به نام خدا

هندسه ۳ – فصل بردارها – درس اول – معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

با صفحه و دستگاه مختصات دو بعدی آشنایی داریم و می دانیم هر نقطه از صفحه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند (a,b) که $a,b \in \mathbb{R}$ مشخص می‌شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه را مشخص می‌کند. همچنین با معادله خط در صفحه آشنایی دارید و می‌دانید که حالت کلی آن به صورت $ax+by=c$ است که در آن $a,b,c \in \mathbb{R}$.

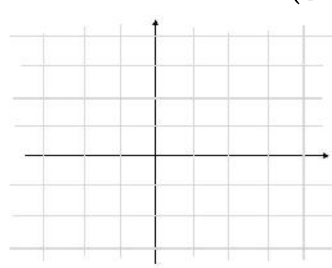
به طور کلی هر وقت گفته می‌شود رابطه یا معادله‌ای نمودار G را مشخص می‌کند یعنی مختصات هر نقطه از نمودار G در آن رابطه یا معادله صدق می‌کند و برعکس هر نقطه که مختصات هر نقطه آن در رابطه یا معادله مذکور صدق کند روی نمودار G قرار دارد.

با توجه به آنچه گفته شد می‌خواهیم در فضای R^2 یا همان صفحه، با داشتن برخی روابط شکلهای متناظر با آنها را و یا برعکس با داشتن برخی شکل‌ها، روابط مرتبط به آنها را مشخص نماییم.

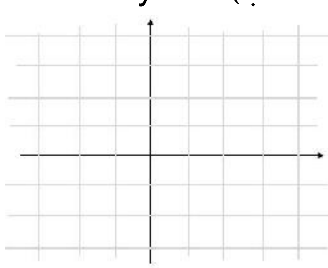
کار در کلاس

۱) برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می‌کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن رابطه را تعیین نمایید.

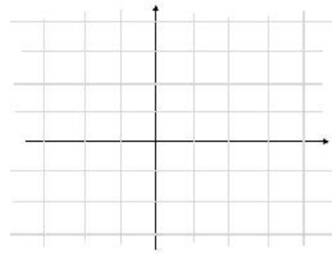
الف) $x=0$



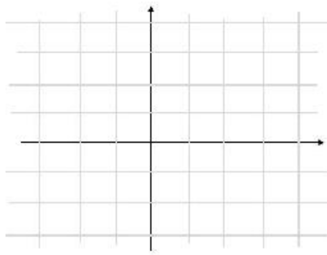
ب) $y=0$



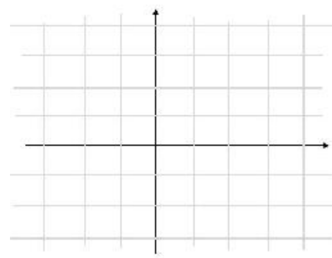
پ) $x = ۱$



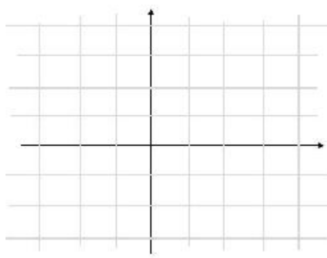
ت) $-۱ \le y \le ۳$, $x = ۱$



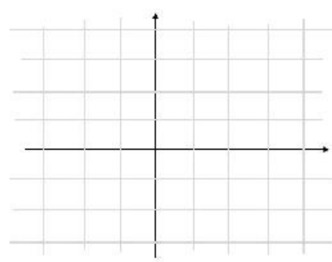
ث) $۰ \le x \le ۲$, $y = x^۲$



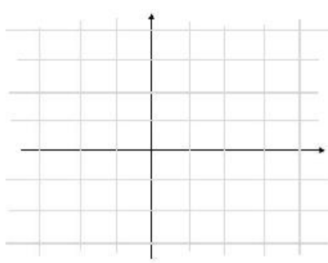
ج) $۱ \le x \le ۲$, $y = x^۲$



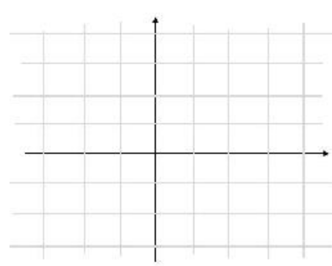
چ) $y \ge x^۲$



ح) $x^۲ < y \le ۲$

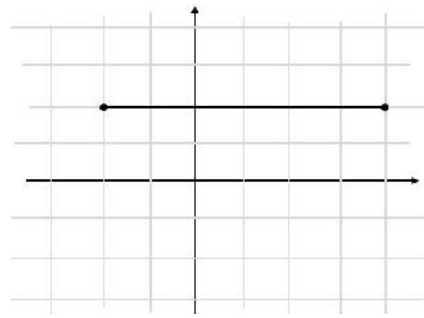


خ) $۱ \le y \le ۲$, $-۱ \le x \le ۱$

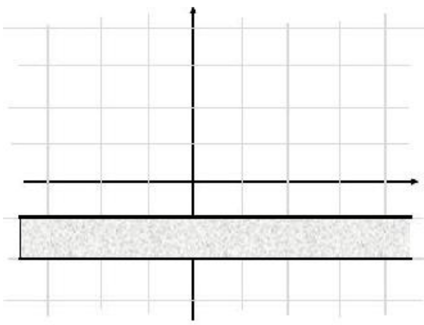


۲) در هر یک ازشکلهای زیر ابتدا مختصات چند نقطه از ان شکل را مشخض نمایید و سپس با توجه به ویژگی‌های مشترک نقاط مشخصشده و ویژگی‌های دیگری که از شکل دریافت می‌کنید رابطه مربوط به آن شکل را بنویسید.[1]

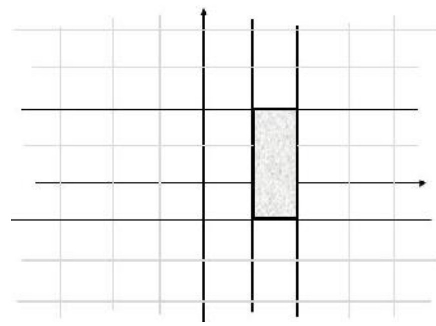
الف)



