = 0$ $d: 3x + 2y = 0$

L:

$3y = 2x + 3$

$y = \frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$

d:

$2y = -3x$

$y = -\frac{3}{2}x \Rightarrow m' = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow m \cdot m' = -1 \Rightarrow L \perp d$ دوخط برهم عمودند.

ج) $L: y = \frac{1}{2}x + 7$ $d: x - 2y = 1$

L:

$m = \frac{1}{2}$

d:

$2y = x - 1$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$m' = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow m = m' \Rightarrow$ دوخط باهم موازی هستند

مثال: نشان دهید دو خط زیر متقاطع هستند سپس مختصات نقاط تقاطع دوخط را بیابید.

$L: y + 2x = 1$ $d: y = x + 3$

$m = -2$ $m' = 1$

چون دوخط موازی نیستند پس متقاطع هستند (یعنی یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند)
که برای پیدا کردن نقطهٔ تقاطع کافیه معادله دوخط را در یک دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول
بنویسیم و x و y را پیدا کنیم.

$$\begin{cases} y + 2x = 1 \\ y - x = 3 \quad \times(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 2x = 1 \\ -y + x = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو معادله}} 3x = -2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

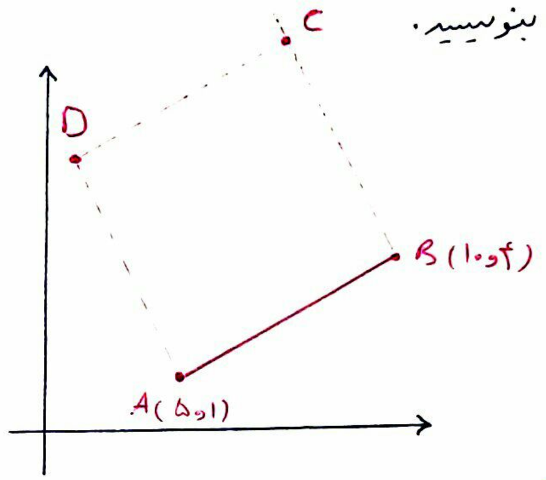
$$\Rightarrow y = 3 + x = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

پس دوخط یکدیگر را در نقطهٔ $(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$ قطع می‌کنند.

یه مثال ساده ولی خیلی مهم از کتاب درسی

مثال: مربع ABCD در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است به طوری که $A(5,1)$ و $B(10,4)$ دو رأس مجاور آن هستند

الف) شیب خط AB را بیابید و معادلهٔ آن را بنویسید.



خب این قسمت که خیلی سادست

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-1}{10-5} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - 1 = \frac{3}{5}(x-5) \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{5}x - 2}$$

ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادله این ضلع را هم بنویسید.

خب اینجا یه کوچولو دقت می‌خواد!

چون ABCD مربع هست پس ضلع AD بر AB عمود هست بنابراین داریم:

$$m_{AD} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{3}{5}} = \boxed{-\frac{5}{3}}$$

بنابراین با داشتن شیب خط AD و یک نقطه از آن (نقطهٔ A) می‌تونیم معادله خط AD را بنویسیم:

$$y - y_A = m_{AD}(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - 1 = -\frac{5}{3}(x-5) \Rightarrow y - 1 = -\frac{5}{3}x + \frac{25}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{5}{3}x + \frac{28}{3}}$$

ب) اگر بدانیم نقطهٔ $C(7,9)$ رأس سوم مربع است مختصات رأس D را بیابید.

اینجا هم یه خورده دقت لازمه!

نقطهٔ D در واقع نقطهٔ تقاطع خطوط CD و AD هست بنابراین کافیه معادله خط CD رو بدست بیاریم (معادله خط AD رو هم که در قسمت قبل بدست آوردیم) و بعد با تشکیل یک دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول نقطهٔ تقاطع D را بدست بیاریم.

