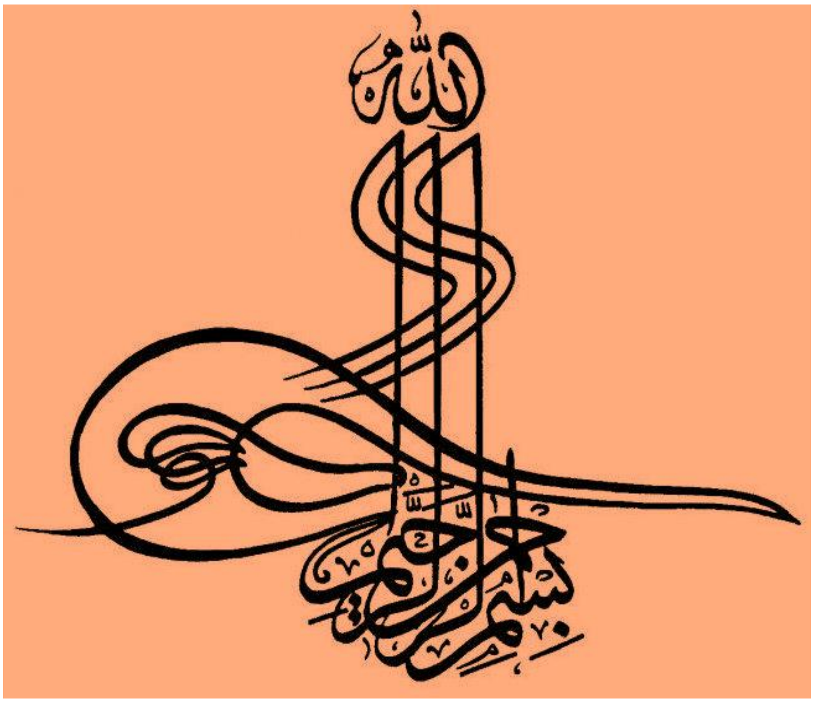


فصل اول ریاضی دوازدهم تجربی

درس اول بخش اول

انتقال توابع

مؤلف:
حبیب هاشمی

۱۳۹۷

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب مبحث « فصل اول ریاضی دوازدهم تجربی » نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

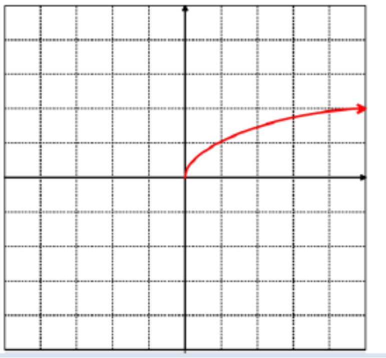
حبیب هاشمی

درس اول بخش اول

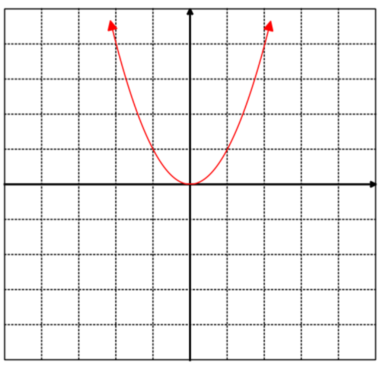
رسم نمودار توابع به کمک انتقال

یاد آوری نمودارهای قابل استفاده در انتقال

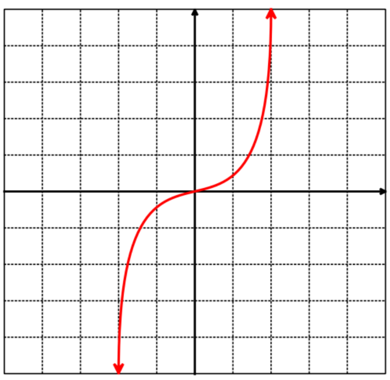
الف) تابع رادیکالی(ابرو) $y = \sqrt{x}$



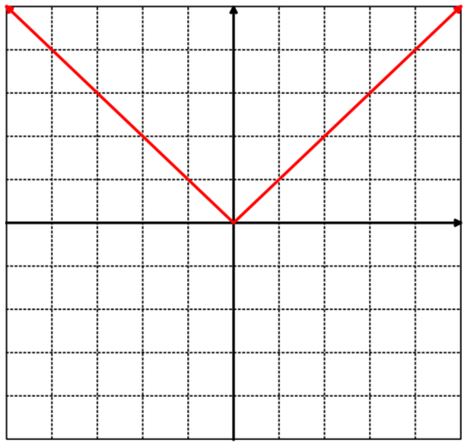
ب) درجه ۲(سهمی) $y = x^2$



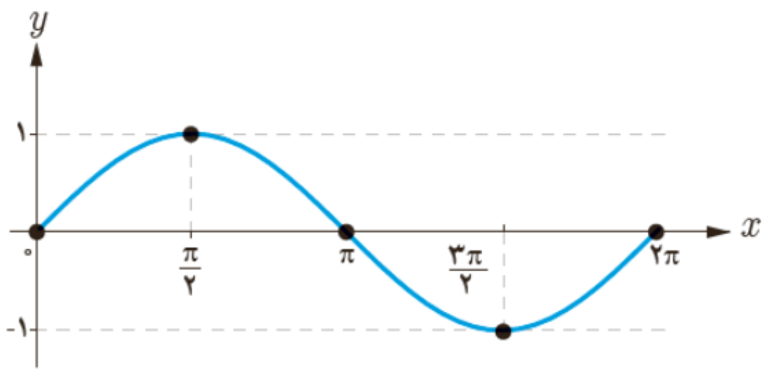
پ) درجه ۳ (لر) $y = x^3$



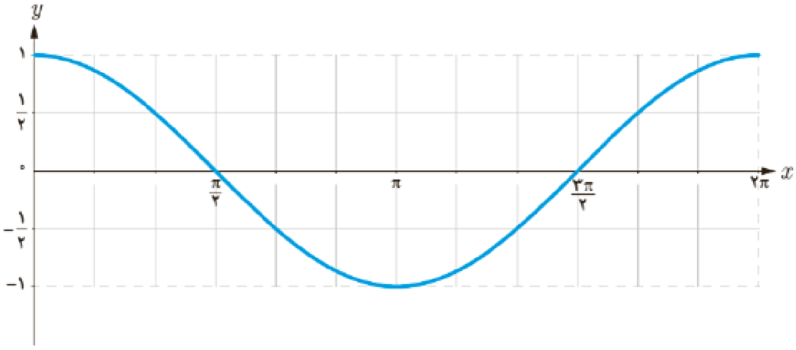
ت) تابع قدرمطلق $y = |x|$



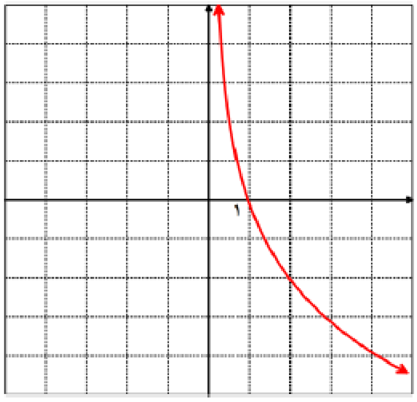
ث) تابع سینوسی $y = \sin x$



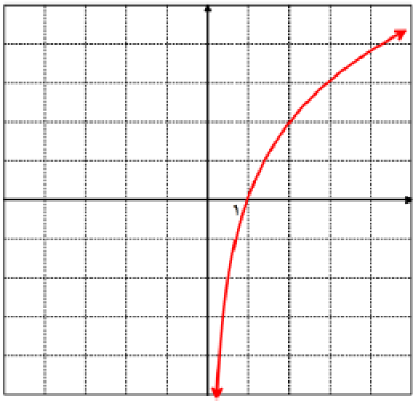
ج) تابع کسینوسی $y = \cos x$



چ) تابع لگاریتمی $y = \log_a x$

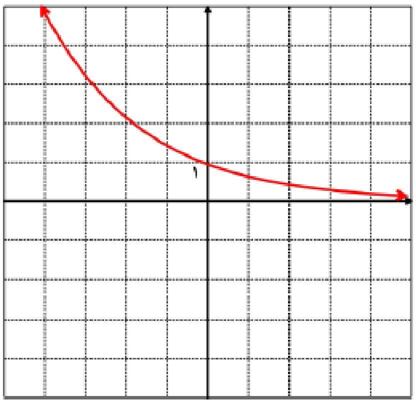


$0 < a < 1$

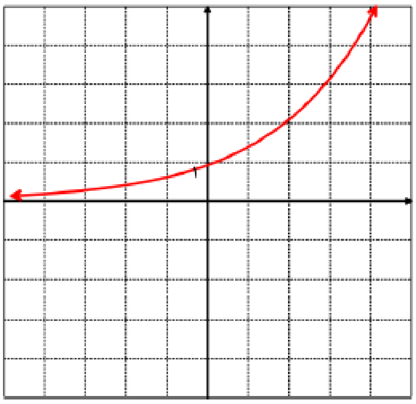


$a > 1$

ح) تابع نمایی $y = a^x$



$0 < a < 1$



$a > 1$

الف) انتقال طولی و عرضی (در این حالت عددی با x یا $f(x)$ جمع یا تفریق می شود(تاثیر جمعی(تفریقی))

انتقال طولی (انتقال قطاری)

برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را به اندازه a واحدبه سمت چپ انتقال دهیم

برای رسم نمودار تابع $y=f(x-a)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را به اندازه a واحدبه سمت راست انتقال دهیم.

نکته: .(چون a توخونه ی x است روی x (طولها) تاثیر میزاره) یعنی تک تک نقاط تابع $y=f(x)$ مقدار x آنها با a جمع یا تفریق می شود. (اگر مثبت داشتیم تفریق می کنیم و بالعکس)

نکته: تاثیر روی طول ها(x) معکوس است یعنی اگر مثبت داشتیم به سمت منفی ها میریم و بالعکس

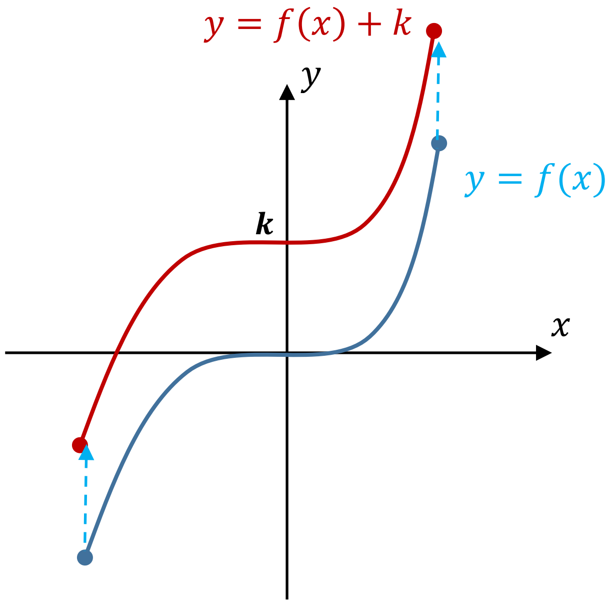
انتقال عرضی (انتقال آسانسوری)

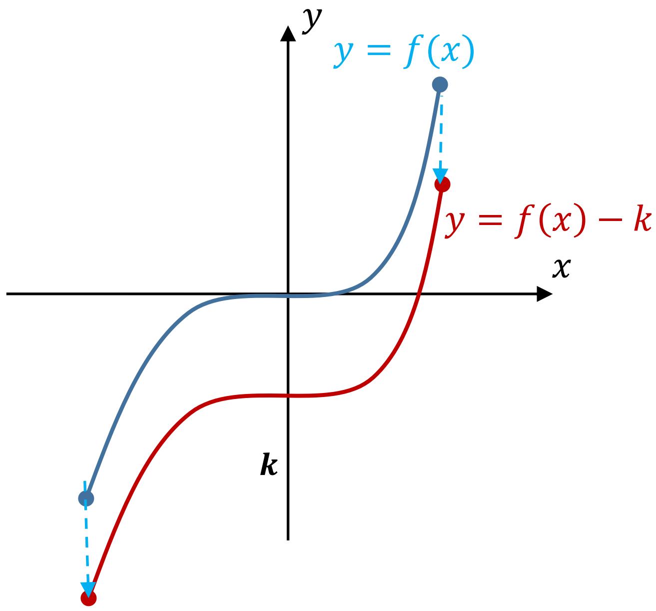
برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+a$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را به اندازه a واحدبه سمت بالا انتقال دهیم.

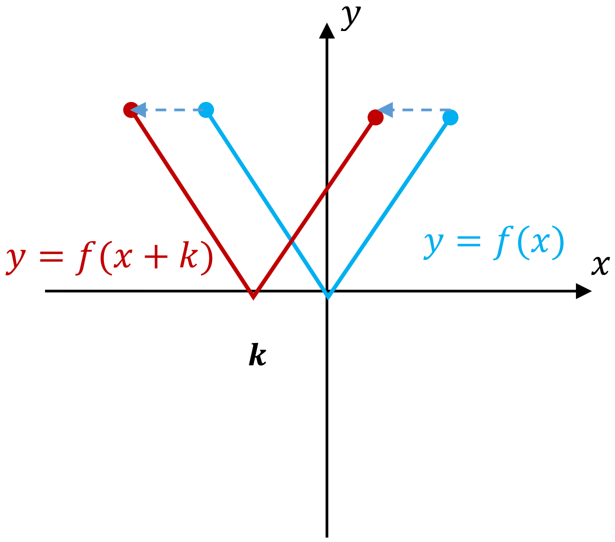
برای رسم نمودار تابع $y=f(x)-a$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را به اندازه a واحدبه سمت پایین انتقال دهیم.

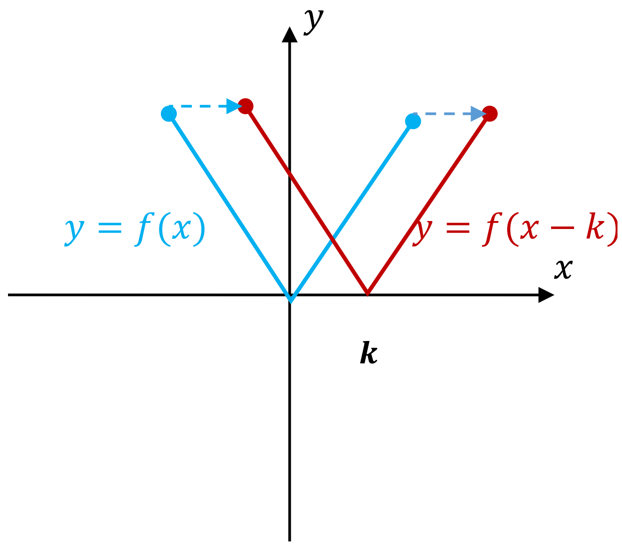
نکته: .(چون a میتونه بیاد کنار y توخونه ی y است پس‌روی y (عرضها) تاثیر میزاره) یعنی تک تک نقاط تابع $y=f(x)$ مقدار y آنها با a جمع یا تفریق می شود. (اگر مثبت داشتیم جمع می کنیم و اگر منفی داشتیم تفریق می کنیم)

نکته: تاثیر روی عرض ها (y) مستقیم است یعنی اگر مثبت داشتیم به سمت مثبت ها میریم و اگر منفی داشتیم به سمت منفی ها .

