استاد : سمانه ترکی

مبحث : جزوه مکمل توابع نمایی و لگاریتمی و حد توابع (نسخه اصلاح شده)

با نام و یاد خداوند بخشنده مهربان

سلام دانش آموز عزیزم.

امروز یک جزوه مکمل از فصلهای توابع نمایی و لگاریتمی و حد رو میبینی . این جزوه قراره به شما دانش آموزان رشته های ریاضی و تجربی و حتی دانش آموزان رشته های مختلف فنی و حرفه ای و کارو دانش کمک کنه ... قراره با هم بفهمیم عدد نپر از کجا اومده و چطور محاسبه میشه.از طرفی چون ممکنه مبحث مشتق رو نخونده باشید ، من میخوام موضوع رو به صورت پیش فرض به صورت یک جزوه مکمل ارائه بدم . میدونم که ممکنه امسال شما دانش آموزان رشته تجربی یا بچه های فنی و حرفه ای و کارو دانش به این موضوع در ریاضیاتتون برخورد نکنید اما قطعا در ریاضیات و فیزیک با این موضوع چه امسال و چه در سالهای آتی مواجه خواهید شد. از طرفی دانش آموزان رشته ریاضیات در حسابان سال یازدهم به این جزوه برای یادگیری بهتر محاسبه حد توابع نمایی نیاز پیدا میکنن. امیدوارم امروز خیلی راحت این موضوع رو یاد بگیری. لازمه بدونی این مبحث میتونه توی درس فیزیکت هم کمکت بکنه چون در برخی مباحث فیزیک بیشتر از مباحث ریاضی به عدد نپر و محاسبه حد آن برخورد میکنی. ضمنا این جزوه با هدف اصلاح قوانین مطرح شده حد و پیوستگی در جزوه فصل ششم برای دانش آموزان یازدهم طراحی شده چون برخی قوانین حد و پیوستگی در نظام جدیدآموزشی تغییر داده شده. برای اینکه برخی ابهامات در زمینه آموزش جدید حد رو برطرف کنم لازم بود جزوه مکمل ارائه بدم. لازمه بدونید که این جزوه قوانین قبلی حد را رد نمیکنه بلکه مطالب رو واضحتر و کاملتر و همینطور ابهامات رو برطرف میکنه .

با یه یاد آوری کوتاه از اواخر جزوه فصل توابع نمایی و لگاریتمی شروع میکنیم .

یادآوری

میدونیم که $\boldsymbol{ln}$ و $\boldsymbol{e}$ یکدیگر را ازبین میبرن . یعنی :

باید x مثبت باشد $\quad e^{\ln x} = x \quad , \quad \ln e^{x} = x$

حالا میدونی که $\boldsymbol{e}$ یا همون عدد نپر از کجا اومده ؟

حالا که مبحث حد رو خوندی میتونیم بگیم که مقدار عدد $\boldsymbol{e}$ از طریق محاسبه حد زیر به دست می آید:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

نکته مهم تابع $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ به خودی خود یک دنباله صعودی و کراندار هم هست .

حالا یکم حد بالا رو باز میکنیم :

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}\xrightarrow{\frac{1}{\infty}=0}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}=(1+0)^{\infty}=1^{\infty}$$

یادته که در فصل حد برخی از حالات مبهم رو بررسی کردیم و گفتم که حالات مبهم دیگه ای هم داریم که در سال بعد میخونی . الان یک حالت مبهم دیگه ای رو بررسی و رفع ابهام میکنیم .

بازم یک یادآوری کوتاه لازمه :

یادآوری حتما با توجه به آموخته های سالهای قبل میگی که عدد یک به هر توانی که برسه برابر با خودش میشه . خب این حرفت صحیحه اما به دو نکته باید توجه کنی :

۱) در مورد محاسبه حد ما با خود نقطه کاری نداریم x به نقطه مورد نظر ما نزدیک میشه اما به خود نقطه مورد نظر ما نمیرسه . لازم به ذکر است که در اینجا منظور از 1^{∞} در واقع 1 حدی است نه 1 مطلق.

۲) در مورد ∞، برای ما مشخص نیست منظور از ∞ چه عددی هستش .

پس 1^{∞} یک عبارت مبهمه مثل $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{\infty}{\text{عدد}}$ یا ... که همگی حدی هستند نه مطلق.

حالا برای رفع ابهام این مورد یک قائده جدید وجود داره . به این قائده روش تغییر متغیر گفته میشه .

یعنی :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{u}\right)^{\underbrace{n}_{v}} = \lim_{x\to x_0}(1+u)^{v} = 1^{\infty} = \lim_{x\to x_0} e^{u\times v}$$

یا بازهم به شکل دیگه هم ممکنه حد فوق را به صورت زیر هم برای رفع ابهام بنویسند :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{f(x)}\right)^{\underbrace{n}_{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty} = \lim_{x\to x_0} e^{(f(x)-1)\times g(x)}$$

حالا چند مثال رو باهم حل میکنیم تا خیلی بهتر این مبحث رو یاد بگیریم :

مثال حاصل حد زیر را بیابید ؟

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{2n}{3}}$$

جواب :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{2n}{3}} = \left(1+\frac{3}{\infty}\right)^{\frac{2\times\infty}{3}}$$

میدونیم که $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$ پس $\frac{3}{\infty} = 0$ و همینطور میدونیم که $\frac{2\times\infty}{3} = \infty$ چون صورت کسر از مخرج آن خیلی خیلی بزرگتره . پس خواهیم داشت :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{2n}{3}} = \left(1+\frac{3}{\infty}\right)^{\frac{2\times\infty}{3}} = (1+0)^{\infty} = 1^{\infty}$$ **مبهم است**