پس بریم سراغ نوشتن معادله خط CD:

چون ضلع CD موازی AB هست بنابراین

$$m_{CD} = m_{AB} = \frac{3}{5}$$

اکنون با داشتن شیب خط CD و مختصات نقطهٔ C می‌تونیم معادلهٔ خط CD رو بنویسیم:

$$y - y_C = m_{CD}(x - x_C) \Rightarrow y - 9 = \frac{3}{5}(x - 7)$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{24}{5}$$

حالا معادلهٔ خطوط CD و AD را در یک دستگاه می‌نویسیم تا نقطهٔ تقاطع دو خط یعنی نقطهٔ D در بیاد:

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{3}x + \frac{28}{3} \\ y = \frac{3}{5}x + \frac{24}{5} \end{cases} \times(-1) \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{3}x + \frac{28}{3} \\ -y = -\frac{3}{5}x - \frac{24}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{5}{3}x - \frac{3}{5}x + \frac{28}{3} - \frac{24}{5} \cdots\cdots \Rightarrow x = 2 \text{ و } y = 6$$

$$\Rightarrow D(2,6)$$

نکته: دقت کنید در این مسئله بدون داشتن مختصات نقطهٔ C هم می‌تونید مسئله رو حل کنید البته حل مسئله یکم مشکل‌تر میشه (البته نه برای بچه‌های بادان!) که بعداً بهش اشاره می‌کنیم.

فعلاً بریم سراغ یه مسئله دست گرمی دیگه

مثال: نشان دهید که خطوط L_1 و L_2 و L_3 از یک نقطه می‌گذرند.

$L_1:\ 2y - x = 8 \qquad L_2:\ y = 3x - 1 \qquad L_3:\ 2x + y - 9 = 0$

حل: این مسئله ظاهرش نفت میزنه ولی چیزی نداره!

برای اینکه نشون بدید سه خط از یک نقطه می‌گذرند کافیه اول نقطهٔ تقاطع دوتا از خط‌ها رو بدست بیارید بعد نشون بدید که خط سوم هم از این نقطه می‌گذره.

پس اول نقطهٔ تقاطع خطوط L_1 و L_2 رو بدست میاریم:

$$\begin{cases} 2y - x = 8 \\ y - 3x = -1 \quad \times(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - x = 8 \\ -2y + 6x = +2 \end{cases} \Rightarrow \text{جمع دو معادله}$$

$$\Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow \boxed{x = 2} \qquad 2y - 2 = 8 \Rightarrow \boxed{y = 5}$$

$\boxed{O(2, 5)}$ محل تقاطع خطوط L_1 و L_2

حالا کافیه مختصات نقطهٔ O را در خط L_3 قرار بدیم و نشون بدیم که O روی L_3 قرار داره.

$$\Rightarrow O \to L_3 \Rightarrow 2(2) + 5 - 9 = 0 \Rightarrow 9 - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \checkmark$$

چون مختصات O در L_3 صدق می‌کند پس L_3 هم از O می‌گذرد به عبارت دیگه هر سه خط L_1 و L_2 و L_3 از نقطهٔ O می‌گذرند.

تمرین های سری اول

* برای جواب تمرین ها به کانال تلگرام ریاضی خور @riazikhor مراجعه کنید

① معادله خطی را بنویسید که از محل برخورد دو خط $x+y-3=0$ و $2x-y+5=0$ عبور کرده و بر خط $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$ عمود باشد.

② نقاط $A(2,3)$ و $B(-1,0)$ و $C(1,-2)$ سه راس از یک مستطیل هستند مختصات راس چهارم مستطیل را بیابید.

③ مقدار m را چنان بیابید که سه خط $x-y=3$ و $2x+y=0$ و $(m+1)x+y=5$ از یک نقطه بگذرند.

④ اگر نقاط $A(6,2)$ و $B(8,6)$ و $C(4,8)$ سه رأس یک متوازی الاضلاع باشند رأس چهارم را بیابید.

⑤ در مثلث ABC اگر $M(2,0)$ وسط ضلع BC باشد نشان دهید مثلث ABC متساوی الساقین است.

