یادآوری قبلا برای رد کردن یک حکم کلی، از مثال نقض استفاده می کردیم؛
همچنین فهمیدیم با ارائه مثال (به هر تعداد) نمی توان درستی یک حکم کلی را نتیجه گرفت و لازم است با استدلال های معتبر، درستی حکم را ثابت کنیم؛ یک روش اثبات مستقیم بود که بارها بر اساس آن اثبات هایی را دیده اید!

مثال درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید :

آ) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

ب) عدد $۲^{۲^n}+۱$ به ازای همه عددهای طبیعی n، عددی اول است.

$۲^{۲^۵}+۱ = ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ = ۶۴۱ \times ۶۷۰۰۴۱۷$

تمرین هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

۱) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

۲) برای هر دو عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

۳) حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

۴) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n - ۱$ اول است.

۵) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

۶) اگر برای هر سه مجموعه A، B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$

۷ اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است.

خواندنی حکم «برای nهای طبیعی عبارت $991n^2+1$ هیچ‌گاه مجذور کامل نیست.»

مثال نقض: کوچک‌ترین عدد طبیعی که به ازای آن $991n^2+1$ مجذور کامل باشد ۲۹ رقم دارد! $n = 12055735790331359447442538767$

اثبات با درنظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک حکم، نشان می دهیم حکم در همه حالات ممکن برای مساله برقرار است و از آنجا درستی حکم ثابت می شود

سؤال ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، n^2-5n+7 عددی فرد است.

نکته اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن n^2-5n+7 را با r نمایش دهیم، حکم را می‌توان به صورت گزاره $p \vee q \Rightarrow r$ نمایش داد. با توجه به هم ارزی $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ شیوهٔ اثبات توجیه می‌شود. به‌طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزارهٔ دلخواه داریم:
$P_1 \vee P_2 \vee \ldots P_n \Rightarrow r \equiv (P_1 \Rightarrow r) \wedge (P_2 \Rightarrow r) \wedge \ldots (P_n \Rightarrow r)$

مثال ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=0$ آنگاه $a=0$ یا $b=0$.

برای a دو حالت ممکن است رخ دهد:

آ) اگر $a=0$، در این حالت حکم برقرار است

ب) اگر $a \neq 0$، در این حالت a^{-1} یک عدد حقیقی است و داریم: $\xrightarrow{ab=0} a^{-1}(ab) = a^{-1} \times 0 \Rightarrow b=0$

بنابراین حکم برقرار است.

مسئله آ) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید a^2+b^2 زوج است.

ب) $A=\{۳,۴\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S=\{۱,۲,...,۶\}$ است و $n\in S$، اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n\in A$.

اثبات غیرمستقیم اثبات به روش برهان خلف

در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا معلوم می‌شود که فرضِ نادرست بودنِ حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

مسئله ثابت کنید حاصل‌جمع یک عددگویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

مسئله حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

مسئله $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ عددهایی صحیح هستند و $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ عددی زوج است.

مسئله درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

آ) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

ب) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی g در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

یادآوری

آ) اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آنها را گزاره‌های **هم ارز (هم ارزش)** می‌نامیم.

ب) اگر P و Q دو گزاره هم ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌ی $P \Leftrightarrow Q$ یک **گزاره درست** است. به عکس اگر ترکیب دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن‌گاه P و Q دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان است.

مسئله اگر $a,b \in \mathbb{R}$ کدام‌یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

آ) $a=b \Leftrightarrow a^3=b^3$

ب) $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$

پ) $a<b \Leftrightarrow a^3<b^3$

ت) $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$

مثال اگر b و a دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید: $a^2+ab+b^2 \geq 0$

ترکیب دو شرطی $a^2+ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4} \geq 0$ بیانگر آن است که دو گزاره هم ارز هستند

چون گزاره سمت راست یک گزاره ی همیشه درست است، پس گزاره سمت چپ (حکم) نیز چنین است؛

اثبات به روش بازگشتی:

مسئله اگر $a>0$ ثابت کنید $a+\frac{1}{a}\geq 2$

مسئله ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

به بیان دیگر: اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، ثابت کنید: $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

مسئله اگر b و a دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید: $a^2+ab+b^2\geq 0$

تذکر از «روش بازگشتی» برای نشان دادن نادرستی یک گزاره نیز می‌توان استفاده کرد.

مسئله ۱ اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارزند؟

۲ آیا دو گزاره زیر هم‌ارزند؟

آ) نقطه C روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد.

ب) فاصله نقطه C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.

پرسش و تمرین

۱ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید :

آ) اگر x و y دو عدد حقیقی (مخالف صفر) باشند داریم : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم : $x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+zx$

نتیجه: $\boxed{x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y}$

۲ عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به‌طوری‌که $x^۳<x^۲$.

۳ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+۲\beta$ گنگ هستند.

۴ آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که: $x^۲+y^۲=(x+y)^۲$

۵ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که: $(a+b\neq ۰)$ $\quad \frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$

۶ گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.

آ) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

مفهوم شمارنده :

مثال: شمارنده های عدد ۱۲ را بنویسید؛

عاد کردن یا شمردن:

فرض کنیم $b \neq 0$ یک عدد صحیح و a یک شمارنده ی آن باشد؛ در این حالت می نویسیم: $a|b$
و می‌خوانیم a می‌شمارد b را یا a عاد می کند عدد b را و یا عدد b بر a بخش‌پذیر است

نکته از مطالب بالا نتیجه می شود: $a\,|b$ هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به گونه‌ای که $b = aq$.

تذکر هرگاه b بر a تقسیم‌پذیر نباشد می‌نویسیم $a \nmid b$.

چند نکته: **برای هر عدد صحیح a ، همواره:**

آ) $\pm 1|a$

ب) $a|a$

پ) $a|0$

قرارداد: صفر عدد صفر را می‌شمارد: $0|0$

کار در کلاس ۱ با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن جاهای خالی را پر کنید.

الف) $7|63 \Leftrightarrow 63 = \cdots \times \cdots$

ب) $91 = 7\times \cdots \Leftrightarrow \cdots |91$

پ) $-6|54 \Leftrightarrow \cdots = \cdots \times (-6)$

ت) $5|-35 = \Leftrightarrow \cdots = 5 \times \cdots$

ث) $0 = 18\times \cdots \Leftrightarrow 18| \cdots$

ج) $a|1 \Rightarrow a = \cdots$ یا $a = \cdots$

چ) $26 = 2\times 13 \Rightarrow 2| \cdots$ و $\cdots |26$

۲ با استفاده از تعریف عاد کردن و تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر ابتدا نشان دهید: $3^5|3^9$

سپس ثابت کنید: $\forall m,n \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow a^m | a^n$

خواص رابطهٔ عاد کردن

خاصیت ۱ اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب عدد b را نیز می‌شمارد یعنی: $a|b \Rightarrow a|mb$

مثال : $3|6 \Rightarrow 3|6\times 5 \;,\; 3|6\times 4 \;,\; 3|6\times(-7) \;,\; \cdots$

نتیجه: اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه b^2 را می‌شمارد و در حالت کلّی b^n را می‌شمارد که $n \in \mathbb{N}$ است. یعنی:

۱ $a|b \Rightarrow a|b^2$ ۲ $a|b \Rightarrow a|b^n$

سؤال (۱): آیا از اینکه $a|bc$ می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟

سؤال (۲): آیا از اینکه $a|b$ می‌توان نتیجه گرفت $ka|kb$؟

آیا از $ka|kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a|b$؟

خاصیت ۲ اگر عدد a، عدد b را بشمارد و b نیز c را بشمارد آنگاه a، عدد c را می‌شمارد: $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

نکته این خاصیت را خاصیت تعدی برای رابطهٔ عاد کردن، می‌نامیم.

مسئله نشان دهید: $a|b \Rightarrow a|b^n$

خاصیت ۳ هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد:

$$a|b \text{ ، } a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

سؤال آیا از اینکه $a|b \pm c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$؟

خاصیت ۴ اگر $a|b$ و $b \neq 0$ در این صورت $|a| \leq |b|$.

مسئله **ثابت کنید:** اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a = \pm b$.

نتیجه: اگر $a|1$ و $1|a$ آنگاه $a = \pm 1$.

کار در کلاس ۱ اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(7m+6)$ و $(6m+5)$ بر a بخش‌پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$.

۲ اگر $a|b$ نشان دهید که $a^n|b^n$.

۳ اگر $a|b$ و $c|d$ نشان دهید که $ac|bd$.

۴ اگر $a|b$ و $a|c$ نشان دهید که $a|mb \pm nc$.

یادآوری

مفهوم عدد اول: هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود.

مجموعه اعداد اول: مجموعه‌ای نامتناهی است که به‌صورت $P = \{2,3,5,7,11,...\}$ نمایش داده می‌شود.

نکته اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a|p$ در این‌صورت $a=1$ یا $a = p$.

سؤال اگر a عددی طبیعی باشد و دو عدد $(9k+7)$ و $(7k+6)$ را عاد کند، ثابت کنید $a=1$ یا $a=5$.

مسئله ثابت کنید:

آ) $7 \mid 100! + 7$

ب) $\forall k \le n \,،\, k \mid n! + k$

نکته اگر $b = aq$ یا $a|b$ یعنی a شمارندهٔ b است یا b بر a بخش‌پذیر است و این یعنی a مقسوم‌علیه b است یا b مضرب a است

تعریف عدد طبیعی d را ب م م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند

آ) $d|a, d|b$

ب) $\forall m > 0 : m \mid a , m \mid b \Rightarrow m \le d$

و اگر دو شرط برقرار باشند آنگاه $(a,b)=d$.

نکته ۱ شرط (الف) مقسوم‌علیه مشترک بودن را برای d تأمین می‌کند
شرط (ب) نشان می‌دهد از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی چون m، بزرگ‌تر است.

۲ اگر $(a,b)=1$ در این صورت می‌گوییم a و b نسبت به هم اولند.

مسئله محاسبه کنید:

$(1,12) =$ ، $(7,11) =$ ، $(4,9) =$ ، $(3,4) =$

$(4,-6) =$ ، $(0,6) =$ ، $(8,16) =$ ، $(6,9) =$

تعریف عدد طبیعی c را ک م م دو عدد ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$ هرگاه دو شرط آ و ب برقرار باشند

آ) $a \mid c \,,\, b \mid c$

ب) $\forall m > 0 \,,\, a \mid m \,, b \mid m \Rightarrow c \le m$

و اگر دو شرط برقرار باشند آنگاه $[a,b] = c$

سؤال توضیح دهید که شرط‌های (الف) و (ب) هر یک چه ویژگی را تأمین می‌کنند؟

مسئله محاسبه کنید:

$(-4,16) =$ ، $[1,8] =$ ، $[6,4] =$ ، $[3,4] =$

کار در کلاس ۱ با توجه به تعاریف ب م م و ک م م ثابت کنید:

۱) $a|b \Rightarrow (a,b) = |a|$

۲) $a|b \Rightarrow [a,b] = |b|$

۲ اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$، ثابت کنید، $(p,a) = ۱$

سؤال اگر p عددی اول نباشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$، آیا می‌توان نتیجه گرفت $(p,a) = ۱$ ؟

قضیه تقسیم و کاربردها

قضیه تقسیم (بدون اثبات):

اگر a عددی صحیح و b عدد طبیعی باشد در این‌صورت، (با تقسیم a بر b) اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $۰ \leq r < b$.
a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقیمانده می‌نامیم.

توجه: **اگر** $r = ۰$ **باشد، می گوییم** a **بر** b **بخش پذیر است؛**

مسئله اگر باقیمانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این‌صورت باقیمانده تقسیم عدد $(۲m - ۵n)$ را بر ۱۷ به‌دست آورید.

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b، و با توجه به اینکه باقیمانده تقسیم یعنی r در رابطهٔ $0 \le r < b$ صدق می‌کند، برای a برحسب r دقیقاً b حالت وجود دارد

مسئله **در تقسیم بر ۵، افراز اعداد صحیح را بنویسید؟**

مسئله اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $2k$ یا $2k+1$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

مسئله ثابت کنید اگر $P>3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $P=6k+1$ یا $P=6k+5$ نوشته می‌شود.

مسئله ابتدا ثابت کنید هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشته می‌شود

سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(8t+1)$ نوشته می‌شود (باقیمانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است.)

سؤال **در تقسیم بر ۴، افراز** مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ **را بنویسید؛**

پرسش و تمرین

۱ اگر فرض کنیم $ab = cd$ (a, b, c, d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۲ اگر $a|b$ ثابت کنید $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

۳ اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است.

۴ اگر kای در $\mathbb{Z}$ باشد که داشته باشیم، $5|4k+1$ ثابت کنید : $25|16k^2+28k+6$

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$؟

۶ ثابت کنید : (آ) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اولند.

(ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اولند.

۷ اگر $P \neq q$ و P و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(P, q) = ۱$.

۸ اگر $m,n \in \mathbb{N}$ و $a,b \in \mathbb{Z}$ در این صورت ثابت کنید: $m \leq n\, ,\, a|b \Rightarrow a^m \,|\, b^n$

۹ اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^۲ + b^۲ + ۳)$ رابر ۸ بیابید.

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $۳|n^۳ - n$

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسومٌ‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد متوالی همواره بر !۳ بخش‌پذیر است.

۱۶ حاصل هر یک را به دست آورید : $(m \in \mathbb{Z})$

آ) $\left([m^۲, m], m^۵\right)$

ب) $(۲m, ۶m^۳)$

پ) $(۳m+۱, ۳m+۲)$

ت) $\left[m^۷, (m^۲, m^۳)\right]$

ث) $[(۷۲, ۴۸), ۱۲۰]$

تعریف

برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b اگر $m \mid a-b$ (a و b بر m هم باقیمانده باشند) می‌گوییم «a هم‌نهشت با b است به‌سنج یا پیمانهٔ m» و می‌نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$.

تعریف رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، به زبان ریاضی عبارت است از:

$$\forall a,b \in \mathbb{Z} \,,\; a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b \; (m \in \mathbb{N})$$

یادآوری

در درس قبل دیدیم که باقیمانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳.

همچنین می دانیم مجموعه های زیر یک افراز برای مجموعه اعداد صحیح تشکیل می دهند:

$$A_۰=\{x \in \mathbb{Z} \mid x=۴k\} = \{\cdots, -۸, -۴, ۰, ۴, ۸, \cdots, ۱۶, \cdots\}=[۰]_۴$$
$$A_۱=\{x \in \mathbb{Z} \mid x=۴k+۱\} = \{\cdots, -۷, -۳, ۱, ۵, \cdots, ۱۳, \cdots, ۲۱, \cdots\}=[۱]_۴$$
$$A_۲=\{x \in \mathbb{Z} \mid x=۴k+۲\} = \{\cdots, -۶, \cdots, ۲, ۶, ۱۰, \cdots\}=[۲]_۴$$
$$A_۳=\{x \in \mathbb{Z} \mid x=۴k+۳\} = \{\cdots, -۱۳, \cdots, -۵, -۱, ۳, ۷, ۱۱, \cdots\}=[۳]_۴$$

اگر بررسی کنید خواهید دید هر دو عضو دلخواه از هریک از مجموعه های بالا به پیمانه ی ۴ همنهشت هستند (دارای باقیمانده‌ی یکسانی هستند)**؛ بر این اساس به هریک از مجموعه های بالا ($[۰]_۴$ و $[۱]_۴$ و ...) کلاس یا دسته‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی ۴ می‌گویند؛**

نکته

مجموعهٔ همه اعداد صحیح که با باقیمانده تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد یعنی، $[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$ ، را کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌نامیم.

مسئله

ثابت کنید: $\forall a,b \in \mathbb{Z} \,,\; a,b \in [r]_m \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} b$

نتیجه: $\forall a,b \in \mathbb{Z} \,,\; a,b \in [r]_m \Leftrightarrow m \mid a-b \; (m \in \mathbb{N})$

تذکر مهم: (اگر باقیمانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد در این صورت $a \overset{m}{\equiv} r$)

$$a = mq + r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی

ویژگی ۱: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$

ویژگی ۲: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

سؤال اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ ، **آیا** می‌توان نتیجه گرفت $a \overset{m}{\equiv} b$ ؟

ویژگی ۳: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n \quad (n\in\mathbb{N})$

$\boxed{(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})}$

سؤال اگر $a^n \overset{m}{\equiv} b^n$ ، **آیا** می‌توان نتیجه گرفت $a \overset{m}{\equiv} b$ ؟

$\boxed{۳^۲ \overset{۴}{\equiv} ۵^۲ \text{ ولی } ۳ \overset{۴}{\not\equiv} ۵}$

ویژگی ۴:

۱ $a \overset{m}{\equiv} b \,,\, c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$

۲ $a \overset{m}{\equiv} b \,,\, c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d$

یادآوری

۱ هرگاه بخواهیم هم‌نهشت عدد a را به پیمانهٔ m، مشخص کنیم کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقیمانده را به‌دست آوریم.

۲ اگر a و b بر عدد طبیعی m، هم باقیمانده باشند (باقیمانده‌های تقسیم a و b بر m، برابر باشد)، در این صورت $a \overset{m}{\equiv} b$

مسئله باقیمانده تقسیم عدد $A=(۲۷)^۷+۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

ویژگی ۶: $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a\pm mt \overset{m}{\equiv} b\pm mk$

مسئله باقیمانده تقسیم عدد $A=(1000)^{13}\times 12+10$ را بر ۷ بیابید.

ویژگی ۷: (بدون اثبات) $ac\overset{m}{\equiv}bc\ ,(c,m)=d \Rightarrow a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$

نتیجه (مهم): اگر $ac\overset{m}{\equiv}bc$ و $(c,m)=1$ در این‌صورت $a\overset{m}{\equiv}b$
در واقع قاعدهٔ حذف در هم‌نهشتی‌ها برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد برقرار است.

مثال واضح است که $4\times a\overset{3}{\equiv}4\times 3$ و چون $(4,3)=1$ پس $a\overset{3}{\equiv}3$.

نکته از ویژگی ۷ (و نتیجه اش) برای حل معادلات همنهشتی و سیاله (که در آینده می خوانیم) استفاده می شود؛

مسئله یک قاعده کلّی برای یافتن باقیمانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۹ بیان کنید.

$$A=10^{n-1}\times a_{n-1}+\cdots+\cdots+\cdots+10^{2}a_2+10\,a_1+10^{0}a_0 \Rightarrow A\overset{9}{\equiv}1\times a_{n-1}+\cdots+1\times a_1+a_0 \Rightarrow A\overset{9}{\equiv}\cdots$$

نتیجه: «باقیماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقیماندهٔ مجموع ارقام آن عدد بر ۹»

مسئله یک قاعده کلّی برای یافتن باقیمانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

مسئله یک قاعده کلّی برای یافتن باقیمانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۱۱ بیان کنید.

$1\overset{11}{0\equiv}-1$

مسئله یک قاعده کلّی برای یافتن باقیمانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ بیان کنید.

$1\overset{2}{0\equiv}0$ و $1\overset{5}{0\equiv}0$ و $1\overset{10}{0\equiv}\cdots$

تذکر یکی از کاربردهای هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری و محاسبهٔ روزهای هفته برحسب تاریخ مشخص شده است.

چند مطلب ضروری برای این نوع مسائل:

آ) هر روز از هفته مانند شنبه پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود

ب) شش ماه اول سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دوم سال غیر از اسفند (که ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند. البته هر چهار سال یک‌بار (سال کبیسه) اسفند نیز ۳۰ روزه است.

مسئله اگر اول مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، در این‌صورت ۲۲ بهمن در همان سال چند شنبه است؟

مسئله اگر در یک سال، اول مهر، شنبه باشد در این‌صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

مسئله از روی تقویم سال جاری روز هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته است؟ درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

معادلهٔ هم‌نهشتی

رابطه هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax\overset{m}{\equiv}b$ ، $(a,b\in\mathbb{Z})$ ، را یک معادلهٔ هم نهشتی می‌نامیم و منظور از حل یک معادلهٔ هم‌نهشتی پیدا کردن همهٔ جواب‌هایی چون $x_0\in\mathbb{Z}$ است که در معادله فوق صدق کنند یعنی $ax_0\overset{m}{\equiv}b$.

یادآوری $x\overset{m}{\equiv}a \Leftrightarrow m\,|\,x-a \Leftrightarrow x=mk+a$

روش حل معادله همنهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$:

مسئله جواب‌های عمومی معادلهٔ $۴x\overset{۵}{\equiv}۱۷$ را به‌دست آورید.

مسئله همهٔ اعداد صحیح را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش‌پذیر باشند. $۷|۳x-۱۳$ یا $۳x\overset{۷}{\equiv}۱۳$

قضیه (بدون اثبات): معادلهٔ هم‌نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)|b$

نتیجه: اگر $(a,m)=۱$ چون برای هر b ، همواره $۱|b$ پس معادلهٔ $ax\overset{m}{\equiv}b$ همواره دارای جواب است.

مسئله **پاسخ معادلات همنهشتی زیر را بدست آورید (در صورت وجود)**

آ) $6x \overset{9}{\equiv} 11$

ب) $4x \overset{6}{\equiv} 18$

معادلهٔ سیّاله

معادلهٔ $ax+by=c$ **را که در آن،** x و y **مجهول هایی** در اعداد صحیح و a و b و $c \in \mathbb{Z}$ **هستند** را یک معادلهٔ سیّاله درجهٔ اول یا خطی می‌نامیم.

روش حل معادلات سیاله (با تبدیل به معادله همنهشتی)**:**

مسئله جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ $4x+5y=9$ را بیابید.

نکته: به ازای مقادیر مختلف برای ......

مسئله آیا می‌توانید یک کیسهٔ ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟

مسئله به چند طریق می‌توان ۱۷۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی خُرد کرد؟

مسئله در یک رستوران فقط دو نوع غذای قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)

مسئله تیراندازی به سمت یک هدف شامل دو دایرهٔ هم مرکز تیراندازی می‌کند، اگر به دایرهٔ با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایرهٔ بزرگ‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر، تیراندازی کرده باشد و همهٔ تیرها داخل دایرهٔ بزرگ‌تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

پرسش و تمرین

۱ عدد ۱۳۹۸ به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق دارد؟

۲ اگر $k \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید، فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است
$k \overset{۳}{\equiv} ۲$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۱$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۰$ (به عبارت دیگر، $k \in [۰]_۳$ یا $k \in [۱]_۳$ یا $k \in [۲]_۳$)

۳ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

۴ فرض کنیم، $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m,n)=d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

۵ ثابت کنید : اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

۶ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

۷ با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیّام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰}\times a^n + \binom{n}{۱}\times a^{n-۱}b + \binom{n}{۲}\times a^{n-۲}b^۲ + \binom{n}{۳}\times a^{n-۳}b^۳ + \cdots + \binom{n}{n}\times b^n$$

ثابت کنید، برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a,b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$.

۸ با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $۱۲^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۲۳^{۵۱}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

۹ باقی‌مانده تقسیم عدد $A=(۲^{۱۱}+۷)\times ۹$ را بر ۲۳ بیابید.

۱۰ اگر دو عدد $(۳a-۵)$ و $(۴a-۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکانِ عدد $(۹a+۶)$ را به‌دست آورید.

۱۱ باقی‌مانده تقسیم عدد $A=۱!+۲!+۳!+\dots+۵۰۰!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید (رقم یکان A را بیابید)

۱۲ جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $۷x+۵y=۱۱$ را به‌دست آورید.

۱۳ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را توسط اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی خُرد کرد؟

۱۴ معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را به‌دست آورید.

آ) $۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$

ب) $8x \overset{12}{\equiv} 20$

پ) $51x \overset{6}{\equiv} 11$

۱۵ اگر اوّل مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۶ اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۷ همهٔ اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به‌علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۱۸ به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۱۹ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شاملِ ۹ شاخه گل به دلخواه انتخاب کرد؟

۲۰ شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده و به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده است و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد) در این صورت این شخص به چه صورت‌هایی می‌توانسته این امتیاز را به‌دست آورده باشد؟