حالا باید رفع ابهامش رو انجام بدیم :

$$\frac{3}{n} = u \quad , \quad \frac{2n}{3} = v$$

حالا داریم :

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{\mathrm{n}})^{\frac{2n}{3}} = \lim_{n\to\infty}(1+u)^{v} = \lim_{n\to\infty} e^{u\times v}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{3}{n}\times\frac{2n}{3}} \xrightarrow{\frac{3}{n}\times\frac{2n}{3}=\frac{2n}{n}=2} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{3}{n}\times\frac{2n}{3}} = e^{2}$$

مثال

حاصل حد زیر را بیابید ؟

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}+1})^{\mathrm{n}+2}$$

جواب : با کمی دقت میبینیم که تابع داده شده در این سوال به صورت $\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{u}\right)^{\overbrace{n}^{v}}$ $\lim_{n\to\infty}$ نیست و ما در این مثال نمی بینیم که عدد ۱ با یک عبارت کسری جمع یا تفریق بشه پس باید از فرمول زیر برای حل این مثال استفاده کنیم

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{f(x)}\right)^{\overbrace{n}^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty} = \lim_{x\to x_0} e^{(f(x)-1)\times g(x)}$$

پس برای حل این مثال خواهیم داشت :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}+1}\right)^{\mathrm{n}+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\infty-1}{\infty+1}\right)^{\infty+2} = 1^{\infty}\text{مبهم}$$

با توجه به فرمول داده شده میدونیم که $g(x) = n+2$, $f(x) = \frac{n-1}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2} = 1^{\infty} = \lim_{n\to\infty} e^{(f(x)-1)\times g(x))}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{n-1}{n+1}-1\right)(n+2)} \xRightarrow{\text{مخرج مشترک}} \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{(n-1)-(n+1)}{n+1}\right)(n+2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\left(-\frac{2}{n+1}\right)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{2(n+2)}{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\left(\frac{2n+4}{n+1}\right)} \xRightarrow{\text{کم توان ها را حذف کن و پر توان ها را نگهدار}} \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{2n}{n}}$$

$$\xRightarrow{n \text{ ها را ساده کن}} \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{2n}{n}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

مثال

حاصل حد زیر را بیابید ؟

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan x^{\tan 2x}$$

جواب : ابتدا در حد داده شده هرجا که x دیدیم به جاش میزاریم $\frac{\pi}{4}$ تا ببینیم پاسخ اولیه حد چی میشه .
اگه مبهم شد لازمه که رفع ابهام کنیم .

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan x^{\tan 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan\frac{\pi}{4}^{\tan 2\times\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan\frac{\pi}{4}^{\tan\frac{\pi}{2}} = 1^{\infty} \text{مبهم}$$

حالا باید رفع ابهام رو انجام بدیم . بهترین راه استفاده از فرمول زیر برای رفع ابهامه :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{f(x)}\right)^{\overbrace{n}^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty} = \lim_{x\to x_0} e^{(f(x)-1)\times g(x)}$$

با استفاده از فرمول فوق داریم :

$$\tan x = f(x) \qquad , \qquad \tan 2x = g(x)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{(f(x)-1)g(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{(\tan x-1)(\tan 2x)}$$

برای اینکه بتونیم به این حد پاسخ بدیم باید تابع $\tan 2x$ رو باز کنیم. میدونیم که :

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

پس حالا خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{(\tan x-1)(\tan 2x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{(\tan x-1)\left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right)} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{(\tan x-1)(2\tan x)}{1-\tan^2 x}}$$

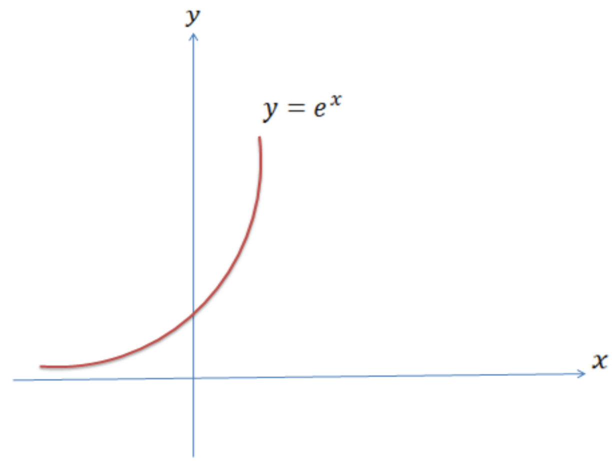
$$\xRightarrow{(1-\tan^2 x)=(1-\tan x)(1+\tan x)} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{(\tan x-1)(2\tan x)}{(1-\tan x)(1+\tan x)}}$$

$$\xRightarrow{(\tan x-1)\ \text{در صورت را با}\ (1-\tan x)\ \text{در مخرج میزنیم}} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{(\tan x-1)(2\tan x)}{(1-\tan x)(1+\tan x)}}$$