⑥ نقاط تقاطع خطوط داده شده را بیابید و آن را روی دستگاه مختصات رسم کنید. شکل حاصل چه شکلی است؟

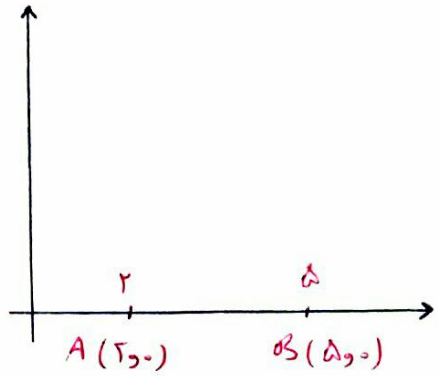
$L_1: \ 2x+y=3$ $\qquad L_2: \ y=\frac{3x-2}{5}$ $\qquad L_3: \ 2y=5-4x$

$L_4: \ 10y-1=6x$

توجه: برای حل مسائل بالا تنها از مطالب گفته شده تا این قسمت استفاده کنید.

فاصلهٔ دو نقطه از هم

دو نقطهٔ $A(2,0)$ و $B(5,0)$ را روی محور xها در نظر بگیرید اگر بخواهیم فاصلهٔ بین این دو نقطه رو حساب کنیم چون عرض دو نقطه برابر است خیلی راحت می‌تونیم طول دو نقطه رو از هم کم کنیم.



$$AB = x_B - x_A = 5 - 2 = 3$$

چون فاصلهٔ بین دو نقطه همیشه مثبت در نظر گرفته می‌شه ما عبارت $x_B - x_A$ رو داخل قدر مطلق می‌ذاریم تا جواب همیشه مثبت بشه:

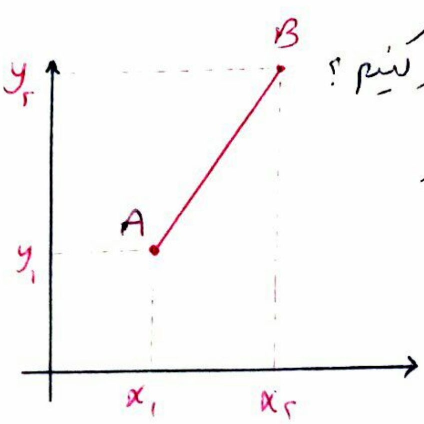
$$\boxed{AB = |x_B - x_A|}$$

به همین صورت اگر دو نقطهٔ هم عرض مثل $C(0,3)$ و $D(0,7)$ داشته باشیم فاصلهٔ CD از رابطهٔ زیر بدست میاد:

$$CD = |y_D - y_C| = |7-3| = 4$$

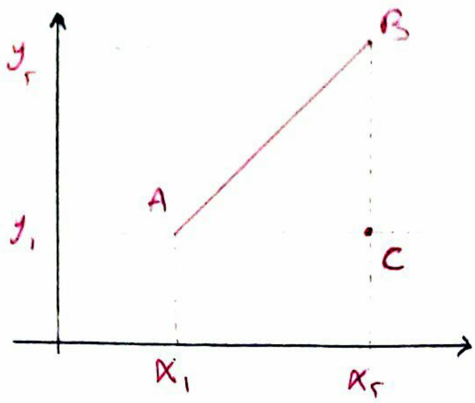
دقت کنید چون از علامت قدر مطلق استفاده می‌کنیم فرقی نمی‌کنه بنویسیم $|y_D - y_C|$ یا $|y_C - y_D|$

حالا اگر طول دو نقطه یا عرض دو نقطه یکسان نبود باید چه کار کنیم؟



مثلاً به شکل روبرو دقت کنید فرض کنید می‌خواهیم فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ رو بدست بیاریم.

