⁕تابع :

هر رابطه که هر عضو مجموعه ی A را دقیقا به یک عضو از مجموعه ی B نسبت دهد را یک تابع از مجموعه ی A به مجموعه ی B می نامند.

***روش های نمایش تابع :**

یک تابع از مجموعه ی A به مجموعه ی B , رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقا یک عضو از B نظیر می شود.

در این شرایط , مجموعه ی A را دامنه ی تابع (D_f) و مجموعه ی B را برد تابع (R_f) نامیده و به صورت زیر نمایش می دهند :

$$f : A \to B$$

***نمایش پیکانی (نمودار ون):**

تنها در صورتی تابع است که از هر عضو A دقیقا یک پیکان خارج شود.

⁕نمایش تابع به صورت زوج مرتب :

هرگاه یک رابطه را به صورت مجموعه ای از زوج مرتب ها نمایش دهیم , در این صورت زمانی این رابطه تابع خواهد بود که در این زوج مرتب ها هیچ مولفه ی اول یکسانی نداشته باشیم و در صورتی که دو زوج مرتب یافت شوند که مولفه ی اول یکسانی داشته باشند , مولفه ی دوم آنها نیز یکسان باید باشند.

تذکر : واضح است که در این شرایط هم , مولفه های اول زوج مرتب ها را اعضای دامنه و مولفه های دوم را برد تابع می نامند.

***آزمون خط قائم : (برای تشخیص تابع)**

از دیدگاه هندسی , زمانی یک منحنی نمایشگر یک تابع است که هر خطی موازی محور عرض ها (y ها) آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند.

❋تابع ثابت :

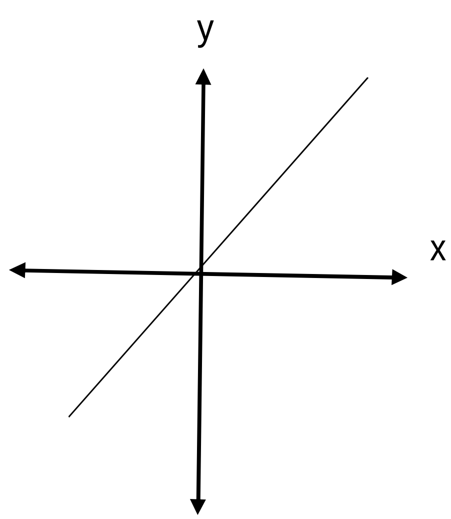
یک تابع را ثابت گویند هرگاه برد آن فقط یک عضو داشته باشد.

$$f(x) = k$$

❋تابع همانی : (نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات)

یک تابع را همانی گویند هرگاه هر عضو دامنه را به همان عضو از برد نظیر کند.

$$f(x) = x$$



❋نیمساز ربع دوم و چهارم دستگاه مختصات :

$$f(x) = y = -x$$

❋ تابع خطی :

هر تابع که بین مولفه های اول و دوم تمام زوج مرتب های آن یک رابطه ی خطی یکسان وجود داشته باشد را تابع خطی می نامند.

$$f(x) = ax + b$$

که در آن a نمایش دهنده ی شیب خط و b عرض از مبدا تابع است.

***دامنه ی توابع :**

1) توابع چندجمله ای :

دامنه ی هر تابع چندجمله ای مجموعه ی تمام اعداد حقیقی است.

2) توابع کسری :

دامنه ی توابع کسری مجموعه ی اعداد حقیقی به غیر از ریشه های مخرج است.

3) توابع رادیکالی با فرجه ی زوج :

مجموعه ی اعداد حقیقی که به ازای آنها عبارت زیر رادیکال منفی نباشد . یعنی برای تعیین دامنه ی توابع رادیکالی با فرجه ی زوج , باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم.

4)توابع رادیکالی با فرجه ی فرد :

دامنه ی این توابع با دامنه ی عبارت زیر رادیکال یکی ست.

5)دامنه ی توابع مثلثاتی :

دامنه ی توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس برابر با مجموعه ی اعداد حقیقی است.

اما برای تعیین دامنه ی توابع تانژانت و کتانژانت باید آنها را به صورت کسری نوشته و سپس مانند توابع کسری با آنها رفتار کنیم.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

6) دامنه ی توابع لگاریتمی :

همانطور که می دانیم با توجه به اینکه لگاریتم اعداد صفر و منفی تعریف نشده است و نیز لگاریتم اعداد در مبنای منفی تعریف نشده است می توان شرایط زیر را برای تعیین دامنه ی یک تابع لگاریتمی در نظر گرفت :

$$f(x) = \log_{g(x)} f(x) \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} f(x) > 0 \ , \ g(x) > 0 \ \text{و}\ g(x) \neq 1$$

***تابع یک به یک :**

تابع را زمانی یک به یک می نامند که به ازای هر عضو از بردش , یک و فقط یک عضو از دامنه اش وجود داشته باشد.

یعنی : (در یک تابع , مولفه ی دوم یکسان نداریم...)

***تابع پوشا :**

هرگاه برای تابعی با ضابطه ی معلوم , دامنه و بردی مشخص شود و آن ضابطه بتواند به ازای دامنه ی داده شده , برد آن تابع را نیز به طور کلی تحت پوشش قرار دهد , تابع پوشا نامیده می شود.

آزمون خط افقی:

از لحاظ نموداری تابعی یک به یک است که در آن هیچ خطی موازی محور x ها , نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع نکند.

از لحاظ تعریف ضابطه ای :

$$\forall\, x_1 , x_2 \in D_f \rightarrow \text{IF } f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

٭تابع معکوس(وارون) :

دو تابع را معکوس(وارون) یکدیگر می نامند هرگاه با جابجا کردن مولفه ی اول و دوم زوج مرتب های یکی از آنها , تابع دیگری به دست آید. معکوس یک تابع را با f^{-1} نمایش می دهند.

٭شرط معکوس پذیری یک تابع :

شرط معکوس پذیری یک تابع آن است که یک به یک باشد.

٭نحوه ی تعیین معکوس یک تابع :

در صورت یک به یک بودن تابع , برای پیدا کردن معکوس آن به صورت زیر عمل می کنیم :

ابتدا , متغیر x را به y و برعکس تبدیل می کنیم. سپس متغیرy را بر حسب x محاسبه می کنیم.

٭تبدیلات نموداری توابع :

1) $y = f(x) + a$ **:** (نمودار به اندازه ی a واحد بالا می رود.)

2) $y = f(x) - a$ **:** (نمودار به اندازه ی a واحد پایین می رود.)

3) $y = af(x)$: $\begin{cases} 0 < a < 1 \leftarrow \text{نمودار فشرده می شود .} \\ a > 1 \leftarrow \text{نمودار کشیده می شود .} \end{cases}$

4) $y = f(x + a)$ **:** (نمودار به اندازه ی a واحد به سمت چپ می رود.)

5) $\mathbf{y = f(x - a)}$ **:** (نمودار به اندازه ی a واحد به سمت راست می رود.)

6) $\mathbf{y = f(ax)}$ **:** $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ a > 1 \end{cases}$

$0 < a < 1$ ← نمودار فشرده می شود .

$a > 1$ ← نمودار کشیده می شود .

٭ تعیین علامت توابع :

1) عبارات تک جمله ای :

برای تعیین علامت عبارت درجه ی اول , ابتدا ریشه ی این عبارت را بدست آورده و آنگاه عبارت را تعیین علامت می کنیم :

$$f(x) = ax + b = 0 \to x = -\frac{b}{a}$$

x	$-\infty$	$x = -\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

2)تعیین علامت عبارات درجه ی دوم :

الف – دارای دو ریشه ی حقیقی و متمایز :($\mathbf{\Delta > 0}$)

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \to x_1, x_2$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

ب) دارای ریشه ی مضاعف :($\Delta = 0$)

(در این صورت علامت چندجمله ای همواره مثبت خواهد بود.)

ج) فاقد ریشه ی حقیقی : ($\Delta < 0$)

(در این حالت علامت چندجمله ای همواره موافق علامت a خواهد بود.)

❊تابع قدر مطلق :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

❊تابع علامت :

$$Sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

❊تابع جزء صحیح :

جزء صحیح یک عدد حقیقی مانند x را با نماد $y=[x]$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می شود :

$$y=[x]=\begin{cases} x\in Z & x \\ x\in Q\rightarrow \begin{cases}[+1.2]=2\\ [-1.2]=-2\end{cases} \end{cases}$$

❊یادآوری :

برای تعیین معادله ی خطی که از دو نقطه می گذرد , به صورت زیر عمل می کنیم :

$$(x_1\,,y_1),(x_2\,,y_2)\rightarrow m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ \ ,y-y_1=m(x-x_1)$$

❊تساوی دو تابع :

دو تابع مانند f و g مساوی گویند , هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند :

الف – دامنه ی دو تابع یکسان باشند : $(D_f=D_g)$

ب – به ازای هر عضوی از دامنه , دو تابع مقادیر یکسانی داشته باشند : $\forall x\in D_{f,g}\rightarrow f(x)=g(x)$

❊اعمال روی توابع و تعیین دامنه ی آنها:

الف – اعمال جمع و تفریق و ضرب :

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)\quad ,\quad (f.g)(x)=f(x).g(x)$$

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f.g}=D_f\cap D_g$$

ب – عمل تقسیم :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{g(x) = 0\}$$

***ترکیب توابع :**

هرگاه f و g دو تابع حقیقی باشند , در این صورت ترکیب این دو تابع را به صورت fog نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنند :

$$fog(x) = f(g(x)) \quad \rightarrow \quad D_{fog} = \{x|x \in D_g \, , g(x) \in D_f\}$$

ترکیب توابع می تواند به سه صورت دیگر gof , fof , gog نیز بیان شود که در این صورت نیز به راحتی و با توجه به تعریف یاد شده ی فوق , می توان این توابع را تعریف و دامنه ی آنها را نیز مشخص نمود.

***تابع زوج و فرد :**

هر تابع یا زوج است یا فرد است یا نه زوج و نه فرد است و یا هم زوج است و هم فرد.

شرط اول اینکه یک تابع زوج یا فرد باشد این است که دامنه ی تابع متقارن باشد.یعنی اینکه :

$$\forall x \in D_f \rightarrow -x \in D_f$$

در صورت برقراری شرط اول است که می توان شرط دوم را برای زوج یا فرد بودن تابع بررسی نمود :

شرط زوج بودن $\rightarrow f(-x) = f(x)$

شرط فرد بودن $\rightarrow f(-x) = -f(x)$

نکته ی (1) – هر تابعی که شرط اول را دارا نباشد نه زوج است نه فرد.

نکته ی (2) – تابع صفر تنها تابعی است که هم زوج است و هم فرد.

*****نمودار تابع زوج , نسبت به محور عرض ها متقارن است.

*****نمودار تابع فرد , نسبت به مبداء مختصات متقارن است.

***تابع صعودی :**

تابع $y = f(x)$ را صعودی می گویند هرگاه : $\forall x_1, x_2 \in D_f \rightarrow x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

***تابع نزولی :**

تابع $y = f(x)$ را نزولی می گویند هرگاه : $\forall x_1, x_2 \in D_f \rightarrow x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

***تابع متناوب :**

تابع f را متناوب می گوییم هرگاه به ازای هر x داده شده در دامنه ی تعریف آن تابع داشته باشیم :

$f(x + T) = f(x)$:

به کوچکترین عدد مثبت T , دوره ی تناوب اصلی تابع می گویند.

1) – دوره ی تناوب توابع جزء صحیح به فرم $f(x) = ax - [ax]$ به صورت $T = \frac{1}{|a|}$ تعریف می شود.

2) – تابع ثابت $f(x) = k$ متناوب است ولی دوره ی تناوب اصلی ندارد.

3) – تابع جبری $f(x) = (-1)^{[nx]}$ متناوب بوده و دوره ی تناوب اصلی آن $T = \frac{2}{|n|}$ می باشد.

4) – دوره ی تناوب اصلی توابع مثلثاتی :

$$\begin{cases} \sin^n ax, \cos^n ax, \quad n_{\text{فرد}} \rightarrow T = \dfrac{2\pi}{|a|} \\ \sin^n ax, \cos^n ax, \quad n_{\text{زوج}} \rightarrow T = \dfrac{\pi}{|a|} \\ \tan^n ax, \cot^n ax, \quad \rightarrow T = \dfrac{\pi}{|a|} \\ |\sin ax|, |\cos ax|, |\tan ax|, |\cot ax| \rightarrow T = \dfrac{\pi}{|a|} \end{cases}$$

***تابع پله ای و جزء صحیح :**

هر تابع که بتوان دامنه ی آن را به تعدادی بازه تقسیم بندی کرد به طوری که این تابع روی هر کدام از بازه ها مقداری ثابت را داشته باشند , را تابع پله ای نامیده و تابع جزء صحیح(براکت) , شکل خاصی از تابع پله ای می باشد.

***مهم ترین و پرکاربردترین ویژگی های تابع جزء صحیح در کنکور :**

1) $x - 1 < [x] \leq x$ 2) $[x + k] = [x] + k$

3) $x \in Z \rightarrow [x] + [-x] = 0$, $x \notin Z \rightarrow [x] + [-x] = -1$

4) $n \in N \rightarrow [nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots$

5) $0 \leq x - [x] < 1$

***گزیده ای از نکات مهم در حل تست های تابع :**

نکته ی (1) – دامنه ی تابع معکوس , برابر برد تابع است. $(D_{f^{-1}} = R_f)$

نکته ی (2) – برد تابع معکوس , برابر دامنه ی تابع است. $(R_{f^{-1}} = D_f)$

نکته ی (3) – نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور طول ها است.

نکته ی (4) – نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور عرض ها است.

نکته ی (5)- همواره به یاد داشته باشیم که هرگاه یک نامساوی را در یک عدد منفی ضرب یا تقسیم کنیم , جهت نامساوی عوض خواهد شد.

نکته ی (6) – در تشخیص یک تابع از روی ضابطه , همیشه به یاد داشته باشید که هرگاه y دارای توان زوج یا داخل قدرمطلق باشد , آن ضابطه , ضابطه ی یک تابع نخواهد بود.

نکته ی (7)- اگر دو تابع f , g زوج باشند , ترکیب آنها نیز تابعی زوج خواهد بود.

نکته ی (8) - اگر دو تابع f , g فرد باشند , ترکیب آنها نیز تابعی فرد خواهد بود.

نکته ی (9) - اگر دو تابع f , g یکی زوج و دیگری فرد باشند , ترکیب آنها نیز تابعی زوج خواهد بود.

نکته ی (10) – تابعی که در دامنه اش صعودی اکید یا نزولی اکید باشد , تابعی یک به یک است.

نکته ی (11) – هرگاه دو تابع f , g معکوس یکدیگر باشند آنگاه می توان نوشت :

$$fog(x) = x$$

نکته ی (12) – توابع زوج , معکوس پذیر نیستند.