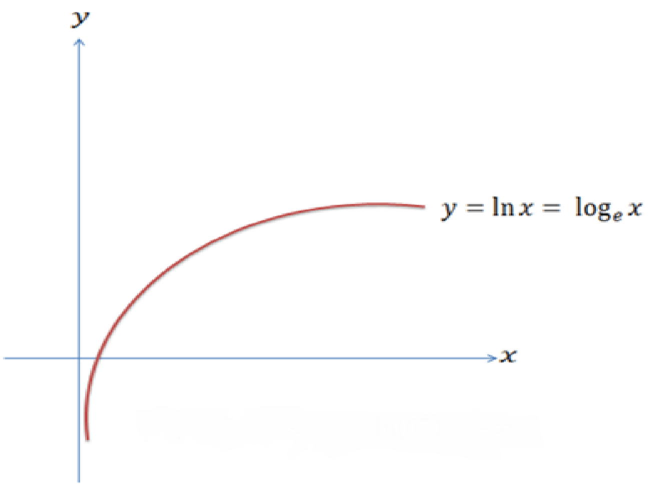
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{2(-1)(\tan x)}{1+\tan x}} = e^{\frac{-2\times 1}{1+1}} = e^{\frac{-2}{2}} = \boxed{e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

نکته مهم

نمودار تابع نمایی $y = e^x$ و تابع لگاریتمی $y = \ln x$ هردو صعودی هستند ، چون پایه ی آنها یعنی e از یک بیشتر است یعنی $e > 1$ به شکلهای زیر نگاه و به نکاتی که در زیر نمودارها با رنگ زرد مشخص شده اند توجه کن :



$e^{+\infty} = +\infty \quad , \quad e^{-\infty} = 0$



$\ln(+\infty) = +\infty \quad , \quad \ln(0^+) = -\infty$

خب حتما میپرسی چرا عدد e اینقدر مهمه ؟ اگه به مطالب مطرح شده در ریاضیات و فیزیک و زیستت نگاه کنی متوجه میشی که دلیل ارزش زیاد این عدد بخاطر کاربرد این عدد در فرایندها و اتفاقات موجود در طبیعت اطراف ماست . به عنوان مثال از عدد e در واپاشیهای هسته ای (رادیو اکتیویته) و رشد جمعیت چه جمعیت انسان ها ، باکتریها و حیوانات و ... و توزیع نرمال جمعیت و ... استفاده میکنیم.

به نکته زیر توجه کن :

نکته مهم الف) در مسائل مربوط به رشد ، اگر جمعیت اولیه B و ضریب رشد k باشد ، تابع مربوط به رشد جمعیت پس از گذشت زمان t به صورت زیر نوشته میشود :

$$f(t) = Be^{kt}$$

به عنوان مثال : اگر جمعیت ایران 80 میلیون نفر باشد (یعنی $B = 80$) و نرخ رشد ۳ درصد (یعنی ضریب رشد جمعیت $k = 0.03$) باشد پس ایران در t سال بعد از فرمول فوق به صورت زیر محاسبه خواهد شد.

جمعیت ایران در t سال آینده $\rightarrow f(t) = 80e^{0.03t}$ **میلیون نفر**

ب) در مسائل زوال ، ضریب k (ضریب رشد) مثبت است (چون به جای رشد زوال یا کاهش داریم یک منفی ثابت در فرمول پشت k قرار میگیرد) در این صورت سرعت زوال از فرمول زیر محاسبه میشه:

$$V(t) = Be^{-kt} \qquad , \qquad k, B > 0$$

پ) در مسائل واپاشی هسته های رادیواکتیویته برای حل مسائل نیمه عمر(واپاشی خود به خودی) از رابطه $f(t) = A(\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$ که در آن t زمان $\mathbf{T}$ ، نیمه عمر مواد رادیو اکتیو و $\mathbf{A}$ مقدار اولیه مواد رادیو اکتیو است ، استفاده میکنیم . (لازمه بدونی که $f(t)$ مقدار باقی مانده ماده رادیو اکتیو بعد از واپاشی است) .

ج) در سرمایه گذاری با نرخ سود مشارکت مرکب پیوسته ، وقتی P ریال را در بانک یا مؤسسه ی مالی اعتباری با نرخ $100i$ درصد مرکب پیوسته میگذاریم ، مقدار سرمایه پس از t سال برابر است با فرمول :

$$A = Pe^{it}$$

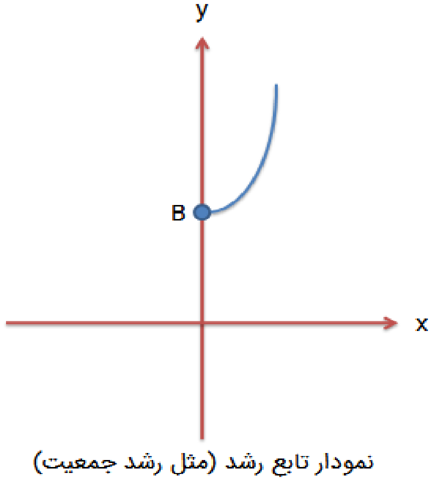
مثلا اگر بانکی ۱۸ درصد سود $i = 18\%$ بدهد و یک میلیون تومان را سرمایه گذاری کنیم $P = 1$، مقدار سرمایه یعد از گذشت t سال برابر است با $A = Pe^{it} = 1e^{0/18t}$ تومان .

