ماتریس : آرایه ای مستطیل شکل از اعداد حقیقی است. هر یک از اعداد داخل ماتریس را یک درایه ی ماتریس می گویند.
به عبارت دیگر هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می شود.
هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه‌ی آن ماتریس می نامیم.

نمایش ماتریس : نامگذاری با حروف بزرگ الفبای انگلیسی

$$A_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

الف : i : شماره سطر ب : j : شماره ستون   پ : a_{ij} : درایه عمومی یعنی عضو واقع در سطر i ام و ستون j ام ماتریس A

ت) m : تعداد سطر   ث) n : تعداد ستون   ج : $m\times n$: مرتبه

مثال) مجموع درایه های ماتریس $A_{2\times 3}$ که درایه های عمومی آن از دستور $a_{ij}=\begin{cases} i-j+ij, & i\geq j \\ i+j-ij, & i<j \end{cases}$ بدست آیند کدام است؟

۱) ۹   ۲) ۸   ۳) ۷   ۴) ۶

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$A_{2\times 3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}\Rightarrow \sum=9$$

۱) مجموع درایه های ماتریس $A=\left[i-j+i^{j}\right]_{2\times 3}$ کدام است؟

۱) ۱۷   ۲) ۱۶   ۳) ۱۵   ۴) ۱۴

معرفی چند ماتریس خاص

ماتریس افقی : ماتریسی است که تعداد سطرهای آن کمتر از تعداد ستون های آن باشد. مانند

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

ماتریس سطری : ماتریسی است که دارای یک سطر و n ستون می باشد. مانند

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

ماتریس قائم : ماتریسی است که تعداد سطرهای آن بیشتر از تعداد ستون های آن باشد. مانند

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

ماتریس ستونی : ماتریسی است که دارای m سطر و یک ستون می باشد. مانند

$$A=\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

ماتریس مربعی : ماتریسی که تعداد سطر و ستون آن با هم برابرند

$$A_{n\times n}=\left[a_{ij}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

در این نوع ماتریس درایه های a_{ii} را درایه های واقع بر قطر اصلی ماتریس $A_{n\times n}$ می نامند.

تذکر : در ماتریس مربعی مجموع درایه های روی قطر اصلی را اثر ماتریس می نامند و با $tr(A)$ نشان می دهند.

یعنی : $$tr(A) = a_{۱۱} + a_{۲۲} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii}$$

ماتریس بالا مثلثی : ماتریسی مربعی است که در آن درایه های واقع در زیر قطر اصلی صفرند. مانند
$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۴ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

ماتریس اکیدابالا مثلثی : ماتریسی مربعی است که درآن درایه های واقع برقطر اصلی وزیرآن صفرند.مانند
$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس پایین مثلثی: ماتریسی مربعی است که درآن درایه های واقع دربالای قطر اصلی آن صفرند.مانند
$$A = \begin{bmatrix} ۹ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۷ & ۰ \\ ۱ & ۶ & ۴ \end{bmatrix}$$

ماتریس اکیدا پایین مثلثی : ماتریسی مربعی است که در آن درایه های واقع بر قطر اصلی و بالای آن صفرند. مانند
$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس شبه بالا مثلثی:ماتریسی مربعی است که در آن درایه های واقع در زیر قطر فرعی صفرند. مانند
$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۶ \\ ۲ & ۴ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس شبه پایین مثلثی: ماتریسی مربعی است که در آن درایه های واقع در بالای قطر فرعی آن صفرند. مانند
$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

ماتریس قطری:ماتریسی مربعی است که در آن درایه های بالا و پایین قطر اصلی آن صفرند. مانند
$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

ماتریس شبه قطری : ماتریسی مربعی است که درآن درایه های بالا و پایین قطر فرعی آن صفرند. مانند
$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالر : ماتریسی قطری است که درایه های واقع بر قطر اصلی آن برابرند. مانند
$$A = \begin{bmatrix} ۶ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

ماتریس همانی (واحد) : ماتریسی مربعی است که در آن تمام درایه های واقع بر قطر اصلی یک و بقیه درایه ها صفر ند.

به عبارت دیگر $$I_n = \left[\delta_{ij}\right]_{n\times n} = \left[\begin{cases} ۱ & \text{اگر } i = j \\ ۰ & \text{اگر } i \neq j \end{cases}\right]_{n\times n}$$ مانند. $$I_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$ و $$I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نتیجه : در حالت کلی داریم : $kI = k\begin{bmatrix} ۱ & \cdot & \cdot \\ \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & \cdot & \cdot \\ \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & k \end{bmatrix}$ (ماتریس اسکالر)

ماتریس صفر : ماتریسی است که همه‌ی درایه های آن صفر باشند، ماتریس صفر را با نماد $\overline{O}$ نشان می دهیم.

ماتریس $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$، ماتریس صفر ۳ × ۲ است.

دو ماتریس مساوی : دو ماتریس A و B را مساوی گوییم و می نویسیم $A = B$ هرگاه :

الف : دارای مرتبه یکسان باشند.　　　ب : درایه های نظیر به نظیر آن ها با هم برابر باشد.

۲) اگر $\begin{bmatrix} x-۱ & ۵ \\ x-۳y & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & x+۱ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$، $x + y$ کدام است؟

۱) ۵　　　۲) ۴　　　۳) ۳　　　۴) ۶

تذکر : در ماتریس مربعی مجموع درایه های روی قطر اصلی را اثر ماتریس می نامند و با $tr(A)$ نشان می دهند.

جمع ماتریس ها : فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس هم مرتبه باشند. در این صورت مجموع آنها، یعنی $A + B$، یک ماتریس $m \times n$ است به طوری که هر درایه آن، مجموع درایه های نظیر در دو ماتریس A و B است.

به بیان ریاضی　$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس : برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی مانند A آن عدد را در تمام درایه های ماتریس ضرب می کنیم، به عبارت دیگر می توان نوشت: $r \in R$ و $A = [a_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow rA = r[a_{ij}]_{m\times n} = [ra_{ij}]_{m\times n}$

توجه : اگر $rA_{mn} = O_{mn}$ باشد آنگاه $r = ۰$ یا $A_{mn} = \overline{O}_{mn}$

قرینه ماتریس A : $(-A)$ ماتریسی است که هر درایه اش قرینه درایه متناظرش در ماتریس A می باشد.

مثال : $A_{۲\times ۳} = \begin{bmatrix} ۲ & ۸ & -۴ \\ ۵ & ۹ & -۶ \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -۲ & -۸ & ۴ \\ -۵ & -۹ & ۶ \end{bmatrix}$

تفاضل دو ماتریس : اگر A و B دو ماتریس باشند، تفاضل B از A را با $A - B$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم　$A - B = A + (-B)$

توجه : مرتبه‌ی ماتریس های $A + B$ و $A - B$ با مرتبه‌ی ماتریس های A و B یکی است.

قضیه و ویژگی ها : فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ و $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ سه ماتریس هم مرتبه و r و s دو عدد حقیقی. در این صورت

الف : $A + B = B + A$ (خاصیت جا به جایی جمع)

ب : $A + (B + C) = (A + B) + C$ (خاصیت شرکت پذیری جمع)

پ : $A + O = O + A = A$ (ماتریس صفر عضو خنثی عمل جمع)

ت : $A + (-A) = -A + A = O$

ث : $r(A + B) = rA + rB$

ج : $(r + s)A = rA + sA$

چ : $(rs)A = r(sA)$

ح : $۱A = A$

خ : $A + C = B + C \Leftrightarrow A = B$ (قاعده حذف در جمع ماتریس ها)

د : $A + B = C \Leftrightarrow A = C - B$

ذ : $rA = rB \Rightarrow A = B$ و $r \neq ۰$

ر : $۰A = O_{m\times n}$ و $۰ \in R$

ز : $rO_{m\times n} = O_{m\times n}$ و $r \in R$

ژ : $rA = O_{m\times n} \Rightarrow r = ۰$ یا $A = O_{m\times n}$ و $r \in R$

ضرب ماتریس ها : به مثال های زیر توجه کنید :

الف : $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}_{۱\times ۲} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}_{۲\times ۱} = \begin{bmatrix} ac + bd \end{bmatrix}_{۱\times ۱}$

ب : $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}_{۱\times ۲} \begin{bmatrix} c & e \\ d & f \end{bmatrix}_{۲\times ۲} = \begin{bmatrix} ac + bd & ae + bf \end{bmatrix}_{۱\times ۲}$

پ : $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}_{۲\times ۲} \begin{bmatrix} e & g & s \\ f & h & t \end{bmatrix}_{۲\times ۳} = \begin{bmatrix} ae + cf & ag + ch & as + ct \\ be + df & bg + dh & bs + dt \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$

ت : در حالت کلی : اگر $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ و $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ آنگاه $AB = [c_{ij}]_{m\times n}$

که در آن

$$c_{ij} = \sum_{k=۱}^{p} a_{ik} b_{kj} = [A \text{ سطر } i\text{ام}] \times [B \text{ ستون } j\text{ام}]$$

نتیجه : شرط آن که ضرب AB تعریف پذیر باشد آن است که تعداد ستون های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد در این صورت درایه‌ی ijام (درایه‌ی واقع در سطر iام و ستون jام) در ماتریس AB برابر با حاصل ضرب سطر iام ماتریس A در ستون jام ماتریس B خواهد بود.

۳) چند ماتریس مانند $A_{۲\times ۲}$ وجود دارد که $\begin{bmatrix} ۴ & ۸ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \times A$ باشد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) بیشمار　　۴) ۲　　(کنکور آزاد ریاضی عصر ۹۱)

۴) اگر $A = \begin{bmatrix} -۴ & ۳ \\ -۵ & ۲ \\ -۶ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۶ & -۳ & ۱ \\ ۴ & -۵ & ۲ \end{bmatrix}$، آنگاه درایه ی سطر دوم و ستون سوم AB کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۱۹　　۳) ۲　　۴) ۸-

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=A^{۲}$ باشد، حاصل $\sum_{i=۱}^{۳} b_{ii}$ ، کدام است؟ (b_{ij}، درایه های سطر iام و ستون jام ماتریس B هستند.)

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۱

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$\sum_{i=۱}^{۳} b_{ii} = b_{۱۱}+b_{۲۲}+b_{۳۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۲+۱+۲=۵$$

۵) اگر $A=\begin{bmatrix} ۲۴ & ۶ & ۳ & ۱ \\ ۸ & ۲ & ۱ & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۶} \\ ۱ & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۲۴} \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس $C^{۲}$، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۷)

قضیه و ویژگی ها : فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times s}$ و $C=[c_{ij}]_{s\times n}$ سه ماتریس باشند

الف : در حالت کلی ضرب ماتریس ها دارای خاصیت جابجایی نیست یعنی $A\times B \neq B\times A$

مثال : $\begin{bmatrix} ۲۰ & ۸ \\ ۱۳ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۵ & ۱۳ \\ ۸ & ۲۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$

نکته : در حالت های خاص زیر ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی دارد.

۱) هر دو ماتریس، قطری هم مرتبه باشند.

۲) هر دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و لااقل یکی از آن ها ماتریس واحد یا اسکالر باشد.

۳) دو ماتریس ۲ × ۲ بوده و درایه های روی قطر اصلی مساوی بوده و درایه های روی قطر فرعی با هم مساوی و یا قرینه باشند.

به عبارت دیگر الف : اگر $A=\begin{bmatrix} b & a \\ a & b \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y & x \\ x & y \end{bmatrix}$ باشند آنگاه $AB=BA$

ب : اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ باشند آنگاه $AB=BA$

۴) اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ و داشته باشیم $\frac{c}{z}=\frac{b}{y}=\frac{a-d}{x-t}$ آنگاه $AB=BA$

۵)اگر حاصل ضرب دو ماتریس هم مرتبه، مضرب غیر صفری از ماتریس همانی باشد، آن گاه ضرب دارای خاصیت تعویض پذیری است به عبارت دیگر : $r\in R$ و $AB=rI \Rightarrow AB=BA$

مثال) برای اینکه ضرب دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد داریم :

۱) $a=b$ و $۲c=d$ ۲) $a=d$ و $b=c$ ۳) $a=c$ و $b=-d$ ۴) $a=d$ و $b=-c$

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$AB=BA \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲a+b & a+۲b \\ ۲c+d & c+۲d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲a+c & ۲b+d \\ a+۲c & b+۲d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases}$$

مثال) اگر ضرب دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد، آنگاه حاصل $b+c$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) ۵

جواب : گزینه ۳ درست است.

ب : فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times s}$ و $C=[c_{ij}]_{s\times n}$ سه ماتریس باشند آنگاه : $A(BC)=(AB)C$

پ : فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ و $C=[c_{ij}]_{p\times n}$ سه ماتریس باشند در حالت کلی قاعده حذف ضربی برقرار نیست. $AB=AC \not\Rightarrow B=C$ و $A\neq O$ ولی اگر $B=C$ آنگاه همواره $AB=AC$

مثال : ماتریس های A، B و C را به گونه ای مثال بزنید که $AB=AC$ باشد ولی $B\neq C$ باشد.

جواب : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ آنگاه با وجود آن که $AB=AC$ است ولی $B\neq C$ می باشند.

ت : فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times s}$ و $C=[c_{ij}]_{p\times s}$ سه ماتریس باشند : $A(B+C)=AB+AC$

ث : فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{s\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times s}$ و $C=[c_{ij}]_{p\times s}$ سه ماتریس باشند : $(B+C)A=BA+CA$

ج : فرض کنیم A یک ماتریس مربعی مرتبه n باشد. در این صورت $AI_n=I_nA=A$ (I_n ماتریس همانی $n\times n$ است.)

ویژگی های ضرب ماتریس ها : با فرض اینکه برای ماتریس های A و B تمام ضرب های زیر قابل تعریف باشند داریم :

الف : $r\in R, (rA)B=A(rB)=r(AB)$

ب : $(-A)B=A(-B)=-AB$

پ : $(-A)(-B)=AB$

ت : اگر $AB=O$ نمی توان همواره نتیجه گرفت که، $B=O$ یا $A=O$

ث : اگر $A\neq O$ و $AB=AC$ نمی توان همواره نتیجه گرفت که، $B=C$

مثال) اگر A، B و C سه ماتریس باشند و داشته باشیم $A\times B=A\times C$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) ممکن است $B=C$ ۲) همواره $B=C$ ۳) همواره $B\neq C$ ۴) همواره $B=C=O$ جواب : گزینه ۱ صحیح است.

نکته : توان های طبیعی یک ماتریس مربعی : اگر $A=[a_{ij}]$ و $(m,n\in N)$ ، آنگاه

الف : $A^n=AA^{n-۱}=A^{n-۱}A$ ب : $A^mA^n=A^{m+n}$ پ : $(A^m)^n=A^{mn}$

ماتریس های تعویض پذیر: اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و $AB = BA$ (یعنی تعویض پذیر باشند). آن گاه :

الف : $(AB)^n = A^n B^n ,(n \in N)$ ب : $A^m B^n = B^n A^m ,(m,n \in N)$

پ : $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ ت : $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

ث : $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$ ج : $(A \pm B)(A^2 \mp AB^2 + B^2) = A^3 \pm B^3$

تذکر : اگر ضرب ماتریس ها دارای خاصیت جابجایی نسبت به عمل ضرب باشد آنگاه کلیه اتحادها و تجزیه ها برای دو ماتریس فوق برقرارند و لذا کلیه اتحادها و تجزیه ها برای هرماتریس A و I هم مرتبه با آن برقرار است.

نکته : اگر جمع دو ماتریس وارونپذیر ماتریس اسکالر باشد آن گاه ضرب آن ها دارای خاصیت جابجایی است یعنی :

$A + B = kI$ و $K \neq 0$ و $|A| \neq 0$ و $|B| \neq 0 \Rightarrow AB = BA$

ماتریس پوچ توان : ماتریس A را پوچ توان گوییم هرگاه عددی طبیعی مانند n وجود داشته باشد به طوری که $A^n = O$ کوچکترین عدد طبیعی n را مرتبه آن می نامند. مثال : ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & a \\ -a & -a \end{bmatrix}$ پوچ توان از مرتبه ۲ است.

ماتریس خودتوان : ماتریس A را خود توان گوییم هرگاه عددی طبیعی مانند n وجود داشته باشد به طوری که $A^n = A$ کوچکترین عدد طبیعی n را مرتبه آن می نامند. مثال : ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ خود توان از مرتبه ۳ است.

نکته : اگر $A^2 = A$ شده است پس A به هر توانی که برسد همان A می شود.

۶) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه های ماتریس $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$ کدام است؟

۱) ۱۰   ۲) ۲۰   ۳) ۵   ۴) ۲   (کنکور آزاد تجربی غیر پزشکی۸۶)

ماتریس برگردان (متناوب) : ماتریس A را برگردان (متناوب) گوییم هرگاه عددی طبیعی مانند n وجود داشته باشد به طوری که $A^n = I$ کوچکترین عدد طبیعی n را مرتبه آن می نامند. مثال : ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ برگردان از مرتبه ۲ است.

توجه : اگر $A^2 = I$ آنگاه $A^{2k} = I$ و $A^{2k+1} = A$

۷) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^7 - A^4$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ (کنکور سراسری ریاضی۸۳)

نکته : هرگاه $A=\begin{bmatrix} k & \cdot \\ \cdot & k \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} \cdot & k \\ k & \cdot \end{bmatrix}$ و $n \in N$ باشند آنگاه :

الف : $A^n=\begin{bmatrix} k^n & \cdot \\ \cdot & k^n \end{bmatrix}$ ب : $B^n=\begin{cases} \begin{bmatrix} k^n & \cdot \\ \cdot & k^n \end{bmatrix} & \text{اگر} n \text{زوج} \\ \begin{bmatrix} \cdot & k^n \\ k^n & \cdot \end{bmatrix} & \text{اگر} n \text{فرد} \end{cases}$

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & \cdot & \cdot \\ \cdot & ۱ & \cdot \\ \cdot & \cdot & ۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^{۱۰۰}-A^{۹۹}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & \cdot & -۱ \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -۱ & \cdot & ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & \cdot & ۱ \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۱ & \cdot & ۱ \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ ۱ & \cdot & -۱ \end{bmatrix}$ ۴) ۰   (کنکور آزاد ریاضی صبح ۷۷)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $A^۲=I \Rightarrow A^{۱۰۰}-A^{۹۹}=(A^۲)^{۵۰}-(A^۲)^{۴۹}A=I-A=\begin{bmatrix} -۱ & \cdot & ۱ \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ ۱ & \cdot & -۱ \end{bmatrix}$

نکته : الف : اگر $n \in N$ و $A=\begin{bmatrix} a & \cdot \\ \cdot & b \end{bmatrix}$ باشد آنگاه : $A^n=\begin{bmatrix} a^n & \cdot \\ \cdot & b^n \end{bmatrix}$

ب : و $A=\begin{bmatrix} \cdot & b \\ a & \cdot \end{bmatrix}$ باشد آنگاه : $A^{۲k}=(A^۲)^k=a^k b^k I=\begin{bmatrix} a^k b^k & \cdot \\ \cdot & a^k b^k \end{bmatrix}$

و $A^{۲k+۱}=A^{۲k}.A=abIA=\begin{bmatrix} \cdot & a^k b^{k+۱} \\ a^{k+۱} b^k & \cdot \end{bmatrix}$

پ : و $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ باشد آنگاه : $A^{۲k}=(A^۲)^k=(a^۲+b^۲)^k I=\begin{bmatrix} (a^۲+b^۲)^k & \cdot \\ \cdot & (a^۲+b^۲)^k \end{bmatrix}$

و $A^{۲k+۱}=A^{۲k}.A=(a^۲+b^۲)^k A$

نکته : خواص ماتریس های قطری : مجموع، تفاضل و حاصل ضرب دو ماتریس قطری هم مرتبه، ماتریسی است که از جمع، تفریق و ضرب دارای های روی قطر اصلی این دو ماتریس به دست می آید.

نتیجه : برای به توان رساندن ماتریس قطری کافی است درایه های روی قطر اصلی را به توان برسانیم.

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & \cdot \\ \cdot & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^n-A^{n-۱}$، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & ۲^{n-۱} \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & \cdot \\ \cdot & ۲^{n-۱} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & \cdot \\ \cdot & ۲ \end{bmatrix}$ (کنکور آزاد ریاضی ۷۹)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $A^n-A^{n-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & \cdot \\ \cdot & ۲^n \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & \cdot \\ \cdot & ۲^{n-۱} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & ۲^{n-۱} \end{bmatrix}$

نکته : اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۱ \\ ۰ & a \end{bmatrix}$، آن گاه $A^n=\begin{bmatrix} a^n & na^{n-۱} \\ ۰ & a^n \end{bmatrix}$، $n\in N$

نکته : خواص ماتریس های مثلثی و شبه مثلثی : مجموع، تفاضل و حاصل ضرب دو ماتریس مثلثی(شبه مثلثی) هم مرتبه، ماتریسی است مثلثی(شبه مثلثی).

نتیجه : اگر A یک ماتریس بالا مثلثی باشد آن گاه ماتریس $A^n , n\in N$ نیز بالا مثلثی است.

نتیجه : اگر A یک ماتریس پایین مثلثی باشد آن گاه ماتریس $A^n , n\in N$ نیز پایین مثلثی است.

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ جمع درایه های ماتریس $A^{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱ (کنکور آزاد ریاضی تجربی صبح پزشکی ۸۸)

جواب : روش اول : $A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A^۳=A^۲.A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow\cdots\Rightarrow A^{۱۰}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

روش دوم : گزینه ۲ صحیح است. $A=\begin{bmatrix} a & ۱ \\ ۰ & a \end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix} a^n & na^{n-۱} \\ ۰ & a^n \end{bmatrix}\Rightarrow A^{۱۰}=\begin{bmatrix} ۱^{۱۰} & ۱۰\times ۱^۹ \\ ۰ & ۱^{۱۰} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۸) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A^{۱۳۸۱}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشند آنگاه $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) ۱۳۸۱ ۲) ۱۳۸۲ ۳) ۱۳۸۴ ۴) ۱۳۸۳ (کنکور آزاد ریاضی ۸۱)

نکته : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ آنگاه : الف : $A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲x & x^۲+۲y \\ ۰ & ۱ & ۲x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

ب : $A^۳=\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲x & x^۲+۲y \\ ۰ & ۱ & ۲x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳x & ۳x^۲+۳y \\ ۰ & ۱ & ۳x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، درایه ی سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A^۳$، کدام است؟

۱) $۳y$ ۲) $۳x$ ۳) $۲(x^۲+y^۲)$ ۴) $۳(x^۲+y^۲)$ (کنکور سراسری ریاضی ۶۴)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. سطر دوم ماتریس $A^۲$ را بدست می آوریم. $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & x \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲x \end{bmatrix}$

سپس درایه ی سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A^۳$ را حساب می کنیم. $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳x \end{bmatrix}$

۹) اگر $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ در ماتریس A^6 مجموع درایه های ستون دوم کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۲۷ (کنکور آزاد ریاضی ۸۴)

۱۰) اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}$ باشد در ماتریس A^{100} مجموع درایه ها کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲ (کنکور آزاد ریاضی عصر۸۲)

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix}0&0\\2&2\end{bmatrix}$، مجموع درایه های ماتریس A^{10} کدام است؟

۱) ۴ ۲) 2^{10} ۳) 2^{11} ۴) 2^{12} (کنکور آزاد ریاضی۸۶خارج از کشور)

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\2^2&2^2\end{bmatrix}\Rightarrow A^3=A^2A=\begin{bmatrix}0&0\\2^3&2^3\end{bmatrix}\Rightarrow\cdots$$

$$\Rightarrow A^{10}=\begin{bmatrix}0&0\\2^{10}&2^{10}\end{bmatrix}\Rightarrow\sum=2^{10}+2^{10}=2\times2^{10}=2^{11}$$

مثال)ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}1: i=j\\2: i\neq j\end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه های ماتریس A^2-4A کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱ (کنکور سراسری ریاضی۹۶خارج از کشور)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل :

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2-4A=A(A-4I)=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-3&2&2\\2&-3&2\\2&2&-3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}\Rightarrow\sum=15$$

روش دوم :

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2-4A=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}\Rightarrow\sum=15$$

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ باشد آن گاه $A^{2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ac & 0 & 0 \end{bmatrix}\neq \overline{O}$ و $A^{3}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $A^{n}=\overline{O},(n\in N,n\geq 3)$

مثال) در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل A^{24} کدام است؟

۱) A ۲) I ۳) O ۴) $-A$

جواب : گزینه ۳ صحیح است. نکته : اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ باشد آن گاه $A^{2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ac & 0 & 0 \end{bmatrix}\neq \overline{O}$ و $A^{3}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

و $A^{n}=\overline{O},(n\in N,n\geq 3)$

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد آن گاه $A^{2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\neq \overline{O}$ و $A^{3}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $A^{n}=\overline{O},(n\in N,n\geq 3)$

۱۱) در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل جمع درایه های $A+A^{2}+A^{3}+A^{4}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱۲ ۴) ۶ (کنکور آزاد ریاضی ۸۳)

نکته : قضیه کیلی هامیلتون : اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد آنگاه رابطه $A^{2}-(a+d)A+(ad-bc)I_{2}=O$

همواره برقرار است. به عبارت دیگر $A^{2}=(a+d)A-(ad-bc)I_{2}$

۱۲) اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ و $A^{2}=\alpha A+\beta I_{2}$ دو تایی (α,β) کدام است؟

۱) $(2,11)$ ۲) $(2,13)$ ۳) $(4,11)$ ۴) $(4,13)$ (کنکور سراسری ریاضی ۸۴)

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $(A+I)^۶=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $a-b$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۱ ۴) ۳۶ (کنکور آزاد ریاضی۷۸)

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$A+I=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow (A+I)^۲=\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}\Rightarrow (A+I)^۴=\begin{bmatrix}۴۱ & ۴۰\\ ۴۰ & ۴۱\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$(A+I)^۶=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۶۵ & ۳۶۴\\ ۳۶۴ & ۳۶۵\end{bmatrix}\Rightarrow a-b=۱$$

نکته : $\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax^۲+(b+c)xy+dy^۲\end{bmatrix}$

مثال) جواب های معادله ی $\begin{bmatrix}x & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\end{bmatrix}=۰$ کدام است؟

۱) ۳- و ۱- ۲) ۳- و ۱ ۳) ۳ و ۱- ۴) ۳ و ۱ (کنکور سراسری ریاضی۷۰)

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{bmatrix}-x+۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\end{bmatrix}=۰\Rightarrow -x^۲+۲x+۳=۰\xrightarrow{a+c=b}x=-۱ \text{ و } x=-\frac{c}{a}=۳$$

نکته: اگر بخواهیم توان های بزرگ (بیش از ۲ و ۳) را برای ماتریس A بدست آوریم بهترین کار این است که توان دوم ماتریس A (و در بعضی موارد ضروری توان سوم A)را پیدا کنیم. در این حالت توان ۲ (و یا توان ۳) ماتریس A به قانون خاصی منجر می شود که از روی آن می توان با استدلال استقرایی و یا استنتاجی به توان بزرگ A دست پیدا کرد.

نکته : اگر داشته باشیم $۰\neq k\in R$ و $A^۲=kA$ آنگاه به ازای هر عدد طبیعی n داریم : $A^n=k^{n-۱}A$

مثال) اگر A ماتریسی مربعی و $A^۲=۳A$ باشد، در این صورت $A^{۱۰۰}$، کدام است؟

۱) $۳^{۹۹}A^{۹۹}$ ۲) $۳^{۱۰۰}A$ ۳) $۳^{۱۰۰}A^{۹۹}$ ۴) $۳^{۹۹}A$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. روش اول :

$$A^۲=۳A\Rightarrow A^n=۳^{n-۱}A, n\in N\Rightarrow A^{۱۰۰}=۳^{۹۹}A$$

روش دوم :

$$A^۱=۳^۰A \text{ و } A^۲=۳^۱A \text{ و } A^۳=A^۲A=۳AA=۳A^۲=۳^۲A$$

$$\text{و } A^۴=A^۲A^۲=۹A^۲=۳^۳A \text{ و }\cdots\Rightarrow A^n=۳^{n-۱}A\Rightarrow A^{۱۰۰}=۳^{۹۹}A$$

مثال) در ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ مجموع درایه های ماتریس $A^۳(A+I)$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۶ ۳) ۹۴ ۴) ۴۸ (کنکور آزاد تجربی غیر پزشکی۸۵)

جواب : روش اول : گزینه ۴ صحیح است.

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}=۲A\Rightarrow A^۳=۲^۲A=\begin{bmatrix}۴ & ۴\\ ۴ & ۴\end{bmatrix}$$

$$A+I=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^۳(A+I)=\begin{bmatrix}۴ & ۴\\ ۴ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۲ & ۱۲\\ ۱۲ & ۱۲\end{bmatrix}\Rightarrow \sum=۴۸$$

روش دوم : $A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۲\\۲&۲\end{bmatrix}=۲A\Rightarrow A^{۳}=۲^{۲}A=\begin{bmatrix}۴&۴\\۴&۴\end{bmatrix}$ و $A^{۴}=۲^{۳}A=\begin{bmatrix}۸&۸\\۸&۸\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^{۳}(A+I)=A^{۴}+A^{۳}=\begin{bmatrix}۸&۸\\۸&۸\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۴&۴\\۴&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۲&۱۲\\۱۲&۱۲\end{bmatrix}\Rightarrow \sum=۴۸$$

۱۳) اگر $A=\begin{bmatrix}-۱&-۱&-۱\\-۱&-۱&-۱\\-۱&-۱&-۱\end{bmatrix}$ مجموع درایه های $A^{۵}$ کدام است؟

۱) $-۳^{۷}$ ۲) $۳^{۷}$ ۳) $-۳^{۶}$ ۴) $۳^{۶}$ (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۷)

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۲&۲&۲\\۳&۳&۳\end{bmatrix}$ مجموع درایه های ستون دوم $A^{۳}$ کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۲۴ ۳) ۲۱۶ ۴) ۷۲ (کنکور آزاد ریاضی ۷۶)

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۲&۲&۲\\۳&۳&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۲&۲&۲\\۳&۳&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶&۶&۶\\۱۲&۱۲&۱۲\\۱۸&۱۸&۱۸\end{bmatrix}=۶A \text{ و } A^{۲}=kA$$

$$\Rightarrow A^{n}=k^{n-۱}A\Rightarrow A^{۳}=۶^{۲}A\Rightarrow \sum=۶^{۲}\times(۶)=۲۱۶$$

مثال) اگر رابطه ی $A=B+C$ بین ماتریس های A و B و C برقرار باشد حاصل $A^{۲}+B^{۲}-AB-BA$ کدام است؟

۱) $-C^{۲}$ ۲) $C^{۲}$ ۳) O ۴) C (کنکور آزاد ریاضی ۷۸)

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$A^{۲}+B^{۲}-AB-BA=(A-B)^{۲}=C^{۲}$$

۱۴) اگر برای دو ماتریس A و B بدانیم $AB-BA=I$ آنگاه حاصل $AB^{۲}-B^{۲}A$ برابر کدام گزینه است؟

۱) O ۲) $۲I$ ۳) $۲A$ ۴) $۲B$

دترمینان : تابعی است از مجموعه ماتریس های مربعی به مجموعه اعداد حقیقی که بر طبق قوانین معینی محاسبه می گردند.

دترمینان ماتریس های ۱×۱ : اگر $A=[a]$ آنگاه $\det A=|A|=a$

دترمینان ماتریس های ۲×۲ : اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آنگاه $\det A=|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

مثال : الف : $\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix}=۱۵-۸=۷$ ب : $\begin{vmatrix} -۵ & -۲ \\ ۱۰ & ۳ \end{vmatrix}=-۲۰+۱۵=-۵$ پ : $\begin{vmatrix} ۴ & ۶ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}=۱۲-۱۲=۰$

۱۵) اگر $A=\begin{bmatrix} Log۲ & Log۵ \\ Log۵ & Log۲ \end{bmatrix}$ ، آن گاه $|A|$ کدام است؟ ($|\ |$ ، علامت دترمینان است.)

۱) $۲Log۱/۲۵$ ۲) $Log۲/۵$ ۳) $Log۳$ ۴) $Log۶/۲۵$ (کنکورسراسری ریاضی۹۰خارج ازکشور)

۱۶) اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & |A| \\ |A| & ۱ \end{bmatrix}$ ، در این صورت حاصل $|A|$ کدام است؟

۱) ۱ یا ۲ ۲) ۱- یا ۲- ۳) ۱ یا ۲- ۴) ۱- یا ۲

نکته : هرگاه A ماتریسی ۲×۲ و مجموع درایه های روی قطر اصلی با مجموع درایه های روی قطر فرعی برابر باشد آنگاه اگر تمام عضوهای ماتریس A را با عدد k جمع کنیم دترمینان ماتریس حاصل با دترمینان ماتریس A برابر خواهد بود.

مثال) اگر تمام عضوهای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ را با عدد k جمع کنیم دترمینان ماتریس A چه تغییری می کند؟

۱) k برابر می شود ۲) تغییر نمی کند ۳) با k جمع می شود ۴) به مقدار k بستگی دارد. (کنکور آزاد ریاضی۷۶)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $|A|=۱۰-۱۲=-۲$

$$\begin{vmatrix} ۲+k & ۳+k \\ ۴+k & ۵+k \end{vmatrix}=(۲+k)(۵+k)-(۴+k)(۳+k)=۱۰+k^۲+۷k-(۱۲+k^۲+۷k)=-۲=|A|$$

ij–امین کهاد : اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد. ij–امین کهاد ماتریس A (کهاد نظیر درایه‌ی a_{ij}) را با M_{ij} نمایش می دهیم. M_{ij} را ماتریس حاصل از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A تعریف می کنیم.

حالت خاص : ij–امین کهاد : فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ ماتریس دلخواهی باشد. در این صورت ij–امین کهاد ماتریس A را که با M_{ij} نمایش می دهیم ماتریسی ۲×۲ تعریف می کنیم که ازحذف سطر iام و ستون jام ماتریس A به دست می آید.

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۹ & ۶ & ۵ \\ ۴ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$ در این صورت داریم : $M_{۳۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۹ & ۵ \end{bmatrix}$ (سطر سوم و ستون دوم ماتریس A حذف شده است.)

و $M_{۲۳}=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۶ \end{bmatrix}$ (سطر دوم و ستون سوم ماتریس A حذف شده است.)

ij –امین همسازه : فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ ماتریس دلخواهی باشد. در این صورت ij –امین همسازه ماتریس A را که با A_{ij} نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم $A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ که در آن $|M_{ij}|$ دترمینان ijامین کهاد ماتریس A است.

مثال:اگر $A=\begin{bmatrix}1&3&2\\9&6&5\\4&1&6\end{bmatrix}$ در این صورت داریم : $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&2\\9&5\end{vmatrix}=-13$ و $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}6&5\\1&6\end{vmatrix}=-31$

قضیه : فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{3\times3}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ ماتریس دلخواهی باشد. در این صورت اعداد

۱) $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$ ۲) $a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$

۳) $a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}$ ۴) $a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$

۵) $a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}$ ۶) $a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$ همگی باهم مساویند.

تعریف دترمینان : فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{3\times3}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ ماتریس دلخواهی باشد. دترمینان A را که با $|A|$ یا $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ نمایش می دهیم، یکی از ۶ عدد مساوی معرفی شده در قضیه قبل تعریف می کنیم و بسته به مورد به آن بسط نسبت به سطر یا ستون ماتریس می گوییم.

نتیجه : در محاسبه دترمینان ماتریس، بسط نسبت به هر سطر یا ستون انجام پذیرد در حاصل آن فرقی نمی کند.

مثال) $\begin{vmatrix}-1&-2&-3\\2&1&0\\5&4&3\end{vmatrix}=?$

جواب : بسط نسبت به ستون اوّل :

$$-1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\4&3\end{vmatrix}+2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2&-3\\4&3\end{vmatrix}+5(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2&-3\\1&0\end{vmatrix}$$

$$-3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\5&4\end{vmatrix}-2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&0\\5&3\end{vmatrix}+-1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&0\\4&3\end{vmatrix}=-3(5-8)+2(0-6)-(0-3)=0$$

۱۷) اگر $\begin{vmatrix}7&2&1\\1&-1&2\\2&1&x\end{vmatrix}=A+x\begin{vmatrix}7&2\\1&-1\end{vmatrix}$ ، مقدار A کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ (کنکور سراسری ریاضی ۷۸)

نکته : با توجه به تعریف دترمینان واضح است که اگر دترمینان یک ماتریس را بر حسب سطر (یا ستونی) که تعداد صفرهای واقع در آن بیش از بقیه سطرها (یا ستون ها) است بسط دهیم، ساده تر و سریع تر به جواب خواهیم رسید.

مثال) $\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = ?$

جواب : بسط نسبت به ستون اوّل :

$$= -3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3(5-8) + 3(-4+1) = 0$$

ویژگی : اگر فقط یک عضو یک سطر (و یا یک ستون) ماتریس $A_{3\times3}$ غیر صفر و بقیه درایه ها آن سطر (و یا ستون) صفر باشند بهتر است که مقدار دترمینان را با بسط نسبت به آن سطر (و یا ستون) محاسبه کنیم تا مرتبه ماتریس کاهش یابد.

مثال : بسط نسبت به ستون دوم

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

۱۸) به ازای کدام مقدار k معادله دترمینان $\begin{vmatrix} x & 0 & k \\ 1 & x+1 & 0 \\ 2 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ فقط یک ریشه دارد؟

۱) $k=1$ ۲) $k=-1$ ۳) $k=0$ ۴) $k=2$ (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۲)

۱۹) حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a & a & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) a^2 ۳) a ۴) $5a^2$ (کنکور آزاد ریاضی۸۶خارج از کشور)

دستورساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3 : در این روش که فقط برای ماتریس های 3×3 قابل استفاده است، ابتدا دو ستون سمت چپ ماتریس را در کنارش می نویسیم (یا دو سطر اوّل ماتریس را در زیر آن می نویسیم.) $|A|$ برابر است با مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر اصلی و دو خط موازی آن، منهای مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر فرعی و دو خط موازی با آن. به عبارت دیگر

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

مثال) حاصل دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ \\ ۲ & -۵ & -۶ \\ ۳ & -۱ & -۴ \end{bmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) ۹۲ ۲) ۶۲ ۳) ۴۴ ۴) ۱۲۲

جواب : گزینه ۲ صحیح است. بسط به روش ساروس :

$$|A|=\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۶ \\ ۲ & -۵ & -۶ \\ ۳ & -۱ & -۴ \end{vmatrix}\begin{matrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & -۵ \\ ۳ & -۱ \end{matrix}=(۲۰-۵۴-۱۲)-(-۹۰+۶-۲۴)=۶۲$$

۲۰) مقادیر x از رابطه‌ی $\begin{vmatrix} ۰ & x-۳ & x-۲ \\ x+۳ & ۰ & -۴ \\ x+۲ & ۶ & ۰ \end{vmatrix}=۰$ ، کدام است؟

۱) ۶- و ۱- ۲) ۶ و ۱- ۳) ۶- و ۱ ۴) ۶ و ۱ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۷)

قضیه : اگر A و B دو ماتریس دلخواه از مرتبه ۳ باشند. در این صورت $|AB|=|A||B|$

نتیجه : فرض کنیم $A_{۳\times۳}$ ماتریس دلخواه و n یک عدد طبیعی. در این صورت $|A^n|=|A|^n$

قضیه : اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند. در این صورت $|AB|=|A||B|$

مثال) اگر رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}=A\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ برقرار باشد دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴- ۳) ۴ ۴) ۲- (کنکور آزاد تجربی ۸۰)

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$\left|A\times\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۴ & ۲ \end{vmatrix}\Rightarrow|A|\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}=۴-۸\Rightarrow ۲|A|=-۴\Rightarrow|A|=-۲$$

۲۱) اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۲ \\ ۴ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۸ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $A^۳B^۲$ کدام است؟

۱) ۸- ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۴- (کنکور آزاد ریاضی عصر ۹۰)

ویژگی : دترمینان هر ماتریس مثلثی و یا قطری مانند $A_{3\times3}$ برابر حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی آن می باشد.

مثال : $\begin{vmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$

ویژگی : دترمینان هر ماتریس مثلثی و یا قطری مانند $A_{n\times n}$ برابر حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی آن می باشد.

۲۲) حاصل $\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ c & b-c & 0 \\ b & a & c-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-c & 0 & 0 \\ c & c-b & 0 \\ b & a & b-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b-c & 0 & 0 \\ c & c-a & 0 \\ b & a & a-b \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ ۲) 0

۳) $\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{3}$ ۴) $a^3+b^3+c^3$ (کنکور آزاد ریاضی ۷۹)

۲۳) اگر A یک ماتریس پایین مثلثی و 3×3 باشد و روی قطر اصلی آن اعداد طبیعی و متمایز بوده و داشته باشیم : $|A|=24$ در این صورت $|A+I|$ کدام است؟

۱) ۲۴   ۲) ۳۶   ۳) ۶۰   ۴) ۱۲۰

نتیجه : اگر k عدد حقیقی و I ماتریس همانی از مرتبه‌ی n باشد آنگاه الف : $|I| = ۱$ ب : $|kI| = k^n$

مثال) اگر $AB = I$ و A ، B و I (ماتریس همانی) ماتریس های هم مرتبه باشند، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $|A| \neq ۰$ یا $|B| \neq ۰$ ۲) $|A| \neq ۰$ و $|B| \neq ۰$ ۳) $|A| = |B|$ ۴) $A = B$

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $|AB| = |I| \Rightarrow |A||B| = ۱ \Rightarrow |A| \neq ۰$ و $|B| \neq ۰$

نکته: دترمینان هرماتریس شبه قطری ویاشبه مثلثی $A_{n\times n}$، برابربا(حاصل ضرب درایه های روی قطر فرعی) $\times (-۱)^{\left[\frac{n}{۲}\right]}$ است.

نکته: دترمینان هرماتریس شبه قطری ویا شبه مثلثی $A_{n\times n}$، برابربا(حاصل ضرب درایه های روی قطر فرعی) $\times (-۱)^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$

نتیجه: الف: دترمینان هرماتریس شبه مثلثی ویا شبه قطری $A_{۳\times ۳}$ برابر قرینه حاصل ضرب درایه های روی قطر فرعی آن می باشد

ب : دترمینان هر ماتریس شبه مثلثی و یا شبه قطری $A_{۴\times ۴}$ برابر حاصل ضرب درایه های روی قطر فرعی آن می باشد.

مثال : الف : $\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & a \\ ۰ & b & d \\ c & f & e \end{vmatrix} = -abc$ ب : $\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & a \\ ۰ & ۰ & b & e \\ ۰ & c & f & h \\ d & g & m & n \end{vmatrix} = abcd$

۲۴) اگر $\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & a \\ ۰ & b & ۰ \\ c & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = k_۱$ و $\begin{vmatrix} a+۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix} = k_۲$ کدام رابطه درست است؟

۱) $۲k_۲ - k_۱ = bc$ ۲) $k_۱ - k_۲ = bc$ ۳) $k_۱ + k_۲ = bc$ ۴) $k_۱ + k_۲ = -bc$ (کنکور آزاد ریاضی صبح ۸۱)

نکته: اگرکلیه درایه های یک سطر(ویایک ستون)ماتریس ۳ × ۳رادرعددحقیقی kضرب کنیم دترمینان ماتریس k برابر می گردد.

۲۵) اگر $\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} = -۲$ حاصل $\begin{vmatrix} a_۱ & -۳b_۱ & c_۱ \\ -۲a_۲ & ۶b_۲ & -۲c_۲ \\ a_۳ & -۳b_۳ & c_۳ \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۲-   ۲) ۶-   ۳) ۶   ۴) ۱۲   (کنکور سراسری ریاضی۷۶)

نتیجه : در حالت کلی اگر کلیه درایه های ماتریس $n \times n$ را در عدد حقیقی k ضرب کنیم دترمینان ماتریس k^n برابر می گردد.

یعنی $|kA_{n\times n}| = k^n|A|$ (بیرون آوردن عدد از داخل دترمینان)

۲۶) ماتریس A از مرتبه ۳ است. اگر مقدار دترمینان A برابر ۳ باشد، دترمینان ماتریس $3A$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۸۱ (کنکور سراسری ریاضی۷۴)

مثال) اگر A ماتریسی 3×3 و $|A| = 2$ باشد، در این صورت حاصل $\left||A|A|A|\right|$ کدام است؟

۱) 2^{10} ۲) 2^{11} ۳) 2^{12} ۴) 2^{13}

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$\left||A|A|A|\right| = \left|2^3|A|A\right| = (2^3)^3 \times 2^3|A| = 2^{13}$$

مثال) اگر ماتریس A از مرتبه‌ی ۲ و $A^2 = -4I$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس $|A+2I|$ کدام عدد می تواند باشد؟ (I ماتریس همانی از مرتبه‌ی ۲ است.)

۱) ۱۶ ۲) ۸- ۳) ۳۲- ۴) ۶۴

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$|A^2| = (-4)^2|I| = 16\times 1 \Rightarrow |A|^2 = 16 \Rightarrow |A| = \pm 4$$

$$|(A+2I)^2| = |A^2 + 4AI + 4I^2| = |-4I + 4A + 4I| = 4^2|A| \Rightarrow |A+2I|^2 = 64 \Rightarrow |A+2I| = \pm 8$$

ویژگی : اگر در ماتریس $A_{3\times 3}$ جای دو سطر را با هم و یا جای دو ستون را با هم عوض کنیم دترمینان در (۱-) ضرب می شود (یعنی قرینه می گردد).

نتیجه : اگر تعداد تعویض ها زوج باشد علامت دترمینان تغییر نمی کند ولی اگر تعداد تعویض ها فرد باشد علامت دترمینان در (۱-) ضرب می شود.

۲۷) اگر $\begin{vmatrix} \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \\ a & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = k_2$ و $\begin{vmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{vmatrix} = k_1$ باشند کدام صحیح است؟

۱) $k_1 = k_2$ ۲) $k_1 = -k_2$ ۳) $k_2 = 0$ ۴) $k_1 + abc = k_2$ (کنکور آزاد پاره وقت ریاضی ۷۳)

روش رحمانوف : این روش مخصوص دترمینان ماتریس های 3×3 می باشد و سرعت و دقت محاسبه‌ی آن نسبت به روش بسط ساروس و یا بسط تعریف دترمینان بالا تر است.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{vmatrix} = \frac{1}{e}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e & f \\ h & m \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

توجه : در روش رحمانوف اگر $e=0$ باشد به روش زیر عمل می کنیم که ستون اوّل دترمینان را بعد از ستون سوم آن می نویسیم.

$$\begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & m & g \end{vmatrix} = \frac{1}{f}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} e & f \\ h & m \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f & d \\ m & g \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

مثال : الف :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2-3 & 3-2 \\ 4-6 & 10-4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{-6+2}{2} = -2$$

ب :

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 15-0 & 1-6 \\ 0-3 & 9-2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 15 & -5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = \frac{105-15}{3} = 30$$

ویژگی : اگر کلیه درایه های یک سطر (و یا یک ستون) ماتریس 3×3 صفر باشند دترمینان آن ماتریس صفر است.

نتیجه : دترمینان ماتریس مربعی صفر، صفر است.

ویژگی : اگر در یک ماتریس مربعی دو سطر یا دو ستون برابر وجود داشته باشد، آنگاه دترمینان آن ماتریس صفر است.

۲۸) معادله‌ی $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & x^2 \\ a & b & x \\ a^3 & b^3 & x^3 \end{vmatrix} = 0$ ، $(a>b>0)$ چند ریشه دارد؟

۱) ریشه ندارد ۲) سه ریشه متمایز دارد ۳) یک ریشه ۴) یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده

(کنکور سراسری ریاضی ۶۴)

۲۹) معادله دترمینانی $\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & x^2 & x^2 \\ 1 & x^3 & x \end{vmatrix} = 0$ چند ریشه دارد؟

۱) ۳ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) بی شمار (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۸)

مثال) اگر در ماتریس $\begin{bmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{bmatrix}$ مجموع درایه های هر سطر برابر مجموع درایه های روی قطر اصلی و برابر ۱۲ باشند دترمینان آن کدام است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۵

جواب : گزینه ۲ صحیح $\begin{cases} a+b+a+a=۱۲ \\ a+b+a+b+a+b=۱۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۴ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۴ & ۴ \end{vmatrix} = ۰$

ویژگی:اگردر یک ماتریس مربعی دو سطر یا دو ستون متناسب وجود داشته باشد(به عبارت دیگر اگر در یک ماتریس مربعی سطری مضربی از سطر دیگر و یا ستونی مضربی از ستون دیگر باشد.)، آنگاه دترمینان آن ماتریس صفر است.

۳۰) در معادله‌ی $\begin{vmatrix} ۱ & x & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۴ \\ ۳ & ۳ & x \end{vmatrix} = ۰$ حاصل جمع ریشه ها کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۴ (کنکور آزاد پاره وقت ۷۳)

۳۱) معادله‌ی $\begin{vmatrix} ۲/۵x & ۳x & ۱ \\ ۵x & ۲x & ۲ \\ ۷/۵x & ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۰$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بیشمار

ویژگی : (ادغام یا تفکیک دترمینان یا دم گربه) فرض کنید A یک ماتریس ۳×۳ بوده که سطر i ام آن به صورت $[b_{i۱}+c_{i۱} \quad b_{i۲}+c_{i۲} \quad b_{i۳}+c_{i۳}]$ باشد. اگر B و C را ماتریس های بگیریم که سطرهای آن، بجز احتمالا سطر i ام، با سطرهای A یکی است و سطر i ام B به صورت $[b_{i۱} \quad b_{i۲} \quad b_{i۳}]$ و سطر i ام C به صورت $[c_{i۱} \quad c_{i۲} \quad c_{i۳}]$ است، آنگاه $|A| = |B| + |C|$.

به عبارت دیگر
$$\begin{vmatrix} b_{۱۱}+c_{۱۱} & b_{۱۲}+c_{۱۲} & b_{۱۳}+c_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

(به عبارت دیگر اگر A و B و C سه ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند، به طوری که سطر (ستون) i ام ماتریس A مساوی با مجموع سطرهای (ستون های) i ام ماتریس های B و C باشد و سایر سطرهای (ستون های) سه ماتریس برابر باشند، در این صورت داریم : $|A| = |B| + |C|$)

نتیجه : اگر در ماتریس $A = [a_{ij}]_{n \times n}$، به درایه a_{pq} مقدار k واحد افزوده شود، به دترمینان ماتریس عدد kA_{pq} واحد اضافه می شود. (A_{pq} همسازه‌ی درایه‌ی است.)

مثال) به هر درایه‌ی سطر سوم دترمینان $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ کدام عدد افزوده شود تا مقدار دترمینان ۸ واحد بیشتر گردد؟

۱) ۲-   ۲) ۱-   ۳) ۱   ۴) ۲   (کنکور سراسری ریاضی ۹۱)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 9+a & 1+a & 2+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ a & a & a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ a & a & a \end{vmatrix} = 8$$

$$\Rightarrow 5(3a-4a)-6(-2a-4a)+7(-2a-3a)=8 \Rightarrow -4a=8 \Rightarrow a=-2$$

مثال) اگر به تمام درایه های واقع در سطر دوم دترمینان $\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$، یک واحد افزوده شود، به مقدار دترمینان ۶ واحد اضافه می شد a کدام است؟

۱) ۱-   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴   (کنکور سراسری ریاضی۸۹خارج از کشور)

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4+1 & -2+1 & 7+1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$\Rightarrow 3(6-5)-(12-5a)=6 \Rightarrow 5a=15 \Rightarrow a=3$$

۳۲) اگر به تمام درایه های ستون دوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & a & 7 \\ 3 & b & 6 \end{bmatrix}$، یک واحد اضافه شود، به مقدار دترمینان ماتریس اولیه، کدام عدد اضافه می شود؟

۱) ۳-   ۲) ۲-   ۳) ۳   ۴) ۶   (کنکور سراسری ریاضی۹۶)

۳۳) اگر از هر درایه واقع در سطر دوم دترمینان زیر، ۲ برابر شماره‌ی ستون آن کم شود، به مقدار دترمینان اولیه چقدر افزوده می شود؟

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 2a & a+1 & a-1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

۱) ۱۳۲   ۲) ۱۴۴   ۳) ۱۴۸   ۴) ۱۵۶(کنکور سراسری و آزاد ریاضی خارج از کشور ۹۷)

مثال) اگر در دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۲ & a \\ ۶ & -۲ & ۳ \end{vmatrix}$ به عنصر واقع در سطر دوم و ستون سوم ۲ واحد اضافه شود به مقدار دترمینان کدام عدد افزوده می شود؟

۱) ۱۲   ۲) ۱۸   ۳) ۳۰   ۴) ۴۰   (کنکور سراسری ریاضی ۸۰)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. روش اوّل :

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴+۰ \\ ۵ & ۲ & a+۲ \\ ۶ & -۲ & ۳+۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۲ & a \\ ۶ & -۲ & ۳ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۵ & ۲ & ۲ \\ ۶ & -۲ & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۲ & a \\ ۶ & -۲ & ۳ \end{vmatrix} + (-۲)\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۶ & -۲ \end{vmatrix} = |A| + ۴۰$$

روش دوم :

$$۲A_{۲۳} = ۲(-۱)^{۲+۳} \times \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۶ & -۲ \end{vmatrix} = ۴۰$$

۳۴) حاصل $\begin{vmatrix} a & b-c & d-e \\ b & c & ۰ \\ -b & c & ۲d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۲a & c-b & e-d \\ -b & -c & ۰ \\ b & -c & -۲d \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $۶acd$ ۲) $-۶acd$ ۳) صفر   ۴) $-۴cd$ (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۱)

نکته : روش آزمون عدد برای تشخیص جواب یک دترمینان : در محاسبه‌ی بعضی از دترمینان ها که درایه ها پارامتری هستند و می خواهیم حاصل دترمینان را در بین گزینه مشخص کنیم از روش عدد گذاری به جای پارامترها استفاده می کنیم در این روش به نکات زیر توجه می کنیم :

الف : به ازای اعداد انتخاب شده، گزینه ها تا حد امکان به اعداد متفاوتی تبدیل شوند.

ب : اگر چند پارامتر در مسئله وجود دارد بهتر است (در صورت امکان) اعداد آن ها را یکسان انتخاب کنیم تا سرعت و دقت محاسبات بیشتر شود.

ج : اعداد انتخاب شده در شرایط مسئله صدق کنند.

د : در مسئله های جبری حتی الامکان از اعداد ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ و در مسئله های مثلثاتی از زاویه های صفر و ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ و ۹۰ و ... درجه استفاده شود مناسبتر است.

مثال) اگر دترمینان $D = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ bc & ac & ab \\ ac & ab & bc \end{vmatrix}$، باشد حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a+b & b & ab \\ b+c & c & bc \\ a+c & a & ac \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $-D$ ۲) D ۳) $((a+b+c)D)$ ۴) $(abc)D$ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۳)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.روش اوّل :

$$\begin{vmatrix} a+b & b & ab \\ b+c & c & bc \\ a+c & a & ac \end{vmatrix} \overset{C_۱ - C_۲ \to C_۱}{=} \begin{vmatrix} a & b & ab \\ b & c & bc \\ c & a & ac \end{vmatrix} \overset{\text{فاکتورگیری}}{=}$$

$$(ab)(bc)(ac)\begin{vmatrix} \frac{۱}{b} & \frac{۱}{a} & ۱ \\ \frac{۱}{c} & \frac{۱}{b} & ۱ \\ \frac{۱}{a} & \frac{۱}{c} & ۱ \end{vmatrix} \underset{abcC_۲ \to C_۲}{\overset{abcC_۱ \to C_۱}{=}} \begin{vmatrix} ac & bc & ۱ \\ ab & ac & ۱ \\ bc & ab & ۱ \end{vmatrix} \overset{\text{ترانهاده}}{=} \begin{vmatrix} ac & ab & bc \\ bc & ac & ab \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} \overset{L_۱ \leftrightarrow L_۳}{=}$$

$$-\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ bc & ab & ab \\ ac & ac & bc \end{vmatrix} = -D$$

روش دوم : آزمون عدد

$$\begin{cases} a = ۱ \\ b = ۱ \\ c = ۰ \end{cases} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = ۱\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix} = -۱$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b & ab \\ b+c & c & bc \\ a+c & a & ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = ۱\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۱ = -D$$

روش دوم : آزمون عدد

$$\begin{cases} a = ۱ \\ b = ۲ \\ c = ۲ \end{cases} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۴ \end{vmatrix}\begin{matrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{matrix} = (۸+۴+۸)-(۴+۴+۱۶) = -۴$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b & ab \\ b+c & c & bc \\ a+c & a & ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۴ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}\begin{matrix} ۳ & ۲ \\ ۴ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{matrix} = (۱۲+۲۴+۸)-(۱۲+۱۲+۱۶) = ۴ = -D$$

۳۵) اگر $\begin{vmatrix} ۶ & ۳x & ۲x \\ ۳x & ۲x & ۶ \\ ۲x & ۶ & ۳x \end{vmatrix} = D$ دترمینان باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} x^۲ & x^۲ & ۶ \\ ۹ & ۲x & ۹ \\ ۳x & ۴ & ۴ \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $-۲D$ ۲) $-D$ ۳) $\frac{۱}{۲}D$ ۴) D (کنکور سراسری ریاضی ۹۳ خارج از کشور)

ویژگی : اگر در ماتریس $A_{3\times3}$ حاصل ضرب عناصر یک سطر (یا ستون) در یک عدد ثابت را، به سطر (یا ستون) دیگری بیفزاییم دترمینان تغییر نمی کند.

مثال)
$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = ?$$

جواب : بسط به روش ساروس :
$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix} = (-15-12+0)-(-3-24+0)=0$$

نکته : هرگاه درایه های ماتریس مربعی شامل m عدد صحیح متوالی است، دترمینان آن ماتریس صفر است.

مثال :
$$\begin{vmatrix} a & a+d & a+2d \\ a+3d & a+4d & a+5d \\ a+6d & a+7d & a+8d \end{vmatrix} = 0$$

نتیجه :
$$\begin{vmatrix} m & m+3 & m+6 \\ m+1 & m+4 & m+7 \\ m+2 & m+5 & m+8 \end{vmatrix} = 0$$

۳۶) حاصل دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} a-4 & a-3 & a-2 \\ a-1 & a & a+1 \\ a+2 & a+3 & a+4 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) a^3 ۲) صفر ۳) $a(a^2-16)$ ۴) $-a(a^2-4)$

نکته : اگر a، b دو عدد حقیقی و i و j شماره‌ی سطر و ستون هر درایه باشند، دترمینان ماتریس $A=[ai+bj]_{3\times3}$ صفر است. به عبارت دیگر

$$A=[ai+bj]_{3\times3}=\begin{bmatrix} a+b & a+2b & a+3b \\ 2a+b & 2a+2b & 2a+3b \\ 3a+b & 3a+2b & 3a+3b \end{bmatrix}\Rightarrow |A| \underset{C_3-C_1\to C_3}{\overset{C_2-C_1\to C_2}{=}} \begin{vmatrix} a+b & b & 2b \\ 2a+b & b & 2b \\ 3a+b & b & 2b \end{vmatrix}=0$$

مثال)اگر a، b دو عدد حقیقی و i و j شماره‌ی سطر و ستون هر درایه باشند، دترمینان ماتریس $A=[ai+bj]_{3\times3}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $a+b$ ۳) $a.b$ ۴) $ab(a+b)$ (کنکور سراسری ریاضی۸۹)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$A=[ai+bj]_{3\times3}=\begin{bmatrix} a+b & a+2b & a+3b \\ 2a+b & 2a+2b & 2a+3b \\ 3a+b & 3a+2b & 3a+3b \end{bmatrix}\Rightarrow |A| \underset{C_3-C_1\to C_3}{\overset{C_2-C_1\to C_2}{=}} \begin{vmatrix} a+b & b & 2b \\ 2a+b & b & 2b \\ 3a+b & b & 2b \end{vmatrix}=0$$

۳۷) اگر $a+b+c=5$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{bmatrix} 4+a & b & c \\ a & 4+b & c \\ a & b & 4+c \end{bmatrix}$، کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۴ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۴۴ (کنکور سراسری ریاضی۹۶خارج از کشور)

مثال) در ماتریس $A=\begin{bmatrix} a+x & a & a \\ b & b+x & b \\ c & c & c+x \end{bmatrix}$ اگر مجموع تمام درایه ها برابر ۶ و مقدار $|A|=8$ باشد، x کدام است؟

۱) ۰   ۲) ± 1 ۳) ± 2 ۴) ± 3 (کنکور سراسری ریاضی ۸۵)

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$3(a+b+c+x)=6 \Rightarrow a+b+c+x=2$$

$$\overset{L_1+L_2+L_3\to L_1}{=} (a+b+c+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & b+x & b \\ c & c & c+x \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2-C_1\to C_2 \\ C_3-C_1\to C_3}}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & x & 0 \\ c & c & x \end{vmatrix}=8$$

$$\overset{(\text{مثلثی})}{\Rightarrow} 2x^2=8 \Rightarrow x=\pm 2$$

نکته : دترمینان واندرموند :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}=(x-y)(y-z)(z-x)$$

۳۸) حاصل $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & y & x \\ z^2 & y^2 & x^2 \end{vmatrix}$ برابر است با :

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۱-   ۴) $(x-y)(y-z)(z-x)$ (کنکور آزاد ریاضی ۷۶)

۳۹) حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 7 & 4 \\ 81 & 49 & 16 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۲۸   ۲) ۲۹   ۳) ۳۰   ۴) ۲۷   (کنکور آزاد ریاضی صبح ۹۱)

نکته : اگر $A_{m\times n}$ و $B_{n\times m}$ دو ماتریس غیر مربعی باشند، به طوری که $(m=n+1)$ (تعداد سطرهای ماتریس A یکی بیشتر از تعداد ستون های آن باشد) ، آن گاه $|AB|=0$.

۴۰) اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ در آن صورت دترمینان A کدام است؟

۱) ۱   ۲) صفر   ۳) ۵   ۴) ۹

نکته : اگر در ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ تمام درایه های قطر اصلی با هم برابر و بقیه‌ی درایه ها نیز با هم برابر باشند، آن گاه داریم :

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

مثال) حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ab^2 ۲) a^3b^2 ۳) $(a+2b)^3$ ۴) $(a+2b)(a-b)^2$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. روش اوّل :

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=(a+(3-1)b)(a-b)^{3-1}=(a+2b)(a-b)^2$$

روش دوم :

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}\overset{C_1+C_2+C_3\to C_1}{=}\begin{vmatrix} a+2b & b & b \\ a+2b & a & b \\ a+2b & b & a \end{vmatrix}\overset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{=}\begin{vmatrix} a+2b & b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}\overset{\text{مثلثی}}{=}(a+2b)(a-b)^2$$

روش سوم آزمون عدد :

$$\begin{matrix} a=2 \\ b=1 \end{matrix}\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2(4-1)-1(2-1)+1(1-2)=4=(2+2)(2-1)^2$$

مثال) حاصل $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$ همواره کدام است؟

۱) $(x-y)(y-z)(z-x)$ ۲) $(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$

۳) $(x+y)(y+z)(z+x)$ ۴) صفر

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}\overset{\substack{C_2-C_1\to C_2 \\ C_3-C_1\to C_3}}{=}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^3 & y^3-x^3 & z^3-x^3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{فاکتور}}{=}(y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ x^3 & y^2+yx+x^2 & z^2+zx+x^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_3-C_2\to C_3}{=}-(x-y)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^3 & y^2+yx+x^2 & z^2+zx-y^2-yx \end{vmatrix}$$

$$= -(x-y)(z-x)\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ x & ۱ & ۰ \\ x^۳ & y^۲+yx+x^۲ & -(y-z)(x+y+z) \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{مثلثی}}{=} (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

روش دوم : روش سوم : آزمون عدد

$$\begin{cases} a=۱ \\ b=۲ \\ c=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۸ & ۲۷ \end{vmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۲-۱ & ۳-۲ \\ ۸-۲ & ۵۴-۲۴ \end{vmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۶ & ۳۰ \end{vmatrix} = ۱۲ = (۱-۲)(۲-۳)(۳-۱)(۱+۲+۳)$$

۴۱) حاصل $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۸ & ۲۷ & ۶۴ \end{vmatrix}$ همواره کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱۸ ۳) ۴۸۰ ۴) صفر

نکته : اگر $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ و $c=(c_۱,c_۲,c_۳)$ بردارهایی از $R^۳$ باشند در این صورت داریم :

الف : $a.(b\times c)=\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}$ ب : سه بردار a و b و c هم صفحه اند اگر وتنها اگر $a.(b\times c)=\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}$

مثال) به ازاء کدام مقدار سه بردار $a=(m+۲,۳,۲)$ و $b=(۰,۵,۴)$ و $c=(۰,۰,۳)$ هم صفحه اند؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۴

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} m+۲ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۵ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow ۱۵(m+۲)=۰ \Rightarrow m=-۲$$

نکته : اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ و $C(x_۳,y_۳)$ رئوس مثلث ABC از صفحه‌ی $R^۲$ باشند آنگاه مساحت مثلث ABC برابر است با : $\frac{۱}{۲}\left\|\begin{matrix} x_۱ & x_۲ & x_۳ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ \end{matrix}\right\|$ و یا $\frac{۱}{۲}\left\|\begin{matrix} x_۱-x_۲ & x_۱-x_۳ \\ y_۱-y_۲ & y_۱-y_۳ \end{matrix}\right\|$

مثال) مساحت مثلثی با سه رأس $A(۲,۳)$ و $B(-۱,۴)$ و $C(۰,۲)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$s=\frac{۱}{۲}\left\|\begin{matrix} x_۱ & x_۲ & x_۳ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{matrix}\right\| = \frac{۱}{۲}\left\|\begin{matrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ -۱ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{matrix}\right\| = ۲/۵$$

و یا

$$s=\frac{۱}{۲}\left\|\begin{matrix} x_۱-x_۲ & x_۱-x_۳ \\ y_۱-y_۲ & y_۱-y_۳ \end{matrix}\right\| = \frac{۱}{۲}\left\|\begin{matrix} ۲+۱ & ۲-۰ \\ ۳-۴ & ۳-۲ \end{matrix}\right\| = \frac{۱}{۲}\left\|\begin{matrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{matrix}\right\| = ۲/۵$$

نکته: معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ در R^2 می گذرد به صورت زیر است. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$

مثال) ضریب زاویه‌ی خط $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix}=0$ کدام است؟

۱) $\frac{d-b}{a-c}$ ۲) $\frac{a-b}{c-d}$ ۳) $\frac{a-c}{b-d}$ ۴) $\frac{b-d}{a-c}$ (کنکور سراسری ریاضی ۶۹)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. معادله‌ی خطی است که از دو نقطه‌ی (a,b) و (c,d) می گذرد پس $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{b-d}{a-c}$

مثال) به ازای کدام مقدار a، دو خط D و D' به ترتیب به معادلات $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$ در صفحه‌ی R^2 بر هم بر هم عمودند؟

۱) ۲- ۲) ۳ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۵-

جواب:گزینه ۲ صحیح است. معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ در R^2 می گذرد به صورت زیر است.

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$ پس : $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3-2}{2-a}=\frac{1}{2-a}$ و $m'=\frac{2-2a}{-3-1}=\frac{a-1}{2}$

و در نتیجه : $D\perp D'\Rightarrow mm'=-1\Rightarrow \frac{1}{2-a}\times\frac{a-1}{2}=-1\Rightarrow a-1=2a-4\Rightarrow a=3$

تعریف : فرض کنیم A یک ماتریس مربعی باشد. اگر ماتریسی مانند B موجود باشد طوری که $AB=BA=I$، آنگاه می گویند A وارونپذیر(یا نامنفرد) است و B را نیز وارون می نامند. و با A^{-1} نمایش می دهند یعنی $B=A^{-1}$.

توجه : اگر ماتریس A وارون ماتریس B باشد بدیهی است که B نیز وارون ماتریس A است یعنی $A=B^{-1}$.

مثال : برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ماتریس $B=\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ موجود است طوری که $AB=BA=I$. لذا A وارونپذیر(یا نامنفرد) است و B را نیز وارون آن می گویند.

قضیه یکتایی وارون : وارون هر ماتریسی مربعی (در این کتاب فقط وارون ماتریس های 2×2 محاسبه شده است.) در صورت وجود منحصر به فرد است.

اثبات : فرض کنیم A ماتریسی $n\times n$ و دارای دو وارون B و C باشد،

پس طبق تعریف داریم : $AB=BA=I$ و $AC=CA=I$

$B=BI=(CA)B=C(AB)=CI=C$

تذکر : اگر A ماتریسی وارون پذیر باشد، وارون آن را به A^{-1} نشان می دهند و داریم : $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس $(2A)(3A^{-1})$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶ (کنکور سراسری تجربی۸۷خارج از کشور)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $\left|(2A)(3A^{-1})\right| = 6^2\left|AA^{-1}\right| = 36|I| = 36\times 1 = 36$

مثال) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه و وارون پذیر باشند و $A+B=AB$ حاصل $A^{-1}+B^{-1}$ کدام است؟

۱) O ۲) I ۳) $A^{-1}B^{-1}$ ۴) $B^{-1}A^{-1}$

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$A+B=AB \Rightarrow A^{-1}(A+B)B^{-1}=A^{-1}ABB^{-1} \Rightarrow IB^{-1}+A^{-1}I=I \Rightarrow A^{-1}+B^{-1}=I$$

مثال) اگر داشته باشیم، $A^2+A-I=O$ ، وارون ماتریس A کدام است؟

۱) $A-I$ ۲) $A+I$ ۳) $I-A$ ۴) A^2

جواب : گزینه ۲ درست است. روش اوّل : با استفاده از تجزیه یک طرف تساوی را به I و طرف دیگر حاصل ضرب ماتریس A در یک پرانتز تبدیل می کنیم. $A^2+A-I=0 \Rightarrow A(A+I)=I$

و $|A(A+I)|=|I| \Rightarrow |A||A+I|=1\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} : A^{-1}=A+I$

روش دوم : $A^{-1}(A^2+A-I)=A^{-1}\times O \Rightarrow A+I-A^{-1}=O \Rightarrow A^{-1}=A+I$

۴۲) اگر دو ماتریس A و $(I-A)$ وارون هم باشند، ماتریس A^4 ، کدام است؟

۱) A ۲) $-A$ ۳) I ۴) $-I$ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۵)

مثال) اگر A یک ماتریس مربعی باشد به طوری $A^2\neq o$ و $A^3=o$ آن گاه معکوس ماتریس $I-A$ به کدام صورت است؟

۱) A^2-A ۲) A^2+A ۳) A^2-A+I ۴) A^2+A+I (کنکور سراسری ریاضی ۸۹)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. با استفاده از تجزیه یک طرف تساوی را به I و طرف دیگر حاصل ضرب ماتریس A در یک پرانتز تبدیل می کنیم. $I^3-A^3=I \Rightarrow (I-A)(I^2+A+A^2)=I \Rightarrow (I+A)^{-1}=A^2+A+I$

نکته : اگر k یک عدد حقیقی و ناصفر باشد، در این صورت ماتریس kI وارونپذیر و وارون آن $\frac{1}{k}I$ است.

نکته : اگر A ماتریسی وارونپذیر باشد (A^{-1} وجود داشته باشد) و B و C دو ماتریس دلخواه باشند، به طوری که AB و AC تعریف شود، در این صورت داریم : $AB=AC \Rightarrow B=C$ (قاعده حذف ضربی)

نتیجه : اگر A ماتریسی وارونپذیر باشد و داشته باشیم $AB=O$ ، در این صورت : $B=O$

نکته : اگر جمع دو ماتریس وارونپذیر ماتریس اسکالر باشد آن گاه ضرب آن ها دارای خاصیت جابجایی است یعنی :

$A+B=kI$ و $K\neq 0$ و $|A|\neq 0$ و $|B|\neq 0 \Rightarrow AB=BA$

قضیه : فرض کنیم A یک ماتریس وارون پذیر باشد. در این صورت $|A| \neq ۰$.

نکته : شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد آن است که $|A| \neq ۰$.

نکته : شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس مربعی A وارون ناپذیر باشد آن است که $|A| = ۰$.

نکته : اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند به طوری که $AB = I$، آنگاه A وارون پذیر است و $B = A^{-۱}$

مثال) به ازای کدام مقدار a ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & a \end{bmatrix}$ معکوس پذیر نیست؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (کنکور سراسری ریاضی ۷۷)

جواب:گزینه۳صحیح است $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & a \end{vmatrix}\begin{matrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{matrix} = ۰ \Rightarrow (-a + ۰ + ۶) - (-۹ + ۰ + ۴a) = ۰ \Rightarrow -۵a = -۱۵ \Rightarrow a = ۳$

۴۳) اگر $A = \begin{bmatrix} a & -۳ \\ ۵ & a+۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند، به ازای کدام مقدار a ماتریس $A + ۲B$، وارون پذیر نیست؟

۱) ۵، ۷- ۲) ۷، ۵- ۳) ۴، ۷- ۴) ۵، ۳- (کنکور سراسری تجربی ۹۵ خارج از کشور)

مثال) ماتریس $A = \begin{bmatrix} a+۱ & ۱ \\ ۲ & a+۲ \end{bmatrix}$ با چه شرطی وارون پذیر است؟

۱) $a \neq ۰,۳$ ۲) $a = ۰,-۳$ ۳) $a = ۰,۳$ ۴) $a \neq ۰,-۳$ (کنکور آزاد ریاضی۷۹)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. یک ماتریس زمانی وارون پذیر است که دترمینان آن مخالف صفر باشد،

پس : $|A| = (a+۱)(a+۲) - ۲ \neq ۰ \Rightarrow a^۲ + ۳a \neq ۰ \Rightarrow a \neq ۰$ و -۳

قضیه (وارون پذیری ماتریس های ۲ × ۲) : ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارونپذیر است اگر و تنها اگر $|A| \neq ۰$ و در این صورت

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نتیجه: برای تعیین وارون ماتریس های وارون پذیر ۲ × ۲ : ابتدا جای درایه های روی قطر اصلی را در ماتریس با هم عوض می کنیم سپس درایه های روی قطر فرعی را قرینه می کنیم دست آخر هر یک از درایه های حاصل را بر دترمینان ماتریس تقسیم می کنیم.

مثال) ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $A \times B$ ماتریس واحد باشد، مجموع درایه های سطر اوّل ماتریس B کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵ (کنکور سراسری و آزاد تجربی ۹۳)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. اگر حاصل ضرب دو ماتریس، ماتریس واحد باشد، هر یک از آن ها معکوس دیگری است.

$$A\times B=I\Rightarrow B=A^{-۱}=\frac{۱}{۱۴-۱۲}\begin{bmatrix}۷ & -۳\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۷}{۲} & -\frac{۳}{۲}\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow \frac{۷}{۲}+(-\frac{۳}{۲})=۲$$

مثال) وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$ ۲) $\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ -۲ & ۲\end{bmatrix}$ ۳) $\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$ ۴) $\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ (کنکور آزاد ریاضی ۶۶)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۸\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$$

۴۴) اگر $A=\begin{bmatrix}۱۲ & -۸\\ ۱۰ & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱۰ & -۶\\ ۷ & ۳\end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $(A-B)^{-۱}$، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-۰/۲ & ۰/۱\\ ۰/۳ & ۰/۲\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۰/۳ & -۰/۲\\ ۰/۲ & ۰/۴\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۰/۲ & -۰/۲\\ ۰/۳ & ۰/۴\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۰/۲ & ۰/۲\\ -۰/۳ & ۰/۲\end{bmatrix}$ (کنکور سراسری و آزاد تجربی ۹۴)

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴ & -۶\\ ۳ & -۵\end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $A^{-۱}.(۲B)$، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۵ & -۷\\ -۱۱ & ۱۵\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۸ & -۱۵\\ -۷ & ۱۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۱۰ & -۷\\ -۹ & ۱۳\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱۰ & -۱۴\\ -۱۱ & ۱۵\end{bmatrix}$ (کنکور سراسری تجربی۹۶)

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۱۲-۱۰}\begin{bmatrix}۴ & -۲\\ -۵ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ \frac{-۵}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix} \text{ و } ۲B=\begin{bmatrix}۸ & -۱۲\\ ۶ & -۱۰\end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}.(۲B)=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ \frac{-۵}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۸ & -۱۲\\ ۶ & -۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰ & -۱۴\\ -۱۱ & ۱۵\end{bmatrix}$$

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۵ & ۴\end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $(A\times B)^{-۱}$، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰/۵ & ۰/۵\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰/۵ & ۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۰/۵ & ۰\\ -۰/۵ & ۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۰/۵ & ۰/۵\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$

(کنکور سراسری تجربی ۹۴ خارج از کشور)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$(A\times B)^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰/۵ & ۰/۵\end{bmatrix}$$

۴۵) اگر $A=\begin{bmatrix}0 & -\tan\alpha\\ \tan\alpha & 0\end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی مرتبه ۲ باشد. سطر اوّل ماتریس $(I-A)^{-1}(I+A)$، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\end{bmatrix}$　　۲) $\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}\sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{bmatrix}$　　۴) $\begin{bmatrix}-\sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{bmatrix}$　　(کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۲)

۴۶) چند ماتریس 2×2 مانند A وجود دارد که $A\times\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ باشد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) بیشمار　　۴) صفر　　(کنکور آزاد ریاضی عصر ۹۰)

مثال) از رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$، سطر اوّل ماتریس A، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}12 & -17\end{bmatrix}$　　۲) $\begin{bmatrix}-21 & 30\end{bmatrix}$　　۳) $\begin{bmatrix}-17 & 30\end{bmatrix}$　　۴) $\begin{bmatrix}12 & -21\end{bmatrix}$　　(کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۲)

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow A=\frac{-1}{2}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 3\\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & -21\\ & \end{bmatrix}$$

نکته : اگر A و B دو ماتریس مربع هم مرتبه و $\alpha\neq 0$ و $AB=\alpha I$، در این صورت A و B وارونپذیرند و $AB=BA$.

نکته : درصورتی که A و B ماتریس های مربعی هم مرتبه و وارون پذیر و ضرب ماتریس ها تعریف شده باشد آنگاه :

۱) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

۲) $0\neq\lambda\in R:(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$

۳) $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$

مثال) اگر A و B ماتریس های وارون پذیر و λ یک عدد حقیقی باشد، کدام گزینه در مورد دترمینان آن ها نادرست است؟

۱) $|A^{-1}|=|A|^{-1}$ ۲) $|AB|=|BA|$ ۳) $|\lambda A|=\lambda|A|$ ۴) $|AB^{-1}|=|A||B^{-1}|$ (کنکور سراسری ریاضی ۹۱)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. اگر کلیه درایه های ماتریس $n\times n$ را در عدد حقیقی λ ضرب کنیم دترمینان ماتریس λ^n برابر می گردد . به عبارت دیگر $|\lambda A|=\lambda^n|A|$

مثال) اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix}۲&۱\\۴&۳\end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۰/۵- (کنکور آزاد تجربی۸۷خارج از کشور)

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$|A|=\frac{۱}{|A^{-1}|}=\frac{۱}{۴-۶}=-\frac{۱}{۲}$$

۴۷) اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&-۱\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $۳A^{-1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) $\frac{۱}{۳}$ (کنکور آزاد تجربی ۸۸)

۴۸) به ازای چند مقدار m دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}۳&m\\۱&۲\end{bmatrix}$ و دترمینان معکوس آن برابر می شود؟ $(|A|=|A^{-1}|)$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

مثال) به ازای کدام مقدار a دستگاه معادلات خطی $\begin{bmatrix}۳&۴\\۷&۸\\۴&-۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\۳\\a\end{bmatrix}$ جواب منحصر بفرد دارد؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰ (کنکور سراسر تجربی ۷۷)

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{cases}۴x+۳y=-۱\\ ۸x+۷y=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-۴\\ y=۵\end{cases}$$ و $-۵x+۴y=a\Rightarrow ۲۰+۲۰=a\Rightarrow a=۴۰$

قضیه : فرض کنیم $AX=B$ شکل ماتریسی دستگاه دو معادله دو مجهولی باشد. اگر $|A|\neq ۰$، آنگاه دستگاه $AX=B$ دارای جواب منحصر به فرد به شکل $X=A^{-1}B$ است.

نکته : اگر ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ را $A=\begin{bmatrix}a&b\\a'&b'\end{bmatrix}$ در نظر بگیریم در این صورت می توان گفت:

۱) اگر $|A| \neq 0$ آنگاه دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ است (دو خط متقاطع اند).

۲) اگر $|A| = 0$ در این صورت یکی از دو مورد زیر رخ می دهد:

الف) اگر $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0$ و $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \neq 0$ باشد دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی اند)

ب) اگر $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$ و $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0$ باشد دستگاه بی شمار جواب دارد (دو خط بر هم منطبق هستند).

مثال)در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = f \\ cx + dy = 1 \end{cases}$ معکوس ماتریس مجهول، به صورت $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ است. اگر $x = 1$، مقدار y کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳ (کنکور سراسری ریاضی ۸۶)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} f \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \\ 2f - 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 = -f \Rightarrow f = -1 \\ y = 2f - 1 = -2 - 1 = -3 \end{cases}$$

مثال) در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات، به صورت $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است، $x + y$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴ (کنکور سراسری ریاضی ۸۲)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. روش اوّل :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 2 \Rightarrow x + y = 4$$

روش دوم :

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x = 1$ و $y = 3 \Rightarrow x + y = 4$

مثال) به ازای کدام مجموعه مقادیر α، معادلهی ماتریسی $\begin{bmatrix} \alpha + 1 & 2 \\ -1 & \alpha - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$، جواب دارد؟

۱) $\{-1, 1\}$ ۲) $R - \{0, 1\}$ ۳) ϕ ۴) R (کنکور سراسری تجربی ۸۸)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. روش اوّل :

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha + 1 & 2 \\ -1 & \alpha - 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 - 1 + 2 \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 \neq -1 \Rightarrow \alpha \in R$$

روش دوم :

$$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha + 1)x + 2y = \alpha \\ -x + (\alpha - 1)y = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha + 1}{-1} \neq \frac{2}{\alpha - 1} \Rightarrow \alpha^2 - 1 \neq -2 \Rightarrow \alpha^2 \neq -1 \Rightarrow \alpha \in R$$

مثال) دستگاه معادلات $\begin{cases} (m - 3)x + 3y = m \\ 4x + (m + 1)y = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار m غیرممکن است؟

۱) ۵- ۲) ۳- ۳) ۳ ۴) ۵ (کنکور سراسری ریاضی ۷۲)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. برای اینکه دستگاه غیرهمگن جواب نداشته و یا دارای بیشمار جواب باشد باید دترمینان ماتریس

ضرایب آن مساوی صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} m-۳ & ۳ \\ ۴ & m+۱ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۲m - ۱۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m=-۳ \Rightarrow \frac{-۶}{۴} = \frac{۳}{-۲} = \frac{-۳}{۲} \otimes \\ m=۵ \Rightarrow \frac{۲}{۴} = \frac{۳}{۶} \neq \frac{۵}{۲} \end{cases}$$

۴۹) به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} mx+y=m-۱ \\ ۳x+(m-۲)y=۴-۲m \end{cases}$ دارای بیشمار جواب است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار m (کنکور سراسری و آزاد تجربی ۹۳)

حل دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ **به روش کرامر :**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \quad \text{و} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

در این روش برای محاسبه‌ی هر مجهول، ستون ضرایب آن را در ماتریس ضرایب دستگاه بر می داریم و به جای آن مقادیر ثابت دستگاه را قرار می دهیم و دترمینان آن را صورت کسر می گذاریم و مخرج کسر هم همواره دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه است.

مثال) در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax-۳y=۷ \\ bx+۴y=۲ \end{cases}$ اگر دترمینان ماتریس ضرایب مجهولات برابر ۱۷ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲- (کنکور سراسری تجربی ۸۴خارج از کشور)

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} ax-۳y=۷ \\ bx+۴y=۲ \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} ۷ & -۳ \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -۳ \\ b & ۴ \end{vmatrix}} = \frac{۲۸+۶}{۱۷} = \frac{۳۴}{۱۷} = ۲$$

۵۰) اگر جواب x از دستگاه معادلات $\begin{cases} ax-y=۱ \\ bx+۲y=۳ \end{cases}$ برابر ۲/۵ باشد، مقدار $۲a+b$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲ (کنکور سراسری ریاضی ۸۱)

۵۱) اگر دستگاه $\begin{cases} ax+y=۰ \\ x+ay=۰ \end{cases}$ جواب غیر صفر داشته باشد آنگاه :

۱) $a \neq \pm۱$ ۲) $a=۰$ ۳) $a=\pm۱$ ۴) $a \neq ۰$ (کنکور آزاد تجربی ۷۸)

۵۲) اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، ماتریس B از معادله‌ی $AB=۲I$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۱ \end{bmatrix}$

(کنکور سراسری تجربی۹۱خارج از کشور)

قضیه : فرض کنیم $AX=0$ شکل ماتریسی دستگاه دو معادله دو مجهولی همگن باشد. در این صورت

الف) اگر $|A| \neq ۰$، آنگاه $AX=0$ دستگاه دارای جواب منحصر به فرد به شکل $X=0$ است.

ب) اگر $|A|=۰$، آنگاه $AX=0$ دستگاه دارای بیشمار است.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۴	۲	۳	۴	۱	۱	۲	۴	۳	۳	۱	۲	۳	۴	۲	۴	۱	۲	۲	۳
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۲	۳	۳	۳	۱	۴	۱	۲	۱	۳	۴	۱	۴	۱	۲	۲	۴	۴	۳	۲
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲								
۲	۲	۱	۴	۱	۱	۲	۳	۲	۴	۳	۱								