درسنامه های آموزش ریاضی

وِیژه کنکور تجربی

(دهم،یازدهم ،دوازدهم و جامع)

مولف : رحیم قهرمان

تلفن سفارش: ۰۹۱۲ ۰۷۲ ۶۴ ۴۰

کانال ریاضی اندیشه قهرمان

@andishe_gh

اینستاگرام:

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف: رحیم قهرمان

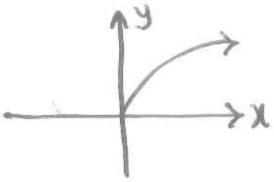
درسنامه‌ی (۱)

(فصل اول حسابان دوازدهم)

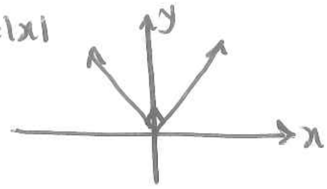
انتقال، انعکاس و انقباض نمودار توابع

برای رسم نمودار توابع به کمک انتقال، باید نمودارهای توابع زیر را به خاطر بسپاریم:

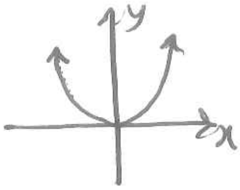
۱) $y=\sqrt{x}$



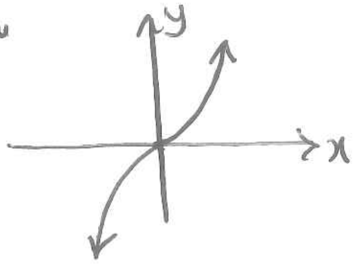
۲) $y=|x|$



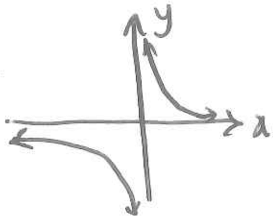
۳) $y=x^2$



۴) $y=x^3$

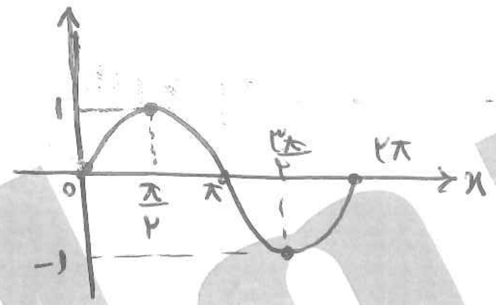


۵) $y=\frac{1}{x}$



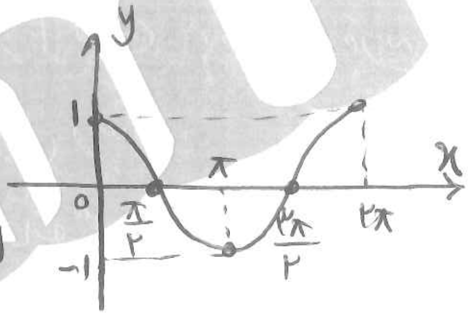
۶) $y=\sin x$

$x\in[0,2\pi]$



۷) $y=\cos x$

$x\in[0,2\pi]$



انتقال در راستای محور xها و yها

برای رسم نمودار تابع $f(x-a)$ اگر $a>0$ باشد نمودار f را به اندازه‌ی a به سمت راست و اگر $a<0$ باشد نمودار f را به اندازه‌ی a به سمت چپ منتقل می‌کنیم. همچنین برای رسم نمودار $f(x)+a$ اگر $a>0$ باشد نمودار f را به اندازه‌ی a به بالا و اگر $a<0$ باشد نمودار f را به اندازه‌ی a به پایین منتقل می‌کنیم.

تست: نمودار روبه‌رو بیانگر تابع $f(x)=\sqrt{x+a}+b$ می‌باشد. اگر $f(c)=3$ باشد، مقدار abc کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۳

پاسخ تمرین ۴) نمودار داده شده مربوط به تابع $y=\sqrt{x+1}+1$ می باشد (چون نمودار $\sqrt{x}$ یک واحد به چپ و یک واحد به بالا منتقل شده است) لذا نتیجه می گیریم که $a=1$ و $b=1$

$$f(x)=\sqrt{x+1}+1 \xrightarrow{f(c)=3} \sqrt{c+1}+1=3 \Rightarrow \sqrt{c+1}=2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} c+1=4 \Rightarrow c=3$$

کشش و فشار عمودی

نمودار تابع $y=kf(x)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ است؛ به دست می آید: اگر $k>1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می شود که در این حالت می گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است. اگر $0<k<1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k جمع می شود که در این حالت می گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است. اگر $k<0$ ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می شود سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می شود.

تست: با کدام تبدیلات بر روی تابع با ضابطه ی $g(x)=2\cos x$، تابع $f(x)=-2\cos(x-\frac{\pi}{3})+3$ می رسیم؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ انتقال افقی به چپ و قرینه نسبت به محور x ها و سه واحد انتقال قائم به پایین

۲) $\frac{\pi}{3}$ انتقال افقی به راست و قرینه نسبت به محور x ها و سه واحد انتقال قائم به بالا

۳) $\frac{\pi}{3}$ انتقال افقی به راست و قرینه نسبت به محور y ها و سه واحد انتقال قائم به بالا

۴) $\frac{\pi}{3}$ انتقال افقی به چپ و قرینه نسبت به محور x ها و سه واحد انتقال قائم به بالا