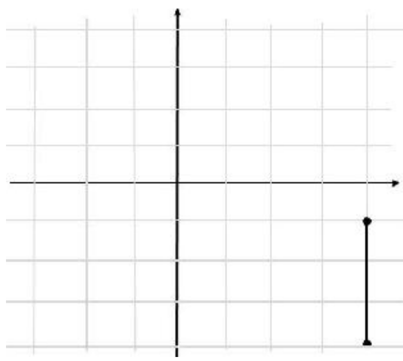
ب)



پ)



ت)



حال به سراغ فضای $\mathbb{R}^3$ می‌رویم. ابتدا با مختصات یک تناظر بین مجموعه نقاط فضای $\mathbb{R}^3$ و مجموعه تمام سه‌تایی‌های (a,b,c) که در آن $a,b,c \in \mathbb{R}$ برقرار می‌نماییم و سپس ارتباطبین برخی معادلات (یا روابط) و شکل‌های مربوط به آنها را بررسی خواهیم کرد. باید توجه داشته باشیم از آنجا که ما دستگاه مختصات سه بعدی را در صفحه که خود دو بعدی است رسم می‌کنیم لذا در این حالت برای تصویر بسته شکل‌ها باسد از قدرت تجسم خود کمک بگیرید.

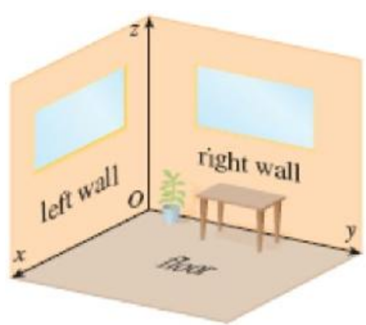
معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

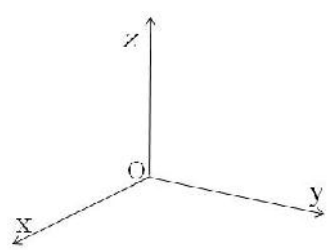
[1] صرفاً ناحیه‌هایی مدنظر است که مرزهای آنها خطوط موازی محورهای مختصات باشد.

مشابه $\mathbb{R}^2$ می‌توان مجموعه تمام سه تایی های مرتب (x,y,z) که در آنها x,y,z اعداد حقیقی‌اند را به صورت زیر در نظر گرفت که به آن فضای $\mathbb{R}^3$ می‌گویند.

$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

به یاد می‌آوریم که برای نمایش نقاط $\mathbb{R}^2$ از یک دستگاه مختصات متشکل از دو محور عمود برهم x ها و y ها استفاده شد. بطور مشابه می‌توان فضای $\mathbb{R}^3$ را نیز با استفاده از یک دستگاه مختصات متشکل از سه محور دو به دوعمود برهم که در نقطه ای مانند O متقاطع اند نمایش داد. این محل تقاطع مبدا مختصات دستگاه می‌باشد و فاصله در امتداد هر سه محور با یک واحد طول سنجیده می‌شود. وضعیت سه محوردو به دو عمود برهم شبیه به فصل مشترک دو دیوار و کف یک اتاق می‌باشد که در شکل مقابل دیده می‌شود. این سه محور در واقع تشکیل یک کنج می‌دهند.



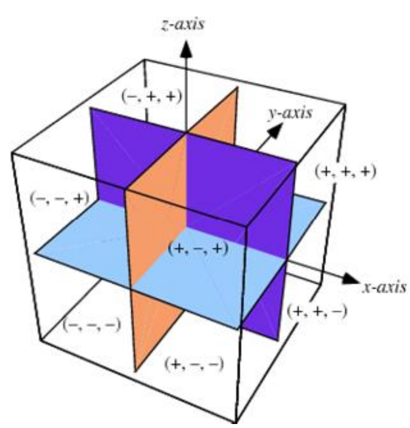


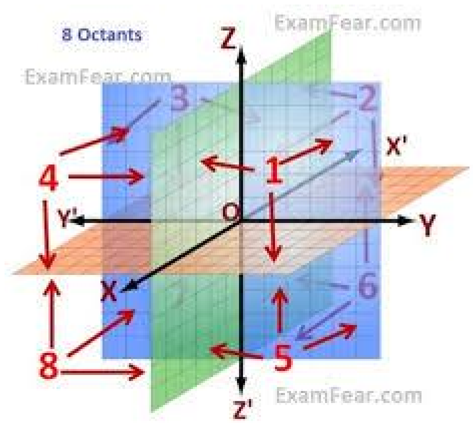
محورهای ox, oy, oz به ترتیب محور xها، محور yها و محور zها نامیده می‌شوند. محورهای فوق تشکیل دهنده سه صفحه می‌باشند. صفحات مختصات عبارتند از صفحه xy (کف اتاق) شامل محور xها، yها، صفحه yz (دیوار سمت راست) شامل محور yها و zها، صفحه xz (دیوار سمت چپ) شامل محور xها و zها هستند. جهت مثبت هریک از محورها با پیکان مشخص شده است. اگر محورها را از مبدا مختصات (نقطه o) در خلاف جهت

ادامه دهیم تا مقادیر منفی برای محورها ظاهر شوند آنگاه این دستگاه $\mathbb{R}^3$ به هشت ناحیه که چهار ناحیه آن بالای صفحه xy و چهار ناحیه دیگر زیر صفحه xy هستند تقسیم می‌شود. چهار ناحیه بالای صفحه xy مطابق با شماره‌گذاری استاندارد یک دستگاه $\mathbb{R}^2$ شماره گذاری می‌شوند.

مثلا ناحیه ای که در آن مقادیر روی هر سه محور مثبت هستند ناحیه شماره ۱ می‌باشد. به طریق مشابه چهار ناحیه پایین صفحه xy از ۵ تا ۸ شماره گذاری می شوند. شماره هر ناحیه و وضعیت محورها در شکل ها و جدول زیر مشخص شده اند.

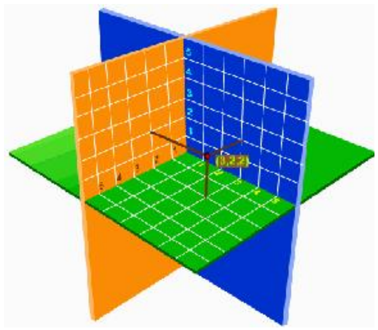
شماره ناحیه	x	y	z
I	+	+	+
II	−	+	+
III	−	−	+
IV	+	−	+
V	+	+	−
VI	−	+	−
VII	−	−	−
$VIII$	+	−	−

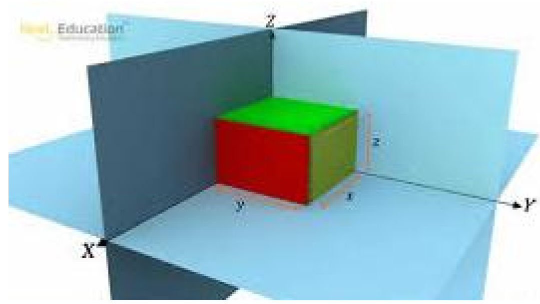




برای نمایش سه تایی مرتب (x_0,y_0,z_0) در دستگاه مختصات $\mathbb{R}^3$ کافی است سه نقطه به طول های x_0,y_0,z_0 به ترتیب بر روی محورهای x,y,z در نظر گرفته و سپس صفحه گذرنده از x_0 و موازی با صفحه yz، صفحه گذرنده از y_0 و موازی با صفحه xz و صفحه گذرنده از z_0 و موازی با صفحه xy را در نظر بگیریم.

محل تقاطع این سه صفحه یک نقطه به طول x_0 ، عرض y_0 و ارتفاع z_0 است که نمایش دهنده سه تایی مرتب (x_0, y_0, z_0) می باشد. مثلا نقطه P در شکل زیر متناظر با سه تایی مرتب (۲,۴,۱) است.

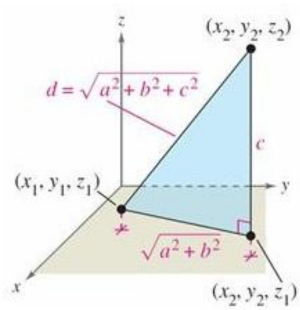




همچنین نقطه O که مبدا مختصات است متناظر سه تایی مرتب (۰,۰,۰) می باشد و آنرا نقطه صفر می‌نامیم.

دو نقطه $P=(x_0, y_0, z_0)$ و $Q=(x_1, y_1, z_1)$ را برهم منطبق گوییم و می نویسیم P=Q هرگاه مختصات آنها نظیر به نظیر مساوی باشند یعنی $x_0 = x_1, y_0 = y_1, z_0 = z_1$.

برای یافتن فاصله یک نقطه از $\mathbb{R}^3$ مانند $P=(x_0, y_0, z_0)$ از مبدا مختصات کافی است از نقطه P عمودی بر صفحه xy رسم کرده و پای عمود را P' بنامیم. در اینصورت با توجه به شکل مقابل ازقضیه فیثاغورس طول پاره خط $|OP'|$ بصورت زیر محاسبه می‌شود.

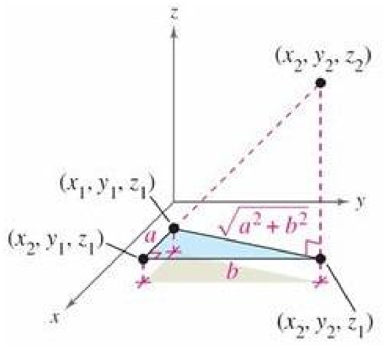


$$|OP'| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

اکنون در مثلث قایم الزاویه OPP′ از قضیه فیثاغورس برای محاسبه طول وتر OP استفاده می‌کنیم. پس داریم

$$|OP| = \sqrt{|OP'|^2 + z_0^2} = \sqrt{x_0^2, y_0^2 + z_0^2}$$

رابطه فوق را می‌توان با توجه به شکل روبرو برای فاصله دو نقطه دلخواه از $\mathbb{R}^3$ مانند $P=(x_0,y_0,z_0)$ و $Q=(x_1,y_1,z_1)$ بصورت زیر تعمیم داد.



$$|PQ|=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}$$

مثال: در شکل مقابل اتاقی به طول ۵ متر و عرض ۴ متر و ارتفاع ۳ متر مشاهده می‌شود. طول قطر این اتاق از یک گوشه آن به گوشه مقابلش چقدر است.

حال که با دستگاه مختصات سه بعدی آشنا شدیم با داشتن برخی معادلات یا روابط به بررسی نمودارهای مربوط آنها و یا برعکس، با داشتن برخی نمودارها به بررسی رابطه یا معادله مربوط به آنها می‌پردازیم.

مثال:

۱) فرض کنید معادله $x=0$ داده شده باشد و ما بخواهیم شکل یا نمودار مربوط به آن را مشخص کنیم. با توجه به آنچه گفته شد باید تمام نقاطی را مشخص کنیم که در این معادله صدق کند و این یعنی تمام نقاطی که مولفه اول آنها یعنی x برابر صفر باشد. همواره با داشتن چنین معادلاتی باید دقت کنید که فضای مورد نظر در مسئله $\mathbb{R}^2$ است یا $\mathbb{R}^3$.قبلاً در کار کلاس دیدیم که شکل مربوط به این معادله در فضای $\mathbb{R}^2$ محور yهاست. حال می‌خواهیم تمام نقاطی از $\mathbb{R}^3$ را مشخص نماییم که مولفه اول آنها برابر صفر است یعنی تمام سه تاییهایی به صورت $(0,y,z)$ به طوری که $y,z\in\mathbb{R}$. همانگونه که دیده می‌شود مقدار yوz هرچه باشد در صورتی که مولفه اول نقطه‌ای صفر باشد آن نقطه در معادله مذکور صدق می‌کند و به عبارتی برای یافتن نقاطی که در معادله $x=0$ صدق می‌کنند در انتخاب مقادیر y وz آزاد هستیم. مثلاً نقاط $(0,-3,-1)$، $(0,0,0)$، $(0,1,2)$ و

$(0,a,b)$، $(0,-1,5)$, و ... همگی در معادله صدق می‌کنند. در شکل نقاط متعددی که در معادله $x=0$ صدق می کنند نمایش داده شده است.

با تصویر کردن تمام نقاطی که در معادله $x=0$ صدق می‌کنند

خواهیم دید که نمودار این معادله صفحه xy است.