نکته ی (13) – اگر دو تابع f , g معکوس پذیر باشند , می توان نوشت :

$$(fog)^{-1} = g^{-1}0f^{-1}$$

نکته ی (14) – به ویژگی بسیار مهم زیر که در حل معادلات قدر مطلقی به آن اشاره شد نیز توجه داشته باشید :

$$x^2 = a^2 \rightarrow |x| = |a| \rightarrow x = \pm a$$

نکته ی (15) – ویژگی بسیار مهم و پرکاربردی زیر را در مورد توابع معکوس , حتما به یاد داشته باشید :

$$(a,b) \in f \to (b,a) \in f^{-1}$$

نکته ی (16) - هرگاه تابعی به صورت زوج مرتب داده شود , شرط اینکه یک به یک باشد آن است که هم تابع باشد و هم یک به یک.یعنی نه مولفه ی دوم یکسان داشته باشند و نه اول.

نکته ی (17) – به نکته ی بسیار مهم زیر نیز در مورد یک تابع فرد توجه داشته باشید :

$$f(x) + f(-x) = 0$$

نکته ی (18) - در توابع دو ضابطه ای فرد , هرگاه در یکی از ضابطه ها x را به $-x$ تبدیل کنیم , باید قرینه ی ضابطه ی دیگر به دست آید.

نکته ی (19) – لطفا این نتیجه ی مهم را از این نامعادله که بیشتر در حل تست های مربوط به توابع جزء صحیح کاربرد زیادی دارد , به خاطر بسپارید :

$$x^2 + x < 0 \to -1 < x < 0 \to [x] = -1$$

نکته ی (20) – در طی سال های اخیر سوالات بی شماری در مورد تابع معکوس بدین شکل طرح شده است که تابعی داده شده و محل تلاقی یا نقاط تلاقی تابع f با تابع معکوس f^{-1} خواسته شده است.برای پیدا کردن این جواب دیگر نیازی به پیدا کردن تابع معکوس نیست و شما کافیه فقط تابع داده شده را با نیمساز ربع اول و سوم یعنی خط $y = x$ قطع دهیم.

" تست های سراسری و سنجش و خارج از کشور "

1-اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, دامنه ی تابع $f(3 - x)$ کدام است؟(سراسری تجربی 92)

1) $[0\ \text{و}\ 2]$ **2)** $[0\ \text{و}\ 3]$ **3)** $[1\ \text{و}\ 2]$ **4)** $[1\ \text{و}\ 3]$

گزینه ی 4 صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \xrightarrow{x \to 3-x} f(3 - x) = \sqrt{2(3 - x) - (3 - x)^2} = \sqrt{6 - 2x - (9 - 6x + x^2)} =$$

$$= \sqrt{6 - 2x - 9 + 6x - x^2} == \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$$

برای تعیین دامنه ی توابع رادیکالی با فرجه ی زوج , همانطور که گفته شد , عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می دهیم :

$$-x^2 + 4x - 3 \geq 0 \xrightarrow{\times -1} x^2 - 4x + 3 \leq 0 \to (x - 3)(x - 1) \geq 0 \to x = 1 , 3$$

و بالاخره با تعیین علامت , بازه ای که در آن مقادیر تابع بزرگتر یا مساوی صفر است را به عنوان جواب تست انتخاب می کنیم :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	
				ج			

البته یه چیزیو هم بگم...اینکه این تست فقط ضابطه ی تابع رو که مشخص کردی دیگه با مشخص کردن ریشه های آن , جواب تست نیز مشخص می شه..!

چون اصلا بازه ها همشون متفاوت از هم هستند و نیازی به تعیین علامت نیست.

روش دوم :(تستی)

همون اول ابتدا دامنه ی تابع را به دست می آوریم :

$$2x - x^2 \geq 0 \rightarrow x(2-x) \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 2 \xrightarrow{\times -1} -2 \leq -x \leq 0 \xrightarrow{+3} 1 \leq 3 - x \leq 3$$

2-اگر $f(x) = (2x-3)^2$ و $g(x) = x + 2$ باشد , نمودارهای دو تابع f و fog با کدام طول متقاطع اند؟

(سراسری تجربی 92)

1) -1 **2) $\frac{1}{2}$** **3) 1** **4) $\frac{3}{2}$**

گزینه ی 2 صحیح است.

کاملا مشخص است که برای دستیابی به جواب تست , باید ضابطه ی تابع fog را به دست آورده و با تابع f قطع دهیم :

$$fog(x) = f\big(g(x)\big) = (2(x+2)-3)^2 = (2x+4-3)^2 = (2x+1)^2$$

$$fog(x) = f(x) \rightarrow (2x+1)^2 = (2x-3)^2 \rightarrow 2x+1 = \begin{cases} 2x - 3 \rightarrow 1 = -3 \rightarrow \text{نتیجه ی نادرست} \\ -(2x-3) = -2x+3 \rightarrow 4x = 2 \end{cases}$$

$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

3-ضابطه ی معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 92)

1) $y = x^2 - 4x + 5 : x \leq 2$ **2) $y = -x^2 + 4x - 5 : x \leq 2$**

3) $y = x^2 - 4x + 5 : x \geq 1$ **4) $y = -x^2 + 4x - 5 : x \geq 1$**

گزینه ی 1 صحیح است.

پاسخ تشریحی :

همانطور که می دانیم برای به دست آوردن معکوس یک تابع , باید ابتدا x را تنها کرده و سپس جای x و y را عوض می کنیم تا ضابطه ی تابع معکوس به دست آید.گرچه در برخی موارد هم امکان انجام چنین کاری و محاسبه ی تابع معکوس بسیار سخت می باشد :

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \rightarrow \sqrt{x-1} = 2 - y \xrightarrow{\text{به توان } 2} x - 1 = (2-y)^2 \rightarrow x = (2-y)^2 + 1$$

$$x = 4 + y^2 - 4y + 1 = y^2 - 4y + 5 \xrightarrow[y \to x]{x \to f^{-1}(x)} f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5$$

یکی از گزینه های 1 و 3 صحیح است و برای تشخیص گزینه ی صحیح باید دامنه ی تابع معکوس را به دست آورد.

برای این کار می توان برد تابع اصلی را به دست آورد و طبق ویژگی های اشاره شده در مورد تابع معکوس , برد تابع اصلی را دامنه ی تابع معکوس در نظر گرفت.

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \rightarrow D_f = x \geq 1$$

داوطلبان عزیز توجه داشته باشند که کاملا مشخص است که برد این تابع , $[-\infty , 2]$ است.

کاملا مشخصه دیگه…مقدار تابع رو به ازای دامنه ی تابع به دست بیارین.قشنگ متوجه می شین که مقدار تابع هرگز از 2 بیشتر نمیشه و به سمت منفی بی نهایت میل می کنه.

$$\begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 2 \\ x = 2 \rightarrow y = 1 \\ x = 5 \rightarrow y = 0 \\ x = 10 \rightarrow y = -1 \\ \dots \end{cases}$$

پاسخ تستی : (توصیه می کنم که همه ی تست های تابع معکوس را به همین روش حل کنید.)

با توجه به ویژگی اشاره شده در نکته ی شماره ی 15 :

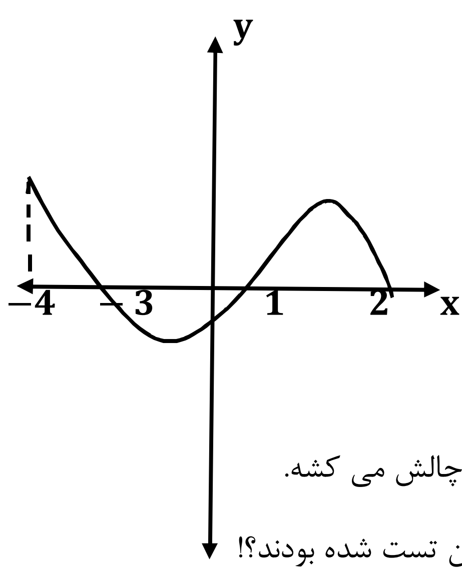
یک نقطه را با توجه به دامنه ی آن انتخاب می کنیم:

$$(x , y) \rightarrow (1 , 2) \in f \rightarrow (2 ,1) \in f^{-1}$$

همانطور که مشاهده می کنید , با یک نقطه دادن , دو گزینه ی 2 و 4 نادرست تشخیص داده شدند. زیرا نقطه ی (1 و 2) که متعلق به تابع معکوس باید باشد در ضابطه ی توابع معکوسی که در دو گزینه ی یاد شده آورده شده است صدق نمی کند.

حال با توجه به اینکه ضابطه ی دو تابع داده شده در گزینه ی 1 و 3 کاملا یکسان می باشد , تشخیص گزینه ی درست بین این دو گزینه , باید به همان روشی که در پاسخ تشریحی اشاره شد بهش عمل کنیم.

4-شکل روبرو نمودار تابع $y = f(x)$ است.دامنه ی تابع $\sqrt{x.f(x)}$ کدام است؟(سراسری ریاضی 92)



1) $\left[0 \text{ و } 2\right]$

2) $\left[-3 \text{ و } 2\right]$

3) $\left[-4 \text{ و } -3\right] \cup \left[1 \text{ و } 2\right]$

4) $\left[-3 \text{ و } 0\right] \cup \left[1 \text{ و } 2\right]$

گزینه ی 4 صحیح است.

یک تست بسیار هوشمندانه و جالب که به خوبی ذهن یک دانش آموز رو به چالش می کشه.

نمی دونم چرا بیشتر داوطلبان رشته ی ریاضی در کمال ناباوری بی خیال این تست شده بودند؟!

شاید از ظاهر تست ترسیده بودند!

اما واقعا با کمی تفکر به راحتی و بدون اینکه اصلا نیازی به دست بردن به قلم باشه می توان به این تست پاسخ داد...

ابتدا ببینیم منظور تست چیه؟اگه دقت کنید شما برای اینکه به جواب تست برسید باید ببینین که تابع $\sqrt{x.f(x)}$ در چه بازه ای از دامنه ی داده شده تعریف شده است....یعنی ما باید نقاط و بازه هایی را که در آن این تابع داده شده به مشکل می خوره رو از بازه ی $\left[-4 \text{ و } 2\right]$ جدا کنیم.

بچه ها دقت کنید.من از ابتدای بازه شروع می کنم به بررسی...

$$-4 \leq x < -3 \ , f(x) > 0 \rightarrow x.f(x) < 0 \rightarrow \sqrt{x.f(x)} \rightarrow \text{تعریف نشده}$$

$$-3 \leq x \leq 0 \ , f(x) \leq 0 \rightarrow x.f(x) \geq 0 \rightarrow \sqrt{x.f(x)} \geq 0 \ \text{تعریف شده}$$

$$0 < x < 1 \ , f(x) < 0 \rightarrow x.f(x) < 0 \rightarrow \sqrt{x.f(x)} \rightarrow \text{تعریف نشده}$$

$1 \le x \le 2 \ , f(x) \ge 0 \to x.f(x) \ge 0 \to \sqrt{x.f(x)} \ge 0$ تعریف شده

خدایی تست بسیار آسونی بود.

یه چیزیو به یاد داشته باشید...اونم اینه که همیشه تست هایی که ظاهر خفنی دارن, خیلی آسون حل می شن!

5-اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند , ضابطه ی تابع fog کدام است؟(سراسری ریاضی 92)

1) $2x^2 - 7x + 3$ 2) $2x^2 - 3x + 7$ 3) $4x^2 - 2x + 13$ 4) $4x^2 - 4x + 11$

گزینه ی 3 صحیح است.

پاسخ تشریحی :

ابتدا باید ضابطه ی تابع $g(x)$ **به** دست آورد :

$$g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20 \to g(2x + 3) = 8x^2 + 22x + 20$$

حال با تغییر متغیر $2x + 3 \to z$

خواهیم داشت :

$$2x + 3 = z \to 2x = z - 3 \to x = \frac{z-3}{2} \xrightarrow{\text{در نتیجه}} g(2x + 3) = 8x^2 + 22x + 20$$

$$\xrightarrow{\text{با اعمال تغییر متغیر}} g(z) = 8\left(\frac{z-3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{z-3}{2}\right) + 20 = 2(z^2 - 6z + 9) + 11(z - 3)$$

$$+20 = 2z^2 - z + 5 \to g(x) = 2x^2 - x + 5$$

حال می توان تابع fog را نیز محاسبه نمود :

$$fog(x) = f(g(x)) = f(2x^2 - x + 5) = 2(2x^2 - x + 5) + 3 =$$

$$4x^2 - 2x + 13$$

پاسخ تستی :

من که به هیچ وجه توصیه نمی کنم این همه راه برین و آخرش هم به جواب نرسین...بچه ها یه چیزی بگم.توی حل تست ها سعی کنید با اعداد زیاد بازی کنین.منظورمو که متوجه می شین؟میگم برای درستی یا رد گزینه ها و رسیدن به پاسخ صحیح تست ها با اعداد بازی کنین و سعی کنین به این روش مسلط شین.

با دقت توجه کنین که برای حل تست من چیکار می کنم؟توجه داشته باشید که تمام اعداد اشاره شده در اینجا تصادفی هستند و من فقط سعی کرده ام که اعداد راحت و آسان رو انتخاب کنیم.اعدادی که محاسبات رو آسانتر کنه.

میام به $x = 0$ میدم.چی میشه؟$f(0) = 3$. و $g(f(0)) = 20$ در نتیجه $g(3) = 20$...تا اینجا درسته؟

خوب میایم حال $f\big(g(3)\big) = (fog)(3) = f(20) = 2(20) + 3 = 43$ را محاسبه می کنیم و سپس با چک کردن گزینه ها , به پاسخ صحیح تست می رسیم.

$1 \rightarrow (fog)(3) = 0 \qquad 2 \rightarrow (fog)(3) = 16$

$3 \rightarrow (fog)(3) = 43 \qquad 4 \rightarrow (fog)(3) = 35$

البته این نوع حل کردن و پاسخ دادن به تست ها رو شاید تا حالا ندیده باشید.اما من که شاگردای خصوصی خودم همیشه از این روش استفاده می کنند.خوب بالاخره سرعت عمل داشتن از مهم ترین ویژگی هایی که یک داوطلب کنکور باید داشته باشه.

6-تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه ی $(-1$ و $+\infty)$ مفروض است.نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع هستند؟(سراسری ریاضی 92)

1) 1 　　 2) 2 　　 3) 3 　　 4) غیر متقاطع

گزینه ی 4 صحیح است.

پاسخ تشریحی :

ابتدا باید ضابطه ی تابع معکوس را به دست بیاوریم.

$$F(x) = x^2 + 2x + 1 \rightarrow y = (x+1)^2 \rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{y} \rightarrow x = -1 + \pm\sqrt{y}$$

$$\xrightarrow[y \to x]{x \to f^{-1}}$$

$$f^{-1}(x) = -1 \pm \sqrt{x}$$

حال باید دو تابع f^{-1} , f را قطع دهیم :

$(x+1)^2 = -1 \pm \sqrt{x} \rightarrow$ نقطه تقاطع ندارند.

