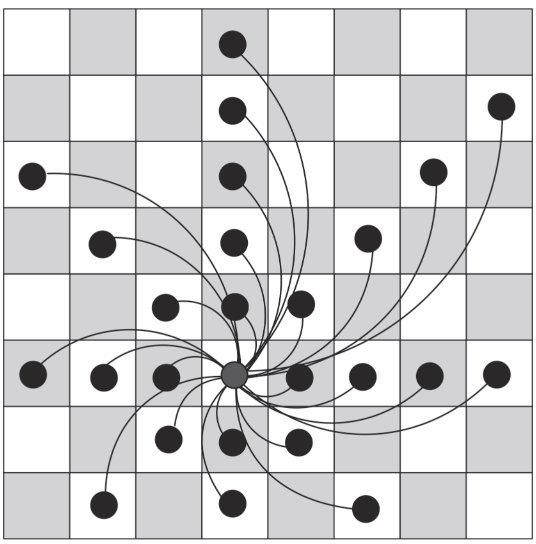
محمود نصیری

احاطه‌گری Domination (dominant)

در بازی شطرنج، غالب‌ترین مهره وزیر است. این مهره وزیر می‌تواند به هر تعداد دفعه روی مربع‌ها به طور افقی یا عمودی یا قطری حرکت کند. این انواع حرکت‌ها در شکل زیر نشان داده شده است.

با وجود این، یک وزیر از جایی که قرار گرفته با یک حرکت ساده نمی‌تواند به مربع دیگری از صفحه شطرنج برسد.

در شکل زیر یک مهره وزیر در خانه‌ای که قرار گرفته می‌تواند در حرکت بعدی به هر یک از خانه‌هایی که با دایره سیاه شده نشان داده شده است قرار گیرد، به عبارتی این وزیر بر تمام این خانه‌های مشخص شده تسلط دارد، یا می‌تواند آن‌ها را احاطه کند.



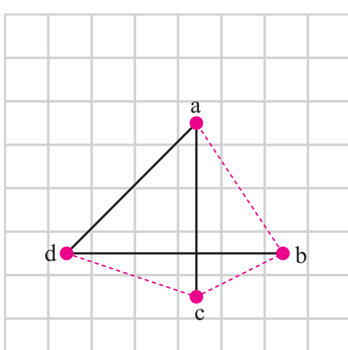
پس هر جابه‌جایی وزیر از خانه‌ای که قرار گرفته به هر خانه‌ای که با دایره سیاه مشخص شده یک حرکت مهره وزیر نامیده می‌شود.

در سال ۱۸۶۲ «کارل فردینالد دی جنیش» پرسشی به صورت زیر مطرح کرد؛

تعداد کم‌ترین مهره وزیر روی صفحه شطرنج را تعیین کنید به طوری که، مطمئن باشیم هر مربعی مورد حمله حداقل یک وزیر قرار گیرد

به عنوان روشی برای حل مسأله گراف زیر را می‌توانیم رسم کنیم.

هر مربع صفحه شطرنجی را به عنوان رأس یک گراف در نظر می‌گیریم پس گرافی با ۶۴ رأس داریم.

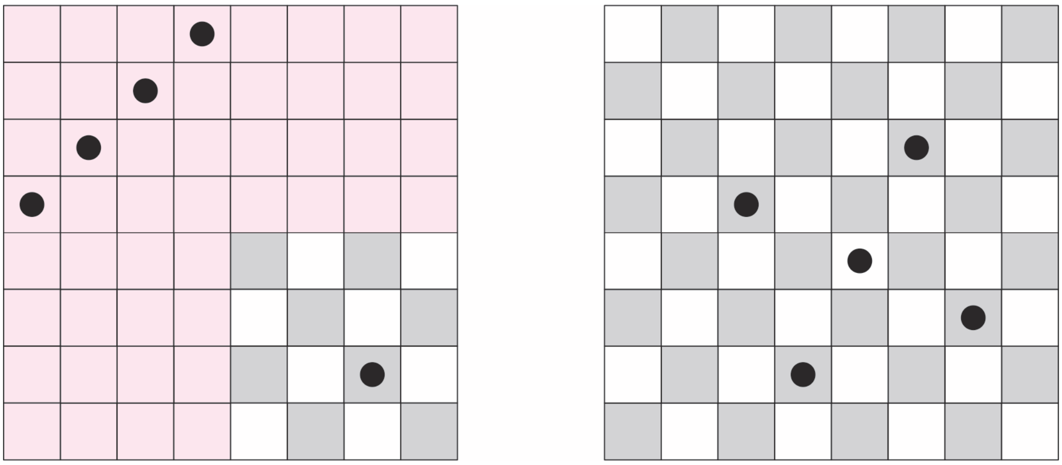


در این گراف دو رأس را مجاور می‌نامیم، اگر و فقط اگر مربع‌های متناظر آن دو با یک حرکت مهره وزیر بتوانند دوبه‌دو به هم متصل شوند.

مثلاً در شکل رأس‌های a و d همچنین رأس‌های a و c و رأس‌های b و d مجاوراند. این رأس‌ها به ترتیب با حرکت‌های قطری، قائم و افقی به هم مربوط‌اند. اما رأس‌های a و b یا b و c و همچنین c و d مجاور نیستند.

هر رأس را که مجاور یک رأس باشد گوییم می‌تواند به وسیله آن رأس احاطه شود. هر رأس نیز توسط خودش می‌تواند احاطه شود. در شکل‌های بعدی دو نمونه را مشاهده می‌کنید که با انتخاب ۵ رأس که آن‌ها با مهره‌ها مشخص شده‌اند، هر رأس گرافی که متناظر خانه‌های شطرنج است، حداقل با یکی از این پنج رأس مجاور است. بنابراین یک کران بالا برای پاسخ به پرسش **جنیش** به‌دست می‌آید.

در شکل زیر با پنج مهره نشان داده شده، می‌توان تمام خانه‌های شطرنج را مورد حمله قرار داد، آن را تحقیق کنید، نمونه دیگری را در شکل بعدی مشاهده می‌کنید آن را با پاسخ داده شده مقایسه کنید.



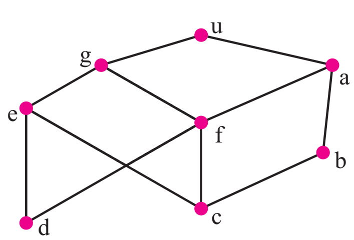
در شکل زیر مشاهده می‌کنید که هر خانه مورد حمله چه مهره‌هایی می‌تواند واقع شود پنج مهره وزیر را بـه a ، b، c، d و e نشان داده‌ایم.

c	b	e	ad	c	de	b	d
e	c	be	a	ced	d	db	c
d	ed	cde	bade	cd	d	dbc	da
ae	e	e	cae	bced	dec	abed	e
c	eac	ce	caed	c	cadb	bc	bcd
eb	b	eabd	abc	cabe	dbc	b	b
a	ad	eac	a	ac	daeb	abc	ab
d	c	ea	a	abc	d	be	c

آیا در این شکل می‌تواند وزیری مورد حمله وزیر دیگـری قرار گیرد؟

ایستگاه‌های رادیویی — Transmitting (Radio) Stations

فرض کنیم ۸ شهر مطابق شکل قرار دارند، مـی‌خـواهیم ایسـتگاه‌هـایی رادیویی در بعضی از این شهرها بسازیم. هـر شـهر مـی‌توانـد از شـهر همسایه یا مجاور خود مطابق شکل استفاده کند حـداقل ایسـتگاه‌هـای ساخته شده چقدر است؟



مطابق شکل اگر ایستگاه‌ها در شهرهای a و e ساخته شوند تمام شهرهای مجاور را پوشـش مـی‌دهنـد. شـهرهای u، b و f و خـود a توسط شهر a پوشش داده می‌شوند یا احاطه می‌شوند به همـین ترتیـب شـهرهای g، c و d همچنـین خـود e توسـط شـهر e احاطـه

می‌شوند یا در بیان این مسأله، پوشش داده می‌شوند. اگر $V=\{a,b,c,d,e,f,g,u\}$ را مجموعه رأس‌های یک گراف در نظر بگیریم، مجموعه رأس‌های $S=\{a,e\}$ طوری است که هر رأس V مجاور رأسی از S است. چنین ویژگی هدف تعریف‌های بعدی است.

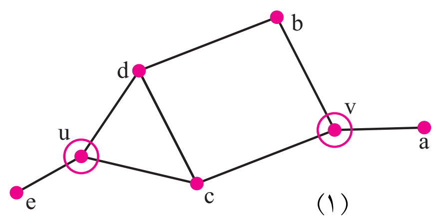
مطالعه مجموعه‌های احاطر در گراف‌ها در سال ۱۹۵۸ توسط برگ (Beege) و در سال ۱۹۶۲ توسط (Ore) به‌طور مستقل شروع شد.

مجموعه‌های احاطه‌گر Domination Set

فرض کنیم G گرافی با مجموعه رأس‌های V و مجموعه یال‌های E باشد، رأس v از G را مجاور رأس a از G نامیدیم هرگاه یالی از v به a وجود داشته باشد، یعنی یال va متعلق به E(G) باشد.

وقتی یک رأس v از گراف G مجاور رأس یا رأس‌هایی از G است گوییم رأس v، خودش و این رأس‌های مجاور را احاطه می‌کند.

بنابراین؛ گوییم یک رأس u از گراف G توسط رأس v از G احاطه می‌شود هرگاه $u=v$ یا $uv\in E(G)$، یعنی یالی از u به v رسم شده باشد.



حال می‌خواهیم این مفهوم احاطه شدن را برای کلاً یک زیرمجموعه از مجموعه رأس‌های گراف G تعریف کنیم.

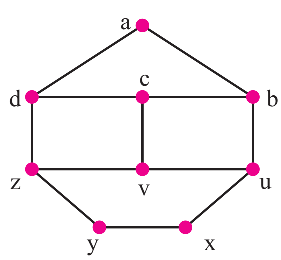
در شکل یک گراف G با مجموعه رأس‌های $V=\{a,b,c,d,e,u,v\}$ مفروض است.

رأس‌های a، b، c و v بنا بر آن‌چه که بیان کردیم هر کدام مجاور رأس v یا منطبق بر v هستند، پس رأس v خودش و سه رأس a، b و c را احاطه کرده است، به همین ترتیب رأس u سه رأس c، d و e و خود u را احاطه کرده است. اگر $S=\{v,u\}$ را در نظر بگیریم، مشاهده می‌کنیم که هر رأس گراف G که انتخاب کنیم یا متعلق به S است یا مجاور رأسی از G است، یعنی تمام عضوهای S، عضوهای V را احاطه کرده‌اند پس تعریف زیر را داریم؛

تعریف: **فرض کنیم V مجموعه رأس‌های گراف G و S زیرمجموعه‌ای از V باشد، در این صورت $S\subseteq V$ را یک مجموعه احاطه‌گر G می‌نامیم هرگاه هر رأس گراف G یا متعلق به S باشد یا حداقل با یکی از رأس‌های S مجاور باشد.**

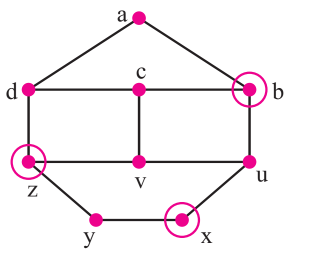
اگر دوباره به مثال قبلی برگردیم که $S=\{v,u\}$ آن‌گاه، $V-S=\{a,b,c,d,e\}$، حال اگر هر رأسی از $V-S$ را در نظر بگیریم مجاور رأسی از S است. پس تمام رأس‌های $V-S$ توسط رأس‌های S احاطه می‌شوند، خود رأس‌های S نیز طبق تعریف خودشان را احاطه می‌کنند. بنابراین می‌توانیم تعریف مجموعه احاطه‌گر را به صورت زیر نیز بیان کنیم؛

اگر V مجموعه رأس‌های گراف G و $S\subseteq V$، در این صورت S را یک مجموعه احاطه‌گر گراف G می‌نامند هرگاه هر رأس $V-S$ حداقل مجاور یک رأس S باشد.



بنابراین تعریف، $S=\{v,u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر گراف G در مثال قبلی یعنی شکل (۱) است. وقتی رأس v یک رأس احاطه‌گر باشد آن را با نماد ⊙ نشان می‌دهیم تا از سایر رأس‌های مجاور متمایز باشد.

مثال: در گراف G رسم شده یک مجموعه احاطه‌گر پیدا کنید.



پاسخ: باید رأس‌هایی را انتخاب کنیم که رأس‌هایی در مجاور آن باشند معمولاً رأسی را انتخاب می‌کنیم که رأس‌های بیش‌تری مجاور آن باشند، مثلاً رأس b می‌تواند خودش و رأس‌های a، c و u را احاطه کند. به همین ترتیب رأس z، خودش و سه رأس d، v و y را احاطه می‌کند، اما مشاهده می‌کنیم که رأس x از G توسط هیچ‌کدام از این دو رأس احاطه نمی‌شوند پس خود رأس x باید خودش را احاطه کند در نتیجه، $S=\{b,z,x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر گراف G است.

آیا هر رأس از $V-S$ مجاور حداقل یک رأس S است؟

اگر هر عضو V از مجموعه رأس‌های V در گراف G انتخاب کنیم یا متعلق به S است یا مجاور رأسی از S است. آیا $S=\{d,u,y\}$ هم یک مجموعه احاطه‌گر G است چرا؟

آیا می‌توانید مجموعه‌ای با دو عضو پیدا کنید که یک مجموعه احاطه‌گر G باشد؟ چرا؟

این گراف از مرتبه ۹ است و بزرگ‌ترین درجه در آن ۳ است. اگر یک مجموعه احاطه‌گر دو عضوی داشته باشد حداکثر می‌تواند $۸=۲\times۴$ رأس G را احاطه کند چرا؟

پس یک رأس G باقی می‌ماند. در نتیجه نمی‌تواند مجموعه احاطه‌گر دو عضوی داشته باشد.

همسایگی‌های باز و بسته یک رأس و مجموعه احاطه‌گر Open and Closed Neighborhood

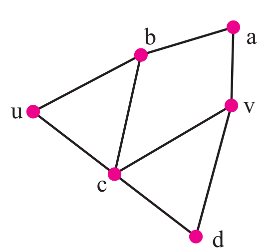
یادآوری می‌کنیم که در یک گراف رأس v را مجاور رأس u گوییم هرگاه u و v با یالی به هم متصل شده باشند. اکنون با توجه به مفهوم رأس مجاور یک رأس، مفهومی به نام همسایگی را تعریف می‌کنیم.

> **تعریف:** مجموعه همه رأس‌های مجاور یک رأس v از گراف G را یک همسایگی باز v می‌نامیم و به $N(v)$ نشان می‌دهیم.
>
> تعداد عضوهای همسایگی باز v را به $|N(v)|$ نشان می‌دهیم.

واضح است که $|N(v)|=\deg(v)$.

> $N(v)\cup\{v\}$ را یک همسایگی بسته v می‌نامیم و به $N[v]$ نشان می‌دهیم. $|N(v)|=۱+\deg(v)$
>
> اگر V مجموعه رأس‌های گراف G باشد و $S\subseteq V$، آن‌گاه $N(S)=\bigcup\limits_{v\in S}N(v)$، مجموعه همسایگی باز مجموعه S است.
>
> همچنین، $N[S]=N(S)\cup S$ همسایگی بسته مجموعه S است.

در گراف شکل مقابل، اگر:



$S=\{u,v\}$

$N(v)=\{a,c,d\}$ ، $N[v]=\{v,a,c,d\}$

$N(u) = \{b,c\}$ ، $N[u] = \{u,b,c\}$

$N(S) = N(v) \cup N(u) = \{a,c,d,b\}$

$N[S] = N(S) \cup S = \{a,c,d,b,u,v\} = V$

زیرمجموعه‌هایی مانند S از V را که در آن‌ها $N[S] = V$ اهمیت بیش‌تری دارند و موضوع بحث بعدی است.

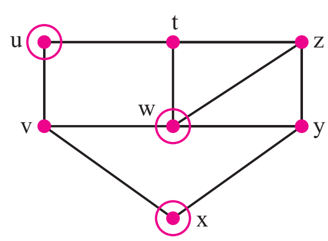
وقتی رأس‌هایی از یک گراف G همسایگی بسته رأس v هستند گوییم رأس v این رأس‌ها را احاطه می‌کند، یعنی یک رأس v از G، خودش و هر همسایگی‌اش را احاطه می‌کند. به عبارت دیگر؛

رأس v از گراف G، $N[v]$ یعنی همسایگی‌های بسته خودش را احاطه می‌کند. در این صورت رأس v، $۱+\deg(v)$ رأس G را احاطه می‌کند.

حال اگر S زیرمجموعه‌ای از V، مجموعه رأس‌های یک گراف G باشد و عضوهای S بتوانند تمام رأس‌های G یعنی V را احاطه کنند آن‌گاه S را یک مجموعه احاطه‌گر G است.

بنابراین تعریف زیر را داریم؛

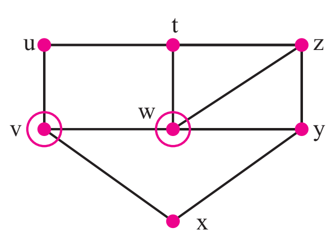
$S \subseteq V(G)$ یک مجموعه احاطه‌گر G است اگر و فقط اگر؛ $N[S] = V$



مثال: در شکل $S_۱ = \{w,u,x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر G است.

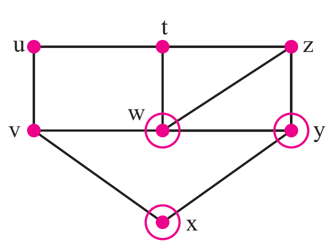
$$N[S_۱] = N[u] \cup N[w] \cup N[x] = \{u,t,v\} \cup \{w,v,t,z,y\} \cup \{x,v,y\} = V$$

$$|S_۱| = ۳$$



در همین مثال، $S_۲ = \{v,w\}$ نیز یک مجموعه احاطه‌گر است که $|S_۲| = ۲$،

$$N[S_۲] = N[v] \cup N[w] = \{v,u,w,x\} \cup \{w,t,z,y\} = V$$



در این شکل $S_۳ = \{x,y,w\}$ یک مجموعه احاطه‌گر نمی‌باشد، زیرا رأس u مجاور هیچ رأسی از رأس‌های $S_۳$ نمی‌باشد.

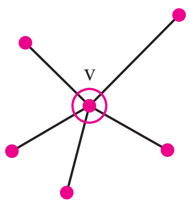
$$N[S_۲] = N[x] \cup N[y] \cup N[w] = \{x,v,y,w,z,t\} \neq V$$

مشاهده می‌کنید که $N[S_۲]$ برابر V نمی‌باشد پس نمی‌تواند مجموعه احاطه‌گر G باشد.

چند ویژگی

۱. رأس‌های مجموعه V خودش یک مجموعه احاطه‌گر G است. بنابراین مجموعه احاطه‌گری برای هر گراف تعریف می‌شود.

۲. اگر S و T دو مجموعه از رأس‌های گراف G باشند به طوری که $S \subseteq T$. اگر S یک مجموعه احاطه‌گر G باشد، آن‌گاه T نیز یک مجموعه احاطه‌گر G است.

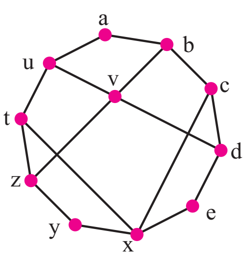


۳. فرض کنیم $v \in V$ رأسی از گراف G از مرتبه n باشد، در این صورت $\{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر G است، اگر و فقط اگر $\deg(v) = n - ۱$.

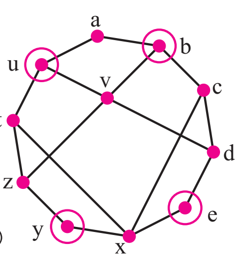
۴. اگر درجه هر رأس گراف G برابر k باشد، $k = \deg(v)$ آن‌گاه هر رأس گراف می‌تواند $k+۱$ رأس گراف G را احاطه کند.

مجموعه احاطه‌گر مینیمم و عدد احاطه‌گری Minimum dominating set and domination number

پیدا کردن مجموعه احاطه‌گر ماکسیمم جذابیتی ندارد، زیرا خود V یک مجموعه احاطه‌گر خودش است که بیش‌ترین تعداد عضو را دارد، اما مجموعه احاطه‌گر مینیمم مهم است.

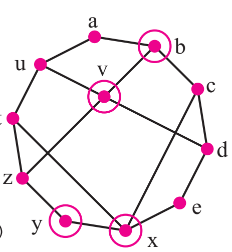


مثال: گراف G از مرتبه ۱۱ مطابق شکل است. مجموعه‌های احاطه‌گری برای G پیدا کنید.



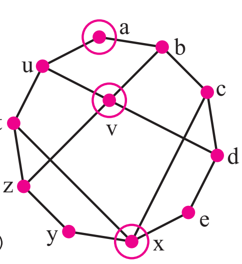
(۱)

پاسخ: در شکل (۱) مجموعه $S_۱ = \{b, e, y, u\}$ یک زیرمجموعه V است که یک مجموعه احاطه‌گر برای G با چهار عضو است.



(۲)

در شکل (۲) $S_۲ = \{b, v, x, y\}$ نیز یک مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی برای G است آیا می‌توانید یک مجموعه احاطه‌گر با تعداد عضو کم‌تر برای G پیدا کنید؟



(۳)

با کمی دقت مشاهده می‌کنید که در شکل (۳)، $S_۳ = \{a, v, x\}$ نیز یک مجموعه احاطه‌گر سه عضوی برای گراف G است. آیا مجموعه احاطه‌گری با کم‌تر از ۳ عضو می‌توانید برای G پیدا کنید؟

به طور شهودی شاید پاسخ شما منفی باشد، آیا می‌توانید با یک استدلال منطقی نشان دهید که مجموعه احاطه‌گری با کم‌تر از ۳ عضـو برای G وجود ندارد؟

فرض کنید بتوان گراف G را با یک مجموعه ۲ عضوی از رأس‌های V احاطه کـرد ایـن دو رأس را p و q مـی‌نـامیم چـون هـر رأس $۱+\deg(p)$ رأس را احاطه مـی‌کنـد، پـس ایـن دو رأس حـداکثر $۱+\deg(p)+۱+\deg(q)=۲+\deg(p)+\deg(q)$ رأس V را احاطـه می‌کنند، اما ماکسیمم درجه در این گراف $\Delta(G)=۴$ است پس

$$۲+\deg(p)+\deg(q)\le ۲+۴+۴=۱۰$$

پس حداکثر این دو رأس می‌توانند ۱۰ رأس V را احاطه کنند، اما گراف G از مرتبه ۱۱ است، در نتیجه لااقل یک رأس آن به وسیله هیچ رأسی از G احاطه نمی‌شود. پس با هیچ مجموعه دو عضوی از رأس‌های G نمی‌توان این گراف را احاطه کرد.

در نتیجه گوییم $S_۳=\{a,v,x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر با کم‌ترین عضو یا مینیمم برای گراف G است. در نتیجه تعریف زیر را داریم؛

تعریف: **یک مجموعه احاطه‌گر گراف G را مجموعه احاطه‌گر مینیمم مـی‌نـامیم هرگـاه در بـین مجموعـه‌هـای احاطه‌گر G کم‌ترین عضو را داشته باشد. تعداد عضوهای این مجموعه احاطه‌گر مینـیمم را عـدد احاطـه‌گـری گراف G می‌نامیم و به $\gamma(G)$ آن را نشان می‌دهیم.**

$\gamma(G)$ را $\gamma-$ مجموعه نیز می‌نامند.

اگر S_i هر مجموعه احاطه‌گر گراف G باشد آن‌گاه، $\gamma(G)=\text{Min}\left\{|S_i| \;\middle|\; S_i \text{ یک مجموعه احاطه‌گر است}\right\}$.

به عبارت دیگر، یک مجموعه احاطه‌گر S از G را مینیمم می‌نامند، هرگاه به ازای از مجموعه احاطه‌گر X از G، $|S|\le|X|$.

ویژگی‌ها

۱. چون مجموعه رأس‌های یک گراف همواره یک مجموعه احاطه‌گر خودش است، عدد احاطه‌گری برای هر گراف تعریف می‌شود.

۲. اگر G گراف تهی $\bar{K}_n$ باشد، در این صورت $v(G)$ تنها مجموعه احاطه‌گر G است که مینیمم نیز به حساب می‌آید. یعنـی، در گـراف از مرتبه n ، $\gamma(G)=n$ اگر و فقط اگر G گراف تهی $\bar{K}_n$ باشد.

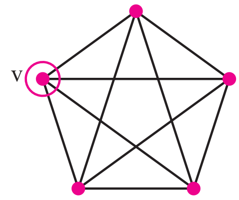
۳. یک گراف G از مرتبه n دارای عدد احاطه‌گری ۱ است اگر و فقط اگر G شامل یک رأس v از درجه $n-۱$ باشد.

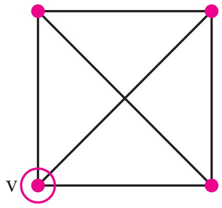
$$G \text{ از مرتبه } n \text{ است} : \gamma(G)=۱ \Leftrightarrow \deg(v)=n-۱$$

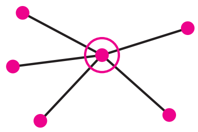
در این حالت $\{v\}$ که $v\in V$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.

نتیجه: **در هر گراف کامل هر رأس می‌تواند یک مجموعه احاطه‌گر گراف باشد. هر رأس به $n-۱$ رأس دیگر متصل است.**

بنابراین، در هر گراف کامل مجموعه احاطه‌گر مینیمم فقط یک عضو دارد، یعنی عدد احاطه‌گری برابر یک است.







اما عکس آن همواره درست نمی‌باشد.

زیرا در هر گرافی از مرتبه n که درجه یک رأس $\mathbf{n-۱}$ باشد، $\boldsymbol{\gamma(G)=۱}$.

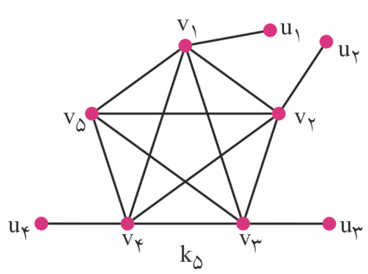
۴ـ اگر G گرافی از مرتبه n باشد همواره به ازای هر عدد صحیح k که $۱\le k\le n$ گرافی وجود دارد که $\gamma(G)=k$

فرض کنیم G گرافی از مرتبه n باشد مجموعه رأس‌های آن را، $V=\{a_۱,a_۲,a_۳,\dots,a_{n-۱},a_n\}$ می‌نامیم. اگر G گراف تهی $\overline{K}_n$ باشد، واضح است که $\gamma(G)=n$. حال اگر فقط یال $a_۱a_۲$ را رسم کنیم، $n-۲$ رأس باقی مانده که همه منفرد هستند، دارای عدد احاطه‌گری $n-۲$ می‌باشد. اکنون $v_۱=\{a_۱,a_۲\}$ دارای عدد احاطه‌گری ۱ است پس در این گراف کلاً عدد احاطه‌گری $\gamma(G)=n-۱$ است. به همین ترتیب اگر یال $a_۳a_۴$ را رسم کنیم $\gamma(G)=n-۲$ خواهد بود و تا $\frac{n}{۲}$ می‌توان ادامه داد. بنابراین تا حالتی که $k\le\frac{n}{۲}$ این عدد مشخص می‌شود. حال اگر $۱\le k\le\frac{n}{۲}$ همواره می‌توان گرافی همبند پیدا کرد که $\gamma(G)=k$ در مثال بعدی آن را دنبال می‌کنیم.

مثال: ثابت کنید برای هر دو عدد صحیح n و k که $۱\le k\le\frac{n}{۲}$ همواره یک گراف همبند از مرتبه n وجود دارد که $\gamma(G)=k$.

پاسخ: گراف کامل K_{n-k} شامل $n-k$ رأس $\{v_۱,v_۲,\dots,v_{n-k}\}$ را رسم می‌کنیم واضح است که $\gamma(K_{n-k})=۱$.

اکنون k رأس جدید، $u_۱,u_۲,\dots,u_k$ را به آن اضافه می‌کنیم پس گراف همبند G از مرتبه n پدید می‌آید، سپس k یال جدید v_iu_i که $۱\le i\le k\le\frac{n}{۲}$ را رسم می‌کنیم پس از همه رأس‌های $u_۱,u_۲,\dots,u_k$ که k رأس K_{n-k} یالی رسم شده است. ممکن است به رأسی از آن یالی متصل نشده باشد، چون $k\le n-k$ چرا؟ پس کافی است مجموعه احاطه‌گر G را همان k رأس از $n-k$ رأس K_{n-k} انتخاب کنیم، در این صورت $\gamma(G)=k$.



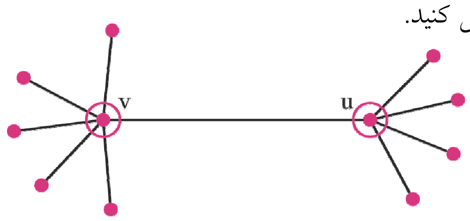
مثال عددی، فرض کنید $n=۹$ و $\frac{n}{۲}<۵$، $۱\le k\le$ پس k هر یک از اعداد ۱,۲,۳,۴ می‌تواند اختیار شود. فرض کنیم $k=۴$ در نظر بگیریم.

پس گراف کامل $K_{۹-۴}=K_۵$ را در نظر می‌گیریم.

$\gamma(K_۵)=۱$. اکنون ۴ رأس $u_۱,u_۲,u_۳,u_۴$ را به گراف $K_۵$ اضافه می‌کنیم. یال‌های $v_۱u_۱,v_۲u_۲,v_۳u_۳,v_۴u_۴$ را رسم می‌کنیم. گراف همبند G از مرتبه ۹ پدید می‌آید که $\gamma(G)=۴$.

مثال: گرافی از مرتبه n، $n\ge۴$ مشخص کنید که در آن $\gamma(G)=۲$.

پاسخ: کافی است دو گراف ستاره‌ای رسم کرده رأس‌های ستاره‌ها را به هم وصل کنید.



$\deg(v)=k-۱$ و $\deg(u)=n-k-۱$

$|N[v]|=k$ و $|N[u]|=n-k$ و $N[v]\cup N[u]=V$

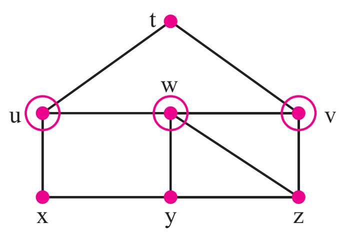
مجموعه احاطه‌گر مینیمال Minimal Dominating Set

فرض کنیم S یک مجموعه احاطه‌گر گراف G باشد.

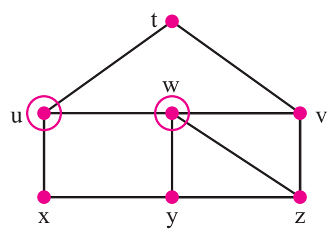
بنابراین، هر رأس G حداقل به وسیله یک رأس S احاطه شده است.

ممکن است رأس‌هایی به وسیله رأسی مانند v از S احاطه شده باشند و در عین حال این رأس‌ها به وسیله رأس دیگری از S نیز احاطه شده باشند. در این حالت نیازی نیست v رأس‌های G را احاطه کند یعنی، $S-\{v\}$ نیز یک مجموعه احاطه‌گر G است.

به عبارت دیگر، رأس V می‌تواند از S حذف شود و مجموعه S باقی‌مانده باز هم یک مجموعه احاطه‌گر باشد.



(۱)



(۲)

در شکل(۱)، $S=\{u,w,v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است اما اگر رأس v را از S حذف کنیم مشاهده می‌کنید که $S_1=S-\{v\}=\{u,w\}$ نیز یک مجموعه احاطه‌گر G است و $S_1\subseteq S$. حتی S_1 یک زیرمجموعه محض S است.

ممکن است در گرافی بتوانیم رأس‌هایی از S، یک مجموعه احاطه‌گر آن را به همین ترتیب حذف کنیم تا مجموعه‌ای مانند S_1 پیدا شود که یک مجموعه احاطه‌گر G باشد.

این بدان معنی نیست که S_1 مجموعه احاطه‌گر مینیمم است. بنابراین تعریف زیر را داریم:

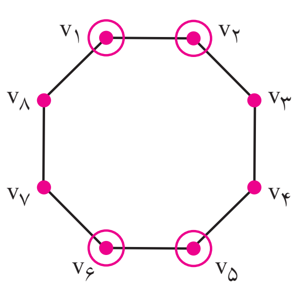
تعریف: **یک مجموعه احاطه‌گر S از گراف G را مینیمال گویند، هرگاه هیچ زیرمجموعه محض S یک مجموعه احاطه‌گر G نباشد. یا به عبارت دیگر یک مجموعه احاطه‌گر، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است هرگاه با حذف هریک از رأس‌های آن دیگر مجموعه احاطه‌گر نباشد.**

هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم، مینیمال است، اما عکس آن در حالت کلی صحیح نمی‌باشد. یعنی ممکن است مجموعه‌ای احاطه‌گر مینیمال باشد اما مجموعه احاطه‌گر مینیمم نباشد.

در شکل گراف دوری C_8 را مشاهده می‌کنید.

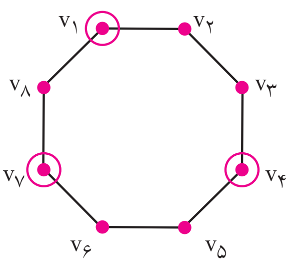
$S=\{v_1,v_2,v_5,v_6\}$ یک مجموعه احاطه‌گر آن است. اگر هر رأسی از S حذف کنیم، مجموعه باقی‌مانده، یک مجموعه احاطه‌گر نخواهد بود.

یعنی، $S=\{v_1,v_2,v_5,v_6\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است آیا فکر می‌کنید S مجموعه احاطه‌گر مینیمم نیز می‌باشد؟



(c_8)

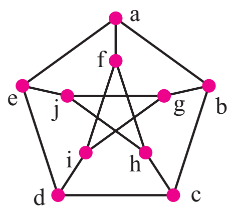
یک رأس v_1 را اختیار کنید، این رأس، رأس‌های v_2 و v_8 را احاطه می‌کند، اکنون به طور دوری در جهت ساعت‌گرد اگر رأس v_4 را به عنوان رأس دوم مجموعه احاطه‌گر انتخاب کنیم رأس‌های v_3 و v_5 را نیز احاطه می‌کند، می‌توانیم با گذشتن از دو رأس دیگر به رأس احاطه‌گر سوم برسیم که رأس v_7 است پس $D=\{v_1,v_4,v_7\}$ یک مجموعه احاطه‌گر سه عضوی این گراف است.



آیا این گراف مجموعه احاطه‌گری با دو عضو نیز دارد؟ چرا؟

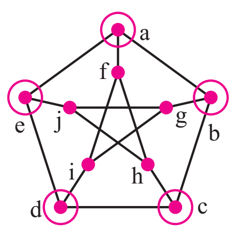
هر رأس از درجه دو است، پس اگر دو رأس احاطه‌گر داشته باشد حداکثر ۶ رأس این گراف را می‌تواند احاطه کند، اما این گراف ۸ رأس دارد پس مجموعه احاطه‌گر دو عضوی نمی‌تواند داشته باشد در نتیجه، $D=\{v_1,v_4,v_7\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم C_8 و البته مینیمال نیز خواهد بود.

مثال: با گراف پترسن (Petersen) که گرافی از مرتبه ۱۰ و سه منتظم است آشنایی دارید.



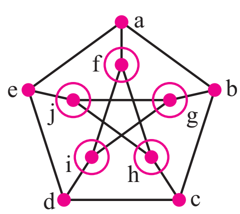
آیا می‌توانید مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال و مینیمم برای آن پیدا کنید؟

پاسخ: مجموعه‌های $A=\{a,b,c,d,e\}$ و $B=\{i,j,h,g,f\}$ هر دو مجموعه‌های احاطه‌گر G می‌باشند.



و در عین حال هر دو، مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال G هستند، اما مینیمم نمی‌باشند.

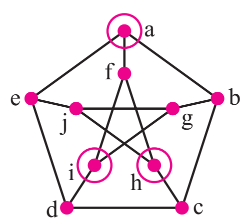
می‌توانید نشان دهید که با حذف رأس a از مجموعه A، $A-\{a\}$ زیرمجموعه محض A است که دیگر مجموعه احاطه‌گر نمی‌باشد، زیرا هیچ رأس $A-\{a\}$ همسایه f نمی‌باشد. به همین ترتیب B، مجموعه احاطه‌گر مینیمال است.



اکنون آیا می‌توانید مجموعه احاطه‌گری با تعداد عضوهای کم‌تر برای گراف P پیدا کنید؟

فرض کنیم این گراف مجموعه احاطه‌گری با k عضو داشته باشد. چون سه منتظم است، پس هر رأس یک مجموعه احاطه‌گر حداکثر می‌تواند $1+3=4$ رأس P را احاطه کند اما گراف پترسن ۱۰ رأس دارد پس $4k \geq 10$ یعنی $k \geq \frac{10}{4}$ که کم‌ترین مقدار آن $k=3$ است.

پس امکان دارد این گراف دارای یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم با عدد احاطه‌گری ۳ باشد. سعی کنید آن را پیدا کنید.

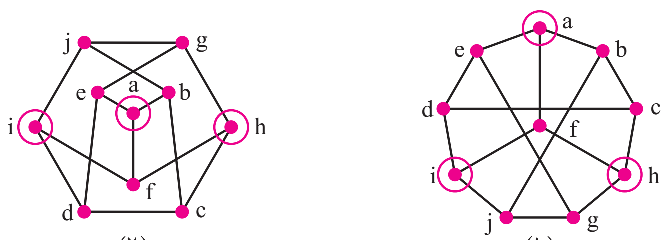


با انتخاب سه رأس a، i و h مشاهده می‌کنیم که $D=\{a,i,h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است و چون $\gamma(p) \geq 3$ پس $\gamma(p)=3$ و D یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم گراف پترسن است.

این گراف را به صورت‌های مقابل نیز می‌توانیم نشان دهیم، که یک‌ریخت با نمودار قبلی است.

در شکل (۱) با استفاده از یک گراف دوری C_9، پیدا کردن مجموعه احاطه‌گر مینیمال ساده‌تر است.

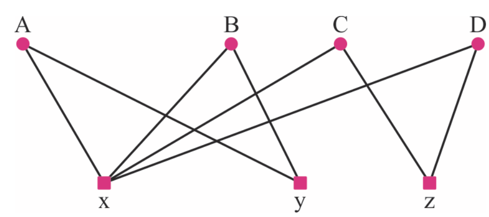
در شکل (۲) نمونه دیگری از گراف پترسن را مشاهده می‌کنید.



(۲) (۱)

گراف‌های دو بخشی و احاطه‌گری Bipartite Graphs

نوعی از گراف‌ها که کاربردهای متعددی نیز دارند، گراف‌هایی هستند که مجموعه رأس‌های آن را به دو مجموعه جدا از هم، قابل تفکیک می‌باشند. فرض کنید رأس‌های x و y و z در یک گراف نشان‌دهنده سه شغل مختلف و رأس‌های A، B، C و D نشان‌دهنده چهار فرد باشند، که هر یک می‌توانند شغل‌هایی را اختیار کنند، مثلاً A و B فقط می‌توانند شغل‌های x، y و C، D فقط می‌توانند شغل‌های x و z را اختیار کنند. می‌توانید نمایش آن را مشاهده کنید.



آن‌چه که در این نوع گراف‌ها اهمیت دارد آن است که مجموعه رأس‌های $V_1=\{A,B,C,D\}$ و $V_2=\{x,y,z\}$ مجزا از هم هستند، یعنی هیچ یالی بین مجموعه رأس‌های V_1 و هم‌چنین هیچ یالی بین مجموعه رأس‌های V_2 وجود ندارد، به این معنی که افراد هیچ ارتباطی با هم ندارند و هم‌چنین شغل‌ها نیز ارتباطی با هم ندارند، در این‌جا ارتباط بین هر فرد و هر شغل مد نظر است. چنین گراف‌هایی را گراف‌های دو بخشی می‌نامند. بنابراین تعریف زیر را داریم:

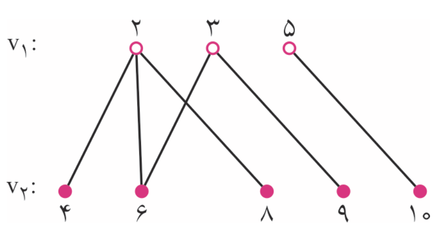
تعریف: یک گراف G حداقل از مرتبه ۲ را یک گراف دو بخشی می‌نامند هرگاه، $V(G)$ مجموعه رأس‌های آن بتواند به دو زیرمجموعه غیرتهی، مجزای V_1 و V_2 افراز شوند به‌طوری که، هر یک از یال‌های G رأسی از V_1 را به رأسی از V_2 وصل کند.

V_1 و V_2 مجموعه‌های بخش و دوتایی (V_1, V_2) دو بخشی نامیده می‌شوند.

ساده‌ترین گراف دو بخشی گراف K_2 است.

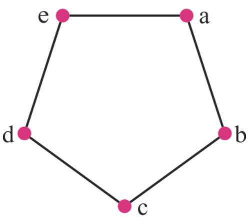
فرض کنیم $V_1=\{2,3,5\}$ و $V_2=\{4,6,8,9,10\}$ اگر G گرافی باشد که

$$V(G)=V_1\cup V_2$$



و $E(G)=\{v_1v_2 \mid v_1\in V_1$ و $v_2\in V_2$ و v_2 بر v_1 بخش‌باشد$\}$

آیا G گراف دو بخشی است؟ آن را رسم کنید.



آیا گراف C_5 را می‌توان به یک گراف دو بخشی تبدیل کرد؟

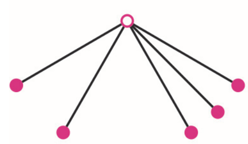
مسلماً پاسخ منفی است، زیرا اگر $a\in V_1$ آن‌گاه باید $b,e\in V_2$ سپس باید $c,d\in V_1$ اما این امکان ندارد، زیرا بین c و d یالی وجود دارد، یا می‌توانیم به‌طور دوری در یک جهت حرکت کنیم، اگر $a\in V_1$ آن‌گاه باید $b\in V_2$ سپس $c\in V_1$ و $d\in V_2$ و بالاخره باید $e\in v_1$ باشد اما a و e_1 هر دو متعلق به V_1 می‌شوند که امکان ندارد، زیرا یالی بین آن دو وجود دارد. به‌طور کلی؛

شرط لازم و کافی برای آن‌که گراف G یک گراف دو بخشی باشد آن است که شامل دور به‌طول فرد نباشد.

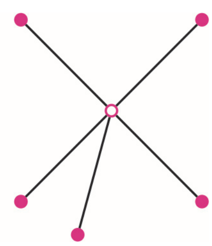
گراف دو بخشی کامل Complete bipartite graph

گراف دو بخشی با بخش‌های (V_1,V_2) را گراف کامل دو بخشی می‌نامند هرگاه هر رأس V_1 مجاور هر رأس V_2 باشد.

اگر $|V_1|=p$ و $|V_2|=q$ آن‌گاه این گراف کامل دو بخشی را به $K_{p,q}$ نشان می‌دهند. مثلاً $K_{1,p}$ یک ستاره است.

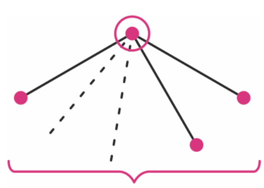


یا



گراف دو بخشی و احاطه‌گری

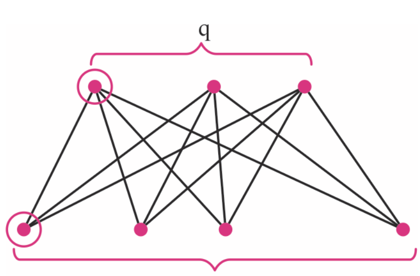
تعیین مجموعه احاطه‌گر و عدد احاطه‌گری در گراف‌های دو بخشی مانند سایر گراف‌ها می‌باشد اما اگر گراف دو بخشی کامل باشد به سادگی مشخص می‌شود.



فرض کنیم G گراف دو بخشی $k_{p,q}$ باشد به‌طوری که $1\le q\le p$.

اگر $q=1$ آن‌گاه، $\gamma(k_{p,q})=1$

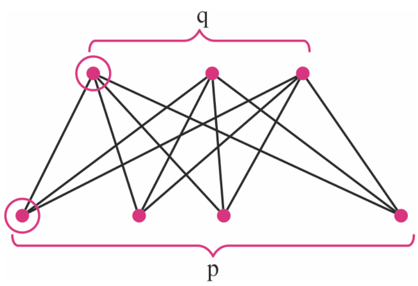
در غیر این‌صورت، $\gamma(k_{p,q})=2$



اگر $p\ge 2$ و $q\ge 2$ کافی است برای انتخاب مجموعه احاطه‌گر فقط یک رأس از مجموعه رأس‌های اولی و یک رأس از مجموعه رأس‌های دومی انتخاب کنیم. بنابراین مجموعه احاطه‌گر مینیمم و حتی مینیمال دو عضوی است.

$$\gamma(k_{p,q})=\begin{cases}1 & \mathrm{Min}(p,q)=1\\ 2 & \min\{p,q\}\ge 2\end{cases}$$

به‌کمک گراف‌های دو بخشی می‌توانیم برای هر گراف مرتبه n که $n \geq ۴$، مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم با $\gamma(G)=۲$ پیدا کنیم که تعداد آن‌ها بیش از دو است.



تعداد این مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم چند تا است؟ فرض کنیم $p > q$.

آیا پاسخ pq درست است؟

ویژگی‌هایی از مجموعه احاطه‌گر مینیمال

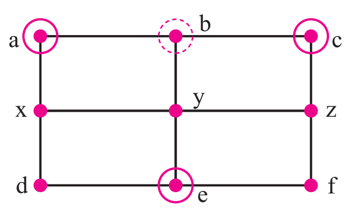
۱. بنا بر تعریف هر مجموعه احاطه‌گر S از G مینیمال نمی‌باشد، هرگاه؛

I. شامل حداقل یک رأس v باشد به طوری که $S-\{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر G باشد،

II. یک زیرمجموعه محض S یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال G باشد.

بنابراین؛ هر مجموعه احاطه‌گر یک گراف را، می‌توان به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد. زیرا اگر مینیمال نباشد با حذف رأس یا بعضی رأس‌ها می‌تواند به مینیمال تبدیل شود. توجه داشته باشید که تعداد رأس‌ها متناهی هستند. در نتیجه؛

۲. هر گراف همواره شامل یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است.



(G)

مثال: گراف G مطابق شکل رسم شده است.

مرتبه گراف ۹ است و ماکسیمم درجه آن ۴ است.

آیا $S=\{a,b,c,e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است؟

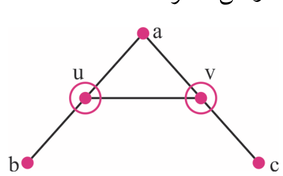
پاسخ: به سادگی مشخص است که پاسخ مثبت است. اکنون آیا S یک مجموعه مینیمال G است؟

زیرمجموعه محض $S'=S-\{b\}=\{a,c,e\}$ از S نیز یک مجموعه احاطه‌گر G است، پس S مینیمال نمی‌باشد. اکنون آیا S' مینیمال است؟ آیا می‌توانید زیرمجموعه‌ای محض از S' پیدا کنید که مجموعه‌ای احاطه‌گر G باشد؟

اگر چنین مجموعه‌ای وجود داشته باشد باید حداکثر دو عضوی باشد.

ماکسیمم درجه در این گراف ۴ است پس این مجموعه دو عضوی حداکثر می‌تواند ۸ عضو از رأس‌های G را احاطه کند و یک رأس باقی می‌ماند. بنابراین در این گراف هیچ مجموعه احاطه‌گر با حداکثر دو عضو وجود ندارد، در نتیجه $\gamma(G) \geq ۳$ و چون $|S'|=۳$ پس S' یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال G است که مینیمم نیز می‌باشد. سعی کنید مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم دیگری برای G پیدا کنید.

اکنون قضیه مهمی را در مورد مجموعه‌های احاطه‌گر بیان می‌کنیم. که در رابطه با گراف‌های بدون رأس منفرد است.



در گراف G که $V=\{a,b,c,u,v\}$ مشاهده می‌کنید که $S=\{u,v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم و در نتیجه مینیمال است. اکنون مجموعه

$S' = V - S = \{a, b, c\}$ مکمل S، را در نظر بگیرید، آیا S' یک مجموعه احاطه‌گر G است؟

به سادگی مشخص است که S' نیز مجموعه احاطه‌گر G است. این اتفاقی نمی‌باشد در حالت کلی نیز درست است، اکنون در قضیه زیر آن را ثابت می‌کنیم.

قضیه: **فرض کنیم G یک گراف با رأس غیرمنفرد باشد ($\delta(G) \geq 1$) اگر S یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال G باشد، آن‌گاه $S' = V - S$ مکمل S، نیز یک مجموعه احاطه‌گر G است که V مجموعه رأس‌های G است.**

اثبات: فرض کنیم $S \subseteq V$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال گراف G باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم $V - S$ یک مجموعه احاطه‌گر Gاست. آن را به برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $V - S$ مجموعه احاطه‌گر G نباشد، چون هر مجموعه احاطه‌گر عضوهای خودش را احاطه می‌کند، پس اگر $V - S$ احاطه‌گر نباشد، رأسی مانند v از S وجود دارد که توسط $V - S$ احاطه نمی‌شود. بنابراین v مجاور هیچ رأسی از $V - S$ نمی‌باشد. اما S یک مجموعه احاطه‌گر G است پس هر رأس $V - S$ مجاور رأسی از S به‌جز v است، یعنی هر رأس $V - S$ توسط رأسی از $S - \{v\}$ احاطه می‌شود. از طرفی طبق فرض v رأس منفرد G نمی‌باشد، هم‌چنین مجاور رأسی از $V - S$ نیز نمی‌باشد پس باید مجاور رأسی از $S - \{v\}$ باشد، یعنی باید v نیز توسط $S - \{v\}$ احاطه شود. در نتیجه باید، $S - \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر G باشد، اما این با مینیمال بودن S متناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و $V - S$ یک مجموعه احاطه‌گر G است.

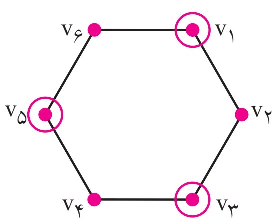
نتیجه: **اگر G گرافی با رأس غیرمنفرد و V مجموعه رأس‌های آن باشد، اگر S مجموعه احاطه‌گر مینیمم G باشد، آن‌گاه $V - S$ نیز یک مجموعه احاطه‌گر G است.**

نتیجه: **هر گراف همبند G از مرتبه $n \geq 2$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر دارد، که مکمل آن $V - S$، نیز یک مجموعه احاطه‌گر G است.**

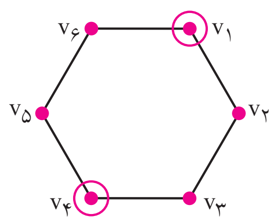
قضیه بعدی نیز یک ویژگی از مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال است.

قضیه. **گراف G مفروض است، اگر هر دو رأس در یک مجموعه احاطه‌گر S از G مجاور نباشند، آن‌گاه S لازم است یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال باشد اما لزومی ندارد یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم باشد.**

اثبات. فرض کنیم S یک مجموعه احاطه‌گر G باشد که هر دو رأس آن مجاور نباشند، پس در S هر رأس باید خود آن را احاطه کند در نتیجه، به ازای هر رأس v از S، $S - \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر نمی‌باشد، در نتیجه طبق تعریف S یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است یعنی لازم است مینیمال باشد.

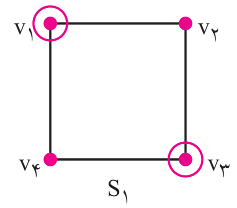


اما لزومی ندارد مینیمم باشد. C_6 را در نظر می‌گیریم با $S = \{v_1, v_3, v_5\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. هیچ دو رأس S مجاور هم نیستند.

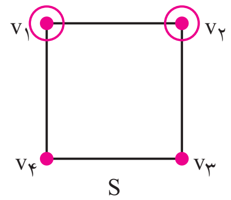


اما S مینیمم نمی‌باشد زیرا $\gamma(G) = 2$، $S_1 = \{v_1, v_4\}$ احاطه‌گر مینیمم است.

تذکر. عکس این قضیه در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. ممکن است S یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال باشد اما رأس‌هایی در S مجـاور هم باشند.



$S_1 = \{v_1, v_3\}$ مینیمال و دو رأس مجاور نیستند.



$S = \{v_1, v_2\}$ مینیمال و دو رأس مجاوراند.

مرور چند ویژگی مهم

فرض کنیم S یک مجموعه احاطه‌گر گراف G باشد.

گوییم S یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم G است هرگاه، برای هر مجموعه احاطه‌گر S_i از G، $|S| \le |S_i|$.

همچنین مشاهده کردیم؛

هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم G یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است، اما عکس آن همواره درست نمی‌باشد.

اگر G گراف از مرتبه یک باشد، واضح است که خودش مجموعه احاطه‌گر خـودش اسـت کـه هـم مینـیمم و هـم مینیمـال اسـت و $\gamma(G) = 1$ که این یک حالت بدیهی است.

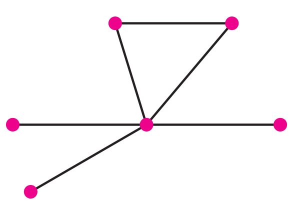
تا کنون ویژگی‌های زیر را برای عدد احاطه‌گری بررسی کرده‌ایم.

۱. **اگر G گرافی از مرتبه n باشد آن‌گاه $1 \le \gamma(G) \le n$.**

۲. **$\gamma(G) = 1$ اگر و فقط اگر $\Delta(G) = n - 1$.**

۳. **$\gamma(G) = n$ اگر و فقط اگر G گراف تهی از مرتبه n باشد.**

۴. **اگر K_n گراف کامل از مرتبه n باشد آن‌گاه $\gamma(K_n) = 1$.**



آیا عکس این ویژگی درست است؟ یعنی اگر $\gamma(G) = 1$ آیا G گـراف کامل K_n است؟

بنابراین، اگر $\gamma(G) = 1$ با توجه به (۲) و (۴) می‌توان گفت گراف G حداقل یک رأس از درجه $n - 1$ دارد پس می‌توانـد از $n - 1$ یـال تا $\frac{n(n-1)}{2}$ یال وقتی گراف کامل است داشته باشد.

در حالت کلی تعیین عدد احاطه‌گری $\gamma(G)$ چندان ساده نمی‌باشد. اما تعیین کرانه‌های بالا را بررسی می‌کنیم.

کرانه‌هایی برای $\gamma(\delta)$، عدد احاطه‌گری

اولین قضیه معروف به قضیه «**ORE**» است.

۱. اگر G گرافی از مرتبه n و $\delta(G) \geq ۱$ (رأس غیرمنفرد نداشته باشد) آن‌گاه $\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor$

اثبات. در بخش قبلی ثابت کردیم که اگر S یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای گراف G باشد که $\delta(G) \geq ۱$ آن‌گاه، $V-S$ نیز یک مجموعه احاطه‌گر G است.

حال اگر D یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم G باشد، مینیمال نیز هست. پس $V-D$ نیز یک مجموعه احاطه‌گر G است و $|V-D| \geq |D| = \gamma(G)$ در نتیجه؛

$$n = |D| + |V-D| \geq ۲|D| = ۲\gamma(G) \Rightarrow \gamma(G) \leq \frac{n}{۲} \Rightarrow \gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor.$$

While McCuaig و Shepherd در ۱۹۸۹ نشان دادند که اگر $\delta(G) \geq ۲$ آن‌گاه $\gamma(G) \leq \frac{۲n}{۵}$ و Reed در ۱۹۹۶ نشان داد اگر $\gamma(G) \geq ۳$، آن‌گاه $\gamma(G) \leq \frac{۳n}{۸}$.

نتیجه. **اگر G گرافی بدون رأس منفرد باشد، $\gamma(G) \geq ۱$ آن‌گاه، $\gamma(G) + \gamma(\bar{G}) \leq n$**

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{۲} \quad \text{و} \quad \gamma(\bar{G}) \leq \frac{n}{۲} \Rightarrow \gamma(G) + \gamma(\bar{G}) \leq n$$

اگر G دارای یک رأس منفرد باشد، آن‌گاه $\gamma(\bar{G}) = ۱$ چرا؟ و $\gamma(G) \leq n$ در نتیجه، $\gamma(G) + \gamma(\bar{G}) \leq n + ۱$.

به همین ترتیب اگر $\bar{G}$ یک رأس منفرد داشته باشد آن‌گاه $\gamma(G) = ۱$ و $\gamma(\bar{G}) \leq n$ در نتیجه، $\gamma(G) + \gamma(\bar{G}) \leq n + ۱$.

اکنون مهم‌ترین قضیه این قسمت را که کرانی بالا و هم کرانی پایین برای عدد احاطه‌گری ارائه می‌دهد برای هر گراف از مرتبه n که $n \geq ۲$ بیان می‌کنیم.

قضیه. **اگر G گرافی از مرتبه n باشد که $n \geq ۲$، آن‌گاه؛ $\left\lceil \frac{n}{۱+\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G)$**

اثبات. اگر $\deg(v)$، درجه هر رأس v از گراف G باشد، واضح است که رأس v، به تعداد $۱+\deg(v)$ رأس G را احاطه می‌کند. اگر v چنان انتخاب شده باشد که $\deg(v) = \Delta(G)$، آن‌گاه v، $۱+\Delta(G)$ رأس G را احاطه می‌کند، به‌جز $n-(۱+\Delta(G))$ رأس G که باقی می‌مانند.

چون هیچ‌کدام از $n-(۱+\Delta(G))$ رأس G به وسیله v احاطه نمی‌شوند، پس حداکثر به وسیله خودشان احاطه می‌شوند، در نتیجه G حداکثر به وسیله $(n-(۱+\Delta(G)))+۱ = n-\Delta(G)$ رأس احاطه می‌شود یعنی،

$$\gamma(G) \leq n - \Delta(G)$$

برای اثبات قسمت دیگر نامساوی، فرض کنیم $\gamma(G)=k$، یعنی $S=\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$ مجموعه احاطه‌گر مینیمم G باشد. چون هر رأس v_i به تعداد $1+\deg(v_i)$ رأس G را احاطه می‌کند که، $1\le i\le k$ و رأس‌های S همه n رأس G را احاطه می‌کنند پس،

$$\sum_{i=1}^{k}\left(1+\deg(v_i)\right)\ge n.$$

اما به ازای هر i که $1\le i\le k$، $1+\deg(v_i)\le 1+\Delta(G)$ در نتیجه:

$$n\le\sum_{i=1}^{k}(1+\deg(v_i))\le k(1+\Delta(G))$$

بنابراین؛

$$n\le k(1+\Delta(G))\ \Rightarrow\ \frac{n}{1+\Delta(G)}\le k$$

یعنی

$$\left\lceil\frac{n}{1+\Delta(G)}\right\rceil\le\gamma(G)\le n-\Delta(G)$$

نتیجه ۱: اگر G گرافی k منتظم باشد آن‌گاه، $n=kr$ و $\Delta(G)=k$ بنابراین؛

$$\left\lceil\frac{n}{1+k}\right\rceil\le\gamma(G)\le nk-k=(n-1)k$$

نتیجه ۲: با توجه به قضیهٔ «اور» و قضیه قبلی، اگر $\delta(G)\ge 1$ آن‌گاه؛

$$\left\lceil\frac{n}{1+\Delta(G)}\right\rceil\le\gamma(G)\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

بنابراین در هر گرافی که هیچ رأس منفرد نداشته باشد آن‌گاه، $\gamma(G)$ بزرگ‌تر از $\frac{n}{2}$ نمی‌باشد.

حالت‌های تساوی در رابطه‌های فوق،

۱. **گرافی از مرتبه n مثال بزنید که در آن $\gamma(G)=n-\Delta(G)$.**

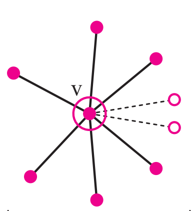
۲. **گرافی از مرتبه n مثال بزنید که در آن $\gamma(G)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$.**

۳. **گرافی از مرتبه n مثال بزنید که در آن $\gamma(G)=\left\lceil\frac{n}{1+\Delta(G)}\right\rceil$.**

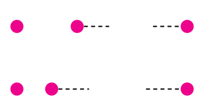
پاسخ: گراف G را چنان در نظر می‌گیریم که شامل یک ستاره باشد یعنی یک رأس که به r رأس دیگر وصل شده باشد $r\le n-2$.

سپس کافی است $n-(r+1)$ رأس منفرد دیگر در نظر بگیریم.

اکنون، $r+1$ رأس توسط یک رأس v احاطه شده‌اند کـه $r=\Delta(G)$ و $n-(r+1)$ رأس منفرد دیگر توسط خودشان احاطه شده‌اند پس،



$r+1$ رأس


$n-r-1$ رأس

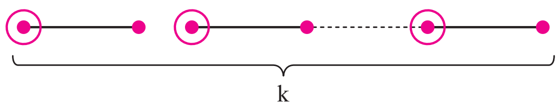
$$\gamma(G)=1+(n-r-1)=n-r=n-\Delta(G)$$

واضح است که اگر $\Delta(G)=0$، گراف تهی از مرتبه n را داریم که

$.\gamma(G)=n$

۲. فرض کنید n زوج باشد پس $n=2k$ که $k\geq 1$ عددی طبیعی است.

در این صورت گراف G را شامل k مؤلفه گراف k_2 در نظر می‌گیریم.



در این گراف $\delta(G)=\Delta(G)=1$ و هر رأس در هر مؤلفه، آن مؤلفه را احاطه می‌کند پس $\gamma(G)=k=\frac{n}{2}$ و واضح است که $.\frac{n}{1+\Delta(G)}=\frac{n}{2}$

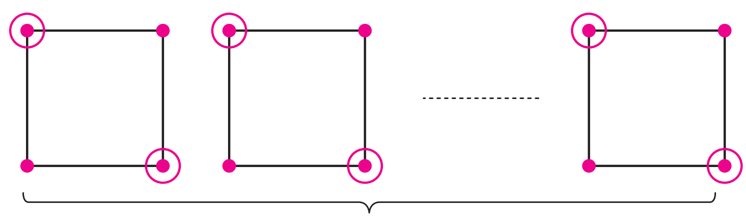
اگر n فرد باشد $n=2k+1$، پس کافی است یکی از مؤلفه‌ها را به یک

مسیر به طول ۲ تبدیل کنیم به صورت زیر؛

که در این حالت نیز در تعداد $\gamma(G)=\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor=k=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ عضوهای مجموعه احاطه‌گر تغییری حاصل نمی‌شود.

$$\gamma(G)=\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor=k=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

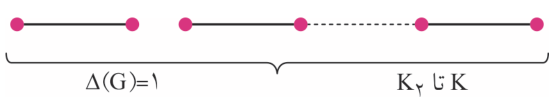
اگر $n=4k$ می‌توانیم k گراف C_4 را رسم کنیم که،



گراف G، K تا C_4 است.

$$\gamma(G)=2k=\frac{n}{2}\ \gamma(G)=2k=\frac{n}{2}\ .\gamma(G)=\frac{n}{2}$$

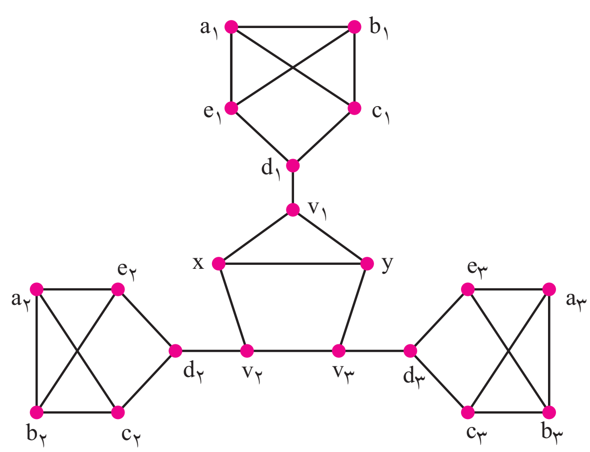
۴. برای (۳) همان k مؤلفه k_2 می‌تواند مثالی باشد که $n=2k$، یعنی n زوج است.



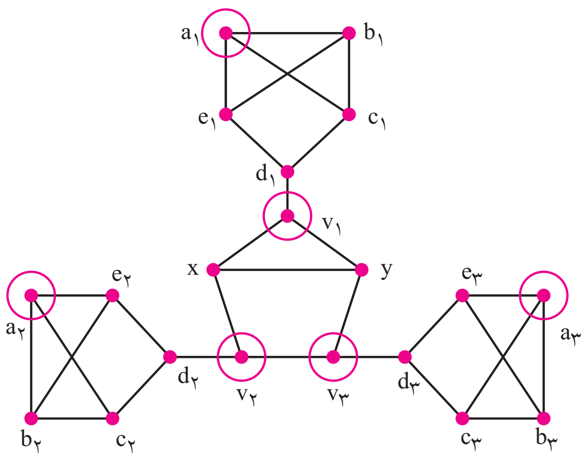
$$\gamma(G)=\frac{n}{1+1}=\frac{n}{2}=k$$

مثال: گراف سه منتظم G از مرتبه ۲۰ رسم شده است.

یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای آن پیدا کنید.



پاسخ: با توجه به شکل مجموعه رأس‌های $\{a_۱,a_۲,a_۳\}$، ۱۲ رأس را مطابق شکل احاطه می‌کنند. اکنون فقط رأس‌های $d_۱$، $d_۲$، $d_۳$، x، y، $v_۱$، $v_۲$، $v_۳$ باید توسط رأس‌هایی احاطه شوند. با کمی دقت مشاهده می‌کنیم که مجموعه، $D=\{a_۱,a_۲,a_۳,x,t,d_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر G است.



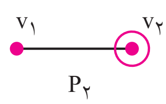
در نتیجه $\gamma(G)\le ۶$. از طرفی بنا بر قضیه قبل؛

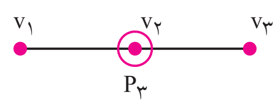
$\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil=\left\lceil\frac{۲۰}{۴}\right\rceil=۵$ پس $۵\le\gamma(G)\le ۶$ کافی است نشان دهیم $\delta(G)=۵$ امکان ندارد.

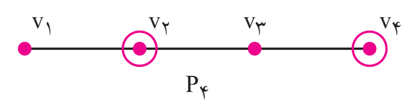
اگر مجموعه $A=\{a_۱,b_۱,c_۱,d_۱,e_۱\}$ را در نظر بگیریم $A\cup\{v_۱\}$ حداقل باید به وسیله دو رأس احاطه شوند، که همین به ترتیب باید برای دو زیرگراف مشابه نیز برقرار باشد، در نتیجه حداقل باید $\gamma(G)$ برابر ۶ باشد که با توجه به $\gamma(G)\le ۶$ نتیجه می‌گیریم، $\gamma(G)=۶$.

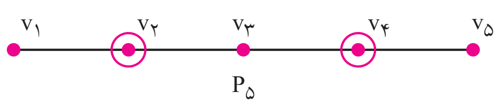
گراف‌های C_n و P_n و عدد احاطه‌گری   Path and Cycle

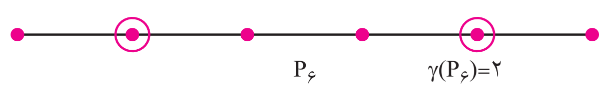
اگر G گرافی از مرتبه n باشد که رأس‌های آن $v_۱,v_۲,\dots,v_n$ برچسب‌گذاری شده باشند به طوری که یال‌های آن، $v_۱v_۲,v_۲v_۳,\dots,v_{n-۱}v_n$، $n\ge ۱$ باشند آن‌گاه گراف G را یک مسیر با n رأس می‌نامند و به P_n نشان می‌دهند.

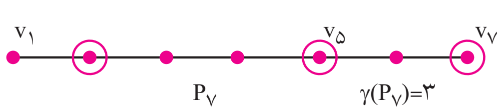


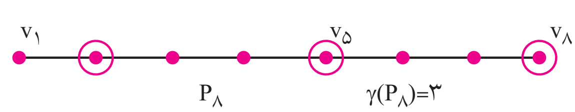






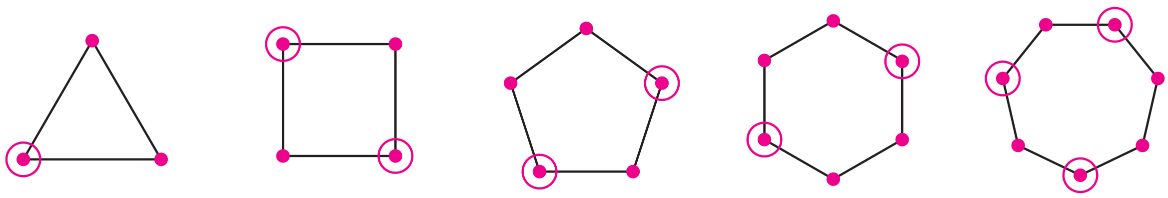






حدس می‌زنیم اگر $n\ge ۱$ آن‌گاه، $\gamma(P_n)=\left\lceil\frac{n}{۳}\right\rceil$

اگر رأس‌های گراف G از مرتبه $n \geq ۳$ با $v_۱$، $v_۲$، ...، v_n برچسب‌گذاری شده باشند به طوری که یال‌های آن، $v_۱v_۲, v_۲v_۳, \ldots, v_{n-۱}v_n, v_nv_۱$ باشند آن‌گاه G یک سیکل یا دور (cycle) می‌نامند. یعنی یک مسیر بسته یک سیکل یا دور است.



$C_۳$ $\gamma(C_۳)=۱$ $C_۴$ $\gamma(C_۴)=۲$ $C_۵$ $\gamma(C_۵)=۲$ $C_۶$ $\gamma(C_۶)=۲$ $C_۷$ $\gamma(C_۷)=۳$

قضیه. $\gamma(C_n)=\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$ ، $n \geq ۳$.

اثبات. $n=۳q+r$ که $۰ \leq r \leq ۲$.

چون C_n دو منتظم است هر رأس C_n دقیقاً سه رأس آن را احاطه می‌کند. بنابراین هر q رأس C_n حداکثر $۳q$ رأس آن را احاطه می‌کند. اگر $r=۰$ در این صورت، $\gamma(C_n) \geq q = \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$.

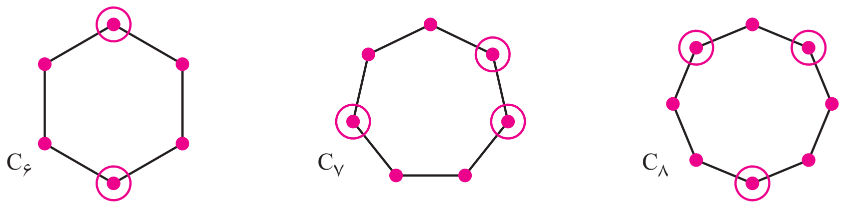
اگر $r=۱$ یا $r=۲$ آن‌گاه $\gamma(C_n) \geq q+۱ = \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$.

اکنون باید نشان دهیم، $\gamma(C_n) \leq \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$ که $n=۳q+r$ و $۰ \leq r \leq ۲$.

ابتدا فرض کنیم $r=۰$. فرض کنیم S مجموعه‌ای شامل هر رأس v از C_n و هر سه رأس از C_n با شروع از v باشد که به طور دوری و همه در یک جهت روی C_n در نظر گرفته می‌شوند.

بنابراین هر رأس C_n به وسیله دقیقاً یک رأس از S احاطه می‌شود. چون S دقیقاً شامل q رأس است، $\gamma(C_n) \leq q = \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$. سپس فرض کنیم، $r=۱$ یا $r=۲$.

اکنون فرض کنیم S مجموعه شامل هر رأس v از C_n و هر سه رأس C_n شروع از v به طور دوری در یک جهت باشد، تا در کل $q+۱$ رأس داشته باشیم. سپس، هر رأس C_n به وسیله حداقل یک رأس S احاطه شده است. بنابراین S، یک مجموعه احاطه‌گر C_n است و $\gamma(C_n) \leq q+۱ = \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$. در نتیجه، $\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$.



نتیجه. اگر در گراف C_n، $n=۳k$ آن‌گاه،

$$\left\lceil \frac{n}{۱+\Delta(G)} \right\rceil = \left\lceil \frac{۳k}{۳} \right\rceil = k = \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$$

به طور کلی اگر G گرافی k منتظم باشد و $n = q(k+۱)$ آن‌گاه؛

$$\left\lceil \frac{q(k+۱)}{۱+k} \right\rceil = q$$

به همین ترتیب،

$$\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil ،\ n \geq ۱$$

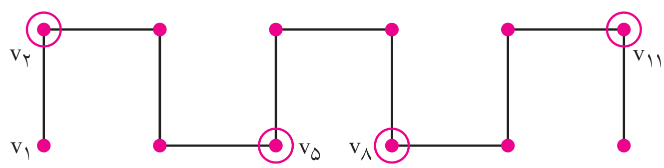
اگر $n \geq ۳$ آن‌گاه

$$\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$$

مثال: $\gamma(P_{۱۲})$ را پیدا کنید.

$$\gamma(P_{۱۲}) = \left\lceil \frac{۱۲}{۳} \right\rceil = ۴$$

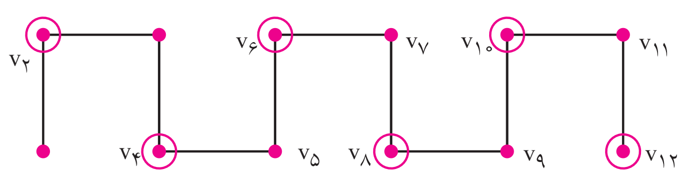
$$D = \{v_۲, v_۵, v_۸, v_{۱۱}\}$$



یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم و هم مینیمال است.

$$S = \{v_۲, v_۴, v_۶, v_۷, v_۸, v_{۱۰}\}$$

شکل مقابل یک مجموعه احاطه‌گر $P_{۱۲}$ است که مینیمم نمی‌باشد. $|S| = ۶$ اما S مینیمال است، زیرا اگر هر رأس آن را حذف کنیم مثلاً، $S - \{v_۲\}$ دیگر احاطه‌گر نمی‌باشد.



چند ویژگی

$$۳ \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + ۱ \qquad (n \geq ۲)$$

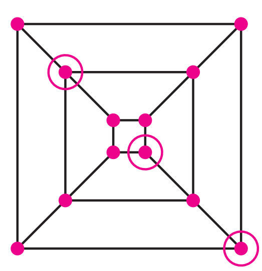
$$\delta(G) \geq k \geq ۴ \Rightarrow \gamma(G) \leq \frac{kn}{۳k - ۱}$$

$k \geq ۷$ (Caro Roditty ۱۹۹۰)

$k = ۴$ (Sohn and Yuan ۲۰۰۹)

$k = ۵$ (Xing, Sun and Chen ۲۰۰۶)

$k = ۶$ (Cao, Shi Sohn and Yuan ۲۰۰۸)

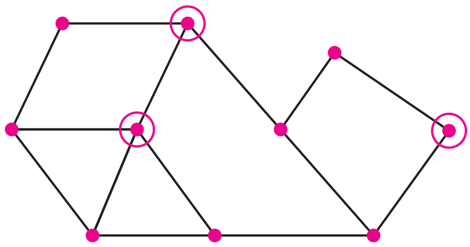


$$n = ۱۲ \qquad \Delta(G) = ۳$$

$$۳ = \left\lceil \frac{۲۱}{۴} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor = ۶$$

$$\gamma(G) \geq ۳ \Rightarrow \gamma(G) \leq \frac{۳n}{۸} = \frac{۳ \times ۱۲}{۸} = ۴/۵$$

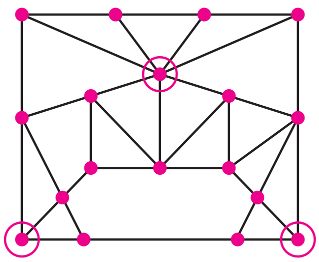
$$۳ \leq \gamma(G) \leq ۴ \quad ، \quad \gamma(G) = ۳$$



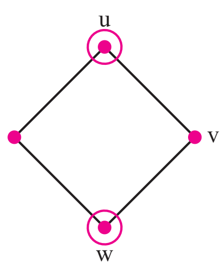
$|v| = ۱۰ \qquad \Delta(G) = ۴$

$$۲ = \frac{۱۰}{۱+۴} \le \gamma(G) \le \left\lfloor \frac{۱۰}{۲} \right\rfloor = ۵ \quad ، \quad ۲ \le \gamma(G) \le ۵$$

$$\delta(G) \ge ۲ \Rightarrow \gamma(G) \le \frac{۲ \times ۱۰}{۵} = ۴ \Rightarrow ۲ \le \gamma(G) \le ۴$$



$$\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{۱۶}{۱+۶} \right\rceil = ۳$$



$$N[v] = \{u, w\} \cap S = \{u, w\} \cap \{u, w\} = \{u, w\}$$