فعالیت

در مثال قبل دیدیم که نمودار مربوط به معادله $x=0$ در $\mathbb{R}^3$ تمام نقاط صفحه yz است (به عبارتی $x=0$ معادله صفحه yz است و دیدیم که نقاط مختلفی با y وzهای دلخواه (مولفه‌های دوم و سوم دلخواه) وجود دارند که در این معادله صدق می‌کنند. حال اگر در بین تمام نقاط صفحه yz به دنبال نقاطی باشیم که مولفه سوم آنها نیز برابر صفر باشد؛ یعنی علاوه بر $x=0$ شرط $z=0$ را نیز داشته باشیم چه شکلی خواهیم داشت؟ (با در نظر گرفتن صفحه yz سعی کنید نقاطی از این صفحه را تصور کنید که برای انها $z=0$ باشد.)

۱) مختصات چند نقطه را که در رابطه $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ صدق کنند

را مشخص کنید و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

۲) مقدار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله $x=0$ دارد؟

کار در کلاس:

۱.الف) بر روی صغحه ($x=1$)، نقاطی را که مولفه

دوم آنها برابر ۲ است مشخص نمایید و شکل حاصل از این

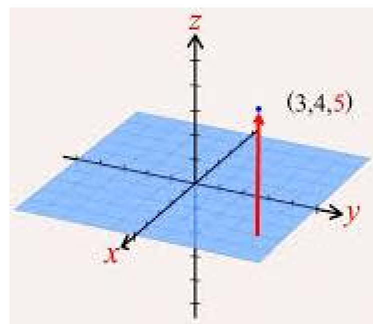
نقاط را توصیف نمایید و معادلات مربوط به آن را بنویسید.

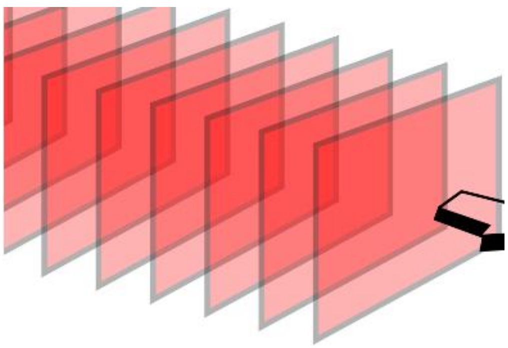
ب) همین کار را برای نقاطی که مولفه سوم آنها برابر ۱- است انجام دهید.

کار در کلاس

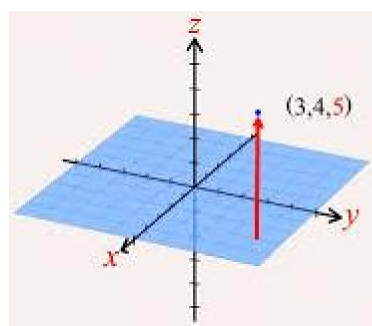
۱- در دستگاه مختصات زیر شکل و معادله چند صفحه مشخص شده است. برای هر کدام از صفحات دو نقطه را مشخص کنید که در آن صفحه قرار دارند.

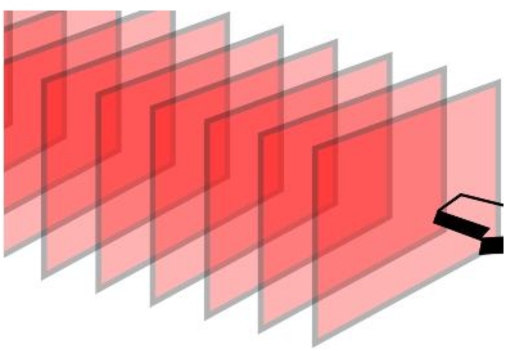
الف)



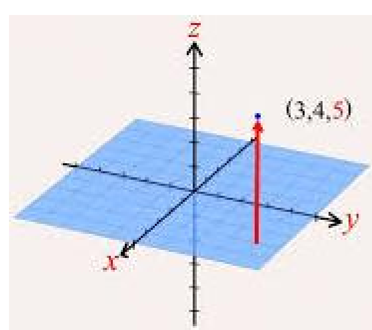


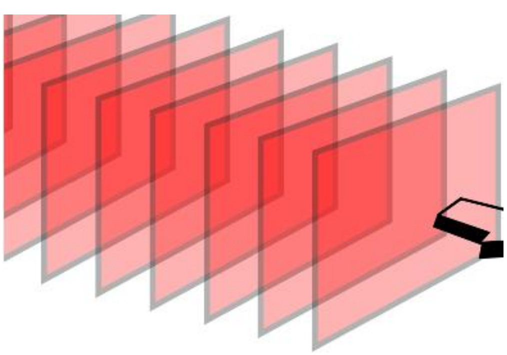
ب)

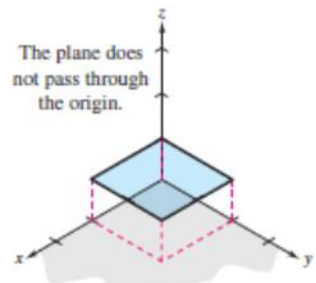




پ)







۲- وجه های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل قسمت هایی از صفحات به معادلات $x=۱$، $x=۳$، $y=۱$ ، $y=۴$، $z=-۲$ و $z=۲$ هستند.

الف) در هر یک از شش وجه، مختصات نقطه ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

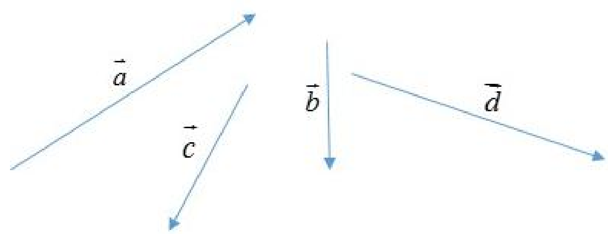
ب) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقا بر دو تا از وجه ها قرار دارند.

پ) معادلات مربوط به هر یک از یالهای این مکعب مستطیل را بنویسید. (دقت کتید که یالها پاره خط اند و نه خط)

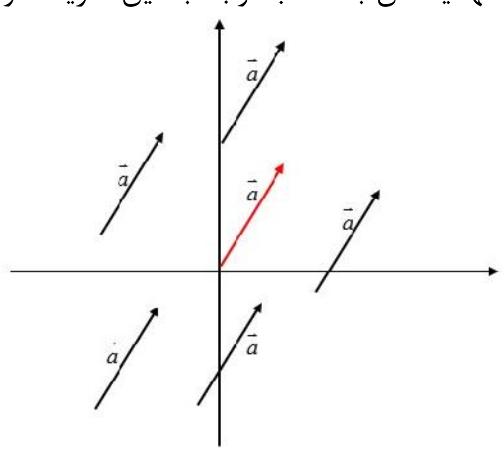
ت) مختصات راس این مکعب مستطیل را بنویسید.

بردارها در $\mathbb{R}^۲$

در سالهای گذشته با بردارها در صفحه آشنا شدید. هر پاره خط جهت دار یک بردار را نشان می‌دهد. یک بردار را معمولا با حروف کوچک لاتین مانند $\vec{a}$ و اندازه طول آن پاره خط را با $|\vec{a}|$ نمایش می‌دهند. در شکل روبرو چند بردار مختلف رسم شده اند.



دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ را مساوی یا همسنگ گوییم هرگاه اندازه و جهت آنها یکسان باشند. با توجه به این تعریف دو بردار مساوی $\vec{a},\vec{b}$ لزومی ندارد از یک نقطه شروع شده باشند.



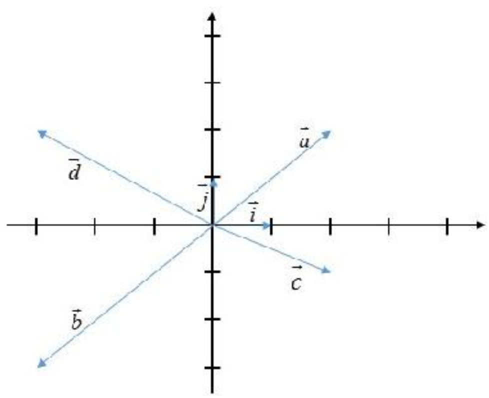
در شکل مقابل همه بردارها با هم مساویند زیرا که جهت و اندازه آنها با هم برابر است. واضح است که می‌توان بیشمار بردار دیگر که مساوی هستند را در صفحه در نظر گرفت.

به این بردارهای برابر اصطلاحا بردارهای هم ارز گفته می‌شود.

برای سهولت معمولا برداری که ابتدای آن مبدا باشد و مساوی با دیگر بردارهای همسنگ است را به عنوان نماینده آنها درنظر می‌گیرند. مثلا در شکل قبل بردار قرمز رنگ نماینده همه بردارهای همسنگ $\vec{a}$ می‌باشد. به همین جهت معمولاً ابتدای بردارها را مبدا مختصات در نظر می گیرند.

با توجه به اینکه ابتدای بردارها را مبدا مختصات در نظر گرفته‌ایم، مختصات یک بردار با مختصات نقطه انتهایی آن برابر می‌شود. بنابراین هر نقطه از صفحه متناظر با یک بردار است و بر عکس. از اینرو هر بردار مانند $\vec{a}$ را با زوج مرتبی که انتهای بردار را مشخص می‌کند نمایش می‌دهند. یعنی $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ که $(a_۱,a_۲)$ مختصات انتهای بردار $\vec{a}$ می‌باشد.

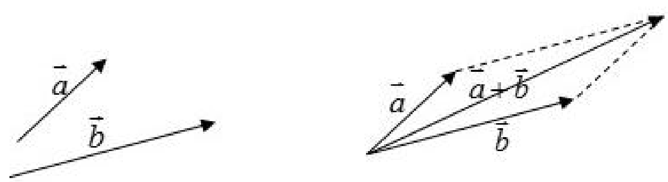
مثال: بردارهای $\vec{a}=(۲,۲)$ ، $\vec{b}=(-۲,-۲)$و $\vec{c}=(۲,-۱)$ ، $\vec{d}=(-۳,۲)$، $\vec{i}=(۱,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱)$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده اند.



با توجه به اینکه هر نقطه از صفحه را به صورت زوج مرتبهای (x,y) نمایش میدهند در اینصورت مجموعه $\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$ شامل همه نقاط صفحه می‌باشد و آنرا با $\mathbb{R}^۲$ نمایش می‌دهند، پس

$$\mathbb{R}^۲=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$$

از سالهای قبل به یاد می‌آوریم که جمع دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ از روش متوازی‌الاضلاع بصورت زیر بدست می‌آید و به آن برآیند دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ می‌گویند.



و نیز اگر داشته باشیم $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲)$ می‌توان نوشت

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_۱,a_۲)+(b_۱,b_۲)=(a_۱+b_۱,a_۲+b_۲)$$

هم‌چنین اگر $r\in\mathbb{R}$ آنگاه

$$r\vec{a}=r(a_۱,a_۲)=(ra_۱,ra_۲)$$

و به طور خاص وقتی $r=-۱$ یعنی بردار $-\vec{a}=(-a_۱,-a_۲)$ را قرینه بردار $\vec{a}$ می نامند. با توجه به تعریف قرینه یک بردار می‌توان برای تفاضل دو بردار نوشت

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(a_۱,a_۲)+(-b_۱,-b_۲)=(a_۱-b_۱,a_۲-b_۲)$$

بنظر شما تعبیر هندسی تفاضل دو بردار به کمک جمع بردارها چگونه است؟

معمولا مبدا مختصات را بعنوان بردار صفر در نظر می‌گیرند و با $\vec{۰}=(۰,۰)$ نمایش می‌دهند.

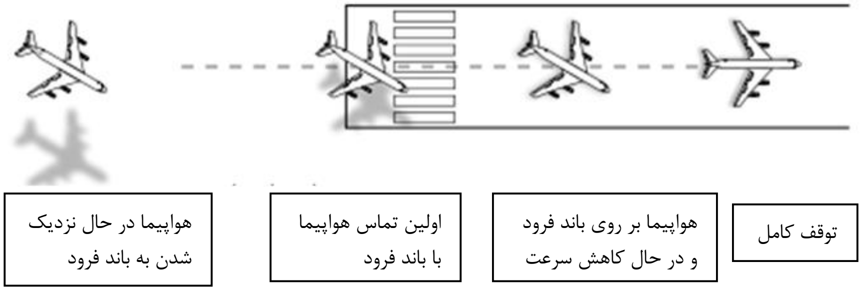
با توجه به اینکه ابتدای برداری مانند $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ مبدا مختصات است، با استفاده از رابطه فاصله دو نقطه از صفحه، اندازه (طول) بردار $\vec{a}$ بصورت زیر بدست می‌آید.

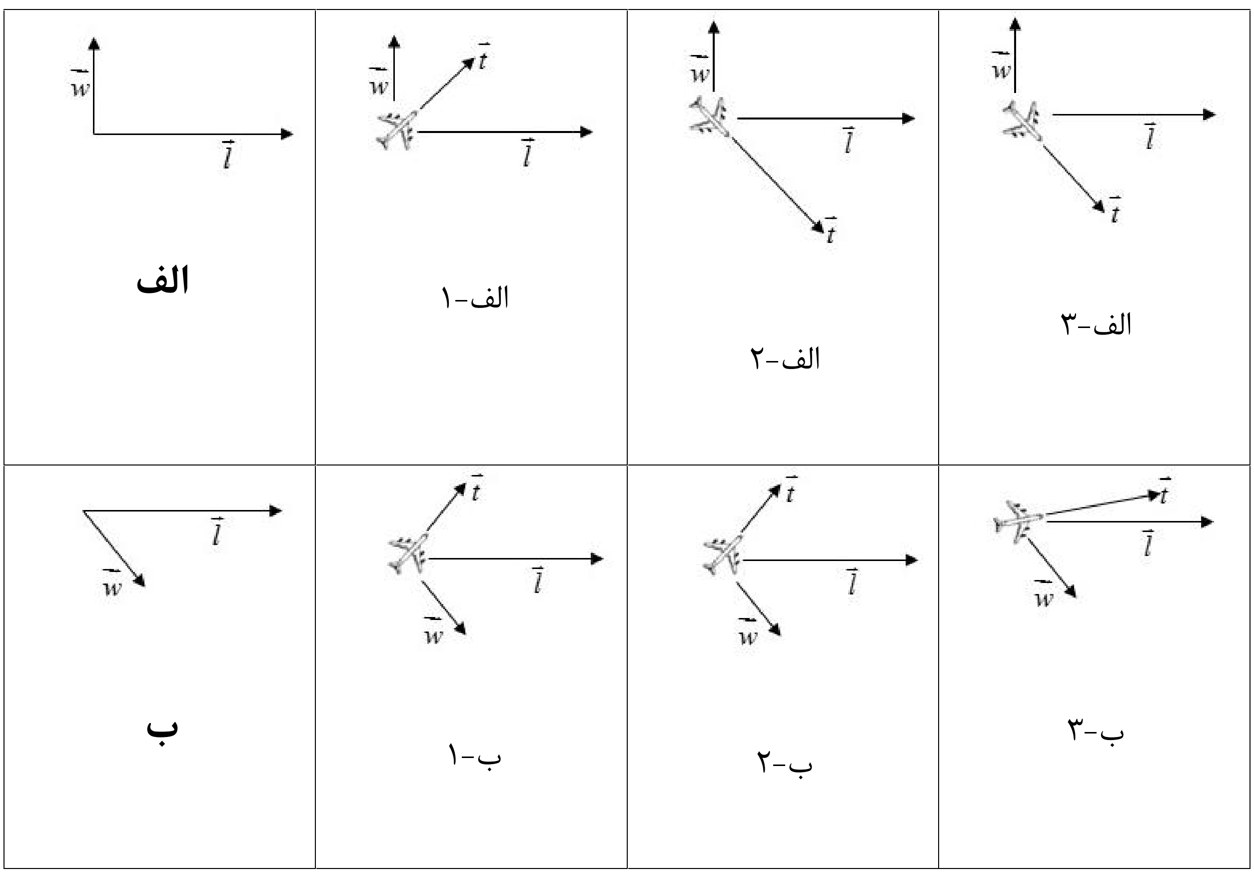
$$|\vec{a}|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲}$$

مثال: بنا به گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می‌دهد. یکی از سخت ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی اریب (غیر هم راستا) با خط فرود می وزد. در این شرایط خلبان می بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برآیند نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار گیرد (به شکل ص بعد رجوع کنید). به این نوع نشستن هواپیما، فرود خرچنگی می‌گویند. اکنون فرض کنید مسیرفرود (خط فرود) در جهت بردار $\vec{l}$ و حداکثر نیروی قابل کنترل در لحظه فرود $۳MN$ باشد (یعنی $|\vec{l}|=۳MN$). همچنین باد در جهت بردار $|\vec{w}|$ نیرویی معادل $۱MN$ به هواپیما وارد می‌کند ($|\vec{w}|=۱MN$). در هریک از دو وضعیت زیر خلبان هواپیما را در هنگام فرود در جهت کدام بردارهای داده شده

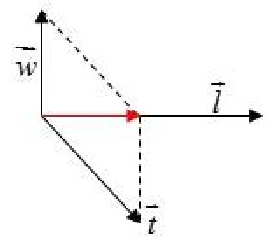
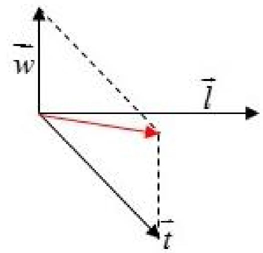
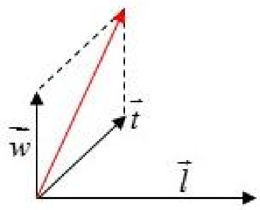
می‌تواند قرار دهد، به طوریکه یک فرود ایمن داشته باشد (یعنی برآیند نیروی محرکه ($\vec{t}$) و نیز $\vec{w}$ در جهت

$\vec{l}$ با شرط $|\vec{s}|\le|\vec{l}|$ که $\vec{s}$ برآیند است).

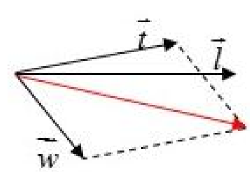
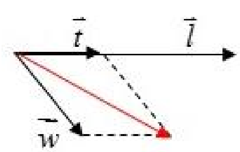
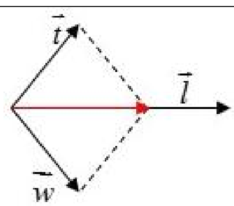




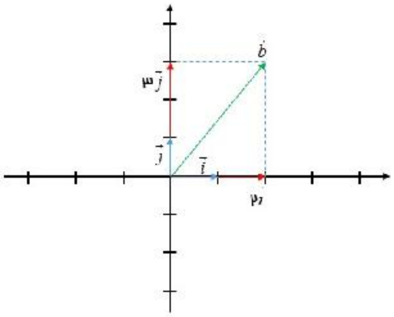
پاسخ: در مورد وضعیت الف برایند بردارهای $\vec{w}$ (نیروی باد) و $\vec{t}$ (نیرو محرکه هواپیما) بصورت زیر است.

الف-۲	الف-۲	الف-۱
		
بردار برایند در جهت $\vec{l}$ است و اندازه آن کمتر از است. بنابراین فرود ایمن است.	بردار برایند در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)	بردار برایند در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از بالای باند)

در مورد وضعیت ب برایند بردارهای $\vec{w}$ (نیروی باد) و $\vec{t}$ (نیرو محرکه هواپیما) بصورت زیر است.

ب-۲	ب-۲	ب-۱
		
بردار برایند در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)	بردار برایند در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)	بردار برایند در جهت $\vec{l}$ است و اندازه آن کمتر از است. بنابراین فرود ایمن است.

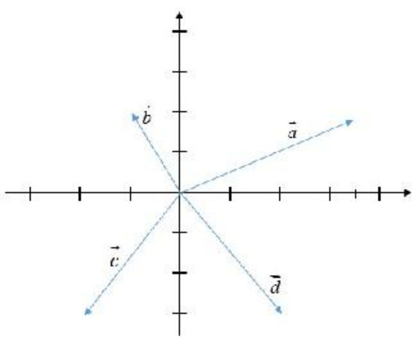
معمولا بردار به طول واحد در جهت محور x ها را با $\vec{i}$ و بردار به طول واحد در جهت محور y ها را با $\vec{j}$ نمایش می‌دهند. در شکل مقابل بردار $\vec{i}=(۱,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱)$ و نیزبردار $\vec{b}=(۲,۳)$ بصورت حاصلجمع مضاربی از $\vec{i},\vec{j}$ نمایش داده شده‌اند. بطور کلی می‌توان هر بردار دلخواه مانند $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ را بصورت زیر نمایش داد.



$$\vec{a}=(a_۱,a_۲)=a_۱(۱,۰)+a_۲(۰,۱)=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}$$

کار در کلاس

۱. در دستگاه مختصات زیر چند بردار داده شده‌است.



الف) مختصات بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را یافته و آن را رسم کنید.

ب) قرینه های بردارهای $\vec{b},\vec{c}$ را رسم کرده و مختصات آنها را بدست آورید.

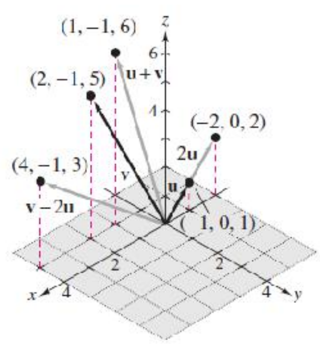
ج) مختصات بردارهای $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{d}-\vec{c}$ را یافته، آنها را رسم کنید و اندازه هریک را بدست آورید.

د) هریک از بردارهای $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{d}-\vec{c}$ را برحسب بردارهای واحد $\vec{i},\vec{j}$ بدست آورید.

بردار ها در $\mathbb{R}^۳$

مشابه بردارهای $\mathbb{R}^۲$ به هرنقطه از $\mathbb{R}^۳$ برداری که از مبدا شروع می‌شود نظیر کرد. مثلا فرض کنید $A=(a_۱,a_۲,a_۳)$ نقطه ای غیرصفر از $\mathbb{R}^۳$ باشد. در اینصورت پاره خط جهت داری که از مبدا مختصات یعنی $O=(۰,۰,۰)$ شروع شده و در نقطه پایان A پایان می یابد یک بردار در $\mathbb{R}^۳$ را مشخص می کند و آن را با $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ نشان میدهیم. در بردار $\vec{a}$ مقادیر $a_۱,a_۲,a_۳$ را مولفه های بردار $\vec{a}$ می گویند. همچنین قرارداد می کنیم که مبدا مختصات یعنی $O=(۰,۰,۰)$ نمایشگر بردار $\vec{o}=(۰,۰,۰)$ است که بردار صفر نامیده می شود.

مثال: در شکل روبرو چند بردار در $\mathbb{R}^۳$ نشان داده شده است.



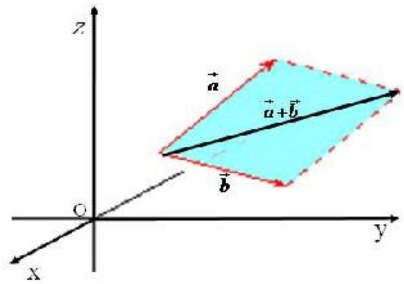
با توجه به رابطه فاصله دو نقطه از $\mathbb{R}^۳$، طول هر بردار مانند $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ در $\mathbb{R}^۳$ از رابطه زیر بدست می آید.

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}$$

حاصلجمع دو بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ بصورت زیر تعریف می شود که به آن بردار برآیند نیز می‌گویند.

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_{۱}+b_{۱},a_{۲}+b_{۲},a_{۳}+b_{۳})$$

شکل روبرو بردار های $\vec{a},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}$ را در دستگاه $\mathbb{R}^{۳}$ نشان میدهد.



همانطور که از شکل پیداست برای هر دو بردار غیرصفر $\vec{a},\vec{b}$

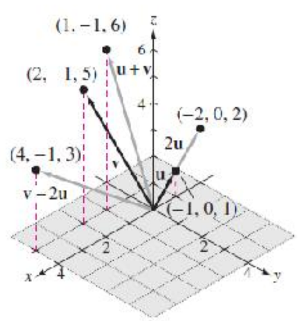
می توان قاعده متوازی الاضلاع را در صفحه ای که از آن دو بردار

می گذرد به کار برد و بردار برآیند $\vec{a}+\vec{b}$ را یافت.

برای هر عدد حقیقی **r**، حاصلضرب **r** در بردار $\vec{a}$ را بصورت زیر تعریف می کنند.

$$r\,\vec{a}=r(a_{۱},a_{۲},a_{۳})$$

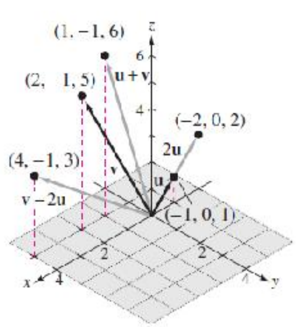
شکل روبرو دو بردار $r\,\vec{a},\vec{a}$ که در آن $r>۱$ را نشان میدهد.



آیا راستای $r\,\vec{a},\vec{a}$ با هم متفاوتند؟

بطور خاص بردار $-۱\vec{a}$ را که با $-\vec{a}$ نشان میدهند قرینه $\vec{a}$ می گویند یعنی $-\vec{a}=(-a_{۱},-a_{۲},-a_{۳})$. این بردار هم اندازه با $\vec{a}$ (چرا؟) ولی در خلاف جهت آن می باشد. اکنون تفاضل بردار $\vec{b}$ از $\vec{a}$ یعنی $\vec{a}-\vec{b}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(a_{۱}-b_{۱},a_{۲}-b_{۲},a_{۳}-b_{۳})$$



در شکل روبرو بردارهای $\vec{a},\vec{b}$ و قرینه آن و نیز $\vec{a}-\vec{b}$ نمایش داده شده اند.

کار در کلاس

۱. نقاط $A=(۲,۳,۱),B=(-۱,۲,۲),C=(۳,۱,۰),D=(۱,۰,-۱)$ را در یک دستگاه $\mathbb{R}^۳$ نشان دهید.

۲. اگر $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ بردارهایی در $\mathbb{R}^۳$ با نقاط انتهایی به ترتیب A,B,C,D باشند آنگاه آنها را در دستگاه فوق نشان دهید و هریک از بردارهای زیر را بدست آورید.

$\vec{a}+\sqrt{۲}\,\vec{b}=$

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=$

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=$

$-۲(\vec{b}+\vec{c})=$

$-۲\vec{b}-۲\vec{c}=$

در کار در کلاس قبل درستی برخی روابط و اعمال بین بردارها را بررسی کردیم. بطور کلی اگر بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ سه بردار دلخواه و $O=(۰,۰,۰)$ بردار صفر و نیز r و s دو عدد حقیقی باشند روابط زیر همواره برقرارند.

۱. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (خاصیت جابجایی جمع)

۲. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (خاصیت شرکت پذیری در جمع)

۳. $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=۰$ (عضو قرینه)

۴. $\vec{a}+۰=۰+\vec{a}=\vec{a}$ (عضو خنثی)

۵. $r(\vec{a}+\vec{b})=r\,\vec{a}+r\,\vec{b}$

۶. $(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$

۷. $(rs)\vec{a} = r(s\vec{a})$

۸. اگر $r \neq ۰$ و $\vec{b} = r\vec{a}$ آنگاه $|\vec{b}| = r|\vec{a}|$.

بردارهای یکه

با بردارهای یکه $\vec{i}, \vec{j}$ در صفحه $\mathbb{R}^۲$ به ترتیب در جهت محور xها و yها آشنا شدید. بطور مشابه در $\mathbb{R}^۳$ بردارهایی با طول واحد زیر را در جهت محورهای مختصات $\mathbb{R}^۳$ در نظر میگیرند.

$$\vec{i} = (۱,۰,۰),\ \vec{j} = (۰,۱,۰),\ \vec{k} = (۰,۰,۱)$$

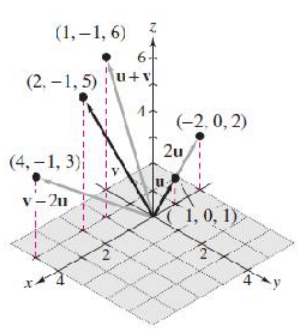
به این ترتیب $\vec{i}$ بردار واحد در جهت طول ها، $\vec{j}$ بردار واحد در جهت عرض ها و $\vec{k}$ بردار واحد در جهت ارتفاع ها می باشند.

همچنین با استفاده از روابط بین بردارها بسادگی می توان نشان داد که هر بردار مانند $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ بصورت ترکیبی از بردارهای واحد $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ قابل بیان است. در واقع داریم

$$\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳) = a_۱(۱,۰,۰) + a_۲(۰,۱,۰) + a_۳(۰,۰,۱) = a_۱\vec{i} + a_۲\vec{j} + a_۳\vec{k}$$

مثال: بردار $\vec{a} = (۲,۳,\frac{۱}{۲})$ را برحسب بردارهای یکه i,j,k نشان دهید.

$$\vec{a} = ۲\vec{i} + ۳\vec{j} + \frac{۱}{۲}\vec{k}$$



تمرین

۱- چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده اند.

الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود شده به

چهارضلعی ABCD را بنویسید.

ب) معادلات مشخص کننده سطح دیگری هم مساخت و موازی سطح ABCD بنویسید.

۲- نقاط با مختصات $P=(1,0,1)$ ، $Q=(0,-1,-2)$، $R=(3,0,-1)$ و $S=(-2,-2,-2)$ را در یک دستگاه

مختصات نمایش دهید.

۳- در سوال قبل طول پاره خط های $|PQ|$، $|RQ|$ و $|PS|$ را بیابید.

۴- فرض کنید $P=(x_0,y_0,z_0)$ و $Q=(x_1,y_1,z_1)$. مختصات نقطه M وسط پاره خط PQ را بیابید.

۵- در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

الف) $\vec{a}=(-\frac{1}{3},0,2)$ ، $\vec{b}=(\sqrt{2},1,1)$ ، $r=3$ و $r\vec{a}-\vec{b}=?$

ب) $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{b}=(3,1,-1)$ ، $r=-1$ و $r\vec{b}+\vec{a}=?$

ج) $\vec{a}=\sqrt{2}\vec{i}-\vec{k}$ ، $\vec{b}=3\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{a}+\vec{b}=?$

د) $\vec{a} = ۵\vec{k} + \vec{j}$ ، $\vec{b} = -\vec{k} + \vec{i}$ ، $r = \frac{۱}{۵}$ و $r\vec{a} + \vec{b} = ?$

۶- طول بردار $\vec{a}$ را در هر یک از حالات سوال قبل بیابید.