اگر از A خط افقی و از B خطی عمودی رسم کنیم تا مثلث قائم الزاویهٔ ABC تشکیل بشه اونوقت داریم:



از طرفی واضحه که مختصات نقطهٔ C به صورت $C(x_2, y_1)$ هست بنابراین فاصله‌های AC و BC به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$AC = |x_C - x_A| = |x_2 - x_1|$$

$$BC = |y_B - y_C| = |y_2 - y_1|$$

از طرفی طبق قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

چون $(x_2 - x_1)$ و $(y_2 - y_1)$ به توان ۲ رسیدن بنابراین حتماً مثبت هستند و نیازی به نوشتن قدر مطلق نیست و می‌تونیم بنویسیم

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

که البته بهتره به صورت زیر بنویسیم:

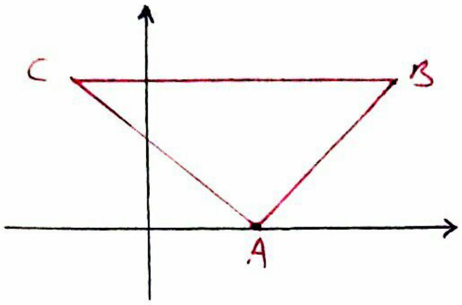
$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

رابطهٔ بالا یه رابطهٔ مهم و کاربردی در هندسه تحلیلی هستش. فقط حواستون باشه موقع جمع تفریق کردن و جایگذاری اعداد در رابطهٔ بالا سوتی ندید!

یه مثال ساده اما مهم از کتاب درسی

مثال: نقاط $A(۲,۰)$ ، $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ را در نظر بگیرید و آنها را روی دستگاه محورهای مختصات نشان دهید.



الف) محیط مثلث ABC را با محاسبهٔ طول اضلاع آن به دست آورید.

خب این قسمت خیلی آسونه کافیه طول تک تک اضلاع مثلث رو بدست بیاریم و با هم جمع کنیم

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲} = \sqrt{(۵-۲)^۲+(۴-۰)^۲} = \sqrt{۲۵} = \boxed{۵}$$

$$AC = \sqrt{(x_C-x_A)^۲+(y_C-y_A)^۲} = \sqrt{(-۲-۲)^۲+(۳-۰)^۲} = \sqrt{۲۵} = \boxed{۵}$$

$$BC = \sqrt{(x_C-x_B)^۲+(y_C-y_B)^۲} = \sqrt{(-۲-۵)^۲+(۳-۴)^۲} = \sqrt{۵۰} = \boxed{۵\sqrt{۲}}$$

$$\text{محیط مثلث} = AB+AC+BC = ۵+۵+۵\sqrt{۲} = \boxed{۱۰+۵\sqrt{۲}}$$

ب) ABC چه نوع مثلثی است؟

اینجا یکم دقت لازمه. وقتی از شما نوع مثلث رو می‌پرسن ۴ حالت پیش میاد

۱) اگر سه ضلع مثلث با هم برابر باشه مثلث متساوی الاضلاع هست.

۲) اگر فقط دو ضلع مثلث با هم برابر باشه مثلث متساوی الساقین هست.

۳) اگر رابطهٔ فیثاغورث در مثلث برقرار باشه مثلث قائم الزاویه هست.

۴) اگر هر دو حالت ۲ و ۳ برقرار باشه مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین هست.

⇐ حب در اینجا بیون AB=AC پس مثلث ABC متساوی الساقین هست و بیون داریم

$$AB^2+AC^2=BC^2 \Rightarrow 5^2+5^2=(5\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 25+25=25(2) \Rightarrow 50=50 \checkmark$$

پس رابطهٔ فیثاغورث برقرار هست و مثلث ABC قائم الزاویه هم می باشه.

پ) به دو روش نشان دهید مثلث ABC قائم الزاویه است سپس مساحت آن را حساب کنید:

یک روش برای تشخیص مثلث قائم الزاویه استفاده از قضیهٔ فیثاغورث هست که در قسمت قبل بهش اشاره کردیم.

اما روش دوم برای این کار این هست که نشون بدیم دو ضلع AB و AC بر هم عمودند بنابراین شیب این دو خط رو محاسبه می کنیم.