پاسخ تمرین ۲)

$$y=2\cos x \xrightarrow{\text{انتقال } \frac{\pi}{3} \text{ در جهت مثبت محور x ها}} y=2\cos(x-\frac{\pi}{3}) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}} y=-2\cos(x-\frac{\pi}{3})$$

$$y=-2\cos(x-\frac{\pi}{3}) \xrightarrow{\text{۳ واحد در جهت مثبت محور y ها}} y=-2\cos(x-\frac{\pi}{3})+3$$

تست: اگر $f(x)=\sin x$ باشد، خروجی ماشین مقابل کدام است؟

$\sin x \rightarrow$ [بازتاب نسبت به محور x ها] $\rightarrow$ [انبساط عمودی ...] $\rightarrow$ [$\frac{\pi}{4}$ واحد انتقال ...] $\rightarrow$ خروجی

مولف:رحیم قهرمان

۱) $y=\sin 3x+\frac{\pi}{4}$ ‏ ۲) $y=-3\sin x+\frac{\pi}{4}$ ‏ ۳) $y=-\sin 3x+\frac{\pi}{4}$ ‏ ۴) $y=3\sin x-\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه ۲)

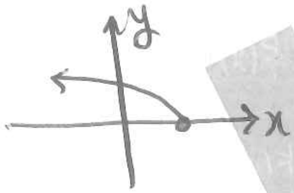
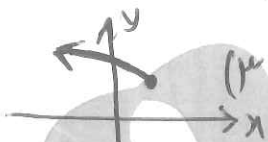
$y=\sin x \xrightarrow[\text{محور y ها}]{\text{بازتاب نسبت به}} y=\sin(-x)=-\sin x \xrightarrow{\text{انبساط عمودی با ضریب ۳}} y=-3\sin x$

$\xrightarrow{\frac{\pi}{4}\ \text{واحد انتقال به بالا}} y=-3\sin x+\frac{\pi}{4}$

کشش و فشار افقی

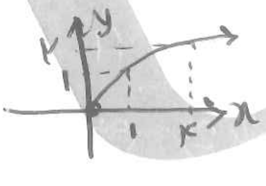
نمودار تابع $y=f(kx)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ به دست می‌آید: اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست آورد، در حالتی که $k>1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض و در حالتی که $k<1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌شود.

تست: نمودار تابع $y=1+\sqrt{6-2x}$ شبیه کدام است؟

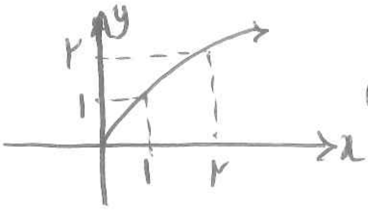
۴) 
۳) 
۲) 
۱) 

پاسخ: گزینه ۳)

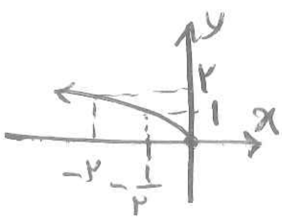
$y=1+\sqrt{6-2x}=1+\sqrt{-2x+6}=1+\sqrt{-2(x-3)}$


$y=\sqrt{x}$

$\xrightarrow{\text{طول نقاط}\ \frac{1}{2}x}$


$y=\sqrt{2x}$

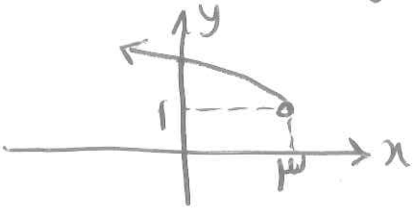
$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}}$


$y=\sqrt{-2x}$

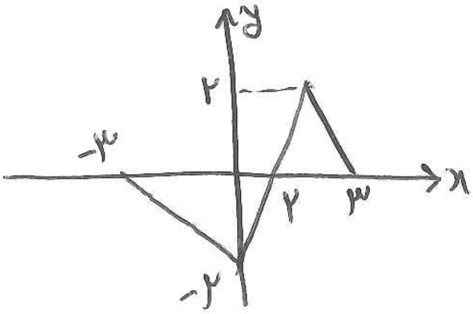
$\xrightarrow{\text{۳ واحد به راست}}$


$y=\sqrt{-2(x-3)}$

$\xrightarrow{\text{۱ واحد به بالا}}$


$y=1+\sqrt{-2(x-3)}$

تست: نمودار $y=f(x)$ به صورت مقابل است، دامنه‌ی تابع $\sqrt{-f(-\frac{x}{3})}$ کدام است؟



۱) $[-6,9]$ ۲) $[-\frac{3}{2},2]$

۳) $[-6,\frac{3}{2}]$ ۴) $[-6,3]$

پاسخ: گزینه‌ی (۱) باید زیر رادیکال نامنفی باشد یعنی عبارت زیر رادیکال $-f(-\frac{x}{3})$ وجود دارد و کافی است قسمت‌هایی از نمودار $f(-\frac{x}{3})$ را در نظر بگیریم که عرض آن‌ها منفی یا صفر باشد، در نمودار تابع f در $[-3,2]$ عرض منفی یا صفر است که این بازه در $f(-\frac{x}{3})$ منبسط شده و به $[-6,9]$ تبدیل می‌شود.

توضیح:

$$-3\le -\frac{x}{3}\le 2 \xrightarrow{\times(3)} -9\le -x\le 6 \xrightarrow{\times(-1)} -6\le x\le 9$$

رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$

ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس در جاهایی که نمودار تابع $y=f(x)$ زیر محور xها قرار دارد، تصویر آینه‌وار نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها رسم می‌کنیم.

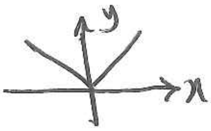
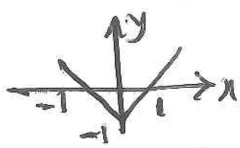
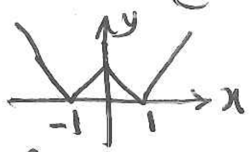
تست: طول خط شکسته تابع $y=\sqrt{x^2-2|x|+1}$ در بازه‌ی $[-1,3]$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{5}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{5}$

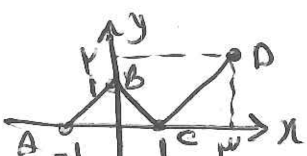
پاسخ: گزینه‌ی (۳)

$$y=\sqrt{x^2-2|x|+1} \underline{\underline{\ |x|^2=x^2\ }} \sqrt{|x|^2-2|x|+1}=\sqrt{(|x|-1)^2}=\left||x|-1\right|$$

نمودار تابع $y=\left||x|-1\right|$ را رسم می‌کنیم، داریم:

$y=|x|$  $\Rightarrow y=|x|-1$  $\Rightarrow y=\left||x|-1\right|$ 

سپس نمودار تابع داده شده در بازه‌ی $[-1,3]$ به صورت زیر است:



$$AB+BC+CD=\sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

مولف:رحیم قهرمان

تست: کدام دو انتقال نمودار تابع $y=x^2-x$ را به $y=x^2+3x+3$ تبدیل می‌کند؟

۱) ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا

۲) ۲ واحد به راست و ۱ واحد به پایین

۳) ۲ واحد به چپ و ۱ واحد به پایین

۴) ۲ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا

پاسخ: گزینه (۴) نمودار $y=x^2-x$ را به طور فرضی a واحد در راستای محور xها و b واحد در راستای محور yها انتقال می‌دهیم تا به $y=x^2+3x+3$ برسیم. ببینید:

$$y=x^2-x \xrightarrow{\text{انتقال}} y-b=(x-a)^2-(x-a) \Rightarrow y=x^2-(2a+1)x+(a^2+a+b)$$

تابع حاصل باید برابر با $y=x^2+3x+3$ باشد:

$$x^2-(2a+1)x+(a^2+a+b) \equiv x^2+3x+3 \Rightarrow \begin{cases} -(2a+1)=3 \\ a^2+a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

پس معلوم شد اگر $f(x)=x^2-x$ آنگاه $f(x+2)+1=x^2+3x+3$ است.

بنابراین باید نمودار تابع مزبور را ۲ واحد در راستای افقی به سمت چپ و ۱ واحد در راستای عمودی به سمت بالا انتقال دهیم تا به نمودار تابع جدید دست پیدا کنیم.

تست: نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را ابتدا دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. بعد نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم و سپس آن را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. حاصل ضرب طول نقاط برخورد تابع جدید با تابع اولیه کدام است؟

۱) ۴ ۲) -2 ۳) -4 ۴) ۲

پاسخ: گزینه (۴) برای انتقال دو واحد به سمت راست، باید به جای x، $x-2$ بگذاریم، برای

قرینه نسبت به محور افقی ضابطه را در منفی ضرب کنیم و برای یک واحد انتقال به سمت بالا، باید کل ضابطه به علاوه یک شود.

$$\text{ضابطه جدید} = g(x) = -\frac{1}{x-2} + 1 = \frac{-1+x-2}{x-2} = \frac{x-3}{x-2}$$

برای پیدا کردن نقاط برخورد این تابع با تابع اولیه، آن‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم.

$$\frac{x-3}{x-2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - 3x = x - 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = P \Rightarrow P = 2$$

تست: با کدام انتقال، تابع $y = \cos x$ از نقطه‌ی $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$ می‌گذرد؟

۱) $\sqrt{2}$ واحد به بالا، $\frac{\pi}{12}$ واحد به راست

۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ واحد به بالا، $\frac{\pi}{12}$ واحد به چپ

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ واحد به پایین، $\frac{5\pi}{12}$ واحد به راست

۴) $\sqrt{2}$ واحد به پایین، $\frac{5\pi}{12}$ واحد به چپ

پاسخ: گزینه‌ی (۲) صحیح است. نمودار $y = \cos x$ را با توجه به یک یک گزینه‌ها انتقال می‌دهیم و سپس نقطه‌ی $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$ را در آن قرار می‌دهیم:

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): $y = \cos x \xrightarrow[\text{به راست}]{\sqrt{2} \text{ واحد به بالا و } \frac{\pi}{12} \text{ واحد}} y = \cos(x - \frac{\pi}{12}) + \sqrt{2} \xrightarrow{(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})}$

$$\sqrt{2} = \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) + \sqrt{2} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{12}) = 0 \quad \text{غیرقابل قبول}$$

گزینه‌ی (۲): $y = \cos x \xrightarrow{\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ واحد بالا و } \frac{\pi}{12} \text{ واحد چپ}} y = \cos(x + \frac{\pi}{12}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})}$

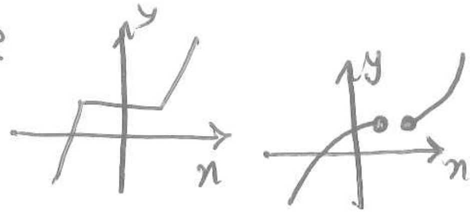
$$\sqrt{2} = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \cos(\frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

لذا گزینه‌ی (۲) صحیح است. بررسی سایر گزینه‌ها به عهده‌ی خودتان است.

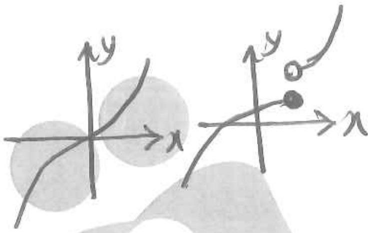
درسنامه‌ی (۵) توابع یکنوا و اکیداً یکنوا

تابع حقیقی f را در نظر بگیرید. اگر x_1 و x_2 اعضای D_f باشند، تعاریف چهارگانه‌ی زیر را می‌توان نوشت:

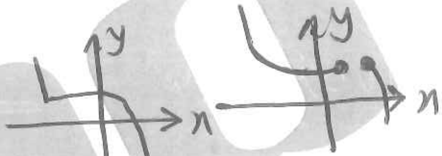
۱) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$: f را یک تابع صعودی گویند (با افزایش x ها، y ها کاهش نمی‌یابند)



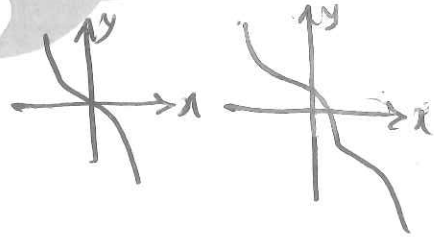
۲) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$: f را تابع اکیداً صعودی گویند. (با افزایش x ها، y ها افزایش می‌یابند.)



۳) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$: f را تابع نزولی گویند (با افزایش x ها، y ها افزایش نمی‌یابند.)



۴) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$: f را یک تابع اکیداً نزولی گویند. (با افزایش x ها، y ها کاهش می‌یابند)



تست: تابع

$$f=\{(3,a^2-4),(-2,1),(b+1,a-1),(3,a+2),(-2,-b)\}$$

اکیداً صعودی است. مقدار a کدام است؟

۱) 3 ۲) -2 ۳) -3 ۴) 2

پاسخ: گزینه‌ی (۱) برای تابع بودن لازم است زوج مرتب‌های $(-2,1)$ و $(-2,-b)$ یکسان باشند. همین طور زوج مرتب‌های $(3,a+2)$ و $(3,a^2-4)$ پس داریم:

$$\begin{cases} -b=1 \Rightarrow b=-1 \\ a^2-4=a+2 \Rightarrow a^2-a-6=0 \Rightarrow a=-2,3 \end{cases}$$

حال دو حالت ایجاد شده را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} a=3, b=-1 \Rightarrow f=\{(-2,1),(0,2),(3,5)\} \Rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ a=-3, b=-1 \Rightarrow f=\{(-2,1),(0,-3),(3,0)\} \Rightarrow \text{غیر یکنوا} \end{cases}$$

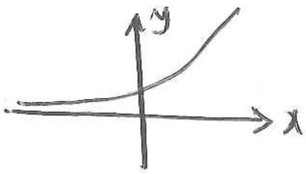
پس $a=3$ و $b=-1$ جواب صحیح هستند.

تست: کدام تابع نزولی است؟

۱) $y=5^x$ ۲) $y=-x^3$ ۳) $y=-\log_{\frac{1}{5}} x$ ۴) $y=\sqrt{x-2}$

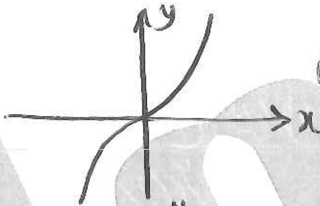
پاسخ: گزینه (۲) بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱) $y=5^x$

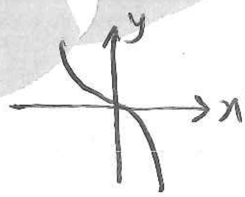


$\Rightarrow$ تابع صعودی

گزینه (۲): $y=x^3$

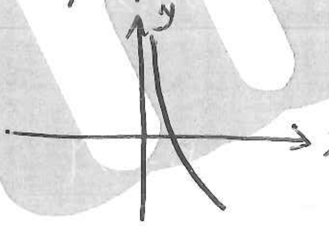


$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y=-x^3$

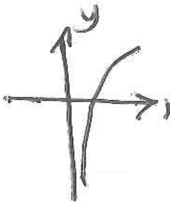


$\Rightarrow$ تابع نزولی

گزینه (۳): $y=\log_{\frac{1}{5}} x$

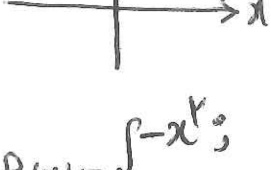


$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y=-\log_{\frac{1}{5}} x$

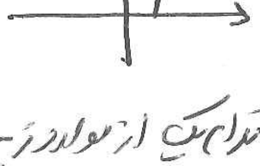


$\Rightarrow$ تابع صعودی

گزینه (۴): $y=\sqrt{x}$



$\xrightarrow[\text{راست}]{\text{دو واحد به سمت}} y=\sqrt{x-2}$



$\Rightarrow$ تابع صعودی

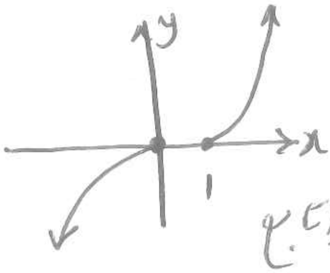
تست: کدام یک از موارد زیر در مورد تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} -x^2 ; & x\leq 0 \\ x^2-1 ; & x\geq 1 \end{cases}$ صادق است؟

۱) تابع f روی D_f صعودی است.
۲) تابع f روی D_f نزولی است.
۳) تابع f روی D_f اکیداً صعودی است.
۴) تابع f روی D_f اکیداً نزولی است.

مولف: رحیم قهرمان

پاسخ: گزینه (۱) تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & ; x\le 0\\ x^2-1 & ; x\ge 1\end{cases}$$



با توجه به نمودار تابع f، با افزایش مقادیر x، y نیز افزایش می‌یابد. لذا تابع f در دامنه‌ی تعریف خود همواره صعودی است، چون $f(0)=f(1)=0$، پس تابع صعودی است نه اکیداً صعودی.

نکات

۱) اگر f در دامنه‌اش صعودی (یا فقط نزولی) باشد، f را تابعی یکنوا گویند.

۲) اگر f در دامنه‌اش فقط اکیداً صعودی (یا فقط اکیداً نزولی) باشد، f را اکیداً یکنوا می‌گویند.

۳) هر تابع اکیداً یکنوا، یکنوا هم هست ولی عکس مطلب لزوماً صحیح نمی‌باشد.

۴) توابع ثابت $f(x)=k$ $(x\in\mathbb{R})$ هم در تعریف تابع صعودی و هم در تعریف تابع نزولی صدق می‌کند.

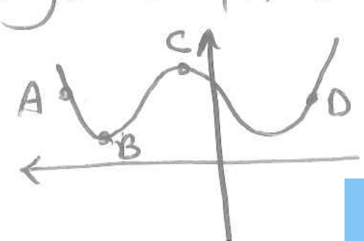
۵) در منحنی تابع اکیداً یکنوا هیچ دو نقطه‌ای هم عرض نباید وجود داشته باشد. این مطلب می‌تواند کمک مناسبی برای تشخیص توابع اکیداً یکنوا از روی منحنی باشد.

۶) اگر تابع f صعودی (نزولی) باشد، آنگاه $-f$ نزولی (صعودی) خواهد بود.

۷) اگر تابع f صعودی (نزولی) و همواره مثبت یا همواره منفی باشد، آنگاه $\frac{1}{f}$ نزولی (صعودی) خواهد بود.

۸) اگر تابع f صعودی (نزولی) باشد، آنگاه برای n های فرد f^n، $\sqrt[n]{f}$ صعودی (نزولی) خواهد بود.

تست: منحنی تابع $y=f(x)$ به صورت روبرو است. تابع $y=\frac{1}{f(x)}$ در کدام نقطه صعودی است؟

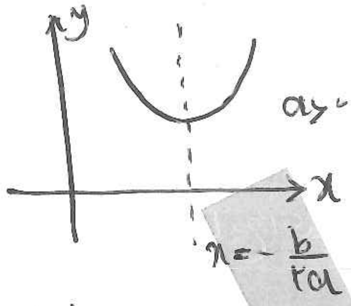


۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

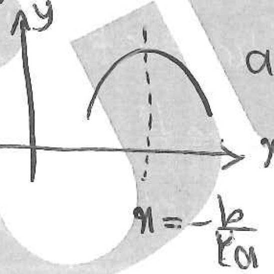
پاسخ: گزینه (۱) است. اگر f روی مجموعه A صعودی و مثبت باشد، آنگاه $\frac{1}{f}$ روی A نزولی و مثبت است. به همین ترتیب این مطلب در مورد نزولی یا نزولی اکید برقرار است و نیز اگر f صعودی و منفی باشد، $\frac{1}{f}$ نزولی و منفی است، زیرا در معکوس کردن علامت تغییر نمی کند. بنابراین تابع $y=\frac{1}{f(x)}$ در نقطه ای صعودی است که $f(x)$ طول آن نقطه نزولی باشد و با توجه به مقدار تابع این نقطه، نقطه ی A است.

۹) بررسی یکنوایی تابع $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

الف) اگر $a>0$، در این صورت تابع روی $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ اکیداً نزولی و روی $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ اکیداً صعودی است.



ب) اگر $a<0$، در این صورت تابع روی $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ اکیداً صعودی و روی $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ اکیداً نزولی است.



تست: حدود a برای آن که تابع $y=(a-2)x^2-x$ در فاصله ی $[1,+\infty)$ صعودی باشد کدام است؟

۱) $a\geq\frac{5}{2}$ ۲) $2<a\leq\frac{5}{2}$ ۳) $a<\frac{5}{2}$ ۴) $a>2$

پاسخ: گزینه (۲) اولاً باید $a>2$ باشد. در نتیجه برای اینکه f روی $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد باید بازه ی $[1,+\infty)$ زیرمجموعه ی $[-\frac{b}{2a},+\infty)=[\frac{1}{2(a-2)},+\infty)$ باشد. در نتیجه:

$$\frac{1}{2(a-2)} \leq 1 \Rightarrow 2a-4 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} a \geq \frac{5}{2} \\ a > 2 \end{cases} \Rightarrow a \geq \frac{5}{2}$$

۱۰) اگر f و g دو تابع مثبت و اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) باشند، آنگاه $f \times g$ تابعی مثبت و اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) است.

۱۱) اگر f و g دو تابع صعودی باشند، آنگاه $f+g$ نیز تابعی صعودی خواهد بود.

تست: اگر تابع $f(x)$ یک اکیداً صعودی باشد کدام تابع اکیداً صعودی است؟

۱) $|x| + f(x)$ ۲) $x f(x)$ ۳) $x + f(x)$ ۴) $|x| f(x)$

پاسخ: گزینه ی (۳) در این تست f صعودی اکید و $y=x$ نیز صعودی اکید است. لذا جمع آن ها یعنی $x + f(x)$ نیز صعودی اکید می باشد پس گزینه ی (۳) صحیح است.

تست: اگر f صعودی و g نزولی باشد، آنگاه توابع fog و $fogof$ به ترتیب:

۱) نزولی و نزولی است ۲) صعودی و نزولی است ۳) نزولی و صعودی است ۴) صعودی و صعودی است

پاسخ: گزینه ی (۱) می توانیم تابع نزولی g را با علامت منفی (۱-) و تابع صعودی f را با علامت (۱+) نشان دهیم و در ترکیب ها هر جا g و f بود برای هر کدام علامت مناسب را در نظر بگیریم و آن ها را در هم ضرب کنیم.

$$\begin{cases} \text{صعودی } f \Rightarrow + \\ \text{نزولی } g \Rightarrow - \end{cases} \Rightarrow \underset{+\ -\ +}{f\,o\,g\,o\,f} \xrightarrow[(-)]{\text{ضرب علامت ها}}$$

fog و $fogof$ نزولی هستند.

تست: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=-x^3$ باشد آنگاه کدام گزینه در مورد تابع gof درست است؟ ($x>0$)

۱) صعودی اکید ۲) نزولی اکید ۳) نه صعودی و نه نزولی ۴) نمی توان مشخص کرد

پاسخ: گزینه ی (۲)

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x} & \text{صعودی اکید} \\ g(x)=-x^3 & \text{نزولی اکید} \end{cases} \Longrightarrow \underset{-\ +}{g\,o\,f} \Rightarrow (-)$$

gof نزولی اکید

تست: کدام تابع روی دامنه اش نزولی است؟

۱) $y=\frac{1}{[x]}$ ؛ $x\geq 1$ ۲) $y=-[-x]$ ۳) $y=\frac{1}{x^2+1}$ ؛ $(x\leq 0)$ ۴) $y=-3^{-x}$

پاسخ: گزینه «۱» بررسی گزینه ها:

گزینه «۱» $y=[x]$ یک تابع صعودی است و عکس آن یک تابع صعودی نزولی می باشد.

گزینه «۲» تابع $y=[-x]$ نزولی است و بنابراین قرینه آن صعودی می باشد.

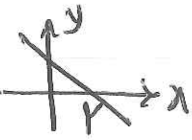
گزینه «۳» $y=x^2+1$ در $x\leq 0$ نزولی است و بنابر این عکس آن صعودی باشد.

گزینه «۴» $y=(\frac{1}{3})^x$ یک تابع نزولی است زیرا $\frac{1}{3}<1$ و در نتیجه قرینه آن صعودی می باشد.

تست: اگر تابع f اکیداً نزولی باشد و $f(2)=0$، دامنه ی تابع $y=\sqrt{\frac{xf(x)}{2+x^2}}$ کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $[0,2]$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

پاسخ: گزینه «۲» چون $f(2)=0$ و تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است، می توان حالت کلی آن را به صورت



فرض کرد. مخرج عبارت زیر رادیکال یعنی $(2+x^2)$ همواره مثبت است، بنابراین برای معنی بودن $\sqrt{\frac{xf(x)}{2+x^2}}$ کافی است $xf(x)\geq 0$ باشد. با توجه به مقدار تابع f سه حالت داریم:

$$\begin{cases} x<0 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} f(x)>0 \Rightarrow xf(x)<0 \\ 0\leq x\leq 2 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} f(x)\geq 0 \Rightarrow xf(x)\geq 0 \\ x>2 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} f(x)<0 \Rightarrow xf(x)<0 \end{cases}$$

تنها x هایی قابل قبول هستند که به ازای آن ها $xf(x)\geq 0$ شده باشد لذا

$D_y=[0,2]$ است.

مولف:رحیم قهرمان

تست: اگر f تابعی نزولی اکید با دامنه ی $\mathbb{R}$ باشد، دامنه ی تعریف $y=\sqrt{f(|x-2|)-f(|2x-1|)}$ کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

پاسخ: گزینه ی ۴

$$f(|x-2|)-f(|2x-1|)\geq 0 \Rightarrow f(|x-2|)\geq f(|2x-1|) \xrightarrow{\text{نزولی اکید}}$$

$$|x-2|\leq|2x-1| \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2-4x+4\leq 4x^2-4x+1 \Rightarrow 3x^2\geq 3 \Rightarrow$$

$x\leq -1$ یا $x\geq 1$

تست: مجموعه جواب نامعادله ی $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3x-6} > \log_{\frac{1}{4}}(2x-2)$ چیست؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $(-\infty,4)$ ۲) $(4,+\infty)$ ۳) $(1,4)$ ۴) $(2,4)$

پاسخ: گزینه ی ۴

یادآوری:

$0<a<1: \log_a x_1 < \log_a x_2 \xrightarrow{\text{تابع نزولی}} x_1 > x_2$ (تغییر جهت)

$a>1: \log_a x_1 < \log_a x_2 \xrightarrow{\text{تابع صعودی}} x_1 < x_2$ (حفظ جهت)

$$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3x-6} > \log_{\frac{1}{4}}(2x-2) \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(3x-6)^{\frac{1}{2}} > \log_{(\frac{1}{2})^2}(2x-2) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(3x-6) > \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(2x-2) \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(3x-6) > \log_{\frac{1}{2}}(2x-2)$$

$$\xrightarrow[\log_a x \text{ نزولی است.}]{0<a<1} (3x-6)<(2x-2) \Rightarrow x<4$$

از طرفی باید $3x-2>0$ و از آن جا $x>1$ و هم چنین $3x-4>0$ و در نتیجه $x>2$ و اشتراک

نتایج اخیر، $2<x<4$ است.

تست: مجموعه جواب نامعادله ی $(2-\sqrt{3})^{x^2} \leq (2-\sqrt{3})^4$ کدام است؟

۱) $x<-2 \cup x>2$ ۲) $-2 \leq x \leq 2$ ۳) $x \leq -2 \cup x \geq 2$ ۴) $-2<x<2$

(مشابه تمرین های کتاب درسی)

پاسخ: گزینه ی ۳) $1>(2-\sqrt{3})>0$ است ($\sqrt{3} \simeq 1/7$) و می دانیم تابع a^x، اگر $0<a<1$

باشد نزولی است، یعنی:

$$\begin{cases} 0<a<1 : & a^{x_1} \leq a^{x_2} \xrightarrow{\text{نزولی } a^x} x_1 \geq x_2 \\ a>1 : & a^{x_1} \leq a^{x_2} \xrightarrow{\text{صعودی } a^x} x_1 \leq x_2 \end{cases}$$

بنابراین:

$$(2-\sqrt{3})^{x^2} \leq (2-\sqrt{3})^4 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow x \leq -2 \cup x \geq 2$$

تست: تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{2} & ; x \geq 1 \\ \frac{x+a}{2} & ; x \leq -1 \end{cases}$ صعودی اکید است، حدود a کدام است؟

۱) $a<-1$ ۲) $a>2$ ۳) $a<3$ ۴) $a>-1$

پاسخ: گزینه ی ۳) هر دو ضابطه ی f، خطوطی هستند با شیب مثبت و لذا هر دو ضابطه ی f در دامنه

مربوط به خودشان صعودی اکید هستند. پس برای آن که f در کل نیز، صعودی اکید باشد

کافی است وقتی از شاخه ی $x \leq -1$ وارد شاخه ی $x \geq 1$ می شویم نیز، مقادیر تابع

افزایشی باید و برای آن که این اتفاق بیفتد کافی است:

$f(-1)<f(1)$ بنابراین:

$$f(-1)<f(1) \Rightarrow \frac{-1+a}{2}<1 \Rightarrow a<3$$

درسنامه ی (۱) تقسیم چندجمله ای ها و بخش پذیری

قضیه ی تقسیم: اگر چندجمله ای $P(x)$ از درجه ی n را بر چندجمله ای $B(x)$ از درجه ی m تقسیم کنیم $(m \leq n)$، خارج قسمت و باقی مانده ی منحصر به فردی مانند $Q(x)$ و $R(x)$ پدید می آید که در آن $Q(x)$ از درجه ی $(n-m)$ و $R(x)$ حداکثر از درجه ی $(m-1)$ است، داریم:

$$P(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

- $P(x)$: مقسوم از درجه ی n
- $B(x)$: مقسوم علیه از درجه ی m
- $Q(x)$: خارج قسمت از درجه ی $n-m$
- $R(x)$: باقی مانده از درجه ی حداکثر $m-1$

نکته ی (۱): باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $x-a$ برابر است با $P(a)$.

نکته ی (۲): باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ برابر است با $P(-\frac{b}{a})$

تست: باقی مانده ی تقسیم عبارت $x^4-ax^3+x^2+2ax+1$ بر $x+1$ برابر ۴ است. a کدام است؟

(سراسری ریاضی ۸۰)

۱) -4 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 4

پاسخ: گزینه ی (۲) باقی مانده ی تقسیم عبارت $P(x)$ بر $x-a$ برابر است با $P(a)$. باقی مانده ی تقسیم $P(x) = x^4-ax^3+x^2+2ax+1$ بر $x+1$ برابر ۴ است، لذا داریم:

$$R=4 \Rightarrow P(-1)=4 \Rightarrow (-1)^4-a(-1)^3+(-1)^2+2a(-1)+1=4 \Rightarrow a=-1$$

تست: دو عبارت $P(x)=2x^2+x+1$ و $Q(x)=3x^2+ax+2$ در تقسیم بر $x+1$، باقی مانده ی مساوی دارند. a کدام است؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) -1 ۲) -3 ۳) 1 ۴) 3

پاسخ: گزینه (۴) باقی مانده ی $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x+1$ باهم برابر است، لذا داریم: $P(-1)=Q(-1)$

$$\left.\begin{array}{l} P(-1)=2(-1)^2+(-1)+1=2 \\ Q(-1)=3(-1)^3+a(-1)+2=-a-1 \end{array}\right\} \xrightarrow{P(-1)=Q(-1)} 2=-a-1 \Rightarrow a=-3$$

نکته‌ی (۳): هرگاه $R(x)=0$ باشد، $P(x)$ بر $R(x)$ بخش‌پذیر خواهد بود و بر عکس.