د) در درس آمار بارها با این موضوع مواجه شده اید که نمودار چندبر ، با افزایش تعداد دسته ها به منحنی نزدیک میشود . شکل این منحنی در پدیده های طبیعی (در جامعه هنجار) به صورت یک زنگوله است . میانگین آن ۰ و واریانس آن ۱ است و با توجه به درس آمار معادله آن به صورت زیر است که این موضوع آخرین کاربرد e است .

$$f(x) \pm = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

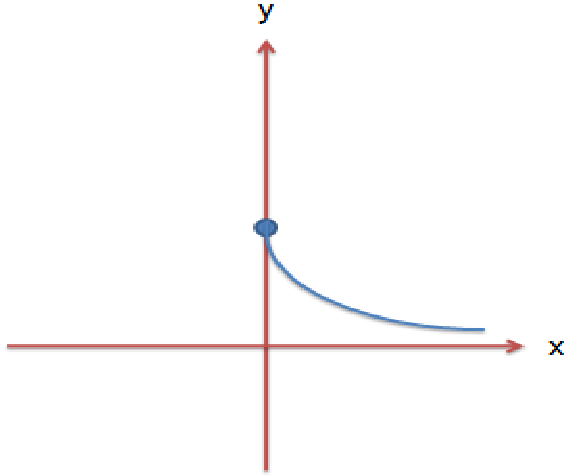
برای درک هرچه بهتر این نکته به نمودارهای زیر توجه کن .

نمودار مربوط به مسائل رشد :



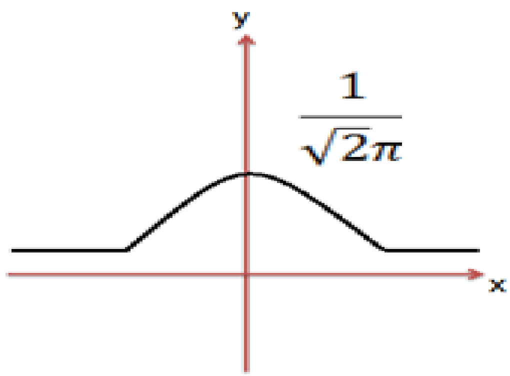
نمودار تابع رشد (مثل رشد جمعیت)

نمودار مربوط به تابع زوال (کاهش) :



نمودار تابع زوال (مثل واپاشی یا کاهش قیمت)

نمودار مربوط به تابع توزیع نرمال :



نمودار تابع توزیع نرمال

به چند مثال زیر توجه کن :

مثال

اگر در لحظه شروع کشت باکتری در آزمایشگاه ۱۰۰۰ باکتری داشته باشیم و ضریب رشد آنها $k = 0.2$ پس از گذشت چند دقیقه ۳۰۰۰ باکتری خواهیم داشت؟ ($\ln 3 = 1.1$ در نظر گرفته شود)

جواب : ۱۰۰۰ باکتری در ابتدا نشانه جمعیت اولیه است پس ما B رو داریم ، ضریب رشد رو هم که همان kاست را داریم و کافیه که در فرمول رشد جای گذاری کنیم ، پس خواهیم داشت :

$$f(t) = Be^{kt} = 1000e^{0.2t} = 3000$$

$$3000 = 1000e^{0.2t} \xRightarrow{\div 1000} \frac{3000}{1000} = \frac{1000e^{0.2t}}{1000} \rightarrow 3 = e^{0.2t}$$

حالا کافیه از دو طرف تساویLn بگیریم :

$$\ln 3 = \ln e^{0.2t} = 0.2t \rightarrow \ln 3 = 0.2t \rightarrow t = \frac{\ln 3}{0.2} \xRightarrow{\ln 3 = 1.1} t = \frac{1.1}{0.2} = \frac{11}{2}$$

$$= 5.5$$

بعد از گذشت ۵/۵ دقیقه به ۳۰۰۰ باکتری میرسیم .

مثال

اگر قیمت خرید یک خودرو ۳۲۰۰۰ دلاری در هر سال ۳ درصد از قیمتش کاهش یابد ، پس از گذشت چند سال قیمت آن به نصف میرسد ؟ (لطفا $\ln 2 = 0.69$ در نظر گرفته شود).

جواب : همانطور که در متن سوال مشخصه ما قیمت اولیه یعنی B=32000 دلار رو داریم . ضریب (زوال) رشد منفی (کاهش هم در متن سوال ۳ درصد یا به عبارت بهتر $k = \frac{3}{100} = 0.03$ داده شده) .

در متن سوال گفته پس از گذشت چند سال قیمت خودرو نصف میشود یعنی قراره به $32000 \div 2 =$ 16000 برسیم.

پس داریم$V(t) = 16000$:

$$V(t) = Be^{-kt} \to 16000 = 32000e^{-0.03t}$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف تساوی } \div 32000} \frac{16000}{32000} = \frac{32000}{32000} e^{-0.03t} \to \frac{1}{2} = e^{-0.03t}$$

حالا از دو طرف تساوی Ln میگیریم :

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{-0.03t} \to \ln\frac{1}{2} = -0.03t \to t = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0.03}$$

میدونیم که $\ln\frac{1}{2} = \ln 2^{-1}$ یا به عبارت دیگه $\ln\frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = \ln 1 - \ln 2$ که در هر صورت داریم :

$$\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

خب حالا جواب راحت شد.در نهایت داریم :

$$t = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0.03} \to t = \frac{-\ln 2}{-0.03} \xrightarrow{\ln 2 = 0.69} t = \frac{-0.69}{-0.03} = 23 \text{سال}$$

پس بعد از گذشت ۲۳ سال قیمت خودرو به نصف قیمت اولیه خود میرسد.

مثال اگر بانک ملی 12 درصد سود به سپرده گذاران خود به صورت درصد مرکب پیوسته بدهد . حداقل چندسال باید سرمایه خود را در این بانک بگذاریم تا سرمایه ما ۴ برابر شود ؟(میدانیم که $\ln 2 = 0.69$)

جواب : میدونیم که سرمایه اولیه ما همان P است و سرمایه نهایی قراره ۴ برابر یعنی معادل $4P$ بشه.پس داریم :

$$A = Pe^{it} \xrightarrow{A=4P \quad \text{و} \quad i=\frac{12}{100}=0.12} 4P = Pe^{0.12t}$$

حالا P ها را از دوطرف تساوی با هم ساده میکنیم :

$$4 = e^{0.12t} \xrightarrow{Ln \text{ میگیریم}} \ln 4 = \ln e^{0.12t} \to \ln 4 = 0.12t \to t = \frac{\ln 4}{0.12}$$

میدونیم که $\ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2 = 2 \times 0.69$

حالا داریم :

$$t = \frac{2 \times 0.69}{0.12} = \frac{0.69}{0.06} = \frac{69}{6} = 11.5 \text{ سال}$$

به جواب رسیدیم. برای اینکه سرمایه ما در این بانک ۴ برابر بشه باید حداقل ۱۱٫۵ سال صبر کنیم.

مثال اگر نیمه عمر یک عنصر در حدود ۲۰۰ سال باشد و پس از گذشت ۱۰۰۰ سال ۵۰ گرم باقی مانده باشد، جرم اولیه این عنصر چند گرم بودا است ؟

۱) ۱۶۰۰ ۲) ۱۰۰۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۵۰۰

جواب : میدونیم که برای حل این مسئله باید از فرمول $f(t) = A(\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$ استفاده کنیم . با توجه به اطلاعاتی که متن سوال به ما میده میدونیم که : $f(t) = 50$, $t = 1000$, $T = 200$

حالا میریم سراغ حل:

$$f(t) = A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \quad \rightarrow \quad 50 = A(\frac{1}{2})^{\frac{1000}{200}} = A \times \left(\frac{1}{2}\right)^{5} = A \times \frac{1}{32} \rightarrow A = 50 \times 32$$

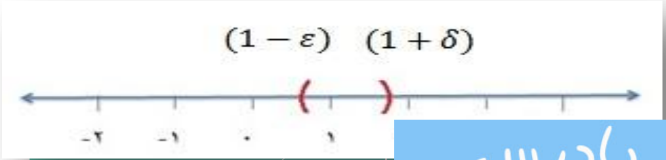
$A = 1600$ گرم

پس گزینه ۱ صحیحه.

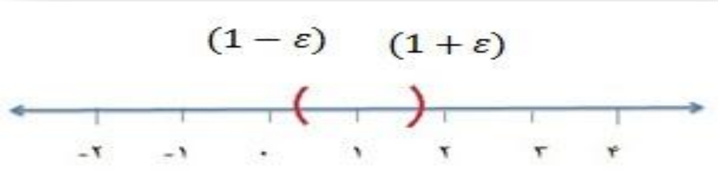
اصلاحیه جزوه مکمل فصل ششم

به مکمل مبحث حد و پیوستگی رسیدیم خواهشمندم به دوستانتون هم اطلاع بدید که ویرایش نسخه قبلی جزوه مکمل حد و پیوستگی ارائه شده. لازمه بدونید مثالها تغییر نکردند فقط تغییراتی در توضیحات آموزشی ایجاد شده. در ابتدا به تعریف همسایگی و همسایگی محذوف دقت کنید (این موضوع رو در جزوه فصل ششم مطرح نکرده بودم) و بعد قوانین حد رو مرور میکنیم .

تعریف همسایگی در حد : همسایگی درواقع یک بازه است که حول یک نقطه تعریف میشود . پس برای نقطه ای مثل a همسایگی را میتوانیم به صورت $(a-\varepsilon, a+\delta)$ که $\varepsilon \neq \delta$ تعریف کنیم. این موضوع (یعنی $\varepsilon \neq \delta$) بیان کننده اینه که همسایگیهای چپ و راست نقطه a ممکنه از دوطرف به یک اندازه از a واقع نشده باشند.به این نوع همسایگی نامتقارن همسایگی نقطه a میگوییم و اگر a را از بازه $(a-\varepsilon, a+\delta)$ حذف کنیم یعنی داشته باشیم $\left((a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\delta)\right)$ در این صورت آن را همسایگی محذوف a مینامیم . خب حتما میپرسی این چطور حذف کردن a است وقتی هنوز توی بازه ها نوشته شده ؟ باید به این نکته هم دقت کنیم که بازه های نوشته شده بازه های باز هستند یعنی هر هیچ یک از بازه های نوشته شده a عضو بازه محسوب نمیشه . (لازمه بدونید که ε و δ کوچکترین عدد حقیقی مثبت دلخواه ما هستند) به عنوان مثال یک همسایگی نامتقارن روی نمودار همانند شکل زیر است :



البته همسایگی متقارن a هم داریم به این صورت که اگر بازه ای مانند $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ داشته باشیم آنگاه آن را همسایگی متقارن a میناميم (چون فاصله آن از دو طرف نقطه a به یک اندازه است . و بازهم میتوانیم با حذف a از این بازه همسایگی محذوف متقارن a را ایجاد کنیم . به عنوان مثال یک همسایگی متقارن روی نمودار همانند شکل زیر است :



حالا میتونیم با کمک نمایش بازه ها همسایگی چپ و راست نقطه a را خیلی ساده مطرح کنیم

اگر بازه به صورت $(a, a+\varepsilon)$ باشد آنگاه آن را همسایگی راست میناميم و اگر بازه به صورت $(a-\varepsilon, a)$ باشد آنگاه آن را همسایگی چپ a میناميم.

خب حالا میتونیم همسایگی محذوف رو بهتر تعریف کنیم: وقتی از همسایگی محذوف نقطه $x=a$ صحبت میکنیم منظور ما بازه ای به مرکز نقطه $x=a$ و شعاع ε است که فقط نقطه $x=a$ را از آن حذف کرده ایم پس در واقع همسایگی محذوف نقطه $x=a$ به شعاع ε به صورت زیر است :

$$(x-\varepsilon, x) \cup (x, x+\varepsilon)$$

تعریف ریاضی حد : تابع $y=f(x)$ و نقطه $x=a$ را در نظر بگیرید. میگوییم حد تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ برابر عدد l است هرگاه به ازای هر همسایگی محذوف عدد l همچون $(l-r, l) \cup (l, l+r)$ یک همسایگی محذوف از نقطه $x=a$ مانند $(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$ موجود باشد به طوریکه به ازای هر $x \in (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$ داشته باشیم: $f(x) \in (l-r, l) \cup (l, l+r)$

قانون اول (حد راست) : اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a یعنی $(a, a+\varepsilon)$ تعریف شده باشد ، میگوییم حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر است با عدد L_1 هرگاه به ازای هر همسایگی محذوف عدد L_1 همچون $(L_1 - r, L_1) \cup (L_1, L_1 + r)$ یک همسایگی محذوف سمت راست از $x = a$ مانند $(a, a+\varepsilon)$ موجود باشد به طوریکه $x \in (a, a+\varepsilon)$ (به عبارت دیگه میتونیم بگیم : هرگاه مقادیر تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه بتوانیم به L_1 نزدیک کنیم ، به شرط آنکه متغیر x از سمت راست به قدر کافی به a نزدیک شود) خواهیم داشت :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$$

قانون دوم (حد چپ) : اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a یعنی $(a-\varepsilon, a)$ تعریف شده باشد ، میگوییم حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر است با عدد L_2 هرگاه به ازای هر همسایگی محذوف عدد L_2 همچون $(L_2 - r, L_2) \cup (L_2, L_2 + r)$ یک همسایگی محذوف سمت چپ از $x = a$ مانند $(a-\varepsilon, a)$ موجود باشد به طوریکه $x \in (a-\varepsilon, a)$ (به عبارت دیگه میتونیم بگیم : هرگاه مقادیر تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه بتوانیم به L_2 نزدیک کنیم ، به شرط آنکه متغیر x از سمت چپ به قدر کافی به a نزدیک شود) خواهیم داشت :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$$

خب تا اینجای مسئله رو شما دانش آموزان رشته ریاضی و تجربی به خوبی یادگرفتید.

حالا یک قانون خیلی مهم رو باهم مرور میکنیم . خواهش میکنم این قانون رو همیشه به یاد داشته باشید چون این قانون نبض اصلی این مبحث هستش :

نکته مهم

اگر تابعی در یک همسایگی محذوف نقطه ای مانند a مثل $(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$ تعریف شده باشد به طوریکه به ازای هر $x \in (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$ داشته باشیم :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

آنگاه با توجه به تعریف حد و همینطور تعاریف مربوط به حد چپ و راست یک تابع خواهیم داشت :

قانون مهم :حد تابع f در نقطه $x = a$ وجود دارد ،اگر و تنها اگرحد چپ و راست تابع fموجود و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1 \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L_2 \overset{\text{اگر و تنها اگر}}{\Longleftrightarrow} L_1 = L_2$$

حالا این قانون یک نتیجه مهم هم داره . این نتیجه میتونه کمکتون کنه که موقع تست زدن به علم و تجربه خودتون اعتماد بیشتری داشته باشید . پس توصیه میکنم این نتیجه رو هم فراموش نکنید :

نتیجه خیلی مهم : اگر حد چپ و راست تابع f در نقطه $x = a$، دو مقدار متمایز باشد یعنی :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1 \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L_2 \overset{\text{اگر و تنها اگر}}{\Longleftrightarrow} L_1 \neq L_2$$

آنگاه تابع f در نقطه $x = a$ ، حد ندارد.

مثال

حد تابع زیر را در نقطه $x = -1$بیابید؟

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & x \geq -1 \\ -x + 2 & x < -1 \end{cases}$$

جواب : میدونیم که ضابطه بالایی حد راست و ضابطه پایینی حد چپ رو به ما میده پس محاسبه رو شروع میکنیم : حد راست :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} 2x + 5 = 2 \times (-1^+) + 5 = 2 \times (-1) + 5 = -2 + 5 = 3$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} 2x + 5 = 3$$

حد چپ :

$$\lim_{x\to -1^-} \mathrm{f(x)} = \lim_{x\to -1^-} -x+2 = -(-1^-)+2 = -(-1)+2 = 1+2 = 3$$

$$\lim_{x\to -1^-} \mathrm{f(x)} = \lim_{x\to -1^-} -x+2 = 3$$

خب توی این مثال حد چپ و راست باهم برابر شدن ، پس تابع f حد دارد و حد این تابع برابراست با ۳.

اما اگه فرض کنیم در این مثال حد چپ هر عددی به جز ۳ میشد ، اونوقت باید میگفتیم چون ضابطه حد راست به ما میگه$-1 \geq x$ یعنی حد راست این تابع با مقدار این تابع در نقطه $x=-1$ برابر است.

چون برای محاسبه حد راست و مقدار تابع در نقطه $x=-1$ از یک ضابطه استفاده میکنیم پس چنانچه از ما بخواد که تعیین کنیم که این تابع حد داره اگر حد چپ با حد راست این تابع برابر نبود میگفتیم این تابع حد راست داره و پیوستگی یکطرفه هم داره اما در کل چون حد راست و چپ تابع مورد نظر باهم برابر نیستن پس تابع موردنظر در کل حد نداره و با اینکه پیوستگی یکطرفه (پیوستگی راست) داره اما درکل پیوسته نیست .

خب مثال بعدی

مثال

به ازای کدام مقادیر b و a تابع زیر در نقطه $x=-2$ حد دارد ؟ پیوستگی این تابع را هم بررسی کنید؟

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & x>-2 \\ 13 & x=-2 \\ 2ax^2+bx-1 & x<-2 \end{cases}$$

جواب : در ابتدا برای محاسبه اینکه این تابع حد داره باید حد چپ و راست این تابع رو به دست بیاریم و نتیجه حد چپ و راست باید با حد تابع در نقطه $x=-2$ یعنی عدد ۱۳ برابر بشن . قطعا تنها نگرانیت الان پیدا کردن b و a هستش .

حد راست :

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} ax+1 = a(-2^+)+1 = a(-2)+1 = -2a+1$$

حدچپ :

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} 2ax^2+bx-1 = 2a(-2^-)^2+b(-2^-)+1$$
$$= 2a(-2)^2+b(-2)-1 = (2a\times 4)-2b-1 = 8a-2b-1$$

حالا باید حد راست و چپ را جداگانه برابر با ۱۳ قرار بدیم تا مجهولها رو بدست بیاریم:

$$-2a+1 = 13 \to -2a = 13-1 = 12 \to -2a = 12 \to a = -\frac{12}{2} = -6$$

$$a = -6$$

$$8a-2b-1 = 13 \xRightarrow{a=-6} \big(8\times(-6)\big)-2b-1 = 13 \to -48-2b-1 = 13$$

$$\to -2b = 13+48+1 \to -2b = 62 \to b = -\frac{62}{2} = -31$$

$$b = -31$$

خب با توجه به مقادیر به دست آمده و اینکه ما تونستیم با استفاده از $f(-2)$ مقادیر b و a رو محاسبه کنیم پس این تابع در نقطه $x=-2$ حد دارد و چون حد چپ و راست این تابع با $f(-2)$ برابر شد

پس این تابع در $x=-2$ پیوسته است . البته میتونی پیوستگی این تابع رو خودت هم امتحان کنی.

مثال

به ازای چه مقدار از a تابع زیر در نقطه $x=2$ حد دارد و پیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases} 3x-[x] & x<2 \\ a & x=2 \\ x+2 & x>2 \end{cases}$$

جواب : باید ابتدا حدهای چپ و راست را جداگانه محاسبه کنیم بعد درمورد وجود حد و پیوستگی این تابع نتیجه گیری کنیم. البته توی کتابتون در مورد حد توابع جزء صحیح و (براکتی) حرفی نزده و بهتره حل این مثال رو به عنوان یک چالش خیلی جالب انجام بدیم:

حد چپ :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3x - [x] = \left(3\times(2^-)\right) - [2^-] = (3\times 2) - \underbrace{[2^-]}_{1} = 6 - 1 = 5$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3x - [x] = 5$$

حد راست :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x + 2 = 2^+ + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x + 2 = 4$$

شرط وجود حد و شرط پیوستگی رو یادته ؟

حالا کاملا مشخصه که حد چپ و راست با هم برابر نیستن پس تابع داده شده حد نداره. چون

$$4 = a = 5 \rightarrow \text{غیر ممکن}$$

خب این رو هم میدونیم که تابعی که حد نداره نمیتونه پیوسته باشه پس این تابع پیوسته هم نیست.

شرط وجود حد : حد تابع f در نقطه $x = a$ وجود دارد، اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f موجود و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1 \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L_2 \overset{\text{اگر و تنها اگر}}{\Longleftrightarrow} L_1 = L_2$$

با توجه به اینکه در محاسبه حد ما به خود نقطه a نمیرسیم و فقط به این نقطه نزدیک میشیم زمانی میتونیم بگیم که یک تابع حد داره که حد چپ و راست اون نقطه با هم برابر باشند و ما در این صورت

میتونیم بگیم $\lim_{x\to a} f(x) = L$ وجود داره. البته حتی زمانی که $a \notin D_f$ یعنی نقطه a عضو دامنه تابع نباشه بازهم $\lim_{x\to a} f(x) = L$ میتونه برقرار باشه چون در این حالت با وجود حذف شدن a از دامنه همسایگی های این نقطه در دامنه تابع وجود دارند و شرط وجود حد یک تابع در یک نقطه این است که حد چپ و راست موجود و با هم برابر باشند.

نکته خیلی خیلی مهم : شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$:

حد چپ = $f(a)$ = حد راست

دوواقع یک تابع زمانی پیوسته است که نمودار آن را بتوانیم با یک حرکت رسم کنیم (بدون برداشتن خودکار از روی کاغذ)

با توجه به شرط پیوستگی برای تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ که دامنه این تابع برابر است با : $D_f = R - \{-2\}$ حد و پیوستگی تابع رو در نقطه $x = -2$ بررسی میکنیم :

با توجه به اینکه عدد ۲- از دامنه حذف شده این تابع ناپیوسته است. خب حالا با استفاده از تعریف پیوستگی رو بررسی میکنیم :

$$f(-2) = \frac{-2-1}{-2+2} = \frac{-3}{0}$$

پس $(f(2))$ وجود ندارد

تا اینجای کار میتونیم بگیم تابع مورد نظر نا پیوسته است. اما اگه بخوایم میتونیم بازهم برای این ادعا دلایل بیشتری ارائه بدیم : برای این کار باید حد چپ و راست این تابع رو محاسبه کنیم :

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x-1}{x+2} = \frac{-2^+-1}{-2^++2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

حالاحد چپ تابع هم حساب میکنیم:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{-2^- - 1}{(-2^- + 2)} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

چون حد چپ و راست این تابع برابر نشدند (یعنی $f(-2) \neq -\infty \neq +\infty$) پس تابع فوق در $x = -2$ حد ندارد.و تابعی که حد ندارد نمیتواند پیوسته باشد.

قضیه مهم : حد تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ در صورت وجود یکتاست ، یعنی امکان ندارد تابع $f(x)$ در یک نقطه مشخص ، به دو عدد متفاوت نزدیک شود.

قضیه مهم : اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ حد نداشته باشد آنگاه این تابع قطعا پیوسته نیست اما اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ حد داشته باشد ممکن است ناپیوسته باشد. این قضیه میگه : برای اینکه یک تابع پیوسته باشد وجود حد آن الزامی است اما برای اینکه یک تابع حد داشته باشد وجود پیوستگی آن تابع الزامی نیست.

برخی ویژگیهای پیوستگی :

پیوستگی در بازه $(a\,,b)$: تابع $y = f(x)$ را در بازه $(a\,,b)$ پیوسته مینامیم ، اگر تابع در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد . پس اگر تابع حتی در یک نقطه از این بازه نا پیوسته باشد آنگاه تابع در بازه $(a\,,b)$ ناپیوسته خواهد بود .

خب یه مثال میتونه این مطلب رو بهتر به ما آموزش بده .

مثال

آیا تابع $f(x) = x + 2[x]$ در بازه $(1, 2.5)$ پیوسته است ؟

جواب : با توجه به اینکه $1 < x < 2.5$ هستش و تابع فوق باید در تمامی نقاط داخل بازه دارای پیوستگی باشه و همینطور میدانیم که $[x]$ به ازای $x = 2$ مقدار صحیحی است و با توجه به اینکه این نقطه داخل بازه قرار دارد کافی است که فقط پیوستگی در در نقطه $x = 2$ را بررسی کنیم.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x + 2[x] = \lim\limits_{x\to 2^+} 2 + 2\underbrace{[2^+]}_{2} = 2 + (2\times 2) = 2 + 4 = 6 \\ f(2) = 2 + 2[2] = 2 + (2\times 2) = 8 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x + 2[x] = \lim\limits_{x\to 2^-} 2 + 2\underbrace{[2^-]}_{1} = 2 + (2\times 1) = 2 + 2 = 4 \end{cases}$$

چون حد چپ و راست تابع فوق در نقطه $x = 2$ برابر نشدن یعنی $6 \neq 4$ پس این تابع پیوسته نیست.

پیوستگی در بازه $(a\,,b]$: تابع $y = f(x)$ را در بازه $(a\,,b]$ پیوسته مینامیم ، اگر اولا تابع در نقطه $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد (میدونیم که $x = b$ نقطه انتهایی بازه است) و ثانیا تابع در بازه $(a\,,b)$ پیوسته باشد .

پیوستگی در بازه $[a\,,b)$: تابع $y=f(x)$ را در بازه $[a\,,b)$ پیوسته مینامیم ، اگر اولا تابع در نقطه $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد (میدونیم که $x=a$ نقطه ابتدایی بازه است) و ثانیا تابع در بازه $(a\,,b)$ پیوسته باشد .

پیوستگی در بازه $[a\,,b]$: تابع $f(x)$ را روی بازه بسته $[a\,,b]$ پیوسته مینامیم ، اگرسه شرط زیر برقرار باشد.

۱) تابع $f(x)$ روی بازه باز (a,b) پیوسته باشد.

۲) تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

۳) تابع $f(x)$ در نقطه $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

اگر هر یک از سه شرط بالا برقرار نباشد تابع $f(x)$ را روی بازه بسته $[a\,,b]$ نا پیوسته مینامیم .

نکته مهم : اگر تابع $y=f(x)$ در همه نقاط یک بازه پیوسته باشد ، تابع $f(x)$ را روی آن بازه باز پیوسته مینامیم .

نکته مهم : اگر تابع $f(x)$ حتی در یک نقطه از یک بازه پیوسته نباشد، آن بازه را بازه ناپیوستگی مینامیم .

لازم بود که این جزوه رو ارائه بدم تا بدونی قوانین حد بسیار ساده و کاربردیه و از طرفی مثالهایی که در این جزوه دیدی و حل کردی تا حدودی سختتر و پچیده تر از آنچیزی هستش که توی کتابت میخونی اما الان دیگه اینو متوجه شدی که هرقدر هم که سوالات پیش روت مشکل به نظر برسن ، اگر قوانین رو خوب بلد باشی پاسخهای ساده ای دارن. امیدوارم همیشه سلامت ، شاد ، موفق و سربلند باشی.

لازمه از استاد گرامی جناب آقای دکتر حسین عبدوی نژاد از استان آذربایجان شرقی که بزرگوارانه ایرادات من رو در تألیف و تدریس این مبحث مطرح کردند نهایت تشکر و قدر دانی را داشته باشم : (از شما استاد گرامی خیلی متشکرم که من رو در رفع معایب این جزوه یاری نمودید) .

خواهش میکنم نظرت رو در مورد این جزوه برام بنویس .

شماره تماس جهت ارتباط با استاد ترکی : ۰۹۱۸۶۹۹۸۱۳۰

آدرس سایت ما : ***www.hamkelasi.ir***

پایان جزوه مکمل