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-0}{5-2}=\frac{4}{3}$$ شیب خط AB

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{3-0}{-1-2}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}$$ شیب خط AC

$$\Rightarrow m_{AB}\cdot m_{AC}=\left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)=-1$$

$$\Rightarrow AB \perp AC$$ دو خط AB و AC بر هم عمود هستند پس زاویهٔ A قائمه است.

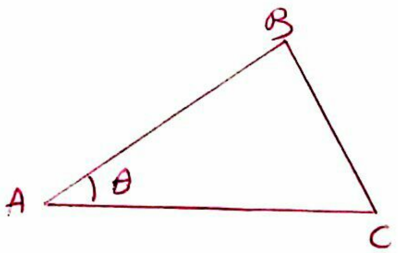
⇐ مطالب: مساحت مثلث ABC :

روش اول : چون اضلاع AB و AC بر هم عمود هستند می‌تونیم بنویسیم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(\text{قاعده})(\text{ارتفاع}) = \frac{1}{2}(AB)(AC) = \frac{1}{2}(5)(5) = \frac{25}{2}$$

روش دوم :

در سال قبل یاد گرفتیم که مساحت مثلث رو میشه از رابطهٔ زیر هم حساب کرد.



$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\theta$$

در اینجا چون مثلث ABC قائم الزاویهٔ متساوی الساقین هست پس $\hat{ABC} = 45^\circ$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(AB)(BC)\sin \hat{ABC} = \frac{1}{2}(5)(5\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{25}{2}$$

* یک حالت خاص فاصلهٔ بین دو نقطه زمانی هست که بخوایم فاصلهٔ یک نقطه از مبداء $O(0,0)$ رو بدست بیاریم که در این حالت فرمول فاصلهٔ دو نقطه به صورت زیر ساده میشه

$$OA = \sqrt{(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2} = \sqrt{(x_A - 0)^2 + (y_A - 0)^2} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

مثال : دایره‌ای به مرکز مبداء مختصات از نقطهٔ $N(-6,8)$ گذشته است شعاع دایره را بیابید

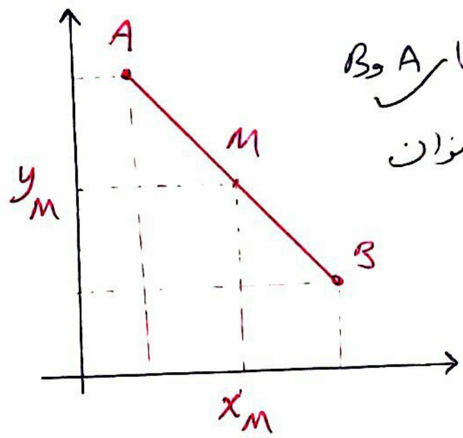
شعاع دایره همون فاصلهٔ ON هست

$$ON = R = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$$

نقطهٔ وسط پاره خط

با روشی مشابه قسمت قبل (در نظر گرفتن حالت افقی، حالت عمودی و در نهایت حالت کلی) می‌تونیم نشون بدیم که اگر M وسط پاره‌خط AB باشه مختصات این نقطه برابر است با

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$



به بیان ساده‌تر طول نقطهٔ M میشه میانگین طول‌های A و B و عرض نقطهٔ M میشه میانگین عرض‌های A و B. به عنوان مثال اگر مختصات A برابر A(۲,۵) و مختصات B برابر B(۶,-۳) باشه مختصات M می‌شود.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

پس M(۴,۱) وسط پاره خط AB است.

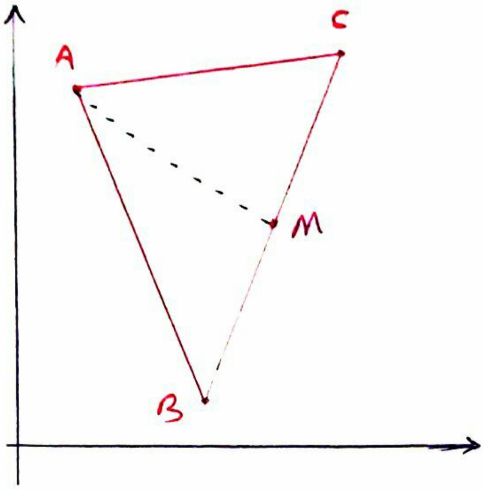
نقطهٔ وسط پاره خط AB عبارت است از $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

آقا اجازه: این که خیلی آسونه!

استاد: حالا صبر بده بیر! همیشه هم این قدر آبکی نیست

به قول بچه‌ها: shooTey, shooTey

مثال : مثلث ABC با رئوس A(۱,۹) و B(۳,۱) و C(۷,۱۱) را در نظر بگیرید و آنها را در دستگاه مختصات رسم کنید.



الف) مختصات M وسط ضلع BC را مشخص کنید.

این که خیلی راحته.

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1+11}{2} = 6$$

$$\Rightarrow M(5,6)$$

ب) طول میانهٔ AM را حساب کنید.

توجه : میانه خطی است که یک راس مثلث رو به وسط ضلع مقابل وصل می کند.

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (6-9)^2} = 5$$

ج) معادله میانهٔ AM را بدست آورید.

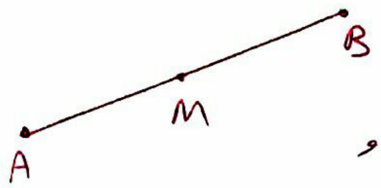
اول شیب خط AM رو بدست میاریم.

$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{6-9}{5-1} = \frac{-3}{4}$$

$$\Rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 9 = -\frac{3}{4}(x-1)$$

$$\Rightarrow y - 9 = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow 4y + 3x = 39$$

مثال: نقطهٔ M به مختصات $M(5,-4)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ A و $B(7,-2)$ است (الف) مختصات نقطهٔ A را بیابید.



اینجا یکم توجه لازمه:

در این مسئله مختصات وسط پاره‌خط داده شده و مختصات یکی از دو سر پاره‌خط را می‌خواهند

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 5 = \frac{x_A + 7}{2} \Rightarrow \boxed{x_A = 3}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -4 = \frac{y_A - 2}{2} \Rightarrow \boxed{y_A = -6}$$

$$\Rightarrow \boxed{A(3,-6)}$$

ب) قرینهٔ نقطهٔ $A(1,2)$ نسبت به نقطهٔ $M(-1,4)$ را بدست آورید.

این تمرین در عین سادگی خیلی مهمه! خوب توجه کنید!

اگر قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به M رو B بنامیم M میشه وسط AB به همین راحتی!

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{1 + x_B}{2} \Rightarrow \boxed{x_B = -3}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 4 = \frac{2 + y_B}{2} \Rightarrow \boxed{y_B = 6}$$

$$\Rightarrow \boxed{B(-3,6)}$$

* یه شکل جالب‌تر این مسئله زمانی هست که بخوایم قرینهٔ یک نقطه نسبت به یک خط رو پیدا کنیم که بعداً راجع بهش صحبت می‌کنیم.

مثال: دو نقطهٔ $A(14,3)$ و $B(10,-13)$ را در نظر بگیرید

الف) فاصلهٔ مبداء مختصات را از وسط پاره‌خط AB بدست آورید

خب اول وسط پاره‌خط AB رو پیدا می‌کنیم

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{14+10}{2} = 12 \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3-13}{2} = -5$$

$M(12,-5)$ مختصات وسط AB

$$\Rightarrow OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{(12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$$

فاصله مبداء مختصات تا نقطهٔ M

ب) معادلهٔ عمود منصف پاره‌خط AB را بنویسید.