تست: $f(x)$ چندجمله‌ای درجه‌ی دوم است که بر $x+1$ و $x-3$ بخش‌پذیر می‌باشد. اگر $f(0)=-9$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

۱) -18　　۲) -6　　۳) -15　　۴) -12

پاسخ: گزینه‌ی (۴) $f(x)$ بر $(x+1)$ و $(x-3)$ بخش‌پذیر است، بنابراین $f(x)=(x-3)(x+1)Q(x)$
از آن‌جایی که $f(x)$ عبارتی درجه دوم است، لذا $Q(x)$ درجه صفر (عددی مانند k) است. بنابراین $f(x)=k(x-3)(x+1)$. حال با توجه به این‌که $f(0)=-9$ است، داریم:

$$f(x)=k(x-3)(x+1) \xrightarrow{f(0)=-9} k(0-3)(0+1)=-9 \Rightarrow k=3$$

در نتیجه $f(x)=3(x-3)(x+1)$ است، لذا برای یافتن باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-1$، کافی است $f(1)$ را به دست آوریم، داریم:

$$f(x)=3(x-3)(x+1) \Rightarrow f(1)=-12$$

نکته‌ی (۴): برای یافتن باقی‌مانده‌ی تقسیم یک چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای دیگر، مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم، نتیجه‌ی به دست آمده را در داخل مقسوم قرار می‌دهیم.

تست: باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $x^{11}+x^9+x^7+x^5+x^3+x+1$ بر x^2-1 کدام است؟

۱) $x+1$　　۲) $5x+1$　　۳) $11x+1$　　۴) $6x+1$

پاسخ: گزینه‌ی (۴) برای باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر x^2-1، ابتدا مقسوم‌علیه (یعنی x^2-1) را برابر صفر قرار می‌دهیم. سپس با رابطه‌ی به دست آمده، عبارت مقسوم را ساده می‌کنیم، داریم:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1$$

نتیجه: به جای هر x^2 که ساده شده می‌توان عدد ۱ قرار داد.

$$x^{11}+x^{9}+x^{7}+x^{5}+x^{3}+x+1 = x(x^2)^5+x(x^2)^4+x(x^2)^3+x(x^2)^2+x(x^2)^1+x+1$$

$$\Rightarrow R(x) \xrightarrow{x^2=1} x+x+x+x+x+x+1 = 6x+1$$

تست: اگر عبارت $x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3+k$ به ازای هر عدد طبیعی n بر دوجمله‌ای $x+2$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر x^2-1 کدام است؟

(سراسری ریاضی ۸۹)

۱) $-3x-6$ ۲) $-2x+1$ ۳) $2x+6$ ۴) $3x-4$

پاسخ: گزینه‌ی (۱) با توجه به این‌که عبارت $P(x)=x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3+k$ همواره بر $x+2$ بخش‌پذیر است، لذا $P(-2)=0$، داریم:

$$P(x)=x\times x^{2n}+2x^{2n}+x^5-5x^3+k=(x+2)\,x^{2n}+x^5-5x^3+k$$

$$P(-2)=0 \Rightarrow (-2+2)(-2)^{2n}+(-2)^5-5(-2)^3+k=0 \Rightarrow k=-8$$

بنابراین باید باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $P(x)=x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3-8$ را بر x^2-1 به دست آوریم:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \quad (*)$$

$$P(x)=x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3-8 = x\cdot(x^2)^n+2(x^2)^n+x(x^2)^2-5x(x^2)-8$$

$$\xRightarrow{(*)} R(x)=x\times1^n+2\times1^n+x\times1^2-5x\times1-8=-3x-6$$

نکته‌ی (۵) x^n+a^n بر $x+a$ بخش‌پذیر است، هرگاه n عددی فرد است.

x^n+a^n بر $x-a$ هیچ‌گاه بخش‌پذیر نیست.

x^n-a^n بر $x+a$ بخش‌پذیر است، هرگاه n عددی زوج باشد.

x^n-a^n بر $x-a$ همواره بخش‌پذیر است.

نکته (۴): اگر n عددی طبیعی باشد، داریم:

$$(x^n-1)=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$$

اگر n عددی فرد باشد، داریم:

$$(x^n+1)=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots+1)$$

اگر n عددی طبیعی باشد، داریم:

$$(x^n-a^n)=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1})$$

اگر n عددی فرد باشد، داریم:

$$(x^n+a^n)=(x+a)(x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots+a^{n-1})$$

تست: عبارت $x^{51}+y^{45}$ بر کدام یک از عبارات زیر بخش‌پذیر است؟

۱) x^3+y^3 ۲) x^3-y^3 ۳) $x^{17}+y^5$ ۴) $x^{17}-y^{15}$

پاسخ: گزینه (۳) با توجه به اینکه x^n+y^n بر $x+y$ زمانی بخش‌پذیر است که n عددی فرد باشد، بنابراین با توجه به $51=3\times17$ و $45=3\times15$ داریم:

$$x^{51}+y^{45}=(x^{17})^3+(y^{15})^3 \xrightarrow{\text{۳ عدد فرد است}} x^{51}+y^{45} \text{ بر } x^{17}+y^{15} \text{ بخش‌پذیر است}$$

تست: در تجزیه‌ی عبارت $A=x^9-x^3y^3$ کدام عامل وجود ندارد؟

۱) x^3 ۲) x^2-y ۳) $x^4-x^2y+y^2$ ۴) $x^4+x^2y+y^2$

پاسخ: گزینه (۳)

$$A=x^9-x^3y^3=x^3(x^6-y^3)=x^3((x^2)^3-y^3) \Rightarrow$$

$$A=x^3(x^2-y)(x^4+x^2y+y^2)$$

بنابراین به راحتی دیده می‌شود که در تجزیه‌ی این عبارت $x^4-x^2y+y^2$ وجود ندارد.