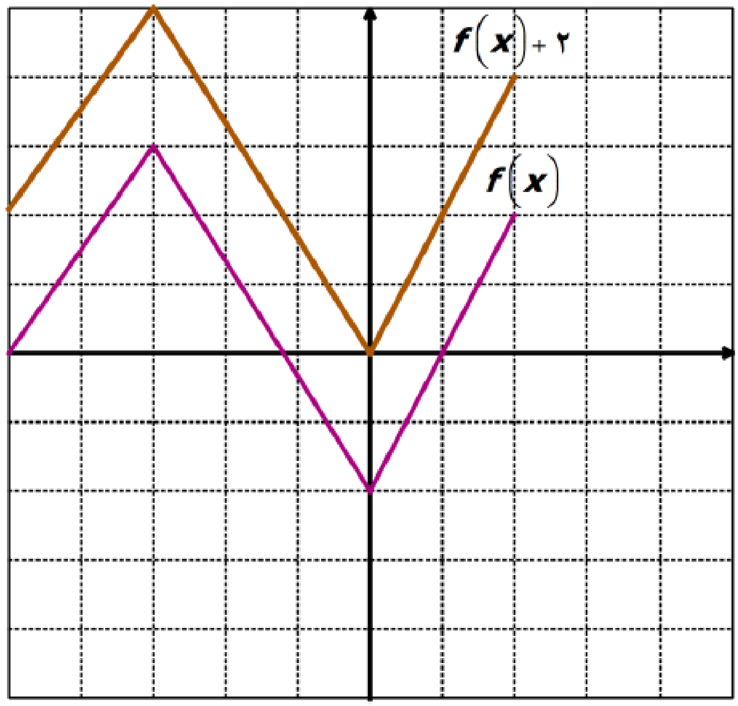

$y = f(x) + k$
y
k
$y = f(x)$
x


y
$y = f(x)$
$y = f(x) - k$
x
k

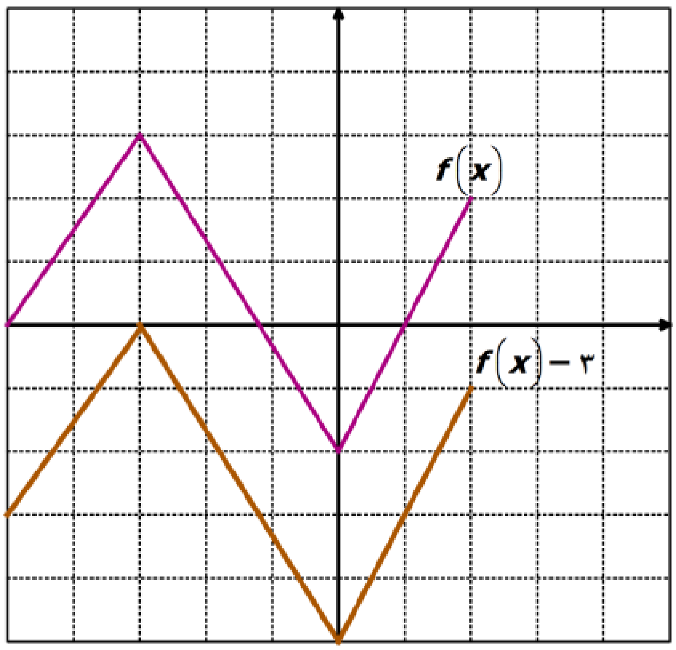

y
$y = f(x + k)$
$y = f(x)$
x
k


y
$y = f(x)$
$y = f(x - k)$
x
k

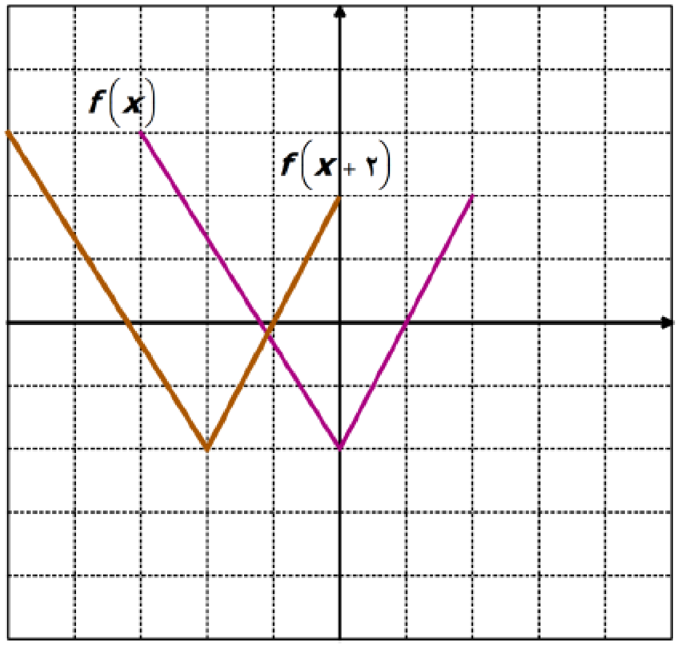
الف) $f(x)+2$



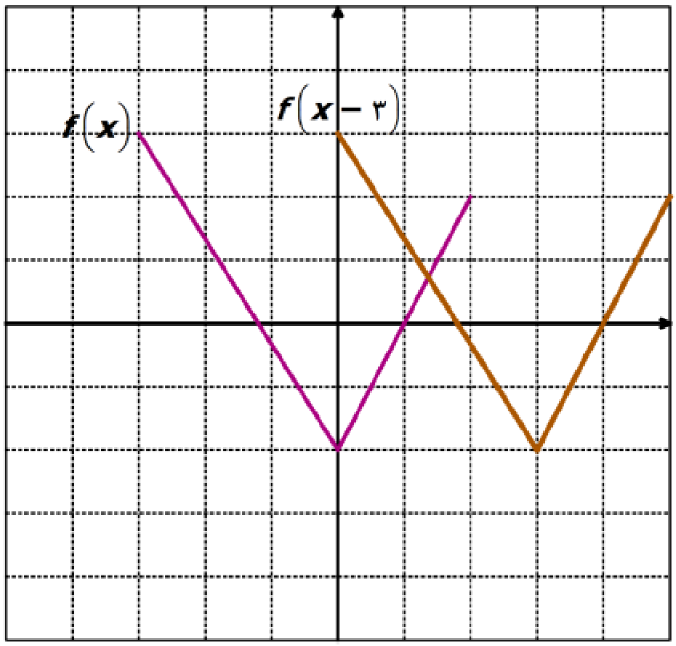
ب) $f(x)-3$

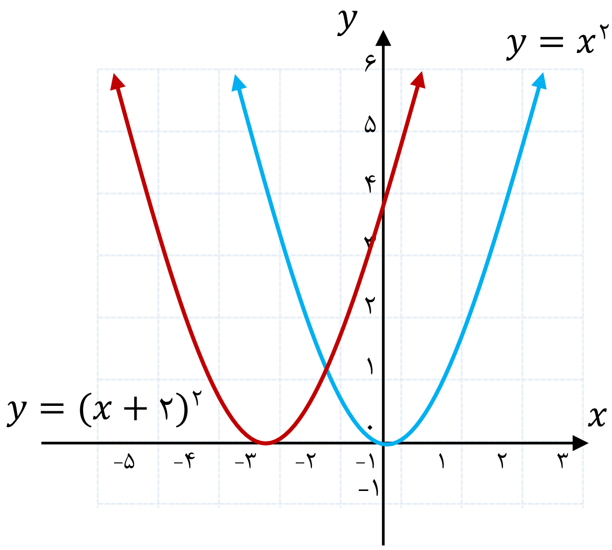


الف) $f(x+۲)$

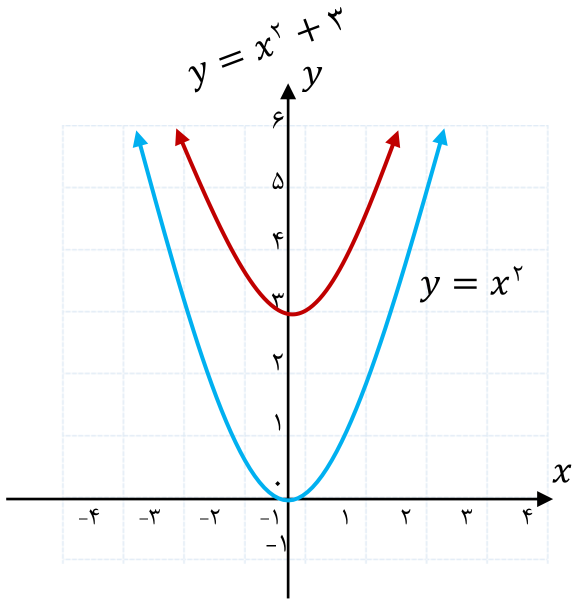


ب) $f(x-۳)$





(الف)

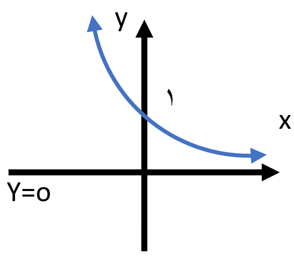


(ب)

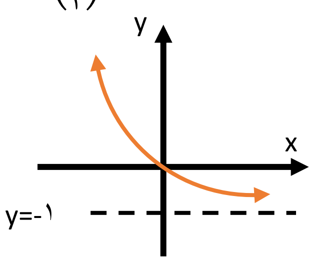
مثال: برای رسم نمودار $y = ۲^{x} + ۱$ کافی است نمودار $y = ۲^{x}$ را به اندازه‌ی یک واحد به سمت بالا جابه‌-جا کنیم (در این جابه‌جایی، محور xها نیز یک واحد به سمت بالا جابه‌جا می‌شود.)

مثال: برای رسم نمودار $y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{x} - ۱$ باید نمودار $y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$ را به اندازه‌ی یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم. در این انتقال خط y=o (محور xها) نیز به اندازه‌ی یک واحد به سمت پایین انتقال داده می شود و نمودار به خط y=-۱ نزدیک می‌شود.

$y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$

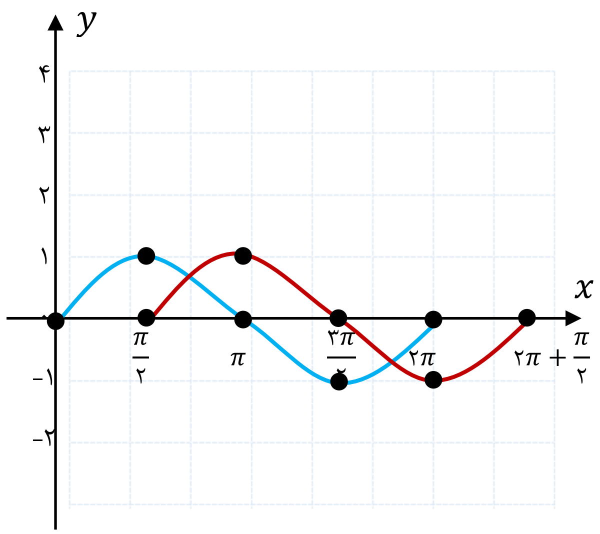


$y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{x} - ۱$

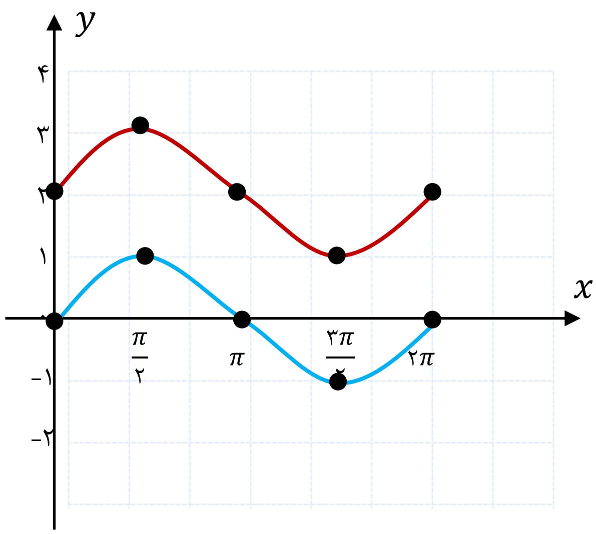


توجه کنید که اگر نقطه‌ی (۰,۱) را به اندازه‌ی یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، به نقطه‌ی (۰,۰) می‌رسد، بنابر این نمودار از مبدأ مختصات، یعنی نقطه‌ی (۰,۰) می‌گذرد.

مثال: نمودار تابع $y = sinx$ با دامنه‌ی $[0, ۲\pi]$ رسم شده است. می‌خواهیم نمودار تابع $f(x) = sinx + ۲$ و $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{۲})$ را به کمک انتقال رسم کنیم. با توجه به توضیحات بالا، کافی است نمودار تابع $y = sinx$ را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم تا f(x) رسم شود (شکل الف) و اگر آن را $\frac{\pi}{۲}$ واحد به راست انتقال دهیم، g(x) رسم می‌شود. (شکل ب)

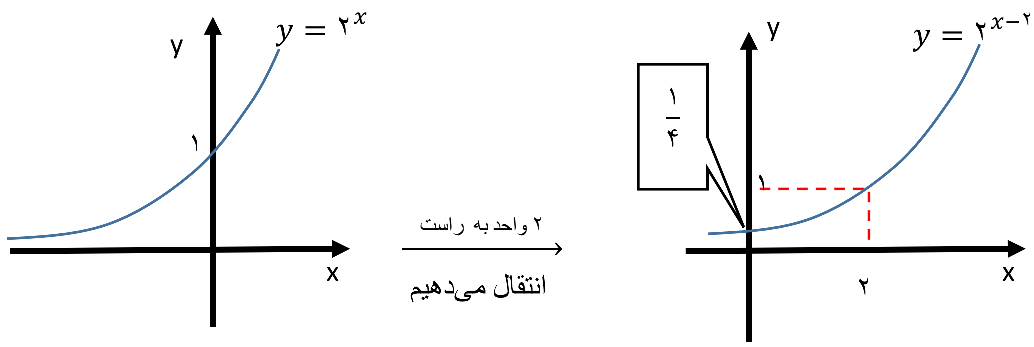


(ب)

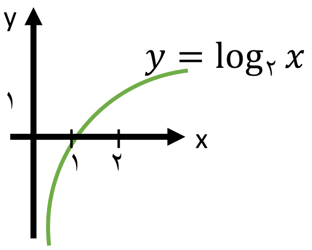


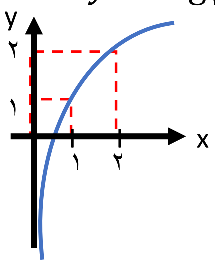
(الف)

مثال: برای رسم نمودار $y = ۲^{x-۲}$ باید نمودار $y = ۲^x$ را به اندازه‌ی دو واحد به سمت راست انتقال دهیم.



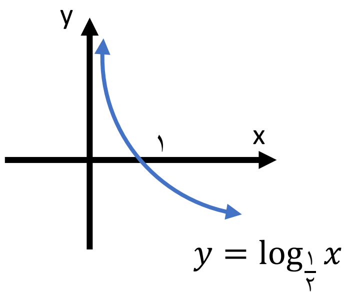
مثال : برای رسم نمودار تابع $y=\log_{۲}x+۱$ کافیست نمودار $y=\log_{۲}x$ را به اندازه‌ی ۱ واحد به بالا انتقال دهیم .

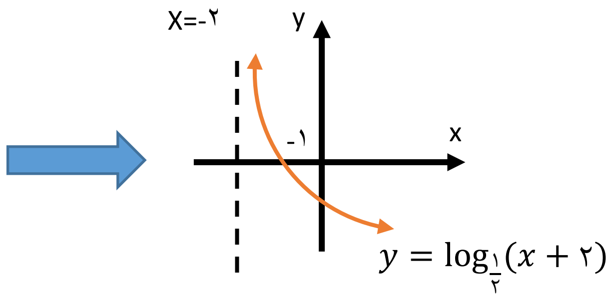




مثال: نمودار تابع $g(x)=\log_{\frac{۱}{۳}}(x+۲)$ را رسم کنید.

برای رسم نمودار $g(x)=\log_{\frac{۱}{۳}}(x+۲)$ کافی است نمودار $\boldsymbol{y=\log_{\frac{۱}{۳}}x}$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم (در این انتقال، خط x=o (محور yها) نیز دو واحد به سمت چپ انتقال پیدا می‌کند).

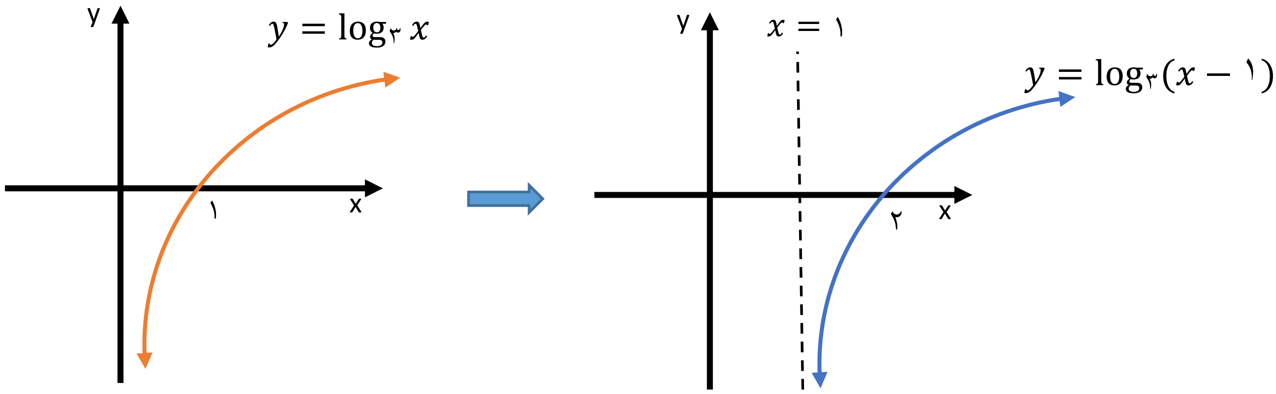




مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=\log_{۳}(x-۱)$

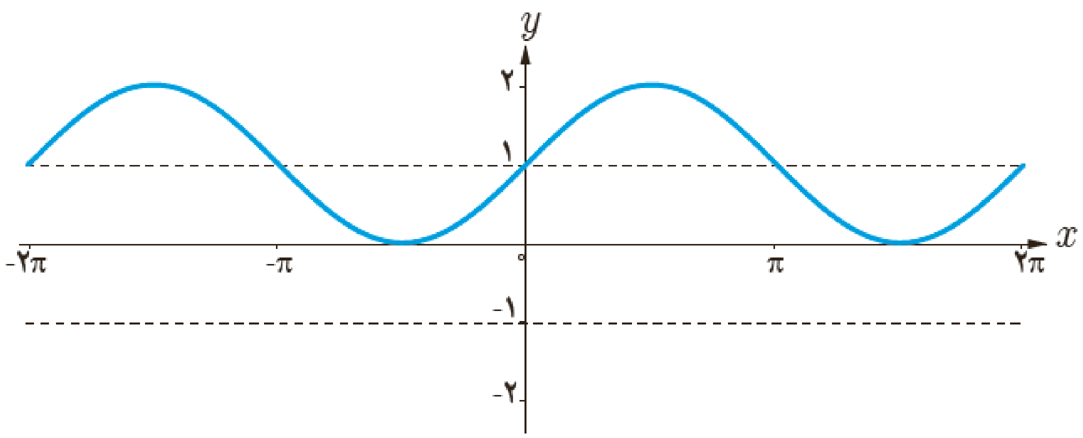
حل) اگر نمودار $y=\log_{۳}x$ را به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y=\log_{۳}(x-۱)$ به‌دست می‌آید (در این انتقال خط x=o (محور yها) نیز به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست انتقال پیدا می‌کند).



ب) $y = \sin(x - \frac{\pi}{۲})$

برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ واحد به سمت راست منتقل کنیم

به این ترتیب شکل مقابل حاصل می شود.

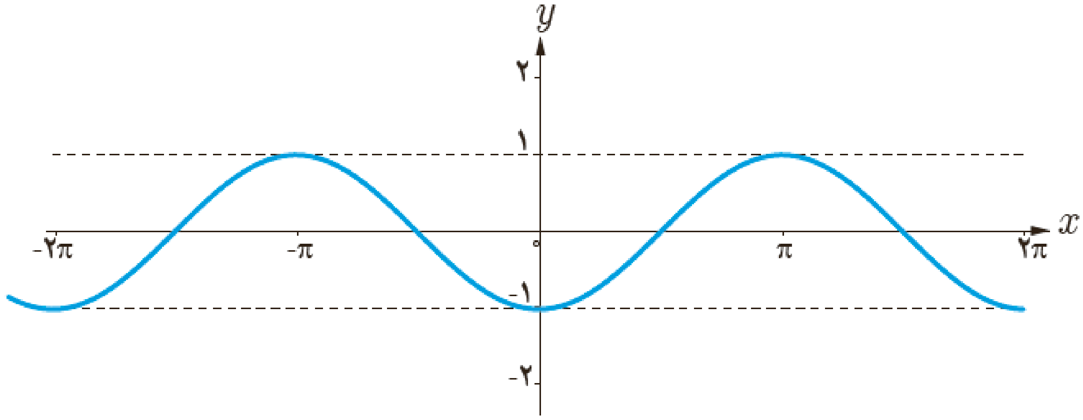


(ب)

پ) $y=\sin x+۱$

برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطه y=sinx را به اندازه یک واحد در جهت مثبت روی محور عمودی انتقال دهیم.

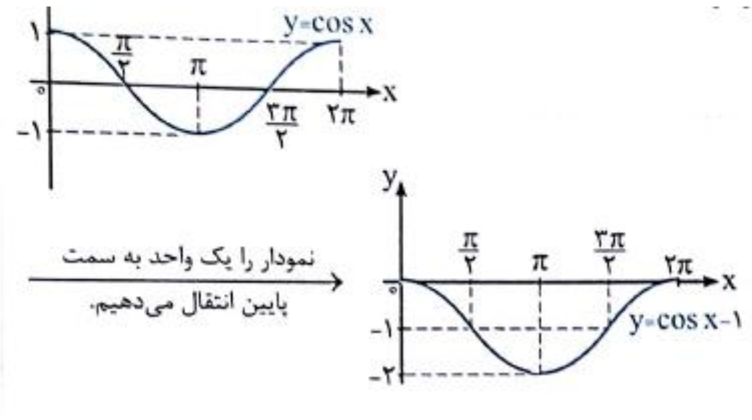
به این ترتیب شکل مقابل حاصل می شود.



(پ)

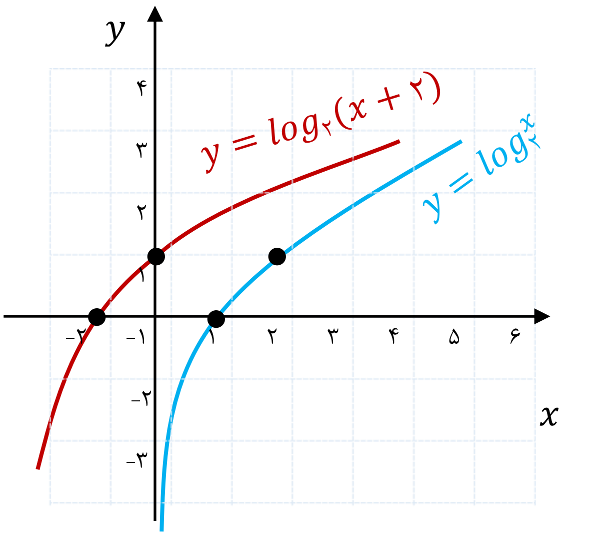
ت) $y=\cos x-۱$

حل) نمودار y = cosx را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم آن گاه نمودار $y=\cos x-۱$ به دست می آید.

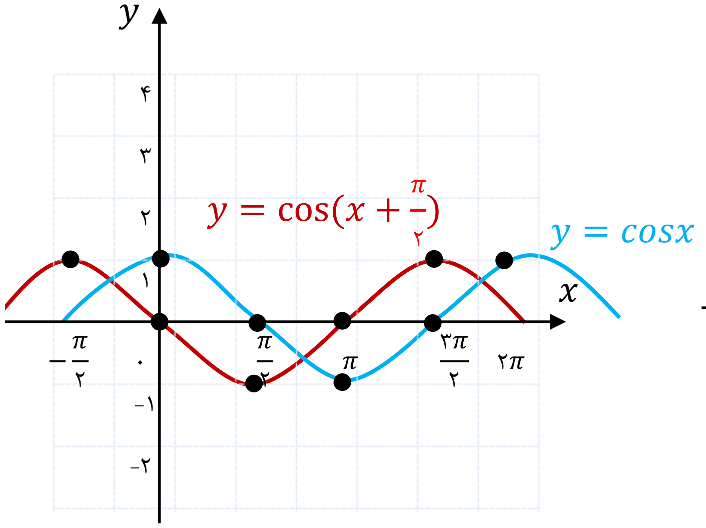


مثال: در زیر، نمودار توابع $y = log_{۲}x$ و $y = cosx$ رسم شده‌اند. نمودار توابع $y = log_{۲}(x + ۲)$ و $y = \cos(x + \frac{\pi}{۲})$ را به کمک انتقال رسم کنید.

رسم: با انتقال ۲ واحد در راستای افقی به طرف چپ

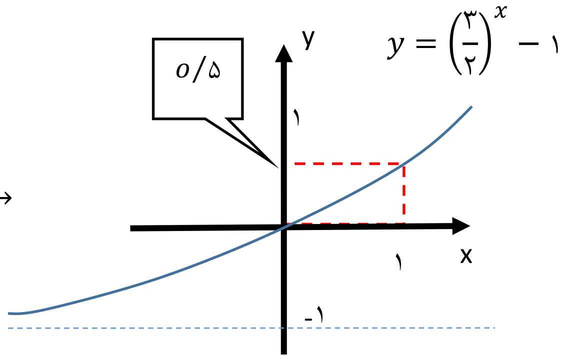


رسم: با انتقال $\frac{\pi}{۲}$ در راستای افقی به طرف چپ

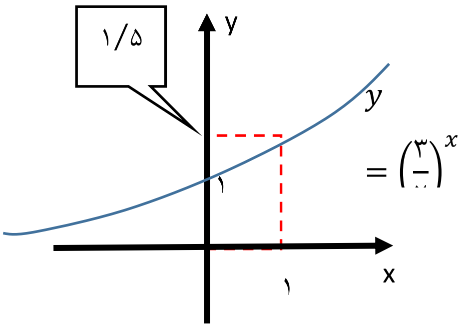


مثال : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

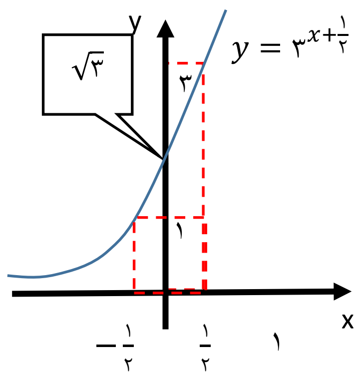
الف) $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x-1$



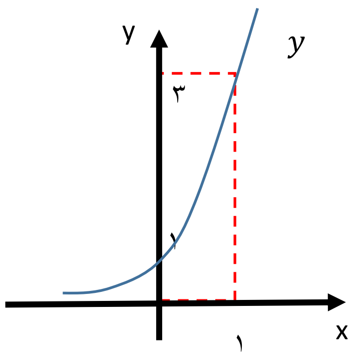
$\xrightarrow{\text{۱ واحد به پایین}}$ انتقال می‌دهیم



ب) $y=3^{x+\frac{1}{2}}$



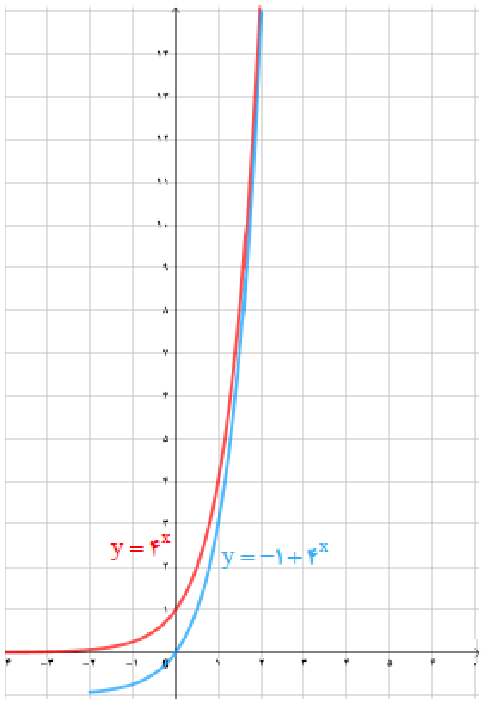
$\xrightarrow{\frac{1}{2}\text{ واحد به چپ}}$ انتقال می‌دهیم



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=4^x-1$ را در بازه‌ی $[-2,2]$ رسم کنید.

برای رسم از انتقال استفاده می‌کنیم کافی است نمودار $y=4^x$ را یک واحد روی محور عرض‌ها به سمت پایین انتقال دهیم. و بعد در بازه‌ی $[-2,2]$ آن را رسم کنیم

به این ترتیب داریم؛

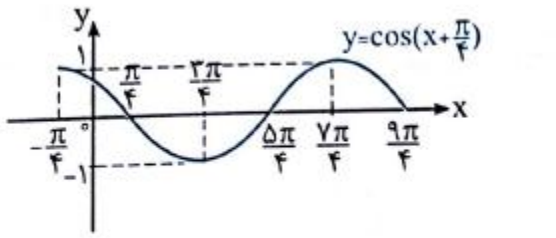


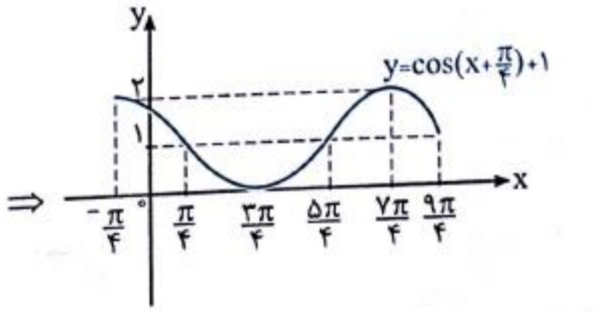
نکته: اگر تاثیر هم روی طول ها داشتیم و هم روی عرض ها فرقی ندارد اول تاثیر روی طول را انجام دهیم یا اول تاثیر روی عرض

مثال: نمودار تابع $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ را با توجه به نمودار $y=\cos x$ در صفحه مختصات رسم کنید.

با توجه به نکته بالا هیچ فرقی نمی کند اول نمودار را $\frac{\pi}{4}$ به سمت چپ انتقال دهیم (تاثیر روی طول) سپس نمودار حاصل را یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم (تاثیر روی عرض) یا اول نمودار را یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم (تاثیر روی عرض) سپس نمودارحاصل را $\frac{\pi}{4}$ به سمت چپ انتقال دهیم (تاثیر روی طول)

حل) ابتدا نمودار $y=\cos x$ را $\frac{\pi}{4}$ به سمت چپ و سپس نمودار حاصل را یک واحد به سمت بالا انتقال می دهیم تا نمودار $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ به دست اید:

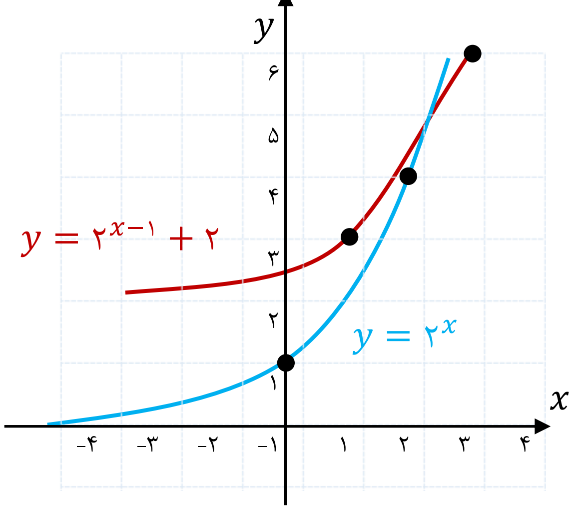




مثال: نمودار تابع $y = ۲^{x-۱} + ۲$ را با توجه به نمودار $y = ۲^x$ در صفحه مختصات رسم کنید..

رسم: با انتقال یک واحد در راستای افقی به طرف راست

و دو واحد در راستای قائم به طرف بالا



مثال: نمودار تابع $y=\log_{۳} x$ را ابتدا ۲ واحد به سمت راست و سپس ۲ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g به‌دست آید. نمودار تابع g محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

حل)
$$y=\log_{۳} x \xrightarrow{\text{انتقال به اندازه‌ی ۲ واحد به سمت راست}} y=\log_{۳}(x-۲)$$

$$\xrightarrow{\text{انتقال به اندازه‌ی ۲ واحد به سمت پایین}} g(x)=\log_{۳}(x-۲)-۲$$

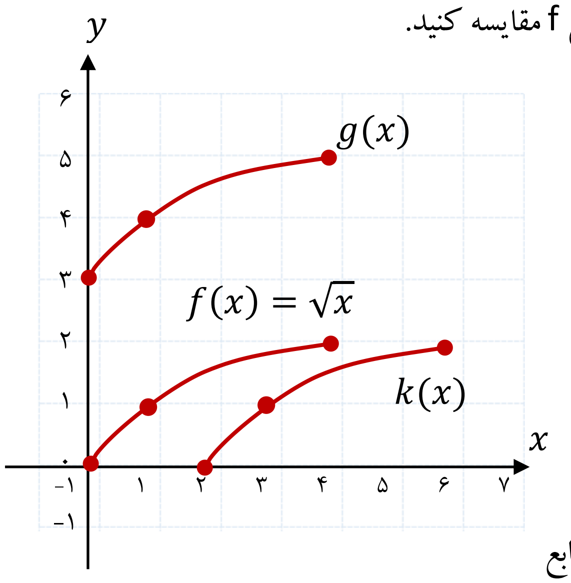
با حل معادله‌ی g(x)=o طول نقطه‌ی تلاقی نمودار g با محور xها به‌دست می‌آید:

$$g(x)=o \rightarrow \log_{۳}(x-۲)-۲=o \rightarrow \log_{۳}(x-۲)=۲ \rightarrow x-۲=۳^{۲}=۹ \rightarrow x=۱۱$$

مثال: الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را با دامنه‌ی $[o,۴]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.

ب) نمودار توابع $k(x) = f(x-۲)$ و $g(x) = f(x) + ۳$ را به کمک انتقال رسم کنید.

ج) دامنه و برد توابع k و g را محاسبه و با دامنه و برد تابع f مقایسه کنید.

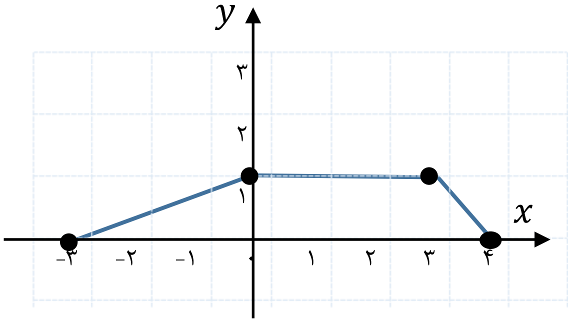


	$f(x) = \sqrt{x}$	K(x) = f(x − ۲)	g(x) = f(x)
دامنه	$[o,۴]$	[۲,۶]	$[o,۴]$
برد	$[o,۲]$	$[o,۲]$	[۳,۵]

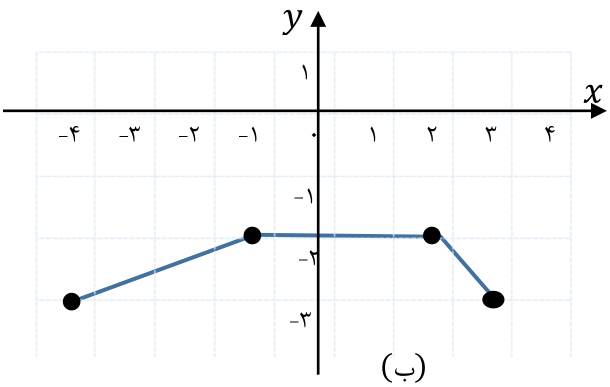
ج) بازه‌ی دامنه‌ی تابع k از انتقال بازه‌ی دامنه‌ی f در راستای افقی به اندازه‌ی ۲ واحد به سمت راست به دست می‌آید و برد تابع k همان برد تابع f می‌باشد.

بازه‌ی دامنه‌ی g همان بازه‌ی دامه‌ی تابع f است و بازه‌ی برد تابع g از انتقال ۳ واحد برد f در راستای قائم و به سمت بالا به دست می‌آید.

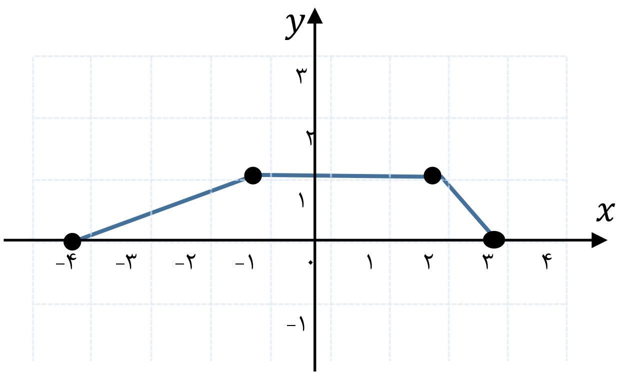
مثال: نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی، نمودار تابع $y = f(x+۱) - ۳$ را رسم می‌کنیم.



برای این کار ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = f(x+۱)$ رسم شود (شکل الف) و سپس این نمودار را سه واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(x+۱) - ۳$ رسم شود (شکل ب).



(ب)



(الف)

ب) انبساط و انقباض طولی وعرضی(در این حالت عددی در x یا $f(x)$ ضرب یا تقسیم می شود (تاثیر ضربی)

انبساط و انقباض طولی(افقی)

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ کافی است طول تمام نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ضرب کنیم.

نکته: تاثیر بر روی طول ها معکوس است یعنی ضرب به تقسیم تبدیل می شود و بالعکس

نکته: چون تاثیر بر روی طول ها معکوس است اگر **$0<k<1$باشد انبساط داریم و اگر $k>1$ باشد انقباض داریم.**

حالت خاص $k=-1$

برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$کافی است طول تمام نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در ۱- ضرب کنیم.یعنی تمام x ها را قرینه کنیم به عبارت دیگر نمودار را نسبت به محور y هاقرینه می کنیم.

انبساط و انقباض عرضی(عمودی)

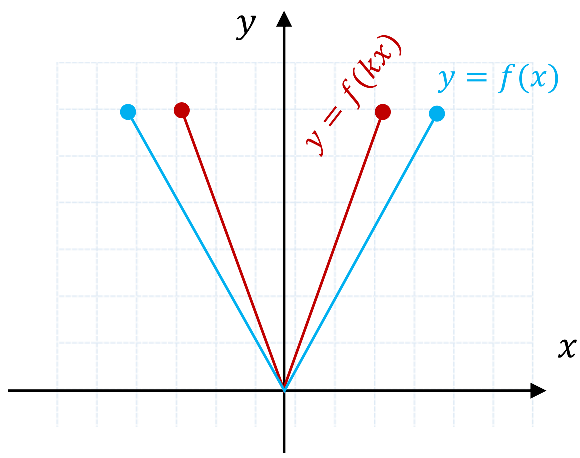
برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ کافی است عرض تمام نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در kضرب کنیم.

نکته: چون تاثیر بر روی عرض ها مستقیم است اگر **$0<k<1$باشد انقباض داریم و اگر $k>1$ باشد انبساط داریم.**

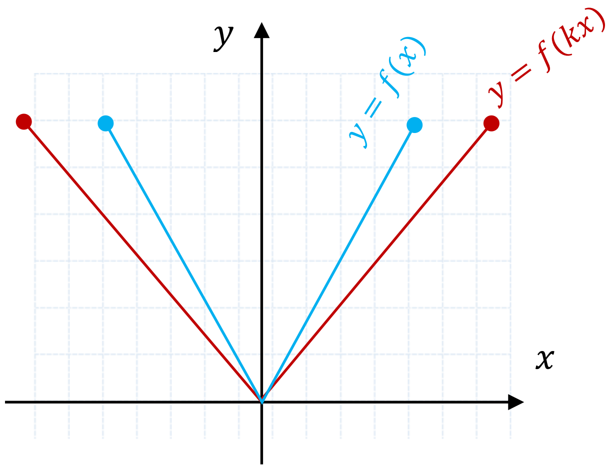
حالت خاص $k=-1$

برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$کافی است عرض تمام نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در ۱- ضرب کنیم.یعنی تمام y ها را قرینه کنیم به عبارت دیگر نمودار را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

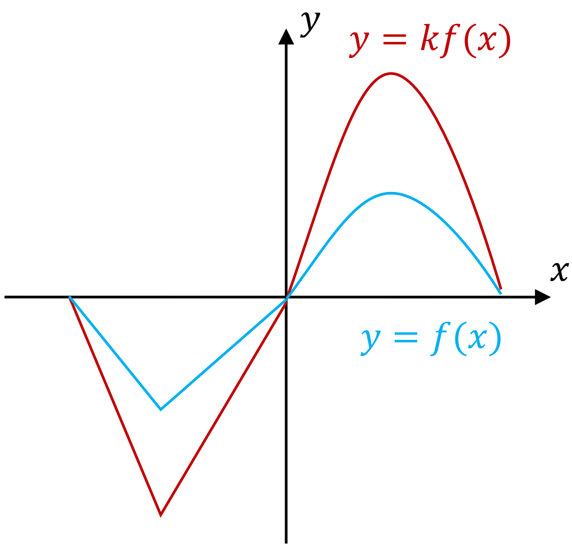
در شکل‌های زیر، نمودار تابع $y=f(kx)$ برای دو حالت $k>۱$ و $۰<k<۱$ رسم شده است.



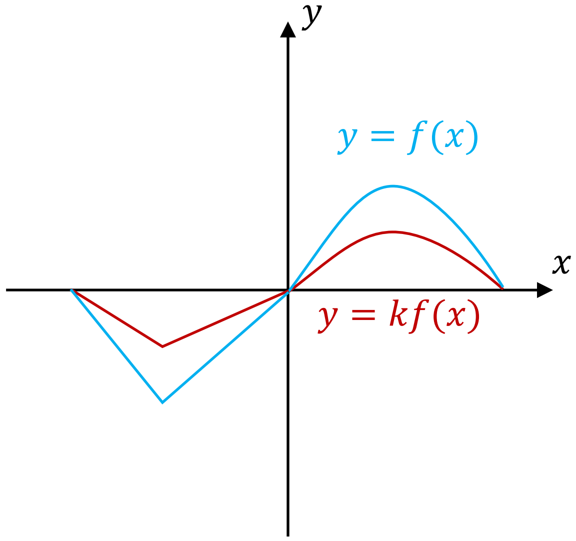
الف) $k > ۱$



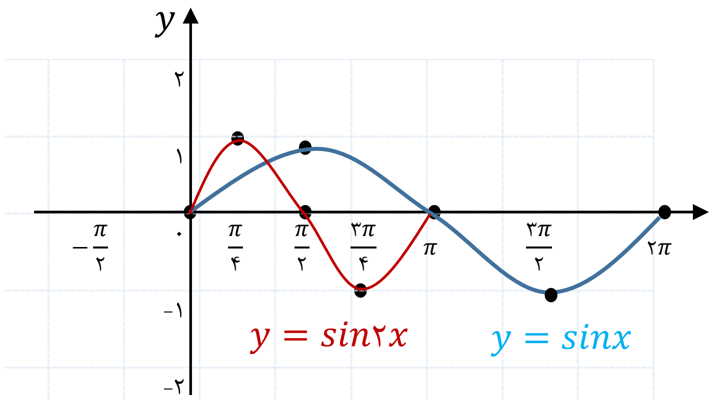
ب) $۰ < k < ۱$



$k > ۱$

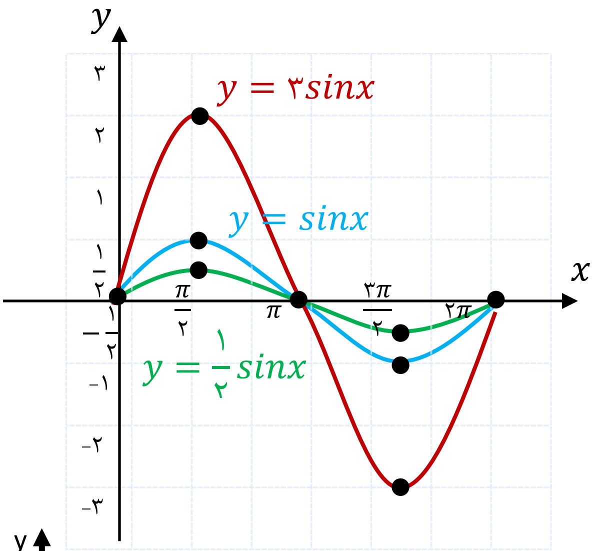


$o < k < ۱$

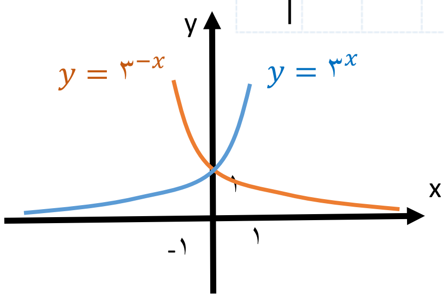


y
x
$y = sin۲x$
$y = sinx$

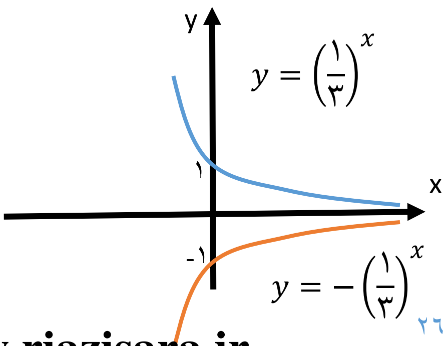
-۲



y
x
$y = ۳sinx$
$y = sinx$
$y = \frac{۱}{۲}sinx$



y
x
$y = ۳^{-x}$
$y = ۳^{x}$



y
x
$y = \left(\frac{۱}{۳}\right)^{x}$
$y = -\left(\frac{۱}{۳}\right)^{x}$

تذکر : توجه شود که فرقی ندارد اول تا ثیر روی طول ها را انجام دهیم یا روی عرض ها را

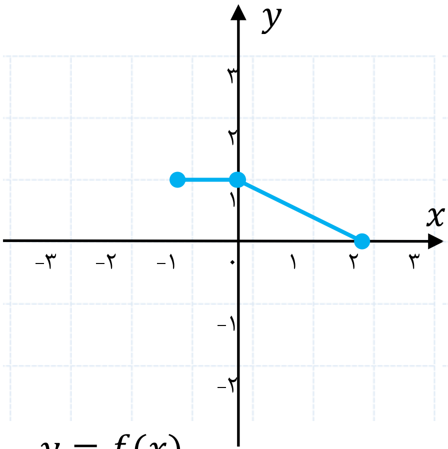
نکته: چون تمام اعمال روی طول ها به صورت معکوس است در اولویت بندی محاسبات هم باید این قاعده را رعایت کنیم یعنی اگر هم تاثیر جمعی(تفریقی) و هم ضربی (تقسیمی)روی طول ها داشتیم اول جمع و تفریق را انجام دهیم بعد ضرب و تقسیم به عبارت دیگر در تابع $y = f(kx \pm a)$ بر روی طول ها ابتدا a را تاثیر می دهیم(تاثیر معکوس)بعد k را(تاثیر معکوس)

تذکر : اگر ابتدا تاثیر روی طول ها را انجام دادیم تا زمانیکه تاثیر روی طول ها تمام نشده به سراغ تاثیر روی عرض ها نمی رویم

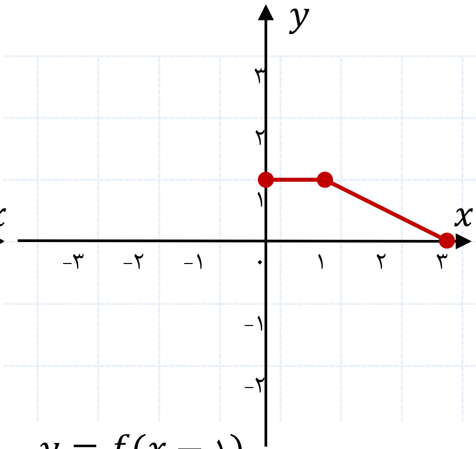
نکته: چون تمام اعمال روی عرض ها به صورت مستقیم است در اولویت بندی محاسبات هم باید این قاعده را رعایت کنیم یعنی اگر هم تاثیر جمعی(تفریقی) و هم ضربی (تقسیمی)روی عرض ها داشتیم اول ضرب و تقسیم را انجام دهیم بعد جمع و تفریق به عبارت دیگر در تابع $y = kf(x) \pm a$ بر روی عرض ها ابتدا k را تاثیر می دهیم(تاثیر مستقیم) بعد a را(تاثیر مستقیم)

تذکر : اگر ابتدا تاثیر روی عرض ها را انجام دادیم تا زمانیکه تاثیر روی عرض ها تمام نشده به سراغ تاثیر روی طول ها نمی رویم

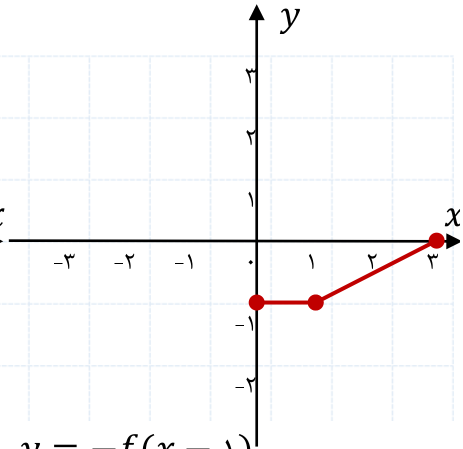
مثال : نمودار تابع y=f(x) در زیر رسم شده است. با انجام مراحل زیر، نمودار تابع y=-f(x-۱)+۲ را رسم کنید.



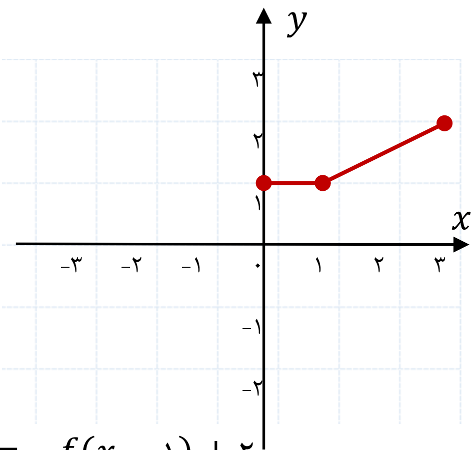
$y = f(x)$



$y = f(x-۱)$



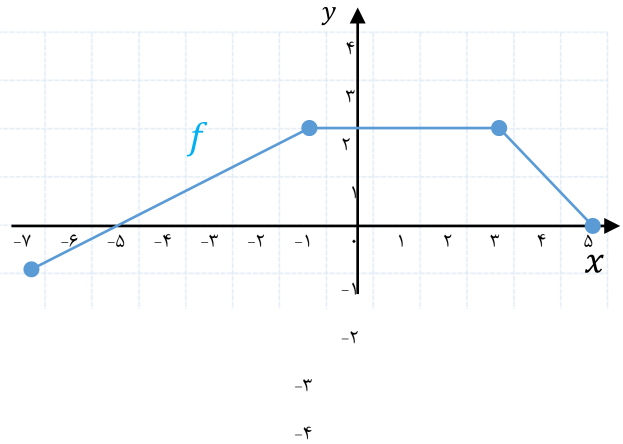
$y = -f(x-۱)$



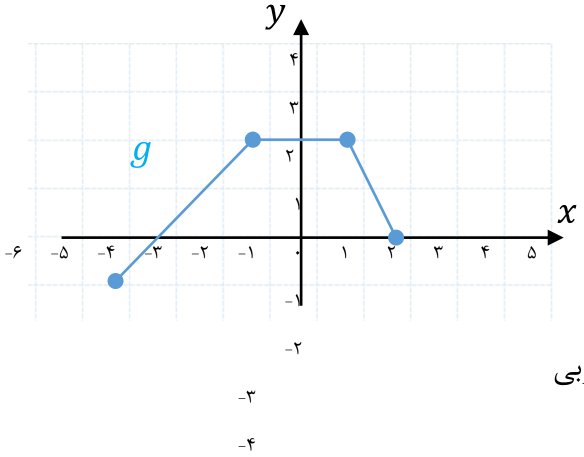
$y = -f(x-۱)+۲$

مثال: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع

g(x)=f(۲x+۱) را به کمک آن رسم می‌کنیم.



حل) نقاط مشخص شده در نمودار f را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده و سپس طول آنها را بر ۲ تقسیم می-کنیم تا نقاط متناظر از g به‌دست آیند.



دقت کنیم: ابتدا باید تاثیر جمعی را انجام داد سپس تاثیر ضربی

روش دوم

اگر $A = (x_o, y_o)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آنگاه $A' = \left(\frac{x_o-۱}{۲}, y_o\right)$ نقطه‌ی متناظر آن روی نمودار تابع g است

نکته: برای یافتن طول نقطه‌ی A' از معکوس تابع $y = ۲x + ۱$ استفاده می‌کنیم.

$$y = ۲x + ۱ \to y^{-۱} = \frac{x-۱}{۲}$$

مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

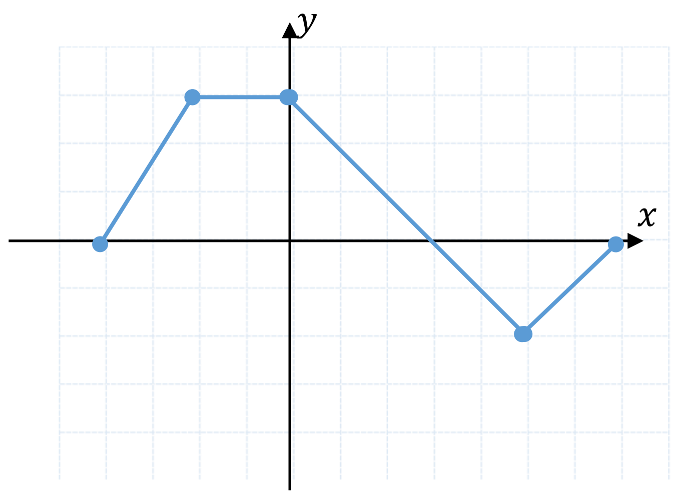
الف) $y = f(-x)$

ب) $y = ۲f(x-۱)$

پ) $y = -f(x) + ۲$

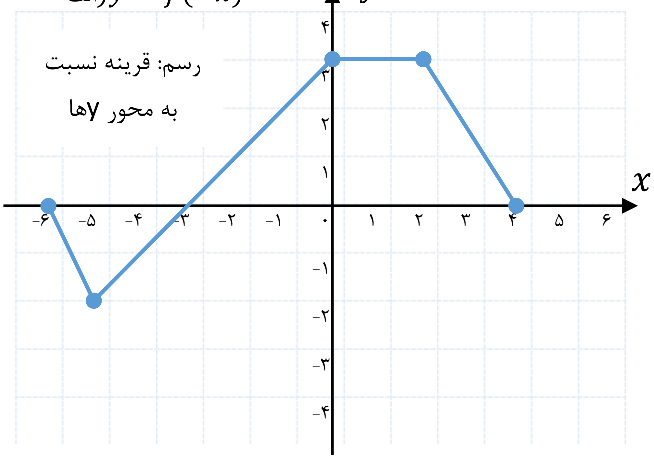
ت) $y = f(۲x-۱)$

ث) $y = f(۳-x)$

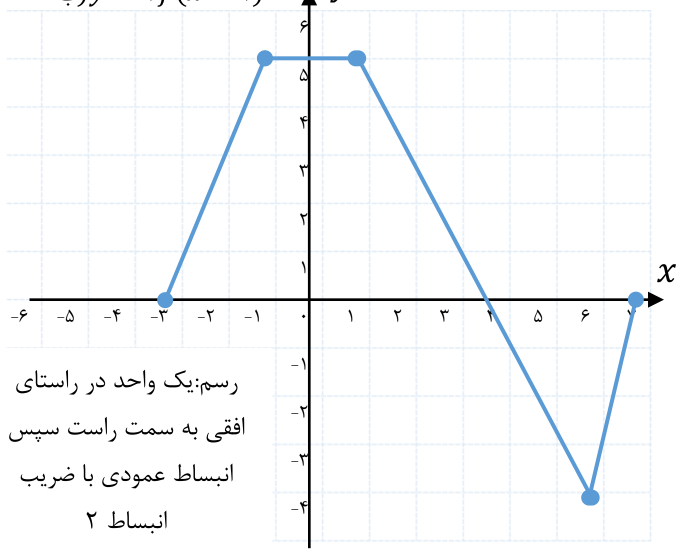


حل)

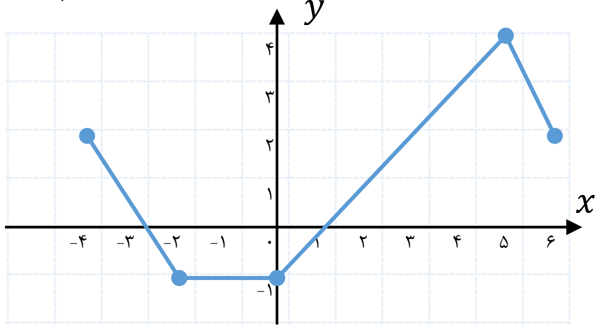
الف) $y = f(-x)$



ب) $y = ۲f(x-۱)$

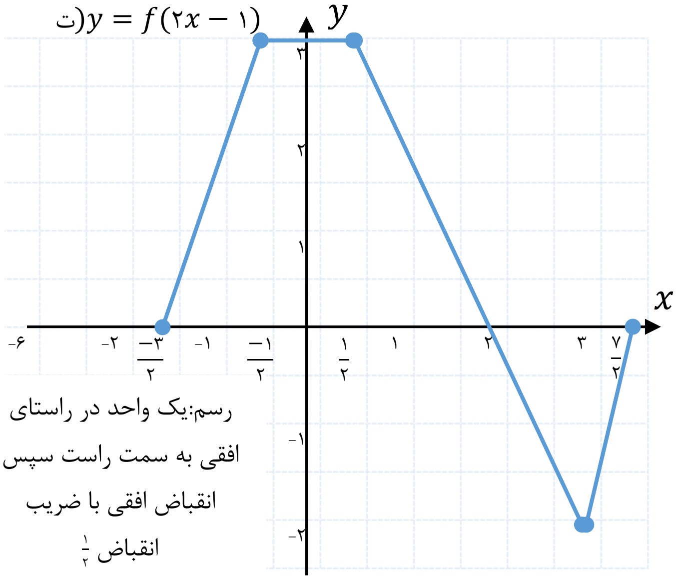


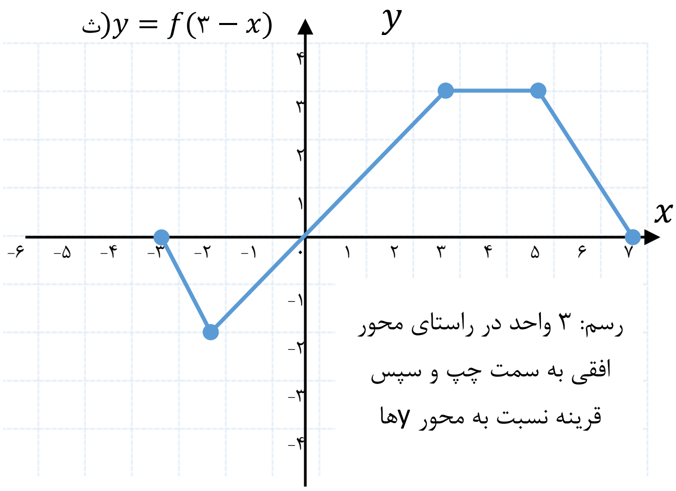
پ) $y = -f(x) + ۲$



رسم: قرینه نسبت به محور xها و سپس ۲ واحد در راستای
قائم به بالا

ت) $y = f(۲x-۱)$





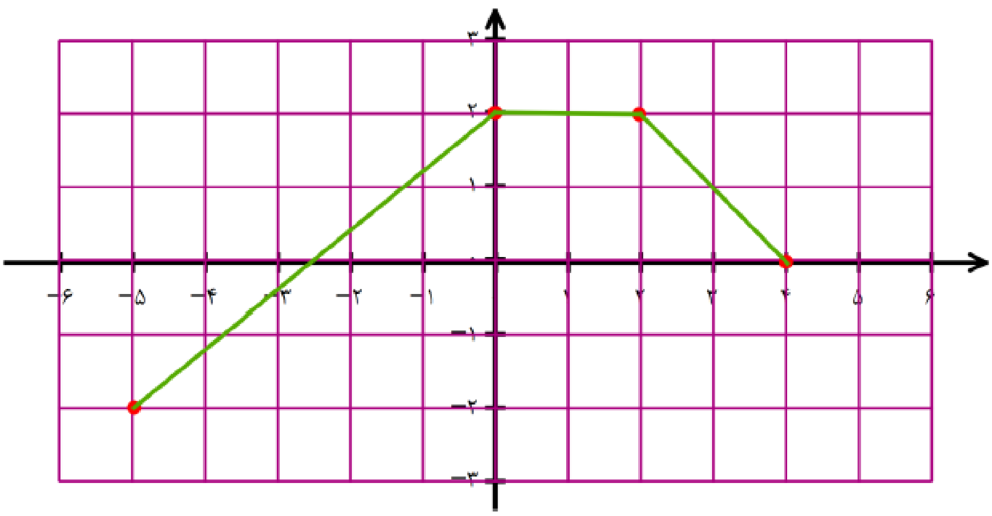
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = \frac{۱}{۲} f(۲x) - ۱$

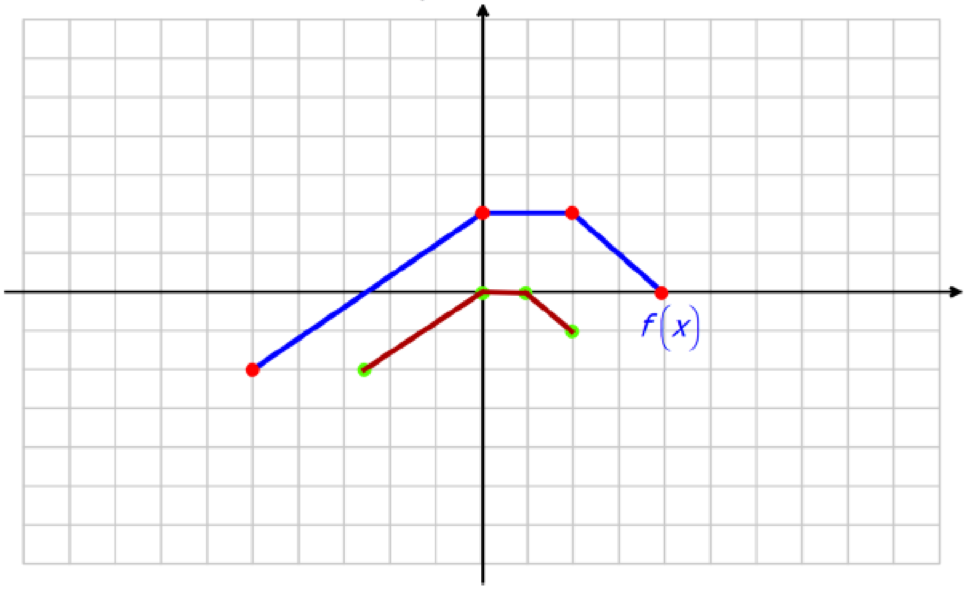
ب) $y = ۲f(x - ۱) - ۳$

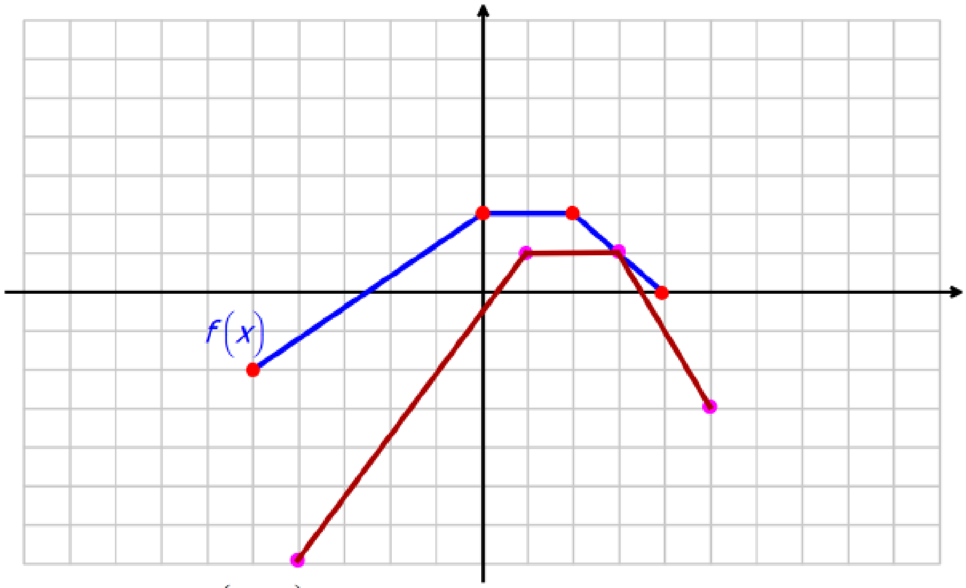
پ) $y = -f(-x) + ۲$

ت) $y = ۲f\left(\frac{۱}{۲}x\right)$



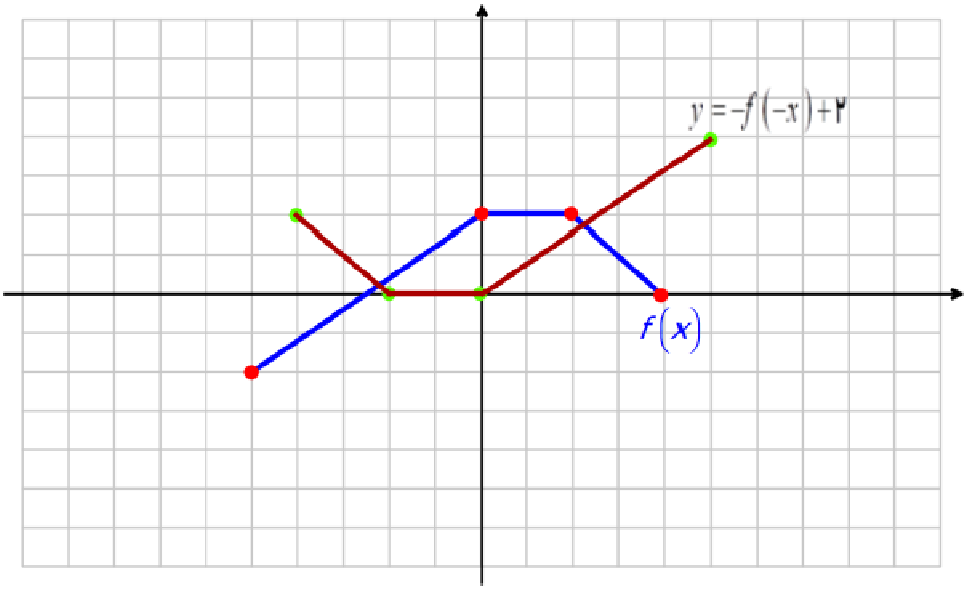
$$y = \frac{۱}{۲} f(۲x) - ۱$$

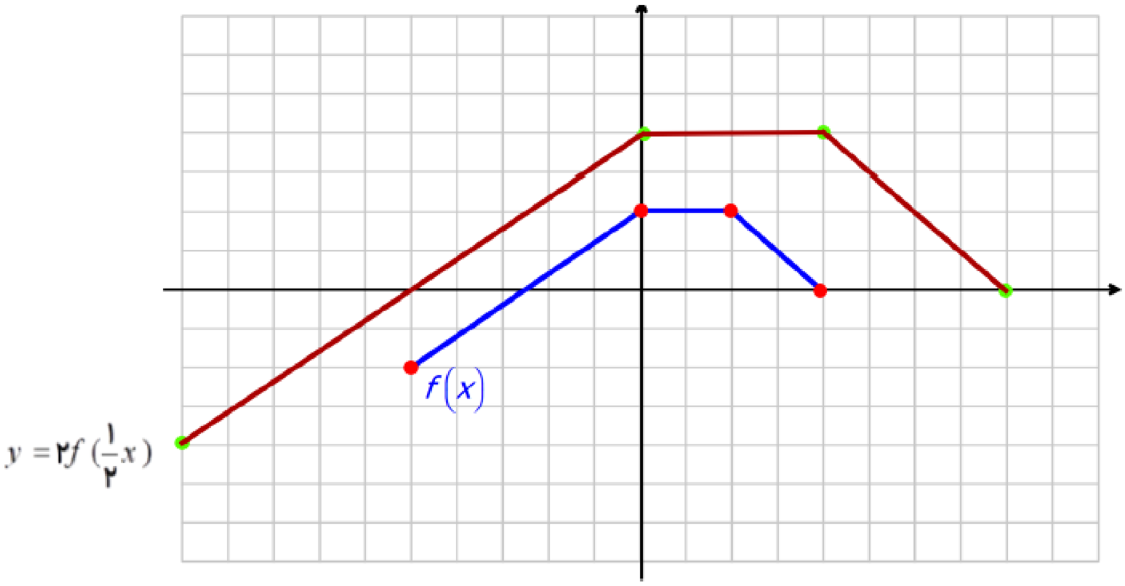




$$۲f(x-۱)-۳$$

$y=-f(-x)+۲$



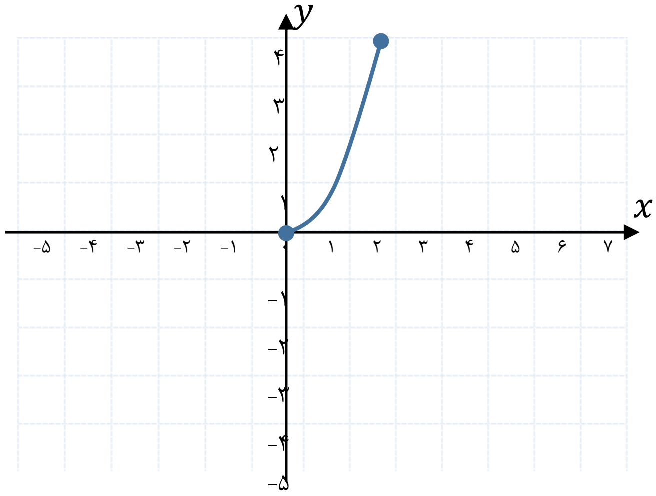


مثال:نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.

الف) $y = f(-x)$

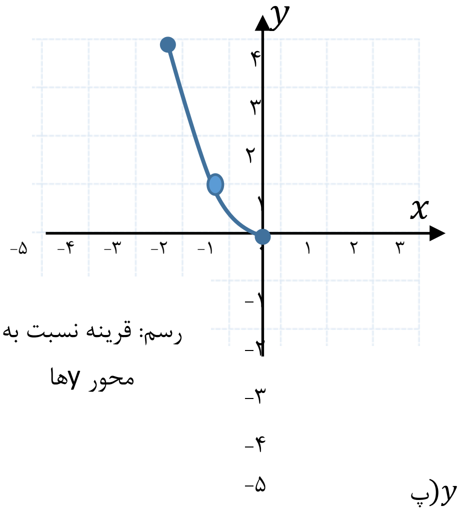
ب) $y = -f(x)$

پ) $y = -f(-x)$



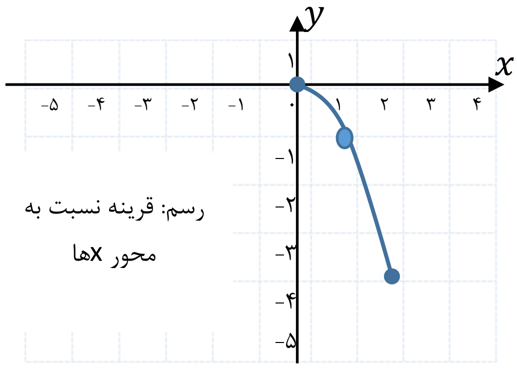
حل)

الف)$y = f(-x)$



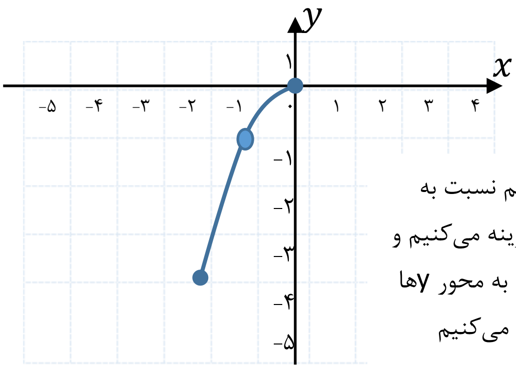
رسم: قرینه نسبت به محور yها

ب)$y = -f(x)$



رسم: قرینه نسبت به محور xها

پ)$y = -f(-x)$

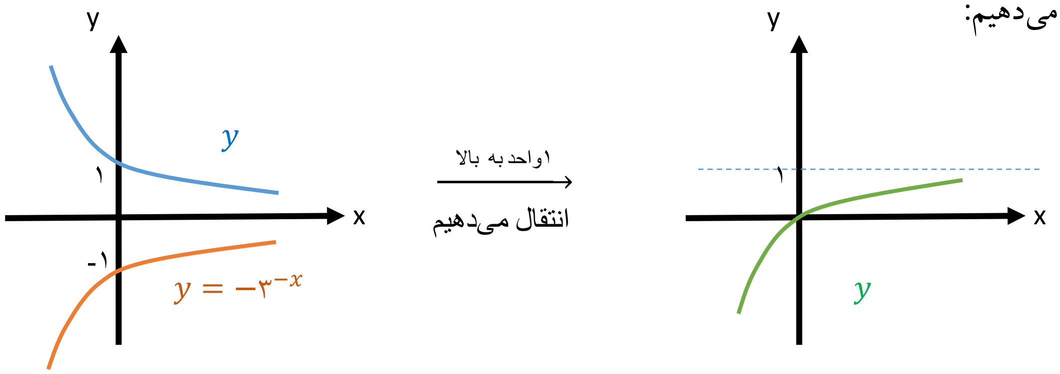


رسم: هم نسبت به محورxها قرینه می‌کنیم و هم نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم

مثال : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

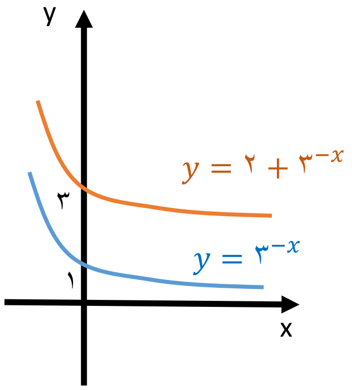
الف) $y = ۲ - ۳^{-x}$

حل) نمودار $y = ۳^{x}$ را یک بار نسبت به محور yها و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم، و در نهایت ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



ب) $y = ۳^{-x} + ۲$

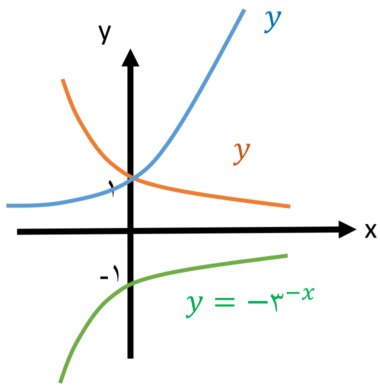
حل) نمودار $y = ۳^{-x}$ را دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

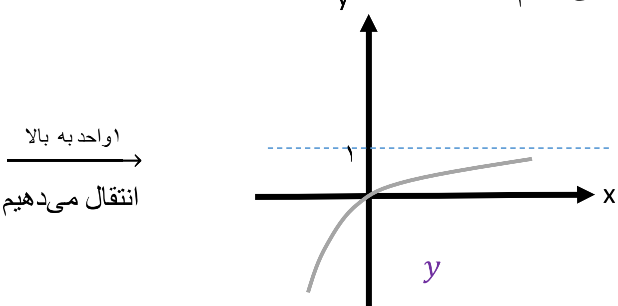


ث) $y = ۱ - ۳^{-x}$

نمودار $y = ۳^{x}$ را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم تا $y = ۳^{-x}$ به دست آید.

نمودار $y = ۳^{-x}$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا $y = -۳^{-x}$ به دست آید این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا $y = ۱ - ۳^{-x}$ به دست آید



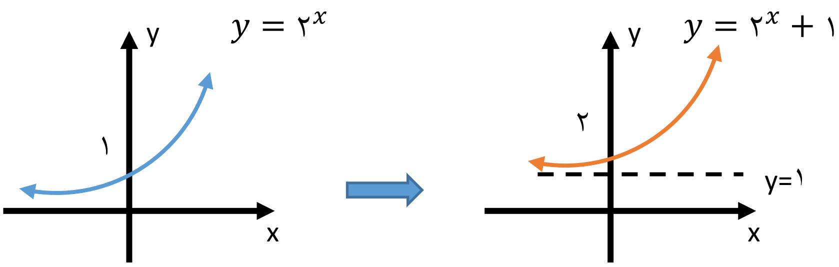


مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

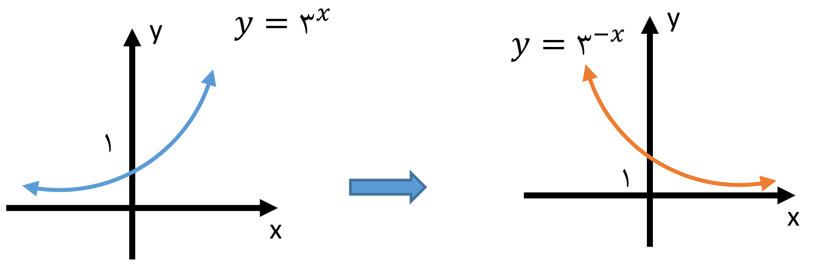
آ) $y = ۲^{x} + ۱$ ب) $y = ۲ \times ۳^{-x} - ۱$ پ) $y = ۱ - ۱۰^{x+۱}$

حل) آ) اگر نمودار $y=۲^{x}$ را به اندازه‌ی یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y = ۲^{x} +۱$ به‌دست می‌آید

(در این انتقال خط $y=0$ (محور xها) به اندازه‌ی یک واحد به سمت بالا انتقال پیدا می‌کند).

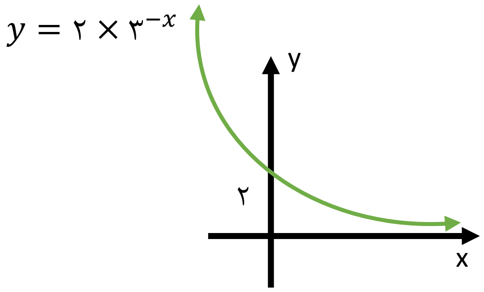


ب) ابتدا نمودار $y=۳^{-x}$ را با قرینه کردن نمودار $y=۳^{x}$ نسبت به محور yها به‌دست می‌آوریم:



با دو برابر کردن عرض نقاط نمودار $y=۳^{-x}$

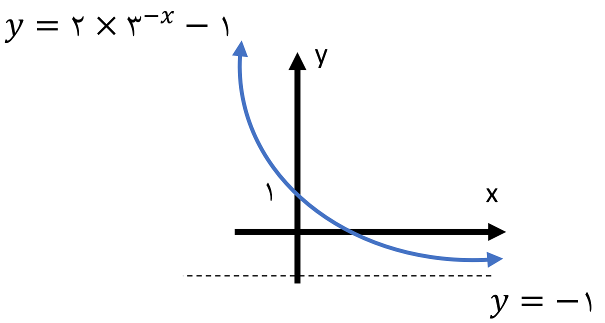
نمودار $y = ۲ \times ۳^{-x}$ رسم می‌شود:



نمودار $y = ۲ \times ۳^{-x}$ را یک واحد به سمت

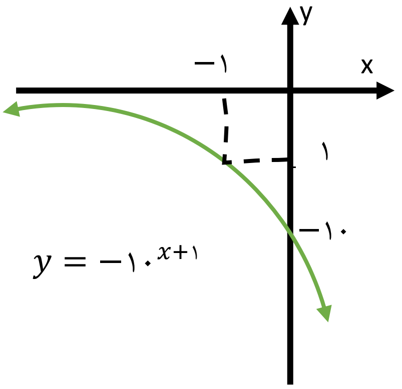
پایین انتقال می دهیم تا نمودار

$y = ۲ \times ۳^{-x}-۱$ به دست اید:

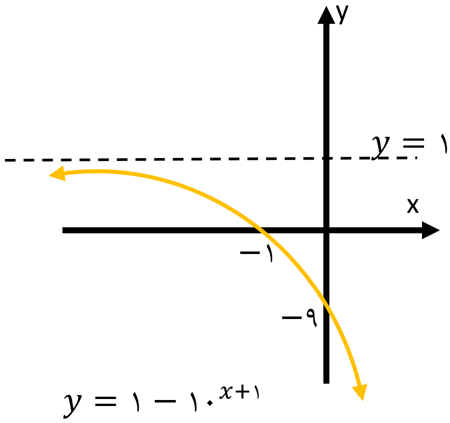


پ) ابتدا نمودار $y = ۱۰^{x+۱}$ را با انتقال نمودار $y=۱۰^{x}$ به اندازه‌ی یک واحد به سمت چپ رسم می‌کنیم:

با قرینه کردن نمودار $y = ۱۰^{x+۱}$ نسبت به محور xها نمودار $y = ۱۰^{x+۱}$ به‌دست می‌اید:



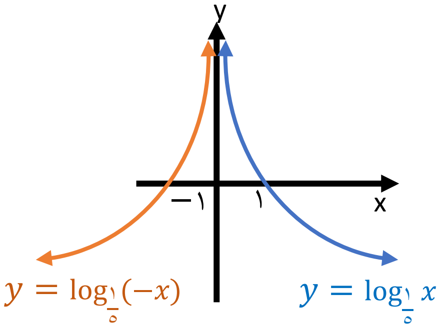
اگر نمودار $y = -۱۰^{x+۱}$ را به اندازه‌ی یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم نمودار $y = ۱-۱۰^{x+۱}$ به‌دست می‌آید:



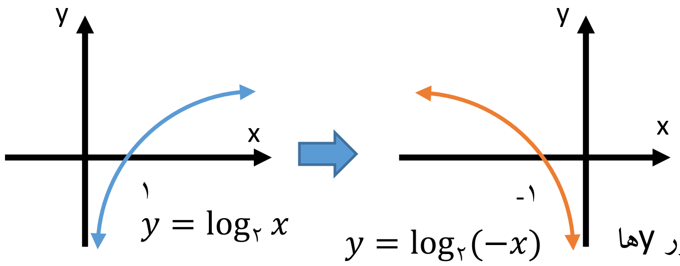
مثال: نمودار تابع $f(x)=۳^{x}$ را ابتدا نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم و در نهایت نمودار را به اندازه‌ی ۵ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g به‌دست آید. مقدار $g(-۲)$ را به‌دست آورید.

حل) اگر نمودار تابع $y=۳^{x}$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=۳^{-x}$ به‌دست می‌اید. با دو برابر کردن عرض نقاط نمودار $y=۳^{-x}$ نمودار تابع $y=۲×۳^{-x}$ و با انتقال نمودار $y=۲×۳^{-x}$ به اندازه‌ی ۵ واحد به سمت بالا، نمودار تابع $g(x)=۲×۳^{-x}+۵$ به‌دست می‌آید. داریم: $g(-۲)=۲×۳^{-(-۲)}+۵=۲×۹+۵=۲۳$

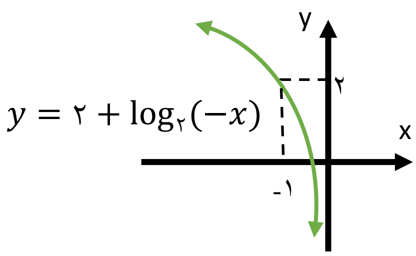
مثال: با قرینه کردن نمودار $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ نسبت به محور yها نمودار $y = \log_{\frac{1}{5}}(-x)$ به‌دست می‌آید



مثال: نمودار $y = 2 + \log_2(-x)$ را رسم کنید.



پاسخ: ابتدا از روی نمودار $y = \log_2 x$ نمودار $y = \log_2(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، کافی‌است نمودار $y = \log_2 x$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم:

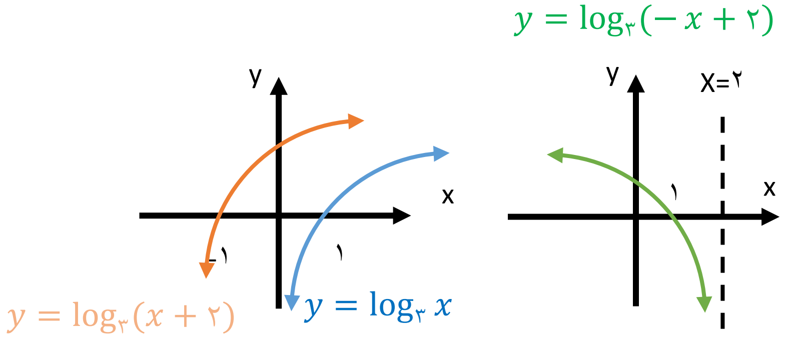


اگر نمودار $y = \log_2(-x)$ را دو واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y = 2 + \log_2(-x)$ به‌دست می‌آید.

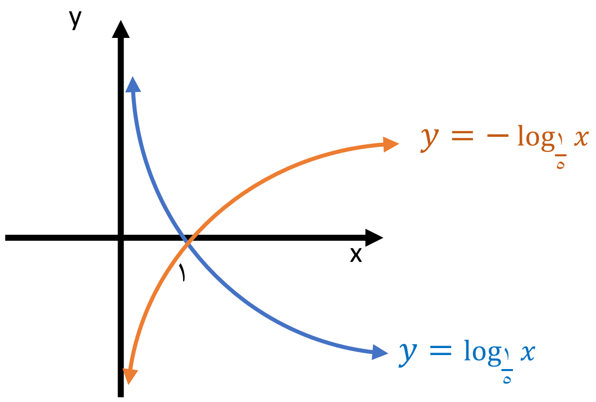
مثال: نمودار $y = \log_{۳}(-x + ۲)$ را رسم کنید.

ابتدا نمودار $y = \log_{۳} x$ را ۲ واحد به سمت چپ منتقل می کنیم سپس نسبت به محور yها قرینه کنیم.

(توجه کنید که در انتقال ۲ واحد به سمت راست، خط x=0 نیز باید ۲ واحد به سمت راست انتقال پیدا کند.)



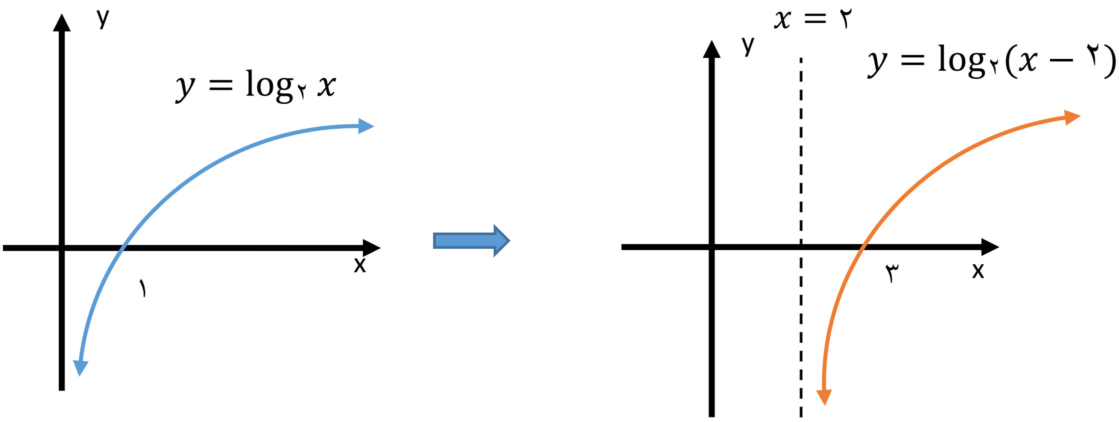
مثال: با قرینه کردن نمودار $y = \log_{\frac{۱}{۵}} x$ نسبت به محور yها نمودار $y = \log_{\frac{۱}{۵}}(-x)$ به‌دست می‌آید:



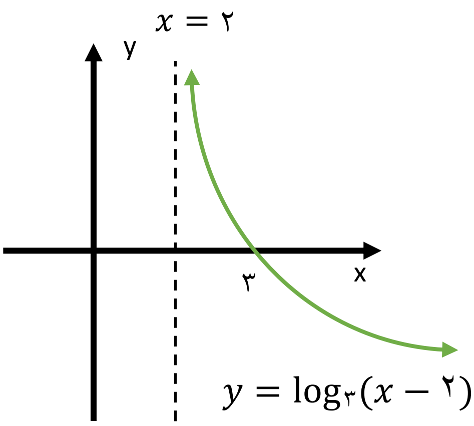
مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۲ - \log_{۲}(x - ۲)$ ب) $y = ۱ - \log_{\frac{۱}{۵}}(-x)$

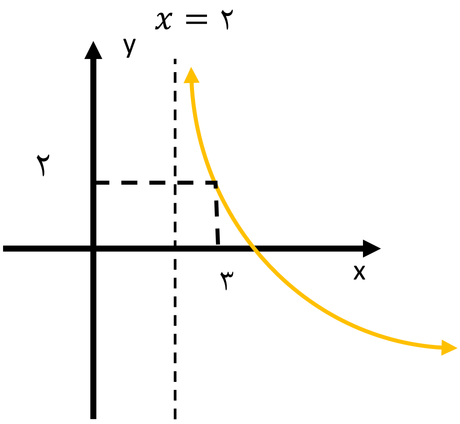
الف) با انتقال نمودار $y = \log_{۳} x$ به اندازه‌ی ۲ واحد به سمت راست، نمودار $y = \log_{۳}(x - ۲)$ به‌دست می-آید.



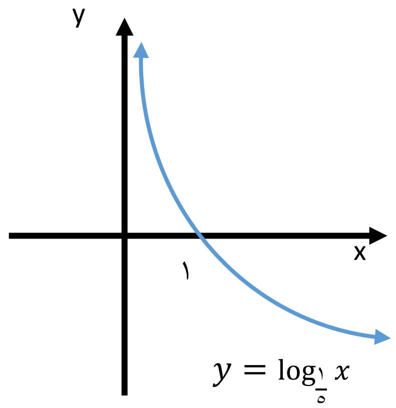
با قرینه کردن نمودار $y = \log_{۳}(x - ۲)$ نسبت به محور xها نمودار $y = -\log_{۳}(x - ۲)$ به‌دست می‌آید:

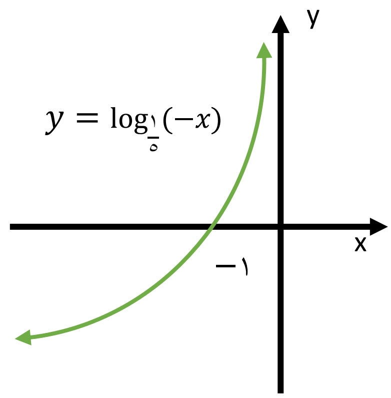


اگر نمودار $y = -\log_{۳}(x - ۲)$ را به اندازه‌ی ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y = ۲ - \log_{۳}(x - ۲)$ رسم می‌شود.

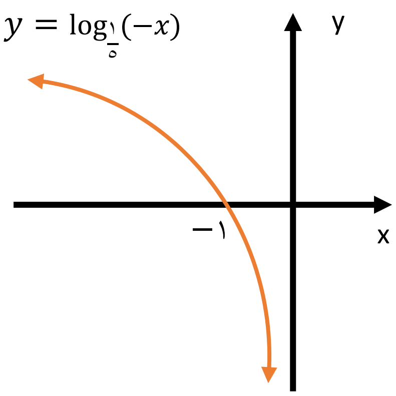


ب) با قرینه کردن نمودار $y=\log_{\frac{1}{5}} x$ نسبت به محور yها نمودار $y=\log_{\frac{1}{5}}(-x)$ به‌دست می‌آید:

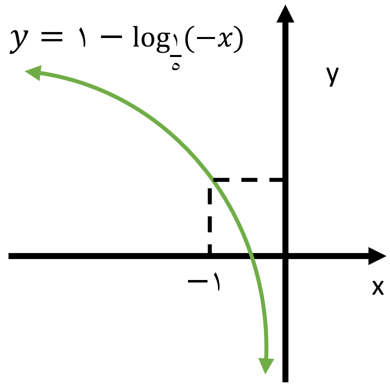




اگر نمودار $y=\log_{\frac{1}{5}}(-x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم، نمودار $y=\log_{\frac{1}{5}}(-x)$ رسم می‌شود:

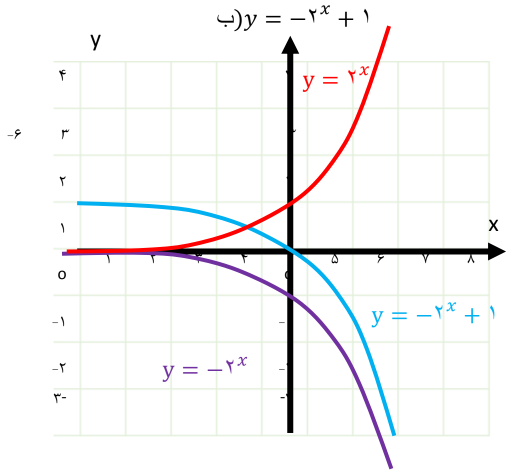


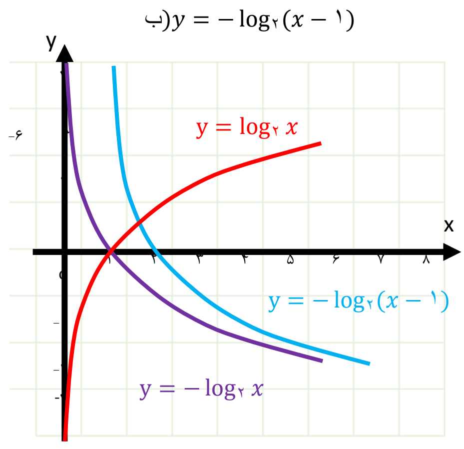
با انتقال به اندازه‌ی یک واحد به سمت بالا، نمودار $y=۱-\log_{\frac{1}{5}}(-x)$ به‌دست می‌آید:



مثال : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

به کمک انتقال و تقارن نسبت به محور طول‌ها رسم می‌شود

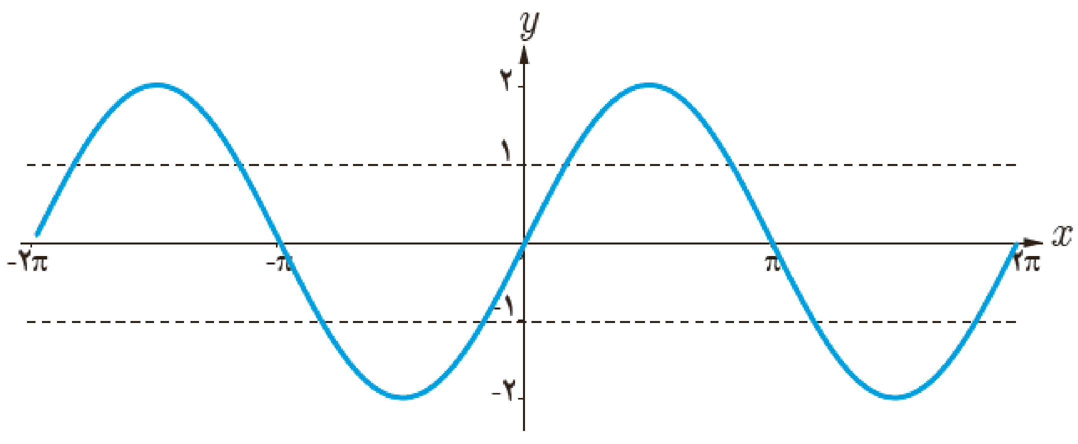




مثال: هر یک از توابع با ضابطه های داده شده دارای کدام نمودار است؟

الف) $y = ۲\sin x$

کافی است عرض نقاط نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \sin x$ را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار حاصل در بازه $[-۲\pi ،۲\pi]$ به دست می آید.

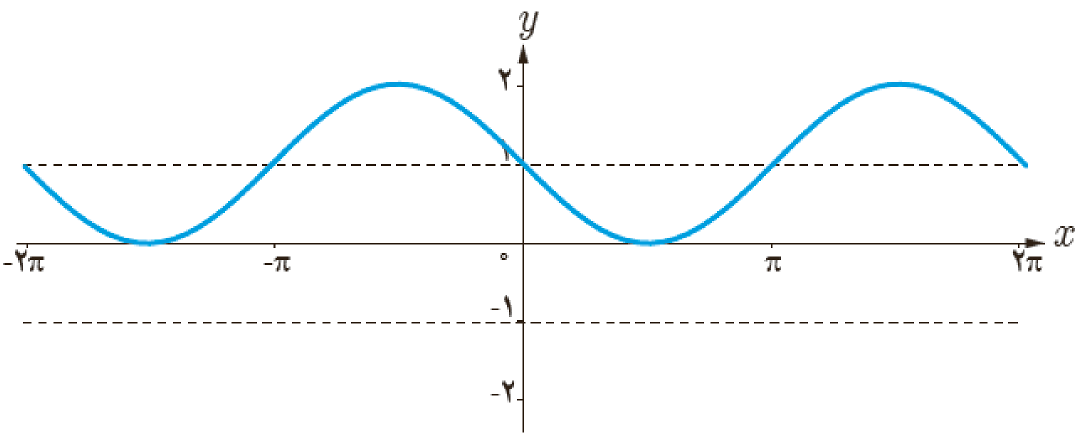


(الف)

ت) $y=-\sin x+۱$

برای رسم نمودار این تابع ابتدا نمودار تابع با ضابطه $y = -\sin x$ را با قرینه کردن نمودار تابع سینوس نسبت به محور x ها رسم نموده و سپس نمودار حاصل را به اندازه یک واحد به سمت بالا انتقال می دهیم به این ترتیب شکل مقابل به دست می آید.

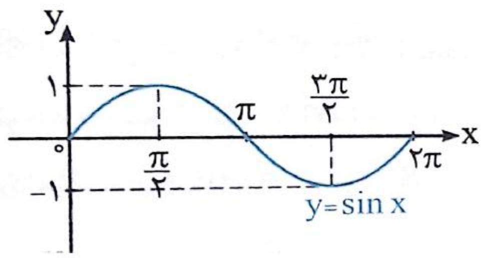
بنابراین نمودار $y = -\sin x$ درباره $[۰ ، ۲\pi]$ به صورت مقابل است:



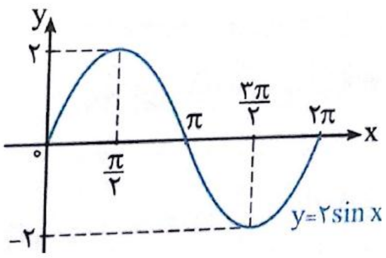
(ت)

مثال: نمودار تابع $y=۲\sin x-۱$ را در بازه $[۰ ، ۲\pi)$ به کمک انتقال رسم کنید.

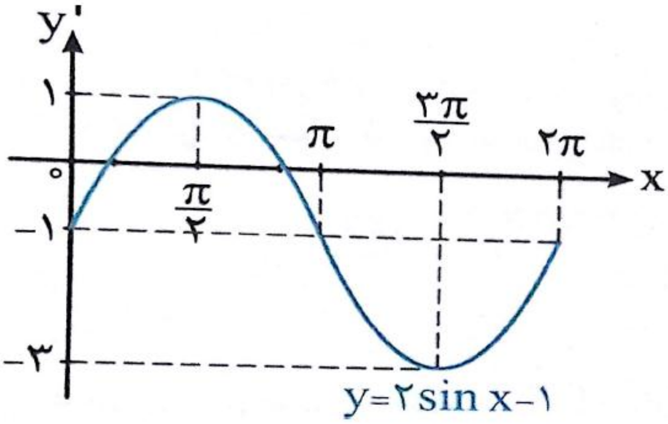
پاسخ : برای سرم نمودار تابع $y=۲\sin x-۱$ ابتدا در نمودار $y = \sin x$ عرض هر نقطه را دو برابر می کنیم تا نمودار $y=۲\sin x$ به دست آید.



$\xrightarrow{\text{عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم.}}$



نمودار $y=2\sin x$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می دهیم تا نمودار $y=2\sin x-1$ به دست اید.

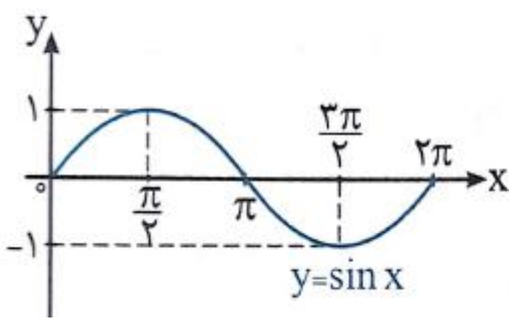


مثال : نمودار هر یک از توابع زیر را با توجه به نمودار y = sin x در صفحه مختصات رسم کنید.

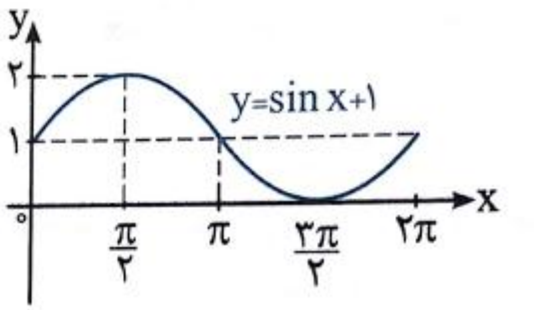
آ) $y=\sin x+1$ ب) $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ پ) $y=-3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$

ت) $y=\sin(-x)$

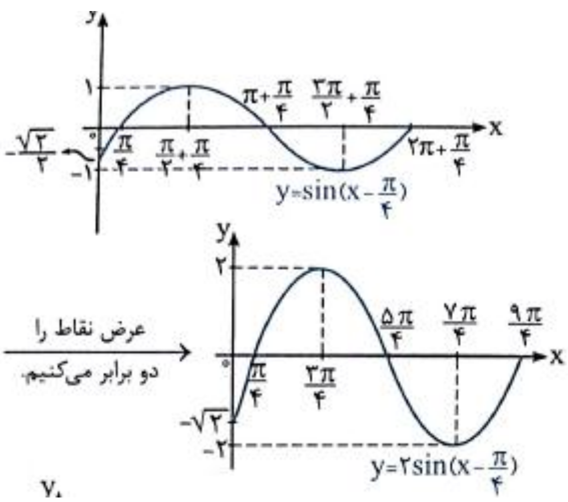
حل) آ) اگر نمودار y = sinx را یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم نمودار y = sin x+1 به دست می آید.



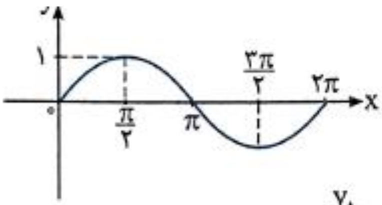
$\xrightarrow[\text{بالا انتقال می‌دهیم.}]{\text{نمودار را یک واحد به سمت}}$

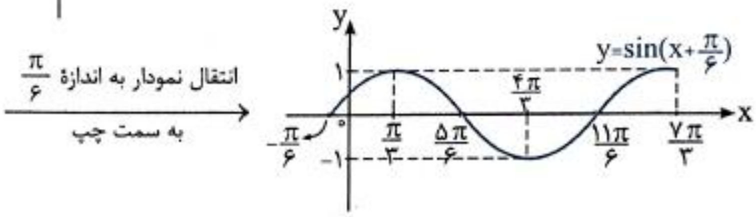


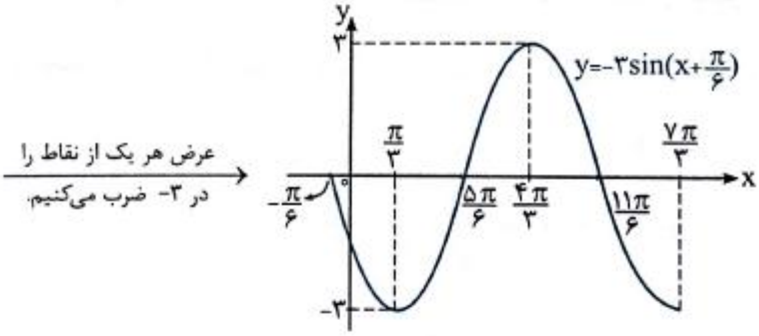
ب) ابتدا با انتقال $\frac{\pi}{4}$ واحد نمودار $y = \sin x$ به سمت راست نمودار $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ را رسم می کنیم سپس عرض نقاط روی نمودا رy را دو برابر می کنیم تا نمودار $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ به دست اید:

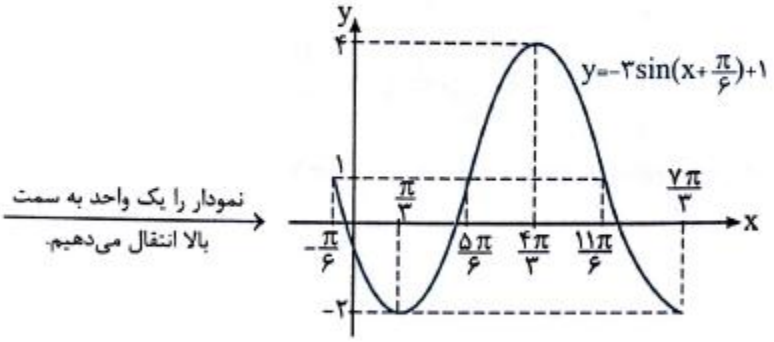


پ)





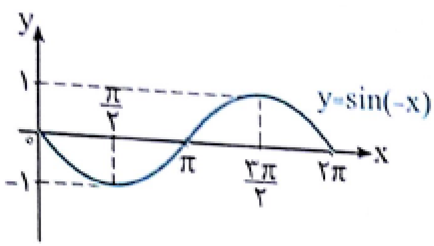




ت) باتوجه به این که sin (-x) = - sinx می باشد داریم

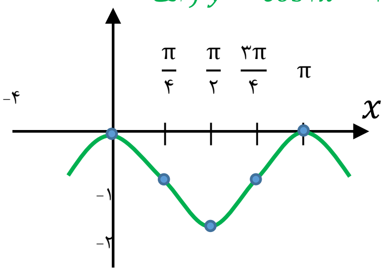
$$y = \sin(-x) = -\sin x$$

اگر نمودار y = sin x را نسبت به محور x ها قرینه کنیم. نمودار y = - sinx به دست می آید:

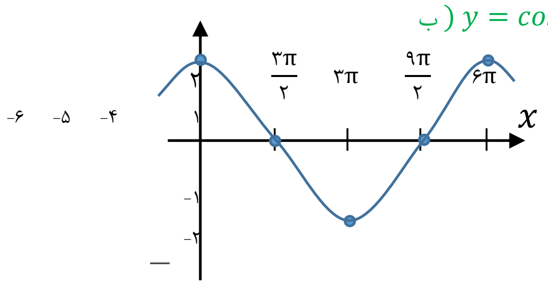


مثال: نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع y=cosx رسم کنید.

الف) $y = \cos 2x - 1$

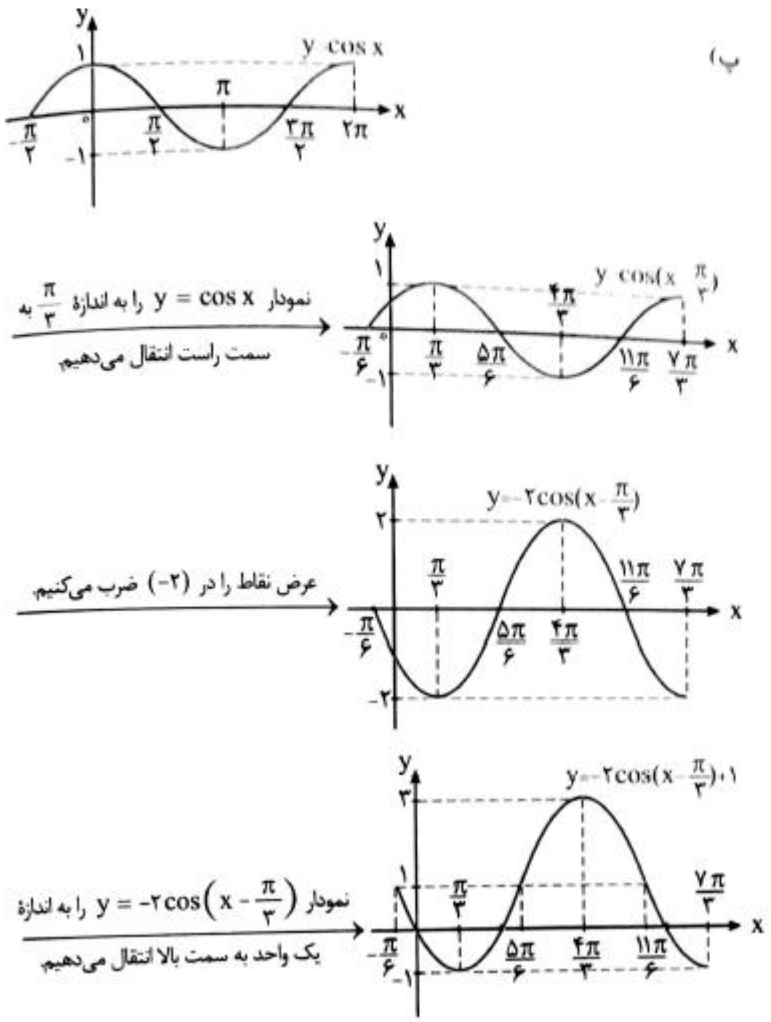


ب) $y = \cos(\frac{x}{3})$



پ) $y = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

پ)

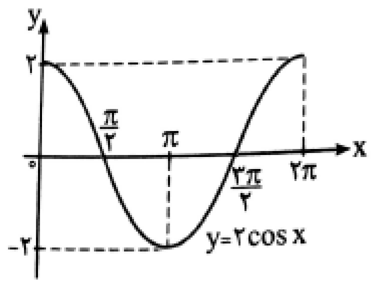


ث) $y = ۳\cos(-x)$

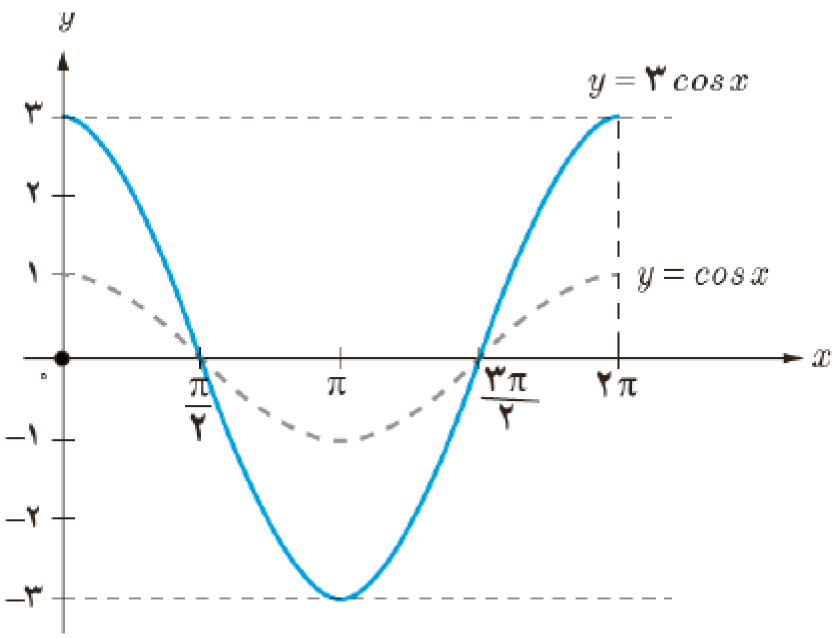
حل) چون cos (-x) = cosx می باشد، پس داریم

$$y = ۲\cos(-x) = ۲\cos x$$

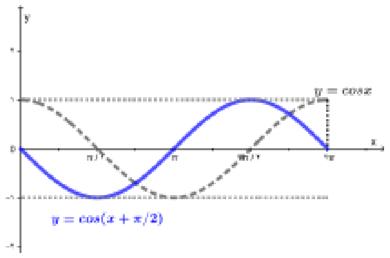
برای رسم نمودار $y = ۲\cos x$ کافی ا ست عرض نقاط روی نمودار y=cosx را دو برابر کنیم:



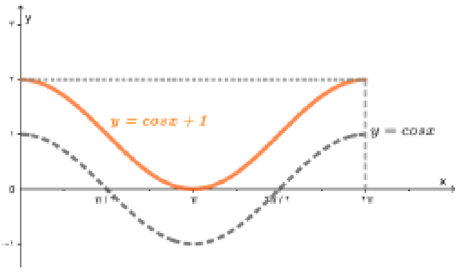
مثال: شکل زیر نمودار تابع با ضابطه y = ۳cosx را نشان می دهد. به طور مشابه هر یک از توابع با ضابطه های داده شده را در بازه [۰ ، ۲π] با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.



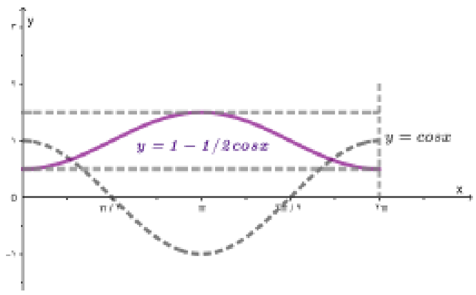
۱ $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$



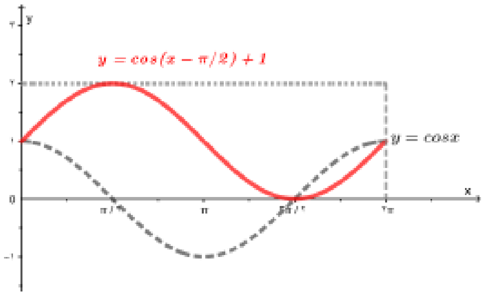
۲ $y=\cos x-۱$



۳ $y=۱-\frac{۱}{۲}\cos x$



۴ $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})+۱$



نکته:برای رسم تابع $y = |f(x)|$ مراحل زیر را انجام می هیم

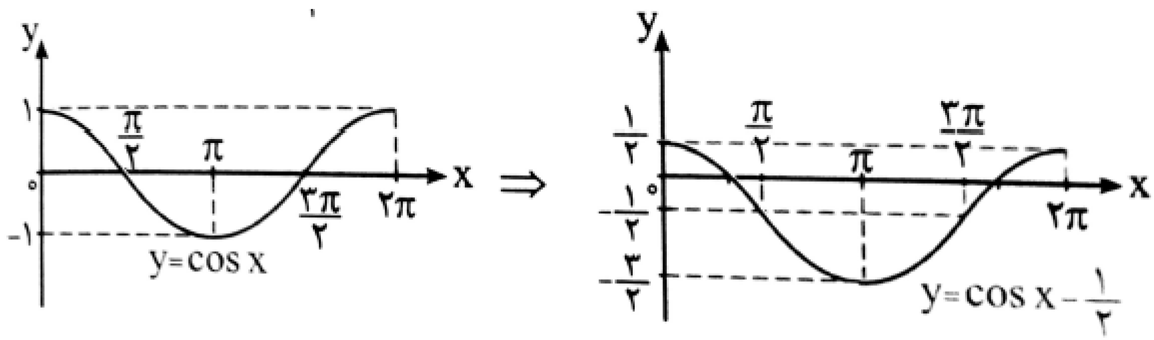
مرحله ۱) نمودار$y = f(x)$ را بدون در نظر گرفتن قدر مطلق رسم می کنیم

مرحله ۲) قسمت هایی از نمودار$y = f(x)$ که در پایین محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x قرینه می کنیم

مرحله ۳) بعد از قرینه کردن قسمت های زیر محور x را پاک می کنیم.

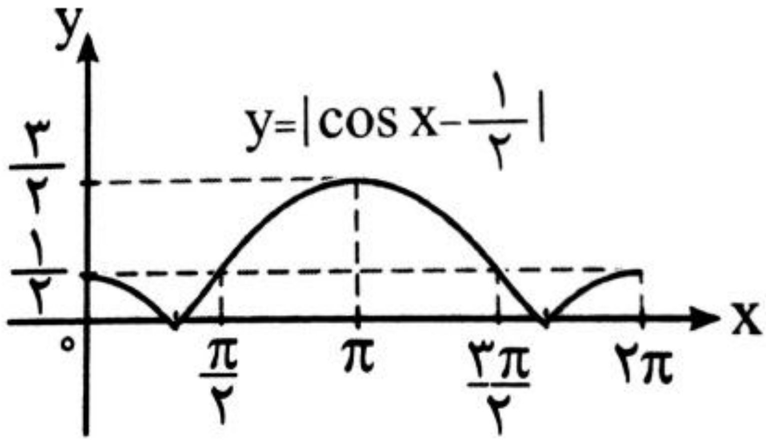
مثال: نمودار تابع $y = \left|\cos x - \frac{۱}{۲}\right|$ را در بازه $[۰, ۲\pi]$ رسم کنید.

پاسخ ابتدا نمودار تابع $y = \cos x - \frac{۱}{۲}$ را با انتقال نمودار تابع $y = \cos x$ به اندازه $\frac{۱}{۲}$ واحد به سمت پایین رسم می کنیم:



قسمتی از نمودار تابع $y = \cos x - \frac{۱}{۲}$ را که پایین محور x قرار دارد نسبت به محور xها قرینه می کنیم .

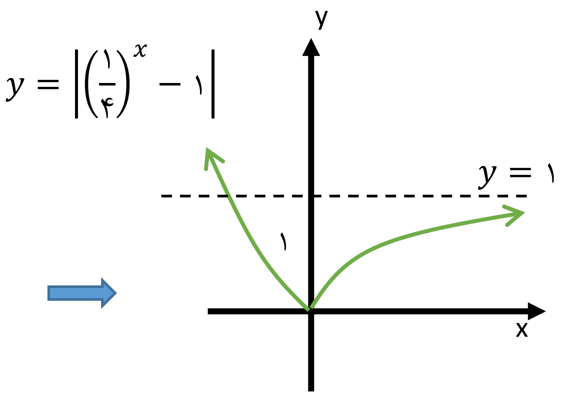
نمودار به دست آمده نمودار تابع $y = \left|\cos x - \frac{۱}{۲}\right|$ می باشد:



مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

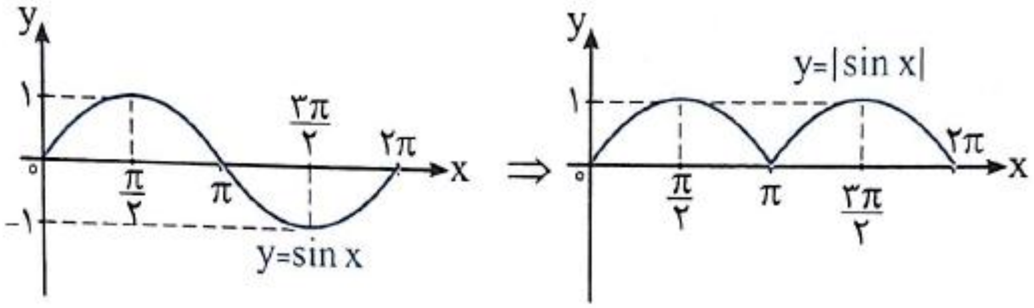
$$y=\left|\left(\frac{۱}{۴}\right)^x-۱\right|$$

حل) ابتدا نمودار $y=\left(\frac{۱}{۴}\right)^x-۱$ را رسم می‌کنیم. سپس با قرینه کردن قسمت هایی از این نمودار که پایین محور xها قرار دارند نسبت به محور xها نمودار $y=\left|\left(\frac{۱}{۴}\right)^x-۱\right|$ رسم می‌شود:

