

توابع نمایی یکی از پرکاربردترین و عین حال ساده ترین توابعی است که شما با اون سرکار دارید!

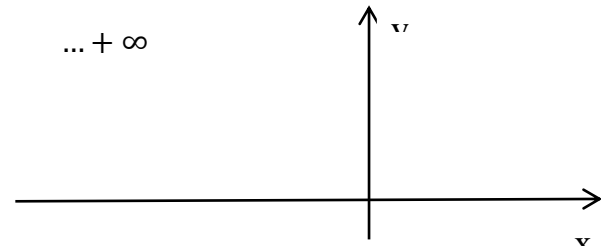
تابع $y = x^r$ رو که میشناسیم، در پایه قرار گرفته، که در واقع یک تابع یک جمله ای درجه دوم محسوب میشه، فب
 حالا که x در توان یا نما قرار بگیره بهش میگن تابع نمایی. مثل تابع $y = 2^x$

توابع نمایی

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1) \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a > 1 \end{cases}$$

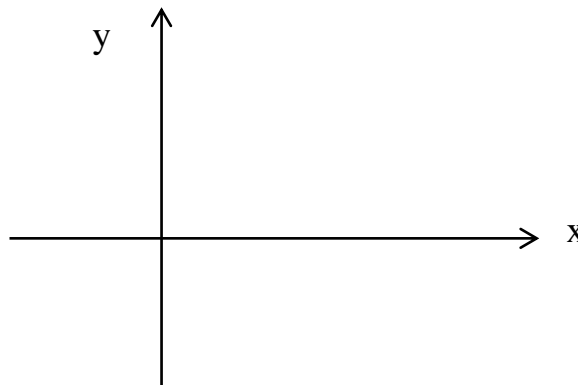
الف) $y = a^x$ با شرط $a > 1$

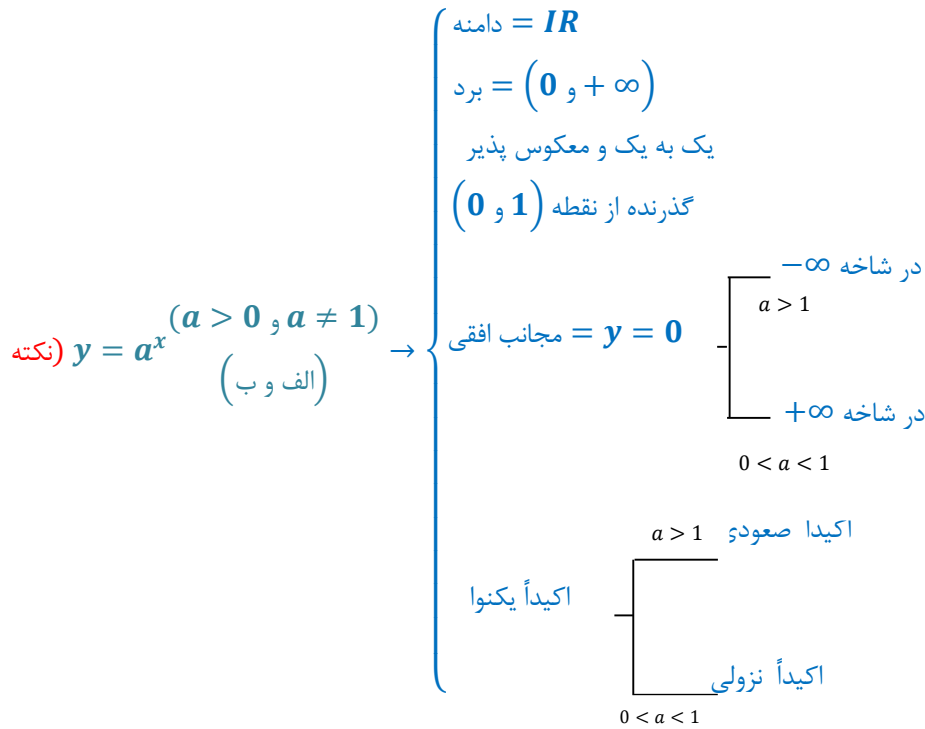
x	$-\infty \dots$	-2	-1	0	1	2	$\dots + \infty$
$y = 2^x$	$0 \dots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$\dots + \infty$



ب) $y = a^x$ با شرط $0 < a < 1$

x	$-\infty \dots$	-2	-1	0	1	2	$\dots + \infty$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$+\infty \dots$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\dots 0$





مواد لازم! برای رسم نمودار تابع نمایی در حالت کلی:

$$f(x) = ba^x + C$$

(۱) تشخیص صعودی یا نزولی بودن تابع با توجه به مقدار a و علامت ضریب x و علامت b

(۲) مجانب افقی تابع $y = c$

$$x = 0$$

(۳) عرض نقطه برخورد نمودار با محور y ها $y = ?$

نمودار بالای مجانب

$$b > 0$$

نمودار زیر مجانب

$$b < 0$$

(۴) وضعیت نمودار نسبت به مجانب افقی خود

مثال ۱: نمودار تابع ضابطه $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{1-x} - 3$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی گذرد؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

مثال ۲: اگر $f(x) = 1 - 2^{-x}$ باشد دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است؟ (ریاضی ۹۳ داخل)

- (۱) $[-1, 1]$ (۲) $(-\infty, 0]$ (۳) $(-\infty, +\infty)$ (۴) $(0, +\infty)$

مثال ۳: نمودار منحنی $y = 3^x - 3^{x+1} - 1$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی گذرد؟

- (۱) سوم (۲) سوم و چهارم (۳) اول و دوم (۴) اول و سوم

مثال ۴: به ازای کدام مقدار m تابع $f(x) = \left(\frac{m+3}{1-m}\right)^{m-x}$ یک تابع نمایی اکیداً صعودی است؟

- (۱) $-3 < m < -1$ (۲) $-3 < m < -1$ (۳) $-1 < m < 1$ (۴) $1 < m < 3$

نکته: در مسائلی از تابع نمایی که با اطلاعات داده شده مجهولاتی مانند a و b را می خواهند کافی است با استفاده از معلومات سوال، یک دستگاه دو معادله و دو مجهول تشکیل دهیم و آن را به روش حذفی تقسیم (نه تفریق) حل کنیم.

مثال ۵: اگر نمودار تابع $f(x) = ab^x - 1$ از دو نقطه $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ و $B(1, 11)$ بگذرد، $f(-1)$ کدام است؟ (تجربی ۹۳ داخل)

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

مثال ۶: در تابع با ضابطه ی $f(x) = a \cdot b^x; b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$. مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟ (تجربی ۹۱ داخل)

- 6 (۱) 8 (۲) 12 (۳) 24 (۴)

مثال ۷: نمودار دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = (\frac{1}{9})^x$ در نقطه ای به طول ۱- متقاطع هستند. اگر $f(2) = \frac{1}{3}$ باشد مقدار $f^{-1}(27)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۵ داخل)

- 3 (۱) -2 (۲) 1 (۳) 3 (۴)

نکته: در یک تابع نمایی به فرم $f(x) = a^x$ همواره $f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$ است.

اثبات $f(m+n) = a^{m+n} = a^m \times a^n = f(m) \times f(n)$

نکته: در یک تابع نمایی به فرم $y = ab^x$ اگر x ها تشکیل دنباله حسابی d بدهند y ها تشکیل دنباله هندسی با قدر نسبت a^d می دهند یعنی:

$$f(x+d) = a^d \times f(x)$$

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	3	9	...

مثال ۸: در یک تابع نمایی به صورت $f(x) = ka^x$ و $f(x+2) = 9f(x)$ و $f(0) = -3$ است. حاصل $f(-1)$ کدام است؟

- 1 (۱) -9 (۲) 1 (۳) -1 (۴)

مثال ۹: در یک کشت باکتری پس از یک ساعت ۶۰۰ باکتری و پس از ۳ ساعت ۵۴۰۰ باکتری داریم. اگر رشد باکتری ها یک تابع نمایی باشد تعداد اولیه باکتری ها کدام گزینه است؟

- 100 (۱) 200 (۲) 300 (۳) 400 (۴)

نکته: در تابع $y = a^x$ و $a > 1$ با افزایش مقدار a شیب نمودار افزایش می یابد.

$$\rightarrow a_3 > a_2 > a_1 \rightarrow \begin{cases} x > 0 \rightarrow y_3 > y_2 > y_1 \\ x < 0 \rightarrow y_3 < y_2 < y_1 \end{cases}$$

$$y = a^x \text{ و } a > 1$$

نکته: در تابع $y = a^x$ و $0 < a < 1$ با افزایش مقدار شیب a شیب نمودار از لحاظ اندازه افزایش می یابد اما با در نظر گرفتن علامت شیب (منفی) شیب کاهش یافته است.

$$y = a^x \text{ و } 0 < a < 1 \rightarrow a_3 > a_2 > a_1 \rightarrow \begin{cases} x > 0 \rightarrow y_3 > y_2 > y_1 \\ x < 0 \rightarrow y_3 < y_2 < y_1 \end{cases}$$

نتیجه: در هر دو حالت $y = a^x$ با توجه به سمت راست ($x > 0$) هر نموداری که بالاتر باشد پایه آن (a) بزرگتر است و در سمت چپ ($x < 0$) هر نموداری که پایین تر باشد پایه آن (a) بزرگتر بوده است.

مثال 10: برای $x < 0$ کدام نمودار زیر بالای بقیه قرار دارد؟

(۱) $y = 2^x$ (۲) $y = 3^x$ (۳) $y = 2^{-x}$ (۴) $y = 3^{-x}$

حل معادلات و نامعادلات نمایی

ابتدا با توجه به قوانین توان ها که در سال های نهم و دهم آموخته اید، تا جای ممکن عبارت ها را ساده و هم پایه میکنیم تا به فرم زیر تبدیل شود، سپس از برابر قرار دادن توان ها، مجهول را بدست می آوریم.

$$a^{u(x)} = a^{V(x)} \longrightarrow u(x) = V(x)$$

یه وقتی سمت چپ تساوی عبارتی نمایی ولی سمت راست عددی است که نمیتونین اونو به نمایی با پایه مشترک تبدیل کنین، اینا معادلاتی هستن که به صورت لگاریتمی حل میشن و در مبث لگاریتم گفته میشه.

مثال ۱۱: معادله $4^x - 2^{x+1} - 4 = 0$ چند جواب دارد؟

- (۱) سه جواب (۲) دو جواب (۳) یک جواب (۴) فاقد جواب

مثال ۱۲: فاصله ی نقطه ی تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ از نقطه ی $(۰, ۴)$ کدام است؟ (تجربی ۹۳ خارج)

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

برای حل نامعادلات نمایی هم مانند معادلات آن عمل میکنیم، با این تفاوت که اگر پایه عددی بین صفر و یک باشد، جهت نامساوی به صورت زیر عوض خواهد شد.

$$a^{u(x)} > a^{V(x)} \begin{cases} \xrightarrow{a > 1} u(x) > V(x) \\ \xrightarrow{0 < a < 1} u(x) < V(x) \end{cases}$$

مثال ۱۳: به ازای کدام مقادیر x نمودار منحنی $y = \left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x$ بالای خط $y = 2$ قرار نمی گیرد؟

(۱) $x \leq 0$ (۲) $x \geq 0$ (۳) $-2 \leq x \leq 1$ (۴) $0 \leq x \leq 1$

مثال ۱۴: اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ باشند. دامنه تابع $f(g(x))$ کدام است؟ (تجربی ۹۴ خارج)

(۱) $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۲) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$