این قسمت خیلی خیلی مهمه! دقت کنید که عمود منصف AB یعنی خطی که بر AB عمود هست (پس شیب اون قرینهٔ معکوس شیب AB میشه) و درضمن پاره خط AB رو نصف می‌کنه (پس از نقطهٔ M وسط AB می‌گذره)

علاوه بر این هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله هست

خب اول از همه شیب AB رو بدست میاریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-13-3}{10-14} = \frac{-16}{-4} = 4$$

$$m' = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{4}$$ شیب عمود منصف AB

حالا معادلهٔ عمود منصف رو با داشتن شیب و مختصات یک نقطه (نقطهٔ M) می‌نویسیم.

$$y - y_M = m'(x - x_M) \Rightarrow y + 5 = -\frac{1}{4}(x - 12)$$

$$\Rightarrow y + 5 = -\frac{1}{4}x + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - 2$$

$$\text{یا} \Rightarrow \boxed{4y + x + 8 = 0}$$ معادله عمود منصف AB

تمرین های سری دوم

جواب تمرین ها در کانال تلگرام ریاضی خور @riazikhor

(۱) دو انتهای یکی از قطرهای دایره ای نقاط A(۲-و۲) و B(۶و۴) هستند

الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطه C(۷و۳) بر روی محیط این دایره قرار دارد چرا؟

---

(۲) نشان دهید مثلث با رئوس A(۱و۲) و B(۲و۵) و C(۴و۱) یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است.

---

(۳) فاصله دو خط موازی $3x+4y=1$ و $3x+4y=16$ را بیابید

---

(۴) نقاط A و B به ترتیب روی خطوط $y=x+1$ و $2y-x=3$ قرار دارند اگر مختصات نقطه M وسط A و B به صورت M($\frac{5}{2}$و۱) باشد مختصات نقاط A و B را بیابید.

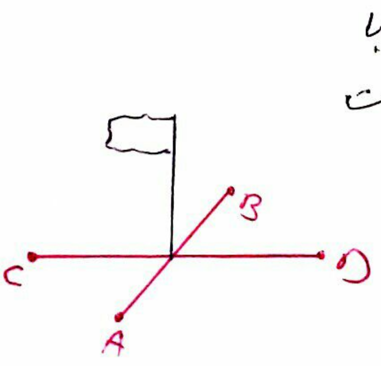
---

(۵) نقاط A(۲و۳) و B(-۱و۰) و C(۱و۲-) سه رأس از یک مستطیل هستند با دانستن این مطلب که در هر مستطیل قطرها منصف یکدیگر هستند مختصات راس چهارم مستطیل را بیابید.

---

(۶) یک میله پرچم بزرگ مطابق شکل توسط کابل هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است. به طوریکه فاصله هر نقطه تا میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا میله. مختصات نقطه D را بدست آورید.

A(-۳و-۲) B(۵و۲) C(۰و۱)



(۷) اگر مختصات وسط های اضلاع مثلثی نقاط $(-2, 1)$ و $(2, 5)$ و $(3, -3)$ باشد. مختصات رئوس مثلث را بدست آورید.

---

(۸) اگر مختصات رئوس مثلث ABC به صورت $A(-3, 1)$ و $B(4, 2)$ و $C(4, -2)$ باشد نشان دهید خطی که وسط های دو ضلع AB و AC را به هم وصل می کند موازی BC بوده و طول آن نصف طول BC است
آیا این مسئله در مورد بقیهٔ اضلاع مثلث هم صادق است؟

---

(۹) نشان دهید دو خط $y = \frac{1}{3}x + 2$ و $y = 2x + 1$ با هم زاویه 45° می سازند

---

(۱۰) اگر نقطهٔ $(6, 2)$ یکی از دو سر قطر دایره و $(-4, 1)$ مرکز دایره باشد

الف) مختصات انتهای دیگر این قطر را بیابید

ب) اگر دو سر قطر دایره در قسمت قبل را AB بنامیم مشخصات دو سر قطری را بیابید که بر قطر AB عمود باشد.

توجه: برای حل مسائل بالا تنها از مطالب گفته شده تا این قسمت استفاده کنید.