۱- اگر $a<0$ ثابت کنید $a+\frac{1}{a}\le -2$.

$a+\frac{1}{a}\le -2 \overset{\times a}{\Leftrightarrow} a^2+1\ge -2a \Leftrightarrow a^2+1+2a\ge 0 \Leftrightarrow (a+1)^2\ge 0$ همیشه درست

۲- برای هر دو عدد حقیقی a و b نشان دهید $a^2+b^2\ge ab$.

$a^2+b^2\ge ab \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2a^2+2b^2\ge 2ab \Leftrightarrow a^2+a^2+b^2+b^2-2ab\ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+(a-b)^2\ge 0$ همیشه درست

۳- برای هر دو عدد حقیقی a و b نشان دهید $a^2+b^2\ge 2(a+b-1)$.

$a^2+b^2\ge 2(a+b-1) \Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2a+2b-2 \Leftrightarrow a^2+b^2-2a-2b+1+1\ge 0 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2\ge 0$ همیشه درست

۴- برای هر دو عدد حقیقی a و b نشان دهید $a^2+1\ge 2b(a-b+1)$.

$a^2+1\ge 2b(a-b+1) \Leftrightarrow a^2+1\ge 2ab-2b^2+2b \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+b^2-2b+1\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-1)^2\ge 0$ همیشه درست

۵- برای هر سه عدد حقیقی a و b و c نشان دهید $a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$.

$a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+3\ge 2a+2b+2c$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+1+1+1-2a-2b-2c\ge 0 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge 0$ همیشه درست

۶- برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b نشان دهید $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \overset{\times a^2b^2}{\Leftrightarrow} a^3+b^3\ge ab^2+ba^2 \Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)\ge ab(a+b) \overset{\div(a+b)}{\Leftrightarrow} a^2-ab+b^2\ge ab$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$ همیشه درست

۷- برای هر دو عدد حقیقی a و b نشان دهید $\sqrt{a^2+b^2}\le |a|+|b|$.

$\sqrt{a^2+b^2}\le |a|+|b| \overset{\text{به توان ۲}}{\Leftrightarrow} a^2+b^2\le a^2+b^2+2|ab| \Leftrightarrow 0\le 2|ab|$ همیشه درست

۸- برای هر عدد حقیقی a نشان دهید $\frac{a^2}{a^4+1}\le \frac{1}{2}$.

$\frac{a^2}{a^4+1}\le \frac{1}{2} \overset{\times 2(a^4+1)}{\Leftrightarrow} 2a^2\le a^4+1 \Leftrightarrow 0\le a^4+1-2a^2 \Leftrightarrow 0\le (a^2-1)^2$ همیشه درست

۹- برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b نشان دهید $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\ge 4$.

$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\ge 4 \Leftrightarrow (a+b)(\frac{a+b}{ab})\ge 4 \overset{\times ab}{\Leftrightarrow} (a+b)^2\ge 4ab \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab\ge 4ab$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$ همیشه درست

۱۰- برای هر چهار عدد حقیقی a و b و c و d نشان دهید $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge (ac+bd)^2$.

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge (ac+bd)^2 \Leftrightarrow a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\ge a^2c^2+b^2d^2+2abcd$

$\Leftrightarrow a^2d^2+b^2c^2-2abcd\ge 0 \Leftrightarrow (ad-bc)^2\ge 0$ همیشه درست

۱۱- برای هر دو عدد حقیقی a و b نشان دهید $\big||a|-|b|\big|\le|a-b|$.

$$\big||a|-|b|\big|\le|a-b| \overset{\text{به توان ۲}}{\Longleftrightarrow} a^۲+b^۲-۲|ab|\le a^۲+b^۲-۲ab \Leftrightarrow -۲|ab|\le-۲ab \overset{\div(-۲)}{\Longleftrightarrow} |ab|\ge ab$$ همیشه درست

۱۲- برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b نشان دهید $a^۳+b^۳\ge a^۲b+ab^۲$.

$$a^۳+b^۳\ge a^۲b+ab^۲ \Leftrightarrow (a+b)(a^۲-ab+b^۲)\ge ab(a+b) \overset{\div(a+b)}{\Longleftrightarrow} a^۲-ab+b^۲\ge ab$$

$$\Leftrightarrow a^۲-۲ab+b^۲\ge ۰ \Leftrightarrow (a-b)^۲\ge ۰$$ همیشه درست

۱۳- برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b نشان دهید $\frac{۱}{\sqrt{a}}+\frac{۱}{\sqrt{b}}\ge\frac{۴}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

$$\frac{۱}{\sqrt{a}}+\frac{۱}{\sqrt{b}}\ge\frac{۴}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}\ge\frac{۴}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \overset{\times\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\Longleftrightarrow} (\sqrt{a}+\sqrt{b})^۲\ge ۴\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a+b+۲\sqrt{ab}\ge ۴\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab}\ge ۰ \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲\ge ۰$$ همیشه درست

۱۴- برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b نشان دهید $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b} \overset{\text{به توان ۲}}{\Longleftrightarrow} a+b+۲\sqrt{ab}>a+b \Leftrightarrow ۲\sqrt{ab}>۰$$ با توجه به مثبت بودنِ a و b همیشه درست است

۱۵- برای هر دو عدد حقیقی a و b نشان دهید $a^۲+b^۲+۴a-۶b+۱۳\ge ۰$.

$$a^۲+b^۲+۴a-۶b+۱۳\ge ۰ \overset{۱۳=۴+۹}{\Longleftrightarrow} (a^۲+۴a+۴)+(b^۲-۶b+۹)\ge ۰ \Leftrightarrow (a+۲)^۲+(b-۳)^۲\ge ۰$$ همیشه درست

۱۶- برای هر دو عدد حقیقی a و b نشان دهید $(a^۲+۱)(b^۲+۱)\ge ۴ab$.

$$(a^۲+۱)(b^۲+۱)\ge ۴ab \Leftrightarrow a^۲b^۲+a^۲+b^۲+۱\ge ۲ab+۲ab \Leftrightarrow (a^۲b^۲+۱-۲ab)+(a^۲+b^۲-۲ab)\ge ۰$$

$$\Leftrightarrow (ab-۱)^۲+(a-b)^۲\ge ۰$$ همیشه درست

۱۷- برای هر عدد حقیقی a نشان دهید $\frac{a^۲}{۱+a^۲}\le ۱$.

$$\frac{a^۲}{۱+a^۲}\le ۱ \overset{\times(۱+a^۲)}{\Longleftrightarrow} a^۲\le ۱+a^۲ \Leftrightarrow ۰\le ۱$$ همیشه درست

۱۸- برای هر دو زاویه دلخواه α و β ثابت کنید $\cos^۲\alpha-\cos^۲\beta=\sin^۲\beta-\sin^۲\alpha$.

$$\cos^۲\alpha-\cos^۲\beta=\sin^۲\beta-\sin^۲\alpha \Leftrightarrow \cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha=\sin^۲\beta+\cos^۲\beta \Leftrightarrow ۱=۱$$ همیشه درست

۱۹- برای هر زاویه ی دلخواه x ثابت کنید $\sin x\cos x\le\frac{۱}{۲}$.

$$\sin x\cos x\le\frac{۱}{۲} \overset{\times۲}{\Longleftrightarrow} ۲\sin x\cos x\le ۱ \overset{۱=\sin^۲x+\cos^۲x}{\Longleftrightarrow} ۲\sin x\cos x\le\sin^۲x+\cos^۲x$$

$$\Leftrightarrow ۰\le\sin^۲x+\cos^۲x-۲\sin x\cos x \Leftrightarrow ۰\le(\sin x-\cos x)^۲$$ همیشه درست

۲۰- برای هر زاویه ی دلخواه x ثابت کنید $-\frac{۱}{۲}\le\sin x\cos x\le\frac{۱}{۲}$.

سوال قبل با استفاده از مثلثات ریاضی ۱ ثابت شد و برای تنوع این سوال را با استفاده از رابطه ی $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ واقع در حسابان ۱ ، اثبات می کنیم.

$$-\frac{۱}{۲}\le\sin x\cos x\le\frac{۱}{۲} \overset{\times۲}{\Longleftrightarrow} -۱\le۲\sin x\cos x\le ۱ \overset{\sin۲x=۲\sin x\cos x}{\Longleftrightarrow} -۱\le\sin ۲x\le ۱$$ همیشه درست

۲۱- با فرض $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ ، نشان دهید $\tan x + \cot x \ge ۲$.

با توجه به فرض $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ می دانیم $\tan x > ۰$ است . بنابراین :

$$\tan x + \cot x \ge ۲ \overset{\times \tan x}{\Longleftrightarrow} \tan^۲ x + \underbrace{\tan x . \cot x}_{۱} \ge ۲\tan x \Leftrightarrow \tan^۲ x + ۱ - ۲\tan x \ge ۰ \Leftrightarrow (\tan x - ۱)^۲ \ge ۰$$ همیشه درست

۲۲- برای هر زاویه دلخواه x ثابت کنید $\sin^۴ x + \cos^۴ x = ۱ - ۲\sin^۲ x \cos^۲ x$.

$$\sin^۴ x + \cos^۴ x = ۱ - ۲\sin^۲ x \cos^۲ x \Leftrightarrow \sin^۴ x + \cos^۴ x + ۲\sin^۲ x \cos^۲ x = ۱ \Leftrightarrow (\sin^۲ x + \cos^۲ x)^۲ = ۱ \Leftrightarrow (۱)^۲ = ۱$$ همیشه درست

۲۳- با فرض اینکه زاویه x زاویه ای قابل تعریف در تساوی های زیر باشد ، صحت این تساوی ها را ثابت کنید .

الف) $\frac{\cos x}{۱ + \sin x} = \frac{۱ - \sin x}{\cos x}$

$$\frac{\cos x}{۱ + \sin x} = \frac{۱ - \sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x \times \cos x = (۱ - \sin x)(۱ + \sin x) \Leftrightarrow \cos^۲ x = ۱ - \sin^۲ x \Leftrightarrow \cos^۲ x + \sin^۲ x = ۱$$ همیشه درست

ب) $\frac{\sin x - \cos x + ۱}{\sin x + \cos x - ۱} = \frac{\sin x + ۱}{\cos x}$

$$\frac{\sin x - \cos x + ۱}{\sin x + \cos x - ۱} = \frac{\sin x + ۱}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x (\sin x - \cos x + ۱) = (\sin x + ۱)(\sin x + \cos x - ۱)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\cos x \sin x} - \cos^۲ x + \cancel{\cos x} = \sin^۲ x + \cancel{\sin x \cos x} \cancel{- \sin x} + \cancel{\sin x} + \cancel{\cos x} - ۱ \Leftrightarrow ۱ = \sin^۲ x + \cos^۲ x$$ همیشه درست

پ) $\frac{۱ + \tan^۴ x}{\tan^۲ x + \cot^۲ x} = \tan^۲ x$

$$\frac{۱ + \tan^۴ x}{\tan^۲ x + \cot^۲ x} = \tan^۲ x \Leftrightarrow \tan^۲ x (\tan^۲ x + \cot^۲ x) = ۱ + \tan^۴ x$$

$$\Leftrightarrow \tan^۴ x + \underbrace{\tan^۲ x \cot^۲ x}_{۱} = ۱ + \tan^۴ x \Leftrightarrow ۱ + \tan^۴ x = ۱ + \tan^۴ x$$ همیشه درست

ت) $\frac{۱ + \tan x + \tan^۲ x}{۱ + \cot x + \cot^۲ x} = \tan^۲ x$

$$\frac{۱ + \tan x + \tan^۲ x}{۱ + \cot x + \cot^۲ x} = \tan^۲ x \Leftrightarrow \tan^۲ x (۱ + \cot x + \cot^۲ x) = ۱ + \tan x + \tan^۲ x$$

$$\Leftrightarrow \tan^۲ x + \underbrace{\tan^۲ x \cot x}_{۱ \times \tan x} + \underbrace{\tan^۲ x \cot^۲ x}_{۱} = ۱ + \tan x + \tan^۲ x \Leftrightarrow \tan^۲ x + \tan x + ۱ = ۱ + \tan x + \tan^۲ x$$ همیشه درست

مسائل زیر فراتر از سطح کلاس های معمول بوده و برای دانش آموزان علاقه مند پیشنهاد می شود

۱- فرض کنید a مثبت باشد ، نشان دهید : $a^{2}+\frac{2}{a}\geq 3$.

$a^{2}+\frac{2}{a}\geq 3 \overset{\times a}{\Leftrightarrow} a^{3}+2\geq 3a \Leftrightarrow a^{3}-3a+2\geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^{2}(a+2)\geq 0$ با توجه به مثبت بودن عدد a، نابرابری اخیر همیشه درست است

۲- برای هر دو عدد حقیقی a و b نشان دهید $a^{2}+4b^{2}+a+8b+10>0$.

$a^{2}+4b^{2}+a+8b+10>0 \overset{10=4+\frac{1}{4}+\frac{23}{4}}{\Leftrightarrow} (a^{2}+a+\frac{1}{4})+(4b^{2}+8b+4)+\frac{23}{4}>0 \Leftrightarrow (a+\frac{1}{2})^{2}+4(b+1)^{2}+\frac{23}{4}>0$ همیشه درست

۳- فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند ، که $x>y>0$ ، ثابت کنید $\frac{x^{4}-y^{4}}{4y^{3}}>x-y>\frac{x^{4}-y^{4}}{4x^{3}}$.

ابتدا نابرابری سمت چپ را ثابت می کنیم :

$\frac{x^{4}-y^{4}}{4y^{3}}>x-y \Leftrightarrow x^{4}-y^{4}>4y^{3}(x-y) \Leftrightarrow \cancel{(x-y)}(x^{3}+x^{2}y+xy^{2}+y^{3})>4y^{3}\cancel{(x-y)}$

$\Leftrightarrow x^{3}+x^{2}y+xy^{2}+\cancel{y^{3}}>y^{3}+y^{3}+y^{3}+\cancel{y^{3}} \Leftrightarrow \left(x^{3}-y^{3}\right)+\left(x^{2}y-y^{3}\right)+\left(xy^{2}-y^{3}\right)>0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x^{3}-y^{3}\right)}_{+}+y\underbrace{\left(x^{2}-y^{2}\right)}_{+}+y^{2}\underbrace{(x-y)}_{+}>0$ همیشه درست

نابرابری سمت راست نیز به طریق مشابه ثابت می شود .

۴- اگر اعداد حقیقی a ، b و c در شرط $a^{2}+b^{2}+c^{2}=1$ صدق کنند ، ثابت کنید : $-\frac{1}{2}\leq ab+bc+ca\leq 1$.

ابتدا نابرابری سمت راست را ثابت می کنیم:

$ab+bc+ca\leq 1 \overset{1=a^{2}+b^{2}+c^{2}}{\Leftrightarrow} ab+bc+ca\leq a^{2}+b^{2}+c^{2}$

$\overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2ab+2bc+2ca\leq 2a^{2}+2b^{2}+2c^{2} \Leftrightarrow 0\leq a^{2}+a^{2}+b^{2}+b^{2}+c^{2}+c^{2}-2ab-2bc-2ca$

$\Leftrightarrow 0\leq (a-b)^{2}+(a-c)^{2}+(b-c)^{2}$ همیشه درست

حال نابرابری سمت چپ را ثابت می کنیم :

$-\frac{1}{2}\leq ab+bc+ca \overset{\times(-2)}{\Leftrightarrow} 1\geq -2ab-2bc-2ca \overset{1=a^{2}+b^{2}+c^{2}}{\Leftrightarrow} a^{2}+b^{2}+c^{2}\geq -2ab-2bc-2ca$

$\Leftrightarrow a^{2}+b^{2}+c^{2}+2ab+2bc+2ca\geq 0 \Leftrightarrow (a+b+c)^{2}\geq 0$ همیشه درست

۵- با فرض مثبت بودن اعداد حقیقی a ، b و c و اینکه $b+c>a$ ثابت کنید : $\frac{a}{1+a}<\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$.

$\frac{a}{1+a}<\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c} \Leftrightarrow \frac{a}{1+a}<\frac{b+2bc+c}{1+b+c+bc} \Leftrightarrow a+\cancel{ab}+\cancel{ac}+abc<b+2bc+c+\cancel{ab}+2abc+\cancel{ac}$

$\Leftrightarrow abc+2bc+(b+c-a)>0$

نابرابری اخیر با توجه به مثبت بودن اعداد حقیقی مسئله و فرض $b+c>a$ ، همیشه درست است .

۶- اگر $c>0$ و b و a ، نشان دهید : $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\ge a+b+c$.

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\ge a+b+c \overset{\times abc}{\Leftrightarrow} b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2\ge a^2bc+b^2ac+c^2ab$$

$$\overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2b^2c^2+2a^2c^2+2a^2b^2\ge 2a^2bc+2b^2ac+2c^2ab$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2+b^2c^2+a^2c^2+a^2c^2+a^2b^2+a^2b^2-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab\ge 0$$

$\Leftrightarrow (bc-ac)^2+(bc-ab)^2+(ac-ab)^2\ge 0$ همیشه درست

۷- با فرض $0<a<b$ و $n>0$ ثابت کنید $\frac{a}{b}<\frac{a+n}{b+n}<1$.

ابتدا نابرابری سمت چپ را ثابت می کنیم :

$\frac{a}{b}<\frac{a+n}{b+n}\Leftrightarrow \frac{a+n}{b+n}-\frac{a}{b}>0\Leftrightarrow \frac{\cancel{ab}+nb-\cancel{ab}-an}{b(b+n)}>0\Leftrightarrow \frac{n(b-a)}{b(b+n)}>0$ با توجه به فرضیات مسئله ، همیشه درست است

حال نابرابری سمت راست را ثابت می کنیم :

$\frac{a+n}{b+n}<1\Leftrightarrow \frac{a+n}{b+n}-1<0\Leftrightarrow \frac{a-b}{b+n}<0$ با توجه به فرضیات مسئله ، همیشه درست است

۸- اگر a ، b و c طول اضلاع مثلث باشند ، نشان دهید : $3(ab+bc+ca)\le (a+b+c)^2\le 4(ab+bc+ca)$.

ابتدا نابرابری سمت چپ را ثابت می کنیم :

$$3(ab+bc+ca)\le (a+b+c)^2 \Leftrightarrow 3ab+3bc+3ca\le a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\ge 0 \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2-2ab-2ac-2bc\ge 0$$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$ همیشه درست

حال نابرابری سمت راست را ثابت می کنیم :

$$(a+b+c)^2\le 4(ab+bc+ca)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\le 4ab+4bc+4ca$$

$$\Leftrightarrow -a^2-b^2-c^2+2ab+2ac+2bc\ge 0\Leftrightarrow -a^2-b^2-c^2+ab+ab+ac+ac+bc+bc\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(ab+ac-a^2\right)+\left(ab+bc-b^2\right)+\left(ac+bc-c^2\right)\ge 0$$

$\Leftrightarrow a\underbrace{\left(b+c-a\right)}_{+}+b\underbrace{\left(a+c-b\right)}_{+}+c\underbrace{\left(a+b-c\right)}_{+}\ge 0$ با توجه به نامساوی مثلثی ، همیشه درست است

۹- برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b و c نشان دهید $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$.

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc \overset{\text{ضرب پرانتزها}}{\Leftrightarrow} a^2b+a^2c+ab^2+abc+abc+ac^2+b^2c+bc^2\ge \overbrace{2abc+2abc+2abc+2abc}^{8abc}$$

$$\Leftrightarrow a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2-2abc-2abc-2abc\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2b+bc^2-2abc)+(a^2c+b^2c-2abc)+(ab^2+ac^2-2abc)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow b(a^2+c^2-2ac)+c(a^2+b^2-2ab)+a(b^2+c^2-2bc)\ge 0$$

$\Leftrightarrow b(a-c)^2+c(a-b)^2+a(b-c)^2\ge 0$ با توجه به مثبت بودن a و b و c همیشه درست است

امیدوارم نمونه مسائل مطرح شده مورد پسند علاقه مندان واقع شده باشد .

عزیزان هزینه تهیه این فایل مشتمل بر **قرائت صلواتی جهت سلامتی آقا امام زمان عج** فراموش نشود .

با سپاس فراوان : افشین ملاسعیدی -آبادان