کاملا مشخص است که دو تابع غیرمتقاطع هستند.چرا؟زیرا همانطور که مشاهده می شود تابع f هرگز منفی نمی شود و نهایتا صفر شود.اما تابع معکوس هرگز نمی تواند مقداری مثبت داشته باشد.فقط به ازای $x = 1$ صفر می شود که در تابع f چنین شرایطی برقرار نیست و مقدار تابع f به ازای $x = 1$, 4 می گردد.پس این نقطه هم نمی تواند نقطه ی تلاقی دو تابع باشد.

پاسخ تستی (1) :

ویژگی اشاره شده در نکته ی شماره ی 5 را به یاد آورده و با چند نقطه چک کردن کاملا مشخص می شود این دو نقطه تلاقی ندارند.گرچه استفاده از این روش در این تست را توصیه نمی کنم.زیرا با محدودیت زمان برای چک کردن نقاط روبرو هستیم و گزینه ای هم نداریم که رد کنیم.پس همون روش تشریحی که گفته شد برای پاسخ تست مناسب تر است.سخت هم نبود انصافا.

پاسخ تستی(2) :(توصیه ی من اینه که حتما از این روش استفاده کنید.)

نکته ی گفته شده در شماره ی 20 را به خاطر بیاورید.(قطع تابع با نیمساز ربع اول و سوم)

$$x^2 + 2x + 1 = x \rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$$

یعنی هیچ ریشه ی حقیقی نداشته و تابع f با تابع معکوس خود یعنی f^{-1} , هیچ نقطه ی تلاقی ندارد.

7-اگر تابع $f = \{(m, 3), (-2, 4), (2m, a), (-1, 3)\}$ یک به یک باشد , a کدام است؟(سنجش جامع تجربی 92)

1) -4 2) -1 3) 2 4) 4

گزینه ی 4 صحیح است.

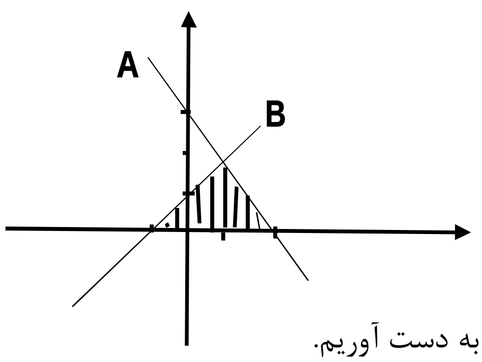
همانطور که اشاره شد. هرگاه تابعی به صورت زوج مرتب داده شود , شرط اینکه یک به یک باشد آن است که هم تابع باشد و هم یک به یک.یعنی نه مولفه ی دوم یکسان داشته باشند و نه اول.

با مقایسه ی دو زوج مرتب $(m , 3)$ و $(-1 , 3)$ متوجه می شویم که چون مولفه ی دوم شان یکسان هستند , مولفه ی اول آنها نیز باید یکسان باشد.یعنی : $m = -1$.

حال با مقایسه ی دو زوج مرتب $(2m , a)$, $(-2 , 4)$ و با اختیار $m = -1$ داریم :$(-2 , a)$, $(-2 , 4)$. در نتیجه کاملا مشخص است که $a = 4$ باید باشد.

8-مساحت ناحیه ی سایه زده در شکل مقابل کدام است؟(سنجش جامع تجربی 92)

1) 2.4
2) 2.7
3) 3.2
4) 3.6



گزینه ی 2 صحیح است.

چیزی که مشخصه اینه که ما باید نقطه ی تلاقی دو تابع را به دست آوریم.

زیرا نقاط تلاقی دو تابع با محور x ها که مشخص است.تنها راه حلی که برای حل این تست وجود دارد این است که معادله ی هر دو خط را با توجه به اینکه دو نقطه از هر کدام مشخص است به دست آورده و با هم قطع دهیم :

معادله ی خط A : (0 و 2) و (3 و 0)   معادله ی خط B: (0 و 1-) و (1 و 0)

حال معادله ی دو خط را به دست آورده و با هم قطع می دهیم :

$$y_A - 3 = \frac{0-3}{2-0}(x-0) \rightarrow y_A - 3 = -\frac{3}{2}x \rightarrow y_A = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$y_B - 1 = \frac{0-1}{-1-0}(x-0) \rightarrow y_B - 1 = x \rightarrow y_B = x + 1$$

$$y_A = y_B \rightarrow -\frac{3}{2}x + 3 = x + 1 \rightarrow -\frac{5}{2}x = -2 \rightarrow x = \frac{4}{5} \rightarrow \left(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right)$$ نقطه ی تلاقی

عدد $\frac{9}{5} = 1.8$ در واقع ارتفاع مثلث است و با توجه به اینکه مقدار عددی قاعده ی مثلث نیز را داریم می توان مساحت قسمت هاشور خورده را نیز محاسبه نمود :

$$S_{\text{هاشور خورده}} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{1.8 \times 3}{2} = 2.7$$

9-اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & : \ x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & : \ x > 1 \end{cases}$ باشد , مقدار $f(f(5)) + f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right)$ کدام است؟(سنجش جامع تجربی 92)

1) 2.5   2) 3   3) 3.5   4) 4

گزینه ی 2 صحیح است.

$$f(5) = \sqrt{5-1} = 2 \rightarrow f(f(5)) = f(2) = \sqrt{2-1} = 1$$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \sqrt{\frac{5}{4} - 1} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \rightarrow f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$f(f(5)) + f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right) = 1 + 2 = 3$$

10-تابع خطی با ضابطه ی $f(x)$ گذرنده بر دو نقطه ی $(m, 0), (0, m)$ مشخص است.ضابطه ی $f(f(x))$ کدام است؟(سنجش جامع ریاضی 92)

1) $-f(x)$ 2) x 3) $-x$ 4) $f(x)$

گزینه ی 2 صحیح است.

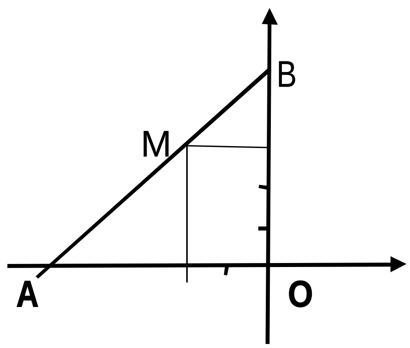
$$(0\,,m),(m\,,0)\xrightarrow{\text{معادله ی خط}} f(x)-m=\frac{0-m}{m-0}(x-0)\rightarrow f(x)-m=-x\rightarrow$$

$$f(x)=-x+m\rightarrow f\big(f(x)\big)=-(-x+m)+m=x-m+m=x$$

11-خطی با شیب مثبت $\mathbf{m}$ از نقطه ی (3 و 2-) گذشته و محورهای مختصات را در $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ قطع می کند.به ازای کدام مقدار $\mathbf{m}$ مساحت مثلث $\mathbf{OAB}$ (0 مبداء مختصات) 12 واحد است؟(سنجش جامع ریاضی 92)

1) $\frac{3}{2}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{4}{3}$ 4) $\frac{2}{3}$

گزینه ی 1 صحیح است.



واضح است که برای محاسبه ی مساحت مثلث OAB باید فاصله ی نقاط B , A را از مبداء مختصات بدست آورد.

اگر $OA=x\ ,\ OB=y$ در نظر بگیریم , داریم :

$$S_{OAB}=\frac{OA.OB}{2}\rightarrow\frac{x.y}{2}=12\rightarrow x.y=24$$

$$\mathbf{A}(-x\,,o)\ ,\ B(0\,,y)\,,M(-2,3)\ \rightarrow\ m_{AM}=m_{BM}\rightarrow\frac{3-0}{-2-(-x)}=\frac{3-y}{(-2)-0}\rightarrow$$

$$\frac{3}{-2+x}=\frac{3-y}{-2}\rightarrow(x-2)(3-y)=-6\rightarrow 3x-xy-6+2y=-6\rightarrow$$

$$3x-24+2y=0\rightarrow 3x+2y=24\rightarrow 2y=-3x+24\rightarrow y=-\frac{3}{2}x+12$$

12-تابع با ضابطه ی $f(x) = \sqrt{4x + 5}$ مفروض است.نمودارهای دو تابع f و f^{-1} با کدام طول متقاطع اند؟(سنجش جامع ریاضی 92)

1) -1 **2) $1 + \sqrt{3}$** **3) $2 + \sqrt{2}$** **4) 5**

گزینه ی 4 صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$f(x) = \sqrt{4x + 5} \rightarrow y^2 = 4x + 5 \rightarrow 4x = y^2 - 5 \rightarrow x = \frac{y^2 - 5}{4} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 5}{4}$$

حال دو تابع f^{-1} , f را قطع می دهیم :

$$\sqrt{4x + 5} = \frac{x^2 - 5}{4}$$

دیگه نیازی به ادامه ی حل این معادله نیست و کافیه نقاط داده شده را در این معادله ی به دست آمده قرار داده و تست کنیم.که کاملا مشخصه تنها عددی که در این رابطه صدق می کنه عدد 5 است.

پاسخ تستی :

طبق آنچه که در نکته ی شماره ی 20 اشاره شد می توان نوشت :

$$\sqrt{4x + 5} = x \rightarrow x = 5$$

واقعا وقتی تستی به این راحتی حل میشه دیگه چه معنی داره آدم بره پاسخ تشریحی تست رو حل کنه!؟

ذکر یک نکته در این جا الزامی است و آن این است که اگه شما دانش آموزان عزیز در این تست طبق آنچه که در حل معادلات رادیکالی گفته شد عمل کنید در این صورت علاوه بر 5 به یک جواب دیگه نیز می رسی که 1- است.اما باید توجه داشته باشید که عدد 1- در دامنه تابع رادیکالی داده شده صدق نمی کنه و جواب نمی تونه باشه.نکته ی جالب اینه که در این تست 1- حتی در گزینه ها به عنوان جواب آورده شده . اونم گزینه ی 1!!!

برای اینکه به چنین مشکلی اصلا برنخورین توصیه ی من اینه که به همون روشی که من عمل کردم یعنی تست گزینه ها در معادله عمل کنید.

13-اگر $f(x) = x - \frac{1}{x}$ و $g = \{(1,3),(3,4),(4,3),(5\ ,2),(2,5)\}$ و $f\big(g(a)\big) = \frac{3}{2}$ باشد , a کدام است؟

(سنجش جامع تجربی 92)

1) 1 **2) 2** **3) 3** **4) 5**

گزینه ی 4 صحیح است.

ابتدا باید ببینیم که : $f(?) = \frac{3}{2}$

$$f(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \to x = 2 \to g(a) = 2 \to g(5) = 2 \to a = 5$$

14-اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1,2),(5,4),(6,5),,(2,3)\}$ و $g\big(f(a)\big) = 5$ باشد , a کدام است(سراسری تجربی 91)

1) 1 **2) 2** **3) 3** **4) 4**

گزینه ی 4 صحیح است.

لطفا به تشابه سوال های طرح شده در آزمون سراسری و سنجش توجه نمائید.

$$g(?) = 5 \to f(a) = 6 \to x + \sqrt{x} = 6 \to x = 4 \to a = 4$$

15-در تابع با ضابطه ی $f(x) = a.b^x : b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$, $f(-2) = \frac{3}{32}$ مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟

(سراسری تجربی 91)

1) 6 **2) 8** **3) 12** **4) 24**

گزینه ی 3 صحیح است.

$$f(0)=\frac{3}{2}\rightarrow a=\frac{3}{2}\quad ,f(-2)=\frac{3}{32}\rightarrow \frac{3}{2}b^{-2}=\frac{3}{32}\rightarrow b^{-2}=\frac{1}{16}\rightarrow b^{2}=16\rightarrow b=\pm 4$$

$$b=4 \text{ ق ق}\rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}.4^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{4^{3}}=\frac{3}{2}\sqrt{2^{6}}=\frac{3}{2}2^{3}=12$$

16-ضابطه ی وارون تابع $y=\frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟(سراسری تجربی 91)

1) $y=\frac{x}{1-|x|}:\ |x|<1$

2) $y=\frac{1-|x|}{|x|}:\ |x|>1$

3) $y=\frac{x}{|x|-1}:\ |x|>1$

4) $y=\frac{|x|-1}{x}:\ |x|<1$

گزینه ی 1 صحیح است.

پاسخ تشریحی :

می توان تابع را به صورت دو ضابطه ای نوشت و وارون تابع را محاسبه نمود.

$$y=\begin{cases}\frac{x}{1+x} & :\ x\geq 0\\ \frac{x}{1-x} & :\ x<0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x}{1+x}\rightarrow y+yx=x\rightarrow x(1-y)=y\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-x}\\ y=\frac{x}{1-x}\rightarrow y-yx=x\rightarrow x(1+y)=y\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1+x}\end{array}\right\}\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}$$

پاسخ تستی :

طبق ویژگی اشاره شده در مورد توابع معکوس , می دانیم که اگر $(a,b)\in f\rightarrow (b,a)\in f^{-1}$

گزینه ی 2 و 4 به شکل واضحی $\rightarrow$ $(0\,,0)\in f\rightarrow (0\,,0)\in f^{-1}$

نادرست است .چون اصلا عدد صفر را نمیتوان برای تابع معکوس اختیار کرد .

گزینه ی 3 نیز نادرست است. $\left(1,\frac{1}{2}\right)\in f\to\left(\frac{1}{2},1\right)\in f^{-1}$

17-اگر $g(x)=2x-1$ و $fog(x)=\frac{x}{x-3}$ مقدار $f(3)$ کدام است؟(سراسری ریاضی 91)

1) -4 **2) -2** **3) 2** **4) 4**

گزینه ی 2 صحیح است.

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=f(2x-1)=\frac{x}{x-3}\xrightarrow{x=2}f(3)=\frac{2}{2-3}=-2$$

18-با کدام ضابطه ی $f(x)$, همواره تساوی $|f(x)|=f(x).(-1)^{[x]}$ برقرار است؟(سراسری ریاضی 91)

1) $\sin\pi x$ **2) $\cos\pi x$** **3) $\sin2\pi x$** **4) $\cos2\pi x$**

گزینه ی 1 صحیح است.

برای اینکه به پاسخ این تست برسیم , باید علامت جزء صحیح x را مبنا قرار دهیم :

$$[x]_{\text{فرد}}\to -f(x)=|f(x)|\to f(x)<0$$
$$[x]_{\text{زوج}}\to f(x)=|f(x)|\to f(x)\geq 0$$

کاملا مشخص است که تنها تابعی که ویژگی های فوق را داراست تابع گزینه ی (1) هستش.

19- تابع با ضابطه ی $f(x) = x^2 - 2x - 3$ با دامنه ی $\{x : |x-1| < 2\}$ همواره چگونه است؟(سراسری ریاضی 91)

1) منفی **2) مثبت** **3) صعودی** **4) نزولی**

گزینه ی 1 صحیح است.

$$|x-1| < 2 \to -2 < x-1 < 2 \to -1 < x < 3 \to -2 < x-1 < 2 \to$$

$$(x-1)^2_{max} < 4 \to (x-1)^2 - 4 < 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$$

20- اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $\overset{x}{\to} f \to g \to 2x$ باشند , و $g(x) = 3x + 4$, مقدار $f(5)$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 91)

1) 1 **2) 2** **3) 3** **4) 4**

گزینه ی 2 صحیح است.

همانطور که از تابعی که به صورت ماشین داده شده میشه فهمید :

$$g\big(f(x)\big) = 2x \to g\big(f(5)\big) = 10 \to 3f(5) + 4 = 10 \to 3f(5) = 6 \to f(5) = 2$$

21- ضابطه ی وارون تابع $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 91)

1) $y = x|x| : x \in R$ **2) $y = x^2 : x < 0$**

3) $y = \pm x^2 : x \in R$ **4) $y = \pm x|x| : x \in R$**

گزینه ی 1 صحیح است.

پاسخ تشریحی :

دیگه نحوه ی به دست آوردن تابع معکوس حتما دستتون اومده...با وجود این باز هم توصیه ی اکید دارم که از روش رد گزینه استفاده کنید.

از آن جایی که تابع داده شده وارون پذیر می باشد , باید وارون آن نیز یک تابع باشد.

گزینه های 3 و 4 که اصلا تابع یک به یک نیستند و کاملا غلط می باشند.با رسم نمودار تابع و معکوس آن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم می توان دریافت که تنها گزینه ی 1 این شرایط را داراست.(خودتون نمودار رو رسم و این مطلب رو چک کنید.)

پاسخ تستی :

گزینه ی 2 نادرست است .چون اصلا صفردر دامنه ی تابع معکوس وجود ندارد . $(0,0) \in f \to (0,0) \in f^{-1}$

رد گزینه ی 3 و 4 $\to (-1,-1) \in f \to (-1,-1) \in f^{-1}$

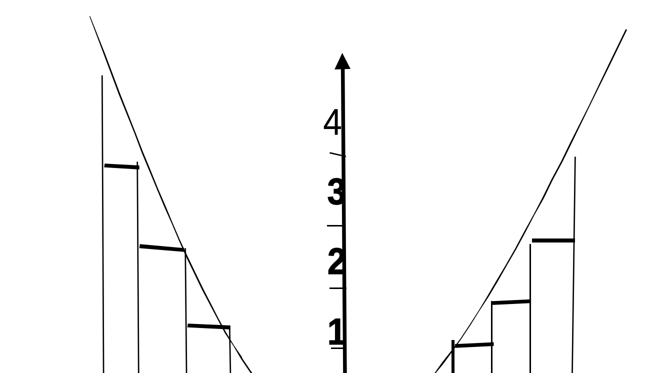
صحت کامل گزینه ی 1 را با تست کردن چند نقطه ی دیگر نیز می توانید مطمئن باشید.

22-نمودار تابع $y = [x^2]$ در بازه ی (2 و 2-) از چند پاره خط تشکیل شده است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 91)

1) 4 **2) 5** **3) 6** **4) 7**

گزینه ی 4 صحیح است.

با رسم نمودار کاملا می توان به این گزینه دست یافت :



23-اگر $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, تابع $(f(\sqrt{x}))^2 - f(x)$ چگونه است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 91)

1) ثابت **2) همانی** **3) فرد** **4) یک به یک**

گزینه ی 1 صحیح است.

$$f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = x + \frac{1}{x} \rightarrow (f(\sqrt{x}))^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2(x)\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \rightarrow (f(\sqrt{x}))^2 - f(x) = 2$$

24-در تابع با ضابطه ی $x^2 \neq 1$: $f(x) = \frac{|x|}{x}\sqrt{1 - x^2}$ و $f(0) = 0$ ضابطه ی وارون آن برابر کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 91)

1) $f(x)$ **2)** $-f(x)$ **3)** $x.f(x)$ **4)** $-x.f(x)$

گزینه ی 1 صحیح است.

با توجه به تعریف تابع f در صورت سوال می توان دید که f یک تابع دو ضابطه ای است.یعنی اینکه :

$$\begin{cases} x > 0 \rightarrow f(x) > 0 \\ x < 0 \rightarrow f(x) < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} \\ -\sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

با توجه به اینکه ترکیب هر تابع با وارون خود در صورت وجود البته تابع همانی $(y = x)$ است نیز می توان به پاسخ صحیح تست رسید.

$$y = \sqrt{1 - x^2} \rightarrow y^2 = 1 - x^2 \rightarrow x^2 = 1 - y^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{1 - y^2} \rightarrow f^{-1}(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

25-اگر $f = \{(2,5)\ ,\ (1,2)\ ,\ (3,1)\ ,\ (4,3)\}$ و $g = \{(1,4)\ ,\ (4,2)\ ,\ (2,3)\ ,\ (5,1)\}$ باشد , دامنه ی تابع gof^{-1} کدام است؟(سنجش جامع **91** تجربی)

1) $\{5$ و 3 و $1\}$ **2)** $\{5$ و 3 و $2\}$ **3)** $\{5$ و 2 و $1\}$ **4)** $\{3$ و 2 و $1\}$

گزینه ی 2 صحیح است.

دقت داشته باشید که منظور تست gof^{-1} **است نه** $(gof)^{-1}$**.**

ابتدا باید تابع معکوس f^{-1} را محاسبه نمود :

$$f^{-1} = \{(5,2)\ ,\ (2,1)\ ,\ (1,3)\ ,\ (3,4)\}$$

حال باید gof^{-1} را محاسبه نمود :

$$gof^{-1} = \{(5,3)\ ,\ (2,4)\ ,\ (3,2)\}$$

26-نقطه ی تلاقی دو خط $y - x = 2$ و $ay = x + b^2 + b$ روی محور xهاست.b کدام است؟(سنجش جامع **91 تجربی**)

1) **2 و 1-** **2)** **0 و 2-** **3)** **1 و 2-** **4)** **2 و 1**

گزینه ی 3 صحیح است.

اینکه گفته شده است نقطه ی تلاقی دو تابع روی محور x هاست , یعنی اینکه مقدار هر دو تابع به ازای نقطه ی تلاقی صفر است.پس خواهیم داشت :

$$y - x = 2 \rightarrow 0 - x = 2 \rightarrow x = -2$$

$$ay = x + b^2 + b \rightarrow a(0) = -2 + b^2 + b \rightarrow b^2 + b - 2 = 0 \rightarrow (b+2)(b-1) = 0$$

$$b = -2\ ,\ 1$$

27-اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & : \ x > 1 \\ \frac{1}{x} & : \ x \le 1 \end{cases}$ باشد , مقدار $fof\left(\frac{1}{5}\right) + fof\left(\frac{5}{4}\right)$ کدام است؟(سنجش جامع تجربی 91)

1) 4 **2) 6** **3) 1.5** **4) 2.5**

گزینه ی 1 صحیح است.

$$(fof)\left(\frac{1}{5}\right) = f\left(f\left(\frac{1}{5}\right)\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{5}}\right) = f(5) = \sqrt{5-1} = 2$$

$$(fof)\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f\left(\sqrt{\frac{5}{4}-1}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$4$$

28-دامنه ی تابع $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 4})$ کدام است؟(سنجش جامع تجربی 91)

1) $[-2$ و $+\infty]$ **2)** $[-1$ و $+\infty]$ **3)** $[0$ و $+\infty]$ **4)** $[-\infty$ و $+\infty]$

گزینه ی 4 صحیح است.

شرط با معنی بودن عبارت لگاریتمی داده شده این است که اولا عبارت زیر رادیکال باید مثبت باشد و ثانیا عبارت داخل پرانتز باید مثبت باشد.

$$(x + \sqrt{x^2 + 4}) > 0 \rightarrow$$

کاملا مشخص است که عبارت $x^2 + 4$ همواره مثبت است و چون مقدار رادیکالی آن نیز از x بیشتر است , پس حاصل عبارت $(x + \sqrt{x^2 + 4})$ نیز به ازای همه ی اعداد حقیقی مثبت است .

29-دوره ی تناوب تابع $f(x) = 2x - [2x]$ کدام است؟(سنجش جامع تجربی 91)

1) صفر **2) $\frac{1}{2}$** **3) 1** **4) 2**

گزینه ی 2 صحیح است.

همانطور که اشاره شد , دوره ی تناوب توابع جزء صحیح به صورت $f(x) = ax - [ax]$ به صورت $T = \frac{1}{|a|}$ تعریف می شود.

$$T = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|2|} = \frac{1}{2}$$

30-اگر $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ باشد , مقدار $f\left(\log\frac{2}{3}\right) + f(\log\frac{3}{2})$ کدام است؟(سنجش جامع تجربی 91)

1) صفر **2) 1** **3) $\log 2$** **4) $\log 3$**

گزینه ی 1 صحیح است.

حتما این ویژگی مهم رو در مورد توابع لگاریتمی که در مبحث لگاریتم به آن اشاره شد , به خاطر دارید.

$$\log\frac{1}{a} = -\log a$$

$$f\left(\log\frac{2}{3}\right) + f\left(\log\frac{3}{2}\right) = \left(2^{\log\frac{2}{3}} - 2^{-\log\frac{2}{3}}\right) + \left(2^{\log\frac{3}{2}} - 2^{-\log\frac{3}{2}}\right) = 2^{\log\frac{2}{3}} - 2^{\log\frac{3}{2}} +$$

$$2^{\log\frac{3}{2}} - 2^{\log\frac{2}{3}} = 0$$

البته گرچه این تست در مبحث لگاریتم نیز بهش پرداخته شده است و بیشتر تست لگاریتمی ست تا تابع , اما خوب بالاخره به مبحث تابع هم یه جورایی مربوط است.

31- دوره ی تناوب تابع $f(x) = \frac{3}{4}x - \left[\frac{3}{4}x\right]$ کدام است؟(سنجش جامع ریاضی 91)

1) $\frac{3}{4}$ **2)** $\frac{4}{3}$ **3)** $\frac{3}{2}$ **4)** 2

گزینه ی 2 درست است.

$$T = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

32--دامنه ی تابع $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2} + 4)$ کدام است؟(سنجش جامع ریاضی 91)

1) $(-\infty$ و $+\infty)$ **2)** $[0$ و $+\infty)$ **3)** $[-2$ و $+\infty)$ **4)** $(+\infty, 2]$

گزینه ی 1 صحیح است.

باز هم قابل ذکر است که به تشابه سوالات آزمون سراسری و سنجش و تکرار و نوع سوالات توجه داشته باشید.

عبارت x^2 که همواره مثبت است و عبارت زیر رادیکال از لحاظ مثبت بودن مشکلی ندارد.

حال به بررسی مثبت بودن عبارت جلوی لگاریتم می پردازیم. کاملا مشخص است عبارت جلوی لگاریتم به ازای هر عدد حقیقی همواره مثبت بوده و هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که مشکلی برای این عبارت به وجود آورد.

33-اگر $f(x) = \sqrt{6 - x}$ و $g(x) = x^2 - 5x$ باشد , دامنه ی تابع fog کدام است؟(سنجش جامع ریاضی 91)

1) $[2$ و $3]$ **2)** $[-6$ و $1]$ **3)** $[-1$ و $6]$ **4)** $[-2$ و $3]$

گزینه ی 3 صحیح است.

همانطور که در تعریف دامنه ی تابع fog اشاره شد می توان نوشت :

$$D_{fog} = \{x | x \in D_g ,\ g(x) \in D_f\} = \{x | x \in R :\ x^2 - 5x \le 6 \to x^2 - 5x - 6 \le 0\}$$

$$(x-6)(x+1) \leq 0 \rightarrow -1 \leq x \leq 6$$

34-اگر $f(x) = \frac{4^x-1}{2^x}$ باشد , مقدار $f(\log 2) + f(\log\frac{1}{2})$ برابر کدام است؟(سنجش جامع ریاضی 91)

1) صفر **2) $\frac{1}{2}$** **3) 1** **4) 2**

گزینه ی 1 صحیح است.

با توجه به نکته ی اشاره شده در درس که گفته شد در یک تابع فرد :

$$f(x) + f(-x) = 0$$

تست را حل می کنیم.

با تفکیک تابع داده شده فرد بودن این تابع را کاملا می توان مشاهده نمود :

$$f(x) = \frac{4^x-1}{2^x} = \frac{4^x}{2^x} - \frac{1}{2^x} = 2^x - 2^{-x} \rightarrow f(-x) = -f(x) \text{ تابع فرد}$$

$$f(\log 2) + f\left(\log\frac{1}{2}\right) = f(\log 2) + f(-\log 2) = f(x) + f(-x) = ?$$

35-دوره ی تناوب تابع با ضابطه ی $f(x) = (-1)^{[x]}.(x-[x])$ کدام است؟(سنجش جامع ریاضی 91)

1) 1 **2) 2** **3) 3** **4) 4**

گزینه ی 2 صحیح است.

همانطور که می دانیم دوره ی تناوب , کوچکترین عدد مثبت T است به طوری که : $f(x+T) = f(x)$.

تابع $x-[x]$ متناوب با دوره ی تناوب 1 است. ولی تابع $(-1)^{[x]}$ متناوب با دوره ی تناوب 2 است.لذا دوره ی تناوب اصلی تابع داده شده , 2 است.

36-اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ باشد آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟(سراسری تجربی 90)

1) $x^2 + 1$　　2) $x^2 + 3$　　3) $x^2 + 4x + 5$　　4) $x^2 - 4x + 5$

گزینه ی 4 صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$f(x-3) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \xrightarrow{x-3=z \to x=z+3} f(z) = (z+3-2)^2 + 1$$

$$z \to x \;:\; f(x) = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2 \to f(1-x) = (1-x+1)^2 + 1$$

$$= (2-x)^2 + 1 = 4 - 4x + x^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$$

پاسخ تستی :

اگه یادتون باشه قبلا هم گفتم که همیشه سعی کنید در حل تست ها و برای رد گزینه های نادرست بازی اعداد کنید وگزینه های نادرست تست را رد کنید.این تست را هم به این روش می توان حل نمود :

میام $x = 3$ قرار می دم.چه اتفاقی می افته ؟

$$f(x-3) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{x=3} f(0) = 2$$

حال میام تو تابع $f(1-x)$ به $x = 1$ می دم تا $f(0)$ ظاهر شده و آنگاه گزینه ها را مقایسه نموده و گزینه های نادرست را رد می کنم.

$$\left(\begin{array}{l} 1) \to x = 1 \to f(1-x) = 2 \\ 2) \to x = 1 \to f(1-x) = 4 \;\text{نا درست} \\ 3) \to x = 1 \to f(1-x) = 10 \;\text{نا درست} \\ 4) \to x = 1 \to f(1-x) = 2 \end{array}\right.$$

دقت داشته باشید که حل تست به این روش کمتر از 30 ثانیه طول می کشد و من اینجا فقط کامل حل تست به این روش را توضیح دادم تا دیگه تو تست های بعدی که می خواین به این روش حل کنین دچار مشکل نشین.

هنوز گزینه ی درست کاملا مشخص نشده است.با توجه به وضعیت پیش آمده مشخصه که یک نقطه ی دیگه رو هم برای پیدا کردن گزینه ی صحیح باید تست کنیم.

$$x = 0 \to f(-3) = 5 \to x = 4 \to f(1-x) = f(-3) \to \begin{pmatrix} 1 \to 17^{\text{نادرست}} \\ 4 \to 5 \end{pmatrix}$$

37-در تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & : \ x > 3 \\ 2x + 3 & : \ x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟(سراسری تجربی 90)

1) 6   2) 7   3) 8   4) 9

گزینه ی 4 صحیح است.

$$f(f(5)) + f(f(1)) = f(5 - \sqrt{5+4}) + f(2(1) + 3) = f(2) + f(5) = 7 + 2 = 9$$

38-به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & : \ x \geq 0 \\ -\sqrt{ax} & : \ x < 0 \end{cases}$ یک تابع فرد است؟(سراسری ریاضی 90)

1) -4   2) 4   3) ± 4 4) هیچ مقدار a

گزینه ی 1 صحیح است.

شرط اول یعنی متقارن بودن دامنه برقرار است.حال برای بررسی شرط دوم به صورت تشریحی و تستی به سوال طرح شده , پاسخ می دهیم :

پاسخ تستی(1) :

این ویژگی مهم درباره ی توابع فرد را دوباره بهش اشاره می کنیم :

در توابع دو ضابطه ای فرد , هرگاه در یکی از ضابطه ها x را به $-x$ تبدیل کنیم , باید قرینه ی ضابطه ی دیگر به دست آید.

$$2\sqrt{-x} = -(-\sqrt{ax}) \to 2\sqrt{-x} = \sqrt{ax} \xrightarrow{\text{به توان } 2} 4(-x) = ax \to a = -4$$

پاسخ تستی(2) :

باز هم بازی اعداد با تست !

$$f(1) = 2 \to f(-1) = -2 \to -\sqrt{-a} = -2 \to -a = 4 \to a = -4$$

39-اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد , ضابطه ی تابع $f^{-1}(\sin x)$ کدام است؟(سراسری ریاضی 90)

1) $\tan x$ 2) $\cot x$ 3) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$ 4) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

گزینه ی 4 صحیح است.

ابتدا باید تابع $f^{-1}(x)$ را باید به دست آوریم :

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{\text{به توان 2}} y^2 = \frac{x^2}{1+x^2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2 = y^2 + y^2x^2 \to y^2x^2 - x^2 = -y^2$$

$$x^2(y^2-1) = -y^2 \to x^2 = \frac{-y^2}{y^2-1} = \frac{y^2}{1-y^2} \to f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}$$

$$f^{-1}(\sin x) = \sqrt{\frac{(\sin x)^2}{1-(\sin x)^2}} = \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{|\sin x|}{|\cos x|}$$

40-تابع های $f = \{(2,1),(3,2),(4,5),(1,7)\}$ و $g = \{(1,2),(3,1),(a\ ,3),(b,1)\}$ مفروض اند.اگر $\begin{matrix}(4,2) \in fog \\ (4,1) \in gof\end{matrix}$ باشند , دوتایی (a,b) کدام است؟(سراسری ریاضی 90)

1) (4و3) 2) (3 و 4) 3) (5 و 4) 4) (4 و 5)

گزینه ی 3 صحیح است.

یکی از سخت ترین و البته سخت نگیم بهتره , جالب ترین تست های مطرح شده در مورد توابع ترکیبی در طی سال های اخیر است که هوش یک داوطلب کنکور را به زیبایی به چالش می کشاند.

$(4,2) \in fog \to 4 \in D_g$: است $a = 4$ با توجه به اینکه عدد $\mathbf{4}$ در D_g وجود ندارد .یعنی صد در صد

پس گزینه ی 1 و 4 تا همینجا هم مشخصه که نادرست است.

$$g(4) = 3 \to f\big(g(4)\big) = f(3) = 2 \to (4,2) \in fog$$

$$(4,1) \in gof \to 4 \in D_f \to (4,5) \in f \to f(4) = 5 \to g\big(f(4)\big) = g(5) = g(b) = 1 \to b = 5$$

41-اگر $\mathbf{f(x) = -x + [x]}$ و $\mathbf{g(x) = 2^x}$ باشد , آنگاه برد تابع $\mathbf{gof}$ کدام است؟(سراسری ریاضی 90)

1) $(\frac{1}{2}, 1]$ **2)** $[\frac{1}{2}, 1)$ **3)** $(1, 2]$ **4)** $[1$ و $2)$

گزینه ی 1 صحیح است.

طبق ویژگی های اشاره شده در مورد توابع جزء صحیح داریم :

$$0 \le x - [x] < 1 \xrightarrow{\times -1} -1 < -x + [x] \le 0$$

در نتیجه می توان نوشت :

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(-x + [x]) = 2^{-x+[x]}$$

کاملا واضح است که به ازای کمترین و بیشترین مقدار $-x + [x]$ برد تابع به دست می آید:

$$\begin{cases} -x + [x] = 0 \to 2^0 = 1 \\ -x + [x] > -1 \to 2^{-x+[x]} > 2^{-1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

در نتیجه برد تابع مذکور به صورت $\mathbf{(\frac{1}{2}, 1]}$ به دست می آید.

42-در تابع با ضابطه ی $\mathbf{f(x) = x^2 - 2[x]}$, مقدار $\mathbf{f\left(-\frac{1}{2}f\left(\sqrt{3}\right)\right)}$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 90)

1) 1.75 2) 2.25 3) 2.5 4) 2.75

گزینه ی 2 صحیح است.

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2(1) = 3 - 2 = 1 \rightarrow$$

$$f\left(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3})\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4} - 2(-1) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} = 2.25$$

43-اگر $\mathbf{f(x) = x^2 - x - 2}$ و $\mathbf{f(g(x)) = x^2 + x - 2}$, آنگاه $\mathbf{(f+g)(x)}$ کدام گزینه می تواند باشد؟(سراسری تجربی خارج از کشور 90)

1) $\mathbf{x^2 - 1}$ 2) $\mathbf{x^2 + 1}$ 3) $\mathbf{x^2 - 2x}$ 4) $\mathbf{x^2 + 2x}$

گزینه ی 1 صحیح است.

$$f(g(x)) = x^2 + x - 2 = (g(x))^2 - (g(x)) - \mathbf{2} \rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \left(g(x) - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$\left(g(x) - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow g(x) - \frac{1}{2} = \begin{cases} x + \frac{1}{2} \\ -x - \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g(x) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \\ g(x) - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} g(x) = x + 1 \rightarrow (f+g)(x) = x^2 - x - 2 + x + 1 = x^2 - 1 \\ g(x) = -x \rightarrow (f+g)(x) = x^2 - x - 2 - x = x^2 - 2x - 2 \end{cases}$$

44- دو تابع $f = \{(1,2),(2,3),(4,5),(3,4)\}$ و $g = \{(2,1),(3,2),(5\ ,4)\}$ مفروض اند.تابع $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 90)

2) $\{(4,4),(1,1),(3,4)\}$ **2)** $\{(3,3),(5,5),(4,3)\}$

1) $\{(4,4),(1,1),(2,2)\}$ **4)** $\{(2,2),(3,3),(5,5)\}$

گزینه ی 4 صحیح است.

$$f^{-1} = \{(2{,}1),(3{,}2),(5{,}4),(4{,}3)\} \quad , \quad g^{-1} = \{(1{,}2),(2{,}3),(4\ ,5)\}$$

حال باید تابع خواسته شده را به صورت زوج مرتب به دست آورد :

$$g^{-1}of^{-1} = \{(2{,}2),(3{,}3),(5{,}5)\}$$

45-اگر $f(x) = \text{Arc}\sin(2x-1)$ و $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ باشد آنگاه دامنه ی تابع fog کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 90)

1) R **2)** $[0,1]$ **3)** $[-1,1]$ **4)** $[0\ ,+\infty)$

گزینه ی 1 صحیح است.

طبق تعریف دامنه ی تابع fog داریم :

$$D_f = \{-1 \le 2x-1 \le 1 \to 0 \le 2x \le 2 \to 0 \le x \le 1\}$$

$$D_{fog} = \{x|x \in D_g,\ g(x) \in D_f\} = \left\{x|x \in R:\ 0 \le \frac{x^2}{1+x^2} \le 1\right\}$$

حال باید ببینیم شرط به دست آمده برای دامنه ی تابع fog به ازای چه نقاطی از x برقرار است؟

$$x^2 \ge 0 \to 1+x^2 \ge 1 \to 0 < \frac{1}{1+x^2} \le 1 \xrightarrow{\times -1} -1 \le \frac{-1}{1+x^2} < 0 \xrightarrow{+1}$$

$$0 \le 1 - \frac{1}{1+x^2} < 1 \to 0 \le \frac{x^2}{1+x^2} < 1$$

و این نشان می دهد که شرط به دست آمده به ازای تمام اعداد حقیقی برقرار بوده و هیچ محدودیتی برای دامنه ی تابع ایجاد نمی کند.

رابطه ی یادشده فقط برای رفع هرگونه ابهامی از ذهن شما داوطلبان کنکور اثبات گردید.وگرنه با یک نگاه اجمالی به راحتی می توان فهمید که این رابطه یک رابطه ی کاملا بدیهی ست.

46-اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ باشد , ضابطه ی تابع $f(f(x))$ کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 90)

1) x **2) $4 - x$** **3) $f(x)$** **4) $4 - f(x)$**

گزینه ی 3 صحیح است.

$$f(f(x)) = 2 - |2 - |x - 2| - 2| = 2 - 2 - \big|-|x - 2|\big| = 2 - |x - 2| = f(x)$$

47-برد تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{1+x^2}{2x}$ کدام است؟(سنجش جامع تجربی 90)

1) $[-1, 1]$ **2) (-1و1)** **3) $R - (-1, 1)$** **4) $R - [-1, 1]$**

گزینه ی 3 صحیح است.

پاسخ تشریحی :

همانطور که می دانیم برای محاسبه ی برد یک تابع , باید به دنبال معکوس تابع باشیم تا با محاسبه ی ضابطه ی معکوس تابع و دامنه ی ان , در واقع برد تابع اصلی را به دست آورده باشیم :

$$y = \frac{1 + x^2}{2x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2xy = 1 + x^2 \rightarrow x^2 - 2xy + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} =$$

$$x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

نتیجه ی به دست آمده , زمانی تعریف شدده است که عبارت زیر رادیکال مثبت باشد.یعنی :

$$y^2 - 1 \geq 0 \to y^2 \geq 1 \to |y| \geq 1 \to y \geq 1 \text{ یا } y \leq -1 \to R - (-1,1)$$

پاسخ تستی و رد گزینه :

چیزی که مشخصه تنها عددی که نمی توان برای تابع f اختیار کرد , عدد صفر است.

برای حل تست , میایم دوباره چیکار می کنیم؟درست حدس زدید...باز هم بازی با اعداد!

من میام به $x = 1$ می دهم. $y = 1$ می شه.یعنی چی؟یعنی اینکه عدد 1 در دامنه ی تابع معکوس و یا به عبارتی برد تابع اصلی وجود دارد.یعنی گزینه ی 1 و 4 تابلو نادرست است.چرا؟چون این دو گزینه عدد یک را از برد تابع حذف کرده اند و این نادرست است.

حال برای انتخاب گزینه ی صحیح از بین گزینه های 2 و 3 به صورت زیر عمل می کنیم :

به $x = 2$ بدیم , $y = \frac{5}{4}$ میشه.یعنی عددی بزرگتر از 1 در برد تابع وجود دارد و گزینه ی 2 چیزی خلاف این واقعیت را برای ما بیان می کند.

48-در تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & : \ x < 1 \\ 2x - 1 & : \ x > 1 \end{cases}$ مقدار $f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ کدام است؟(سنجش جامع تجربی 90)

1) 1   **2) $\frac{3}{2}$**   **3) 2**   **4) $\frac{5}{2}$**

گزینه ی 3 صحیح است.

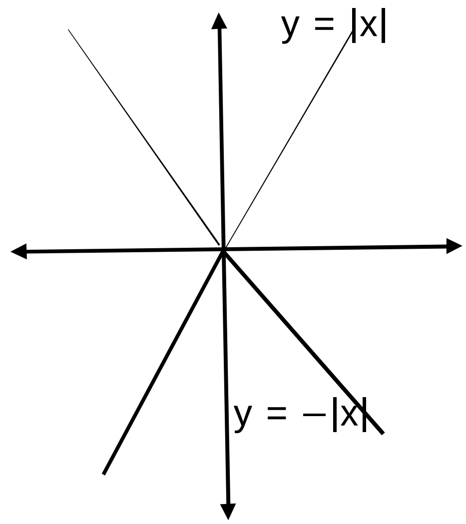
$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \ \to f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 3 - 1 = 2$$

49-ماکزیمم تابع $f(x) = -|x|$ در بازه ی $[-1 , 1]$ کدام است؟(سنجش جامع 90 ریاضی)

1) -1 2) صفر 3) $\frac{1}{2}$ 4) 1

گزینه ی 2 صحیح است.

اصلا نیازی به حل تست نیست و با تصوری سریع از تابع , می توان فهمید که ماکزیمم این تابع چقدر است؟



50-دوره ی تناوب تابع $f(x) = \sin 5x . \cos(x - \frac{\pi}{4})$ کدام است؟(سنجش جامع 90 ریاضی)

1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) π 4) 2π

گزینه ی 3 صحیح است.

در چنین حالت هایی که توابع مثلثاتی به صورت حاصلضرب و یا شکل های دیگری از توابع مثلثاتی که قابل ساده شدن نیست , بهترین حالت برای تعیین دوره ی تناوب تابع , استفاده از تعریف است.

$$f(x + T) = f(x) \rightarrow \sin(5x + 5T) . \cos\left(x + T - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 5x . \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$\xrightarrow[\sin(5\pi+\alpha)=-\sin\alpha]{\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha} T = \pi$$

51-دامنه ی تابع $y = \mathrm{Arcsin}\frac{1}{x-2}$ کدام است؟(سنجش جامع 90 ریاضی)

1) $R-(1,3)$ **2) $R-[1,3]$** **3) (1و3)** **4) $[1,3]$**

گزینه ی 1 صحیح است.

کاملا مشخص است که برای تعیین دامنه ی تابع توابع معکوس مثلثاتی از آن جا که می دانیم مقدار سینوس و کسینوس از محدوده ی -1 و 1 تجاوز نمی کند می توان نوشت :

$$-1 \le \frac{1}{x-2} \le 1 \rightarrow \begin{cases} x-2 \ge 1 \rightarrow x \ge 3 \\ x-2 \le -1 \rightarrow x \le 1 \end{cases} \rightarrow R-(1,3)$$

52-نمودارهای دو تابع $f(x) = x^3 + ax + b$ و خط به معادله ی $y + 2x = b$ در نقطه ای به طول یک روی محور x ها متقاطع اند.طول های دو نقطه ی تقاطع دیگر این منحنی و خط کدام است؟(سراسری تجربی 89)

1) 1- و 0 **2) 3 و 1-** **3) 2 و 1-** **4) 2 و 0**

گزینه ی 1 صحیح است.

در نقطه ای به طول یک روی محور x ها متقاطع اند.یعنی اینکه مقدار هر دو تابع در نقطه ی $x = 1$, صفر است.

$$f(x) = x^3 + ax + b \rightarrow 0 = 1 + a + b \rightarrow 0 = 1 + a + 2 \rightarrow a = -3$$

$$y + 2x = b \rightarrow 0 + 2 = b \rightarrow b = 2$$

حال که مقادیر مجهول a , b محاسبه شد , می توان سایر نقاط تلاقی دو تابع را نیز به دست آورد :

$$b - 2x = x^3 + ax + b \rightarrow 2 - 2x = x^3 - 3x + 2 \rightarrow x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0, 1, -1$$

53-اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ باشد , حاصل $(fog)(1-\sqrt{2}) - (gof)(1-\sqrt{2})$ کدام است؟(سراسری تجربی 89)

1) 4 2) $4(\sqrt{2}-1)$ 3) $4(1-\sqrt{2})$ 4) $4\sqrt{2}$

گزینه ی 3 صحیح است.

قبل اینکه شروع به حل تست کنیم , اگه دانش آموز باهوشی باشید که حتما همینطوره , ضابطه ی تابع $g(x) = (x+1)^2$ را به این شکل در نظر بگیرید و سپس اقدام به حل تست کنید.

$$(fog)(1-\sqrt{2}) = f\left(g(1-\sqrt{2})\right) = f\left(\left(1-\sqrt{2}+1\right)^2\right) = f\left(\left(2-\sqrt{2}\right)^2\right) = f(4-4\sqrt{2}+2)$$

$$= f(6-4\sqrt{2}) = 6-4\sqrt{2}$$

$$(gof)(1-\sqrt{2}) = g\left(f(1-\sqrt{2})\right) = g(|1-\sqrt{2}|) = g(\sqrt{2}-1) = \left(\sqrt{2}-1+1\right)^2 = 2$$

$$(fog)(1-\sqrt{2}) - (gof)(1-\sqrt{2}) = 6-4\sqrt{2}-2 = 4-4\sqrt{2} = 4(1-\sqrt{2})$$

54-دو تابع با ضابطه های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض اند.اگر $g(f(x)) = -2$ باشد , مجموعه ی مقادیر x کدام است؟(سراسری ریاضی 89)

1) $R - Z$ 2) R 3) Z 4) $\emptyset$

گزینه ی 2 صحیح است.

حتما این ویژگی مهم اشاره شده در مورد توابع جزء صحیح را به خاطر دارید :

$$f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] = -1 \rightarrow x \notin Z \\ [x] + [-x] = 0 \quad \rightarrow x \in Z \end{cases}$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} g(-1) = -2 \rightarrow x \notin Z \\ g(0) = -2 \rightarrow x \in Z \end{cases}$$

یعنی به ازای تمام اعداد حقیقی(چه صحیح و چه غیر صحیح) رابطه ی $g(f(x)) = -2$ برقرار است.

55-اگر $g(x) = f(3x-4)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ باشد , حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟(سراسری ریاضی 89)

1) 5   2) 6   3) 7   4) 8

گزینه ی 4 صحیح است.

یک تست بسیار هوشمندانه و البته شاید به جرات بشه گفت سخت ترین تستی که طی 12 سال اخیر در مورد توابع ترکیبی مطرح شده است!

$$g(x) = f(3x-4) \rightarrow 3x-4 = f^{-1}\big(g(x)\big) \rightarrow x = \frac{f^{-1}\big(g(x)\big)+4}{3} \rightarrow$$

$$g^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x)+4}{3} \rightarrow g^{-1}(16) = \frac{f^{-1}(16)+4}{3} = \frac{\left(16+\sqrt{16}\right)+4}{3} = \frac{16+4+4}{3} = 8$$

56-تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x^2-1 : x \geq 0 \\ 1-x^2 : x < 0 \end{cases}$ بر روی مجموعه ی اعداد حقیقی چگونه است؟(سراسری ریاضی 89)

1) پوشا – یک به یک   2) پوشا – غیر یک به یک

3) غیرپوشا – یک به یک   4) غیرپوشا – غیر یک به یک

گزینه ی 2 صحیح است.

تابع که کاملا مشخصه که یک به یک نیست.چرا؟ برای اینکه مقدار تابع به ازای دو نقطه صفر می شود و این یک تناقض با تعریف تابع یک به یک است.

$$f(1) = 0 \quad , \qquad f(-1) = 0$$

پس گزینه ی 1 و 3 نادرست است.

حال به بررسی پوشا بودن تابع می پردازیم.

در مورد پوشا بودن تابع , با توجه به اینکه این مبحث از کتب درسی ریاضیات چندین سال است که حذف شده است , اما باید گفت که تابع پوشاست.یعنی به ازای دامنه ی تعریف شده برای تابع , این تابع کل مجموعه ی اعداد حقیقی را پوشش می دهد و این مطلب رو به راحتی و به وضوح می توان با رسم نمودار تابع دریافت.

57-نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقطه ای به طول یک و محور y ها را در نقطه ای به عرض 6- قطع کرده و از نقطه ی (6- و 2-) می گذرد. $f(-1)$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 89)

1) 8-　　2) 7-　　3) 5-　　4) 4-

گزینه ی 1 صحیح است.

$$(1,0) \rightarrow 0 = a + b + c$$

$$-6 = c$$

$$(-2,-6) \rightarrow -6 = 4a - 2b + c$$

حال باید با قرار دادن مقدار c , در دو معادله ی به دست آمده می توان دستگاه دو معادله ی دو مجهولی را حل نموده و مقدار a , b را نیز محاسبه نمود.

$$\begin{cases} a + b = 6 \rightarrow a + 2a = 3a = 6 \rightarrow a = 2 \\ 4a - 2b = 0 \rightarrow b = 2a = 2(2) = 4 \end{cases}$$

$$f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 6 = 2 - 4 - 6 = -8$$

58-اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$, ضابطه ی تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور89)

2) $\frac{1}{1-x^2}$　　2) $\frac{2x}{x^2-1}$　　3) $\frac{2x+1}{1-x^2}$　　4) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$f(x^2) - 2f(x) + 1 = \frac{x^2}{x^2-1} - 2\left(\frac{x}{x-1}\right) + 1 = \frac{x^2 - 2x(x+1) + x^2 - 1}{(x+1)(x-1)} =$$

$$\frac{x^2-2x^2-2x+x^2-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{-2x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{-(2x+1)}{x^2-1}=\frac{2x+1}{1-x^2}$$

59-دو تابع $\mathbf{g}$, $\mathbf{f}$ بر روی اعداد حقیقی تعریف شده اند.در کدام حالت دو تابع مساوی اند؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 89)

1) $f(x)=2\log x\ ,\ g(x)=\log x^2$

2) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{|x|}\ ,\ g(x)=1$

3) $f(x)=(\sqrt{x})^2\ ,\ g(x)=x$

4) $f(x)=\frac{x}{|x|}\ ,\ g(x)=\frac{|x|}{x}$

گزینه ی 4 صحیح است.

همانطور که می دانیم شرط اول مساوی بودن دو تابع , این است که دامنه ی دو تابع با هم مساوی باشند.

رد گزینه ی 1) - $D_f=x\geq 0$ و $D_g=R-\{0\}$

رد گزینه ی 2) - $D_f=R-\{0\}$ و $D_g=R$

رد گزینه ی 3) - $D_f=x\geq 0$ و $D_g=R$

دامنه ی تعریف هر دو تابع در گزینه ی 4 یکسان و به صورت $D_f=D_g=R-\{0\}$ است.ضمنا ضابطه ی دو تابع نیز کاملا یکسان و به صورت زیر است :

$$f(x)=g(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

60-در تابع با ضابطه ی $f(x)=[x]+[-x]+\sqrt{\sin\pi x-1}$ مقدار $f(-\frac{1}{2}f(x))$ کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 89)

1) -1   **2)** 1   **3)** صفر   **4)** تعریف نشده

گزینه ی 1 صحیح است.

برای اینکه به این تست پاسخ دهیم , باید دامنه ی تابع را مشخص کنیم :

$$\sin\pi x - 1 \geq 0 \rightarrow \sin\pi x \geq 1$$

همانطور که می دانیم مقدار تابع سینوس هرگز نمی تواند از 1 بیشتر باشد.پس تنها حالت قبول برای این حالت همون مقدار $\sin\pi x = 1$ است.

$$\sin\pi x = 1 \rightarrow \pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 2k + \frac{1}{2} : k \in Z$$

دانش آموزان عزیز توجه داشته باشند , با توجه به اینکه k فقط مقدار صحیح می تواند اختیار کند , مقدار x همواره غیر صحیح است.یعنی :

$$f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin\pi x - 1} = -1 + 0 = -1$$

$$f\left(-\frac{1}{2}f(x)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin\pi x - 1} \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} -1$$

61-اگر نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m$ محور x ها را در نقطه ای به طول 2 قطع کند , طول های دو نقطه ی تلاقی دیگر آن با محور xها کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور **89**)

1) $\frac{1}{2}$ و **-1**   **2) 1** و $-\frac{1}{2}$ **3)** $\frac{3}{2}$ و **-1**   **4) 3** و $-\frac{1}{2}$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m \xrightarrow{(2,0)} 0 = 2(8) - 5(4) - 2 + m \rightarrow m = 6$$

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$$

با توجه به اینکه یکی از ریشه های این معادله $x = 2$ است , طبق قوانین بخش پذیری تنها راه برای حل این تست این است که عبارت جبری مورد نظر را بر $x - 2$ تقسیم کنیم تا درجه ی عبارت به دو جمله ای کاهش یافته و ریشه های دیگر معادله نیز مشخص شود :

$$2x^3 - 5x^2 - x + 6 = (x-2)(2x^2 - x - 3) = (x-2)(x+1)(2x-3) = 0 \rightarrow$$

$$x = 2 , -1 , \frac{3}{2}$$

62-اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$ باشد , حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 89)

1) 1   2) 2   3) 3   4) 4

گزینه ی 2 صحیح است.

$$g^{-1}(6) = x \to g(x) = 6 \to f(x) + \sqrt{f(x)} = 6 \to f(x) + \sqrt{f(x)} - 6 = 0$$

$$\left(\sqrt{f(x)} - 2\right)\left(\sqrt{f(x)} + 3\right) = 0 \to \sqrt{f(x)} = 2, -3 \xrightarrow{\sqrt{f(x)} \geq 0} \sqrt{f(x)} = 2$$

$$f(x) = 4 \xrightarrow{\text{طبق تعریف تابع معکوس}} x = f^{-1}(4) = \sqrt[3]{2(4)} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$g^{-1}(6) = x = 2$$

63-اگر $f(x) = \sqrt{x + 2|x|}$ باشد , مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟(سراسری تجربی 88)

1) تعریف نشده   2) 6   3) 8   4) 12

گزینه ی 2 صحیح است.

$$f\big(f(-144)\big) = f\left(\sqrt{-144 + 2|-144|}\right) = f\big(\sqrt{144}\big) = f(12) = \sqrt{12 + 2|12|} = \sqrt{36} = 6$$

64-اگر جزءصحیح $(x^2 + x)$ برابر 1- باشد , آنگاه $\left|x^{20}\right|$ کدام است؟(سراسری تجربی 88)

1) 1-   2) صفر   3) 1   4) 2

گزینه ی 2 صحیح است.

$$[x^2 + x] = -1 \to -1 \leq x^2 + x < 0 \to -1 < x < 0 \to 0 < x^{20} < 1 \to [x^{20}] = 0$$

65-دوره ی تناوب اصلی تابع با ضابطه ی $f(x) = \tan3x - \cot3x$ کدام است؟(سراسری ریاضی 88)

1) $\frac{\pi}{6}$ **2) $\frac{\pi}{2}$** **3) $\frac{\pi}{3}$** **4) π**

گزینه ی 1 صحیح است.

$$f(x) = \tan3x - \cot3x = \frac{\sin3x}{\cos3x} - \frac{\cos3x}{\sin3x} = \frac{\sin^2 3x - \cos^2 3x = -(\cos^2 3x - \sin^2 3x)}{\sin3x.\cos3x} =$$

$$\frac{-\cos6x}{\frac{1}{2}\sin6x} = -2\cot6x \to T = \frac{\pi}{6}$$

66-در تابع با ضابطه ی $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟(سراسری ریاضی 88)

1) تعریف نشده **2) -5** **3) -2** **4) -8**

گزینه ی 3 صحیح است.

$$f^{-1}(4) = a \to (a,4) \in f \to 4 = -a + \sqrt{-2a} \to \sqrt{-2a} = 4 + a \xrightarrow{\text{توان } 2} -2a = 16 + a^2 + 8a$$

$$a^2 + 10a + 16 = 0 \to (a+8)(a+2) = 0 \to a = -8, -2 \to a = -2 \text{ ق ق}$$

67-رابطه ی $R = \{(x,y) | x,y \in Z , |x| + |y| = 2\}$ چند عضو زوج مرتب دارد؟(سراسری ریاضی 88)

1) 8 **2) 6** **3) 7** **4) 4**

گزینه ی 1 صحیح است.

به راحتی می توان با توجه به اینکه x , y تنها می تواند عدد صحیح باشد , تمام زوج مرتب هایی را که در رابطه ی داده شده صدق می کند درآورد :

$$R = \{(2,0), (-2,0), (0,2), (0,-2), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\}$$

68-اگر $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$, مقدار $f(f(-1))$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 88)

1) تعریف نشده **2) صفر** **3) 1** **4) $\sqrt{2}$**

گزینه ی 1 صحیح است.

$$f(-1) = \sqrt{2-(-1)-(1)} = \sqrt{2} \rightarrow f(\sqrt{2}) = \sqrt{2-\sqrt{2}-2} = \sqrt{-\sqrt{2}}$$

همانطور که می دانیم فرجه ی زوج اعداد منفی تعریف نشده است.

69-اگر $x^2 + x < 0$ باشد , حاصل $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 88)

1) 2- **2) 1-** **3) صفر** **4) 1**

گزینه ی 1 صحیح است.

باید ببینیم چه نتیجه ای می توان از نامعادله ی داده شده برداشت کرد :

$$x^2 + x < 0 \rightarrow -1 < x < 0 \rightarrow [x] = -1$$

$$0 < x^2 < 1 \rightarrow [x^2] = 0$$

$$-1 < x^3 < 0 \rightarrow [x^3] = -1$$

$$0 < x^4 < 1 \rightarrow [x^4] = 0$$

$$[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = -1 + 0 - 1 + 0 = -2$$

70-رابطه ی $R = \{(x,y) | x,y \in N , 2x + y \leq 7\}$ دارای چند زوج مرتب است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 88)

1) 5 **2) 6** **3) 8** **4) 9**

گزینه ی 4 صحیح است.

به راحتی می توان تعداد زوج مرتب های موجود را با توجه به رابطه ی داده شده شمرد :

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1)\}$$

71-اگر $\mathbf{f(x) = x^3 - 3x : x \geq 1}$ باشد , نمودارهای دو تابع $\mathbf{f , f^{-1}}$ با کدام طول متقاطع اند؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 88)

1) $\sqrt{2}$ 2) 2   3) 4   4) غیر متقاطع

گزینه ی 2 صحیح است.

باز هم نکته ی شماره ی 20 رو به یاد آورده و برای دستیابی به جواب , تابع داده شده را با نیمساز ربع اول و سوم قطع دهید :

$$x^3 - 3x = x \rightarrow x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x = 0 , \pm 2$$

72-تابع $\mathbf{f : N \rightarrow Z}$ با ضابطه ی $\mathbf{f(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{زوج } n \\ -\frac{n-1}{2} & \text{فرد } n \end{cases}}$ چگونه است؟(سراسری تجربی 88)

1) یک به یک – پوشا   2) یک به یک – غیرپوشا

3) غیر یک به یک – پوشا   4)غیر یک به یک – غیر پوشا

گزینه ی 1 صحیح است.

چند تا از نقاط را به صورت زوج مرتب می نویسیم.کاملا مشخص است که تابع هم یک به یک و هم پوشاست.

$$f = \{(1,0), (2,1), (3, -1), (4,2), \dots\}$$

تابع یک به یک است.زیرا هیچ دو زوج مرتبی پیدا نمیشه که در آن مولفه ی دوم زوج مرتب ها یکی باشه.

تابع پوشاست.زیرا با توجه به دامنه و برد تعریف شده برای تابع , با دادن اعداد طبیعی , برد تابع تمام اعداد صحیح را تحت پوشش قرار می دهد.

73-اگر $\mathbf{f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}}$ و تابع $\mathbf{g(x) = tagx : \ |x| < \frac{\pi}{2}}$ باشند دامنه ی تابع $\mathbf{fog}$ کدام است؟(سراسری تجربی 87)

1) $\left[-\frac{\pi}{4} \text{ و } \frac{\pi}{4}\right]$ **2)** $\left[\frac{\pi}{4} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right)$

3) $\left[-\frac{\pi}{4} \text{ و } \mathbf{0}\right) \cup \left(\mathbf{0} \text{ و } \frac{\pi}{4}\right]$ **4)** $\left[-\mathbf{1} \text{ و } \mathbf{0}\right) \cup \left(\mathbf{0} \text{ و } \mathbf{1}\right]$

گزینه ی 3 صحیح است.

با توجه به اینکه دامنه ی تابع g داده شده , می توان مستقیما و با تشکیل تابع fog دامنه ی تابع را از روی ضابطه به دست آورد :

$$(fog)(x) = \frac{\sqrt{1-\tan^2 x}}{\tan x} = \begin{cases} 1-\tan^2 x \geq 0 \to \tan^2 x \leq 1 \to -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \tan x \neq 0 \to x \neq k\pi \end{cases}$$

در نتیجه می توان دامنه ی تابع fog را به صورت زیر بیان کرد :

$$D_{fog} = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] - \{0\}$$

74-تابع $\mathbf{f : [-4, 4] \to [-4, 4]}$ با ضابطه ی $\mathbf{f(x) = [x]}$ چگونه است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 87)

1) یک به یک – پوشا **2) یک به یک – غیرپوشا**

3) غیر یک به یک – پوشا **4)غیر یک به یک – غیر پوشا**

گزینه ی 3 صحیح است.

تابع که کاملا مشخصه یک به یک نیست.چرا؟

برای اینکه بی شمار نقطه وجود دارد که مقدار تابع به ازای آنها یکی می شود و این با یک به یک بودن تابع تناقض آشکار دارد.برای مثال :

$$x = -4 \to [-4] = -4$$

$$x = -3.7 \to [-3.7] = -4$$

پس گزینه ی 1 و 2 نادرست است. حال از بین گزینه های 3 و 4 برای تشخیص گزینه ی صحیح باید , پوشا بودن تابع را نیز مورد بررسی قرار دهیم :

تابع پوشا است.زیرا به ازای دامنه ی داده شده , تمام برد تابع تحت پوشش قرار می گیرد.

75-اگر $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-4x}$ باشد , دامنه ی تابع gof کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 87)

1) $(0,8) \cup (8,+\infty)$ **2)** $R-\{0,8\}$

3) $R-\{0\}$ **4)** $(0,+\infty)$

گزینه ی 1 صحیح است.

در مورد دامنه ی تابع f دقت داشته باشید که با وجود اینکه تابع رادیکالی است , اما هیچ محدودیتی ایجاد نمی کند و به ازای همه ی نقاط حقیقی برقرار است.

$$D_f = R \quad , \quad D_g = R - \{0,4\}$$

$$D_{gof} = \left\{x|x\epsilon D_f , f(x) \in D_g\right\} = \left\{x \in R , \sqrt{x+|x|} \neq 0 , 4\right\} = R - Z^- , 8 = (0,8) \cup (8,+\infty)$$

76-تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x^3 & : \ x \geq 0 \\ -x^3 & : \ x < 0 \end{cases}$ در مجموعه ی اعداد حقیقی چگونه است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور87)

1) یک به یک – پوشا **2) یک به یک – غیرپوشا**

3) غیر یک به یک – پوشا **4) غیر یک به یک – غیرپوشا**

گزینه ی 3 صحیح است.

یک به یک نبودن تابع به شکل واضحی مشخص است.زیرا در تابع داده شده , داریم :

$$x = 1 \rightarrow y = 1 \quad , \quad x = -1 \rightarrow y = 1$$

حال برای بررسی پوشا بودن تابع , باید ببینیم که دامنه ی تابع , تمام اعداد حقیقی را تحت پوشش قرار می دهد یا نه؟

بله همین طور است و تابع پوشاست.

باز هم قابل ذکر است.زیادی روی مبحث پوشا بودن تابع مانور نکنید.زیرا این مبحث دیگه وجود نداره!

77-اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$ باشد , آنگاه $f(8)$ کدام است؟(سراسری تجربی 86)

1) 5   2) 3   3) 7   4) 8

گزینه ی 3 صحیح است.

عجب سوالی!

$$f(8) = 3 + \sqrt{2(8)} = 3 + 4 = 7$$

78-اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ باشد آنگاه $fog(\sqrt{2})$ کدام است؟(سراسری تجربی 86)

1) -4   2) -3   3) -2   4) -1

گزینه ی 1 صحیح است.

$$g(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1.4}{1-1.4} = \frac{1.4}{-0.4} = \frac{14}{-4} = -\frac{7}{2} = -3.5 \rightarrow f\left(g(\sqrt{2})\right) =$$

$$f(-3.5) = [-3.5] = -4$$

79-اگر خروجی از ماشین شکل مقابل $\frac{4}{3}$ باشد , مقدار ورودی کدام است؟(سراسری ریاضی 86)

$$\text{ورودی} \rightarrow \mathbf{2x-2} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}}+\mathbf{1}} \rightarrow \text{خروجی}$$

1) $\frac{11}{9}$
2) $\frac{7}{2}$
3) 3
4) 4

گزینه ی 3 صحیح است.

پاسخ تشریحی :

$$F(x) = 2x - 2 \quad , \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+1} \rightarrow g\big(f(x)\big) = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2x-2}{\sqrt{2x-2}+1} = \frac{4}{3} \rightarrow 4\sqrt{2x-2}+4 = 6x-6 \rightarrow 4\sqrt{2x-2} = 6x-10 \rightarrow$$

$$16(2x-2) = (6x-10)^2 \rightarrow 32x-32 = 36x^2+100-120x \rightarrow$$

$$36x^2-152x+132 = 0 \rightarrow 18x^2-76x+66 = 0 \rightarrow 9x^2-38x+33 = 0$$

$$x = \frac{38 \pm \sqrt{256}}{18} = \frac{38 \pm 16}{18} = \left(\begin{matrix} 3 \\ \frac{11}{9} \end{matrix}\right.$$

توجه داشته باشید که هر دو ریشه ی به دست آمده , جزء جواب هستند , اما گزینه ی 1 , مقدار $\frac{4}{3}$ را به ما نمی دهد.

پاسخ تستی :

ناسلامتی داریم تست حل می کنیما...اونم با این اعداد سنگینی که این تست داره یه 5 دقیقه ای حداقل طول می کشه تا شما به جواب برسید.

واقعا هر کی این جوری به این تست پاسخ بده , ببخشیدا اما واقعا بیکاره! و اصلا دلش نمی خواد کنکور موفق بشه.

تابع gof رو مگه تشکیل ندادیم؟خوب حالا گزینه ها رو روش تست کنید دیگه...حل نمی خواد که...

$$(gof)(x) = \frac{4}{3} \to 4\sqrt{2x-2} = 6x-10 \to \begin{cases} 1 \to x = \frac{11}{9} \to 4\sqrt{\frac{4}{9}} = 6\left(\frac{11}{9}\right) - 10 \to \frac{8}{3} = -\frac{8}{3} \\ 2 \to x = \frac{7}{2} \to 4\sqrt{5} = 6\left(\frac{7}{2}\right) - 10 \to 4\sqrt{5} = 11 \\ 3 \to x = 3 \to 4\sqrt{4} = 6(3) - 10 \to 8 = 8 \\ 4 \to x = 4 \to 4\sqrt{6} = 6(4) - 10 \to 4\sqrt{6} = 14 \end{cases}$$

بازهم میگم عزیز دل من ! قدرت محاسباتی تو ببر بالا...

80-دامنه ی تابع $f(x) = \sqrt{1-\log(x-1)}$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 86)

1) $(1,2]$ **2)** $[2,10]$ **3)** $[1,11)$ **4)** $(1,11]$

گزینه ی 4 صحیح است.

$$1-\log(x-1) \geq 0 \to \log(x-1) \leq 1 \to x-1 \leq 10 \to x \leq 11$$

$$x-1 > 0 \to x > 1$$

81-اگر رابطه ی $f = \{(3,2),(a,5),(3\ ,a^2-a),(b,2),(-1,4)\}$ تابع یک به یک باشد , دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 86)

1) $(-1,1)$ **2)** $(-1,3)$ **3)** $(2,1)$ **4)** $(2,3)$

گزینه ی 4 صحیح است.

با مقایسه ی دو زوج مرتب $(3,2),(b,2)$, برای اینکه شرط یک به یک بودن تابع رعایت بشه باید $b = 3$ باشه.

یعنی گزینه ی 1 و 3 نادرست است.

حال از بین گزینه های 2 و 4 باید ببینیم که کدام یک از اعداد 1- و 2 برای a می تونه مقداری درست باشه و شرط یک به یک بودن رو نقض نکنه!

اگر $a = -1$ باشه , در این صورت خواهیم داشت :

$$(-1,5), (3,2), (3,2), 3,2), (-1,4)$$

اگر $a = 2$ باشه , در این صورت خواهیم داشت :

$$(3,2), (2,5), (3,2), 3,2), (-1,4)$$

کاملا مشخص است که $a = -1$ نمی تواند اختیار کند . زیرا یک به یک بودن تابع را نقض می کند.

82-اگر $\mathbf{f(x) = x - [x]}$ و $\mathbf{g(x) = \frac{1-x}{x}}$ باشد , برد تابع $\mathbf{gof}$ کدام بازه است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 86)

1) $(0, +\infty)$ **2)** $[0 , +\infty)$ **3)** $(1, +\infty)$ **4)** $[1 , +\infty)$

گزینه ی 1 صحیح است.

$$g(x) = \frac{1}{x} - 1 \rightarrow g(f(x)) = \frac{1}{x - [x]} - 1$$

این ویژگی در مورد توابع جزء صحیح را که به خاطر دارید؟

$$0 \leq x - [x] < 1 \rightarrow \frac{1}{x - [x]} > 1 \rightarrow \frac{1}{x - [x]} - 1 > 0 \rightarrow g(f(x)) > 0 \rightarrow R_{gof} = (0, +\infty)$$

83-تابع $\mathbf{f : R \rightarrow R}$ با ضابطه ی $\mathbf{f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & : \quad x \geq 0 \\ 2 + x & : \quad x < 0 \end{cases}}$ **چگونه است؟((سراسری ریاضی 85)**

1) یک به یک –پوشا **2) یک به یک – غیرپوشا**

3)غیر یک به یک – پوشا **4) غیر یک به یک – غیر پوشا**

گزینه ی 3 صحیح است.

غیر یک به یک بودن تابع که کاملا مشخص می باشد :

$$x = 1 \rightarrow y = 1 \quad , \quad x = -1 \rightarrow y = 1$$

برای پوشا بودن تابع نیز با توجه به اینکه , دامنه ی تابع مجموعه ی اعداد حقیقی یعنی $\mathbf{R}$ و برد تابع نیز $\mathbf{R}$ می باشد و کل دامنه را برد تابع پوشش می دهد. پس تابع پوشاست.

84-در تابع $\mathbf{f(x) = x^2(2-x)^2}$ حاصل $\mathbf{f(1+x) - f(1-x)}$ کدام است؟(سراسری تجربی 85)

1) $\mathbf{0}$ 2) $\mathbf{4x}$ 3) $\mathbf{2x^2}$ 4) $\mathbf{4x^2}$

گزینه ی 1 صحیح است.

$$f(1+x) - f(1-x) = (1+x)^2\big(2-(1+x)\big)^2 - (1-x)^2\big(2-(1-x)\big)^2 =$$

$$(1+x)^2(2-1-x)^2 - (1-x)^2(2-1+x)^2 = (1+x)^2(1-x)^2 - (1-x)^2(1+x)^2$$

$$= 0$$

85-اگر $\mathbf{f = \{(1,2),(2,5),(0,3),(4,-1)\}}$ و $\mathbf{g = \{(2,3),(-1,4),(4,1),(3,0)\}}$ تابع $\mathbf{gof^{-1}}$ کدام است؟(سراسری تجربی 85)

2) $\mathbf{\{(1,3),(0,0)\}}$ 2) $\mathbf{\{(2,4),(3,5)\}}$

1) $\mathbf{\{(2,0),(-1,4)\}}$ 4) $\mathbf{\{(5,3),(-1,1)\}}$

گزینه ی 4 صحیح است.

ابتدا باید تابع $\mathbf{f^{-1}}$ را تشکیل دهیم :

$$f^{-1} = \{(2,1),(5,2),(3,0),(-1,4)\}$$

حال می توان تابع $\mathbf{gof^{-1}}$ را به دست آورد :

$$gof^{-1}(x) = g\big(f^{-1}(x)\big) = \{(5,3),(-1,1)\}$$

86-رابطه ی $\{(3,\mathrm{m}),(2,1),(-2,\mathrm{m}),(3,\mathrm{m}+2),(m,4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 85)

1) -2　　2) -1　　3) 2　　4) هیچ مقدار

گزینه ی 4 صحیح است.

شرط یک به یک بودن تابع را بررسی می کنیم.نباید دو زوج مرتبی یافت بشه که مولفه ی دوم آنها یکسان باشه و اگه اینگونه هم باشه مولفه ی اول آنها نیز باید یکسان باشه.

$$\begin{cases} m=-2\rightarrow\{(3,-2),(2,1),(-2,-2),(3,0),(-2,4)\} \\ m=-1\rightarrow\{(3,-1),(2,1),(-2,-1),(3,1),(-1,4)\} \\ m=2\rightarrow\{(3,2),(2,1),(-2,2),(3,4),(2,4)\} \end{cases}$$

87-اگر $\mathrm{f(x)}=[\mathrm{x}]$ باشد , مجموعه ی مقادیر $\mathrm{f(x-f(x))}$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 85)

1) 0　　2) 1　　3) 0 و 1　　4) -1 و 0 و 1

گزینه ی 1 صحیح است.

با توجه به این ویژگی در مورد توابع جزء صحیح :

$$0\le x-[x]<1$$

$$x-f(x)=x-[x]\rightarrow f(x-[x])=\big[x-[x]\big]=0$$

88-دو تابع f , g به صورت مجموعه ی زوج های مرتب بیان شده اند.در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 85)

1) $\mathrm{f}\cup\mathrm{g}$　　2) $\mathrm{f}\cap\mathrm{g}$　　3) $\mathrm{f}-\mathrm{g}$　　4) fog

گزینه ی 1 صحیح است.

با یک مثال نقض به راحتی می توانید به تست پاسخ دهید.

$$f = \{(1,2), (3,0)\} , g = \{(-1,2), (4,5)\}$$

گرچه همین الان هم پاسخ تست به وضوح معلوم است , اما بهتره همه ی 4 گزینه را بررسی کنیم تا ببینیم در سایر گزینه ها چه پیش خواهد آمد؟

$$f \cup g = \{(1,2), (3,0), (-1,2), (4,5)\}$$

$$f \cap g = \emptyset$$

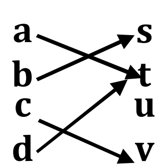
$$f - g = \emptyset$$

$$fog = \emptyset$$

مثال های مختلفی می توان زد . اما سعی کنین در چنین تست هایی , مثال های نقض آسانی بزنید تا به راحتی بتوانید به پاسخ صحیح تست برسید.

89-تابع f با نمودار شکل مقابل چه تابعی است؟(سراسری تجربی 84)

1) **یک به یک – پوشا**
2) **غیر یک به یک – پوشا**
3) **یک به یک – غیرپوشا**
4) **غیر یک به یک - غیرپوشا**



گزینه ی 4 صحیح است.

تابع غیر یک به یک است.زیرا دو فلش به خروجی t منتهی شده است و این با یک به یک بودن تابع تناقض دارد.

تابع غیر پوشاست . زیرا تمام برد تابع , به ازای دامنه ی تابع , تحت پوشش قرار نمی گیرد.(هیچ فلشی به مولفه ی خروجی u) منتهی نمی گردد.

90-اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $fog(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ مقدار $g(1)$ کدام است؟(سراسری تجربی 84)

1) 2 **2) 3** **3) 4** **4) 5**

گزینه ی 4 صحیح است.

$$(fog)(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1} \to f\big(g(1)\big) = \frac{3}{2} \to \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{3}{2} \to 2g(1)+2 = 3g(1)-3$$
$$g(1) = 5$$

91-اگر $f(x) = x^2 - 1$ باشد , نمودار تابع $y = (fof)(x)$ با محور x ها کدام وضعیت را دارد؟(سراسری ریاضی 83)

1) یک نقطه ی تلاقی – دو نقطه ی تماس **2) دو نقطه ی تلاقی – یک نقطه ی تماس**

2) سه نقطه ی تلاقی – فاقد نقطه ی تماس **4) فاقد نقطه ی تلاقی – دو نقطه ی تماس**

گزینه ی 2 صحیح است.

$$(fof)(x) = f\big(f(x)\big) = (x^2-1)^2 - 1 = 0 \to (x^2-1)^2 = 1 \to x^2 - 1 = \pm 1$$
$$x^2 - 1 = 1 \to x^2 = 1 \to x = \pm 1$$
$$x^2 - 1 = -1 \to x^2 = 0 \to x = 0$$

یعنی معادله یک ریشه ی مضاعف و دو ریشه ی معمولی حقیقی دارد . پس دو نقطه ی تلاقی و یک نقطه ی تماس با محور طول ها دارد.

92-اگر $f(x) = |x| - x$ باشد , ضابطه ی $(fof)(x)$ برابر کدام است؟(سراسری تجربی 83)

1) x 2) $|x|$ 3) $x + |x|$ 4) 0

گزینه ی 4 صحیح است.

$$(fof)(x) = f(f(x)) = \left||x| - x\right| - (|x| - x) = |x| - x - |x| + x = 0$$

93-اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ باشد , ضابطه ی $f^{-1}(x)$ دقیقا کدام است؟(سراسری ریاضی 83)

2) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) : \; x \in R$ 2) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right) : \; x \in R$

3) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) : \; x > 0$ 4) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right) : \; x > 0$

گزینه ی 3 صحیح است.

پاسخ تشریحی :

ابتدا باید برد تابع را مشخص کنیم تا پس از محاسبه ی تابع معکوس , در انتخاب گزینه ی صحیح با مشکل مواجه نشویم :

$$x^2 + 1 \geq 0 \xrightarrow{\text{یک نتیجه ی بدیهی}} D_f = R$$

$$\sqrt{x^2 + 1} > x \rightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \rightarrow R_f = (0, +\infty)$$

یعنی یا گزینه ی 3 یا گزینه ی 4 صحیح است.

حال باید ضابطه ی تابع معکوس را به دست آوریم :

$$y = x + \sqrt{x^2 + 1} \rightarrow y - x = \sqrt{x^2 + 1} \rightarrow (y - x)^2 = x^2 + 1 \rightarrow y^2 + x^2 - 2xy = x^2 + 1$$

$$\rightarrow y^2 - 2xy = 1 \rightarrow 2xy = y^2 - 1 \rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y} \xrightarrow[y \to x]{x \to f^{-1}(x)} f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

پاسخ تستی :

من اگه جای شما باشم عمرا به روش فوق تست رو حل نمی کنم . ناسلامتی داریم تست حل می کنیم!

پس از رد گزینه ی 1 و 2 با تعیین برد تابع و در واقع دامنه ی تابع معکوس , به صورت زیر عمل کرده و با دادن یک نقطه ی دلخواه و استفاده از ویژگی اشاره شده در نکته ی شماره ی 15 می توان گزینه ی صحیح را از بین گزینه های 3 و 4 انتخاب نمود.

طبق ویژگی اشاره شده در نکته ی شماره ی 15 داریم :

$$\left(\frac{3}{4},2\right)\in f\rightarrow\left(2,\frac{3}{4}\right)\in f^{-1}\rightarrow 4$$ رد گزینه ی

94-اگر نمودارهای دو تابع با ضابطه های $y = ax^2 + bx - 3$, $y = 2x + b$ روی محور x ها در نقطه ای به طول 1- متقاطع باشند , a کدام است؟(سراسری تجربی 82)

1) 2　　2) 3　　3) 4　　4) 5

گزینه ی 4 صحیح است.

$$0 = a - b - 3 \quad , \quad 0 = -2 + b \rightarrow b = 2 \rightarrow a - b = 3 \rightarrow a - 2 = 3 \rightarrow a = 5$$

95-با توجه به ماشین $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow x$ و $f(x) = 2x - 1$ باشد , آنگاه $g(0)$ کدام است؟(سراسری ریاضی 82)

1) 1　　2) صفر　　3) $\frac{1}{2}$　　4) 2

گزینه ی 3 صحیح است.

با توجه به تابع ماشین داده شده می توان نوشت :

$$g(f(x)) = x \rightarrow g(2x-1) = x \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} g(0) = \frac{1}{2}$$

96- تابع فرد f معکوس پذیر است.نمودار تابع f^{-1} نسبت به کدام مورد متقارن است؟(سراسری ریاضی 82)

1) مبداء مختصات **2) محورxها** **3) محور yها** **4) نیمساز ناحیه ی اول و سوم**

گزینه ی 1 صحیح است.

اگر تابع معکوس پذیر f , فرد باشد , آنگاه تابع f^{-1} نیز فرد است.و در نتیجه باید نسبت به مبداء مختصات متقارن باشد.

97- نمودارهای دو تابع $y = 2x^2 + ax + b$ و $y = 2x + b$ در نقطه ای به طول 2 واقع بر محور xها متقاطع اند.a کدام است؟(سراسری تجربی 81)

1) -2 **2) -1** **3) 3** **4) 4**

گزینه ی 1 صحیح است.

$$(2,0) \to \begin{cases} 4 + b = 0 \to b = -4 \\ 8 + 2a + b = 0 \to 2a = -8 + 4 = -4 \to a = -2 \end{cases}$$

98- تابع $f : R \to R$ با کدام ضابطه یک به یک و پوشاست؟(سراسری تجربی 81)

1) $f(x) = x - |x|$ **2) $f(x) = x + |x|$**

3) $f(x) = x|x|$ **4) $f(x) = \frac{|x|}{x}$**

گزینه ی 3 صحیح است.

اگر تابع را به صورت دو ضابطه ای بنویسیم می توان نوشت :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

کاملا مشخص است که امکان ندارد شما دو زوج مرتب از این تابع پیدا کنید که مولفه ی دوم یکسان داشته باشند.

تابع پوشا هم هست . زیرا دامنه ی تابع , کل برد تابع را تحت پوشش قرار می دهد.

99-اگر $\mathbf{f(x) = sinx}$ و $\mathbf{g(x) = x\sqrt{1-x^2}}$ مقدار $\mathbf{(gof)(\frac{\pi}{4})}$ کدام است؟(سراسری تجربی 81)

1) $\frac{1}{2}$　　**2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$**　　**3) 1**　　**4) $\sqrt{2}$**

گزینه ی 1 صحیح است.

$$(gof)\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

100-اگر $\mathbf{f(x) = 1 + \sqrt{x}}$ و $\mathbf{g(x) = x^2}$ و $\mathbf{x > 0}$ آنگاه ضابطه ی $\mathbf{g^{-1}of^{-1}}$ کدام است؟(سراسری ریاضی 81)

1) $\mathbf{x-1}$　　**2) $\mathbf{x+1}$**　　**3) $\mathbf{x^2-1}$**　　**4) $\mathbf{x^2+1}$**

گزینه ی 1 صحیح است.

همانطور که می دانیم :

$$(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$$

پس بهترین کار همینه که ابتدا تابع fog را به دست آورده و سپس معکوس آن را محاسبه کنیم تا به پاسخ صحیح تست برسیم :

$$(fog)(x) = f(g(x)) = 1 + \sqrt{x^2} = 1 + |x| \xrightarrow{x>0} (fog)(x) = 1 + x$$

حال معکوس تابع را به دست می آوریم :

$$y = 1 + x \to x = y - 1 \to (fog)^{-1} = x - 1$$

101-به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه ی $f(x) = |x + 2| + a|x - 2|$ زوج است؟(سراسری ریاضی 81)

1) -1 **2) 0** **3) 1** **4) 2**

گزینه ی 3 صحیح است.

همانطور که می دانیم شرط زوج بودن یک تابع , علاوه بر متقارن بودن دامنه این است که :

$$f(-x) = f(x) \rightarrow |-x + 2| + a|-x - 2| = |x + 2| + a|x - 2| \rightarrow$$

$$|-(x - 2)| + a|-(x + 2)| = |x + 2| + a|x - 2| \rightarrow$$

$$|x - 2| + a|x + 2| = |x + 2| + a|x - 2| \xrightarrow{\text{کاملا مشخص است که.}} a = 1$$

$$=$$

102-نمودارهای دو تابع $y = 2x + b$ و $y = x^3 + ax^2 - b$ در نقطه ای به طول 2 واقع بر محور xها متقاطع اند.a کدام است؟(سراسری تجربی 80)

1) 1 **2) 0** **3) -2** **4) -3**

گزینه ی 4 صحیح است.

$$(2,0) \rightarrow 0 = 8 + 4a - b = 0\, ,0 = 4 + b \rightarrow b = -4\ \ ,a = -3$$

103-تابع $f : R \rightarrow Z$ با ضابطه ی $f(x) = |[x]|$ کدام وضعیت را دارد؟(سراسری تجربی 80)

1) یک به یک-پوشا

2) غیر یک به یک – پوشا

3) یک به یک – غیر پوشا

4) غیر یک به یک – غیر پوشا

گزینه ی 4 صحیح است.

تابع یک به یک نیست . به عنوان مثال نقض برای یک به یک نبودن تابع می توان به مثال زیر اشاره کرد :

$$[2.3] = [2.6] = 2$$

از طرفی کاملا معلوم است که با توجه به دامنه ی تابع , هر مقداری برای X اختیار شود ,جواب تابع فقط مقادیر صحیح مثبت خواهد بود و این یعنی اینکه کل مجموعه ی اعداد صحیح تحت پوشش قرار نمی گیرد و تابع غیر پوشاست.

104-اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = \tan x$ ضابطه ی تابع fog در بازه ی $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ برابر کدام است؟(سراسری تجربی 80)

1) $\sin x$ 2) $\cos x$ 3) $-\sin x$ 4) $-\cos x$

گزینه ی 3 صحیح است.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\tan x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \frac{\tan x}{\frac{1}{|\cos x|}} = \tan x.|\cos x|$$

همانطور که می دانید در بازه ی یاد شده که ربع دوم و سوم مثلثاتی را نشان می دهد , علامت کسینوس همیشه منفی است.پس می توان نوشت :

$$(fog)(x) = \frac{\sin x}{\cos x}(-\cos x) = -\sin x$$

105-دوره ی تناوب اصلی تابع f با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{2}x & : \quad x \in Q \\ 0 & : \quad x \in Q \end{cases}$ کدام است؟(سراسری ریاضی 80)

1) 2π 2) 2   3) 4   4) 4π

گزینه ی 2 صحیح است.

رابطه ی مثلثاتی روبرو را که حتما به خاطر دارید :

$$\sin^2 \frac{\pi}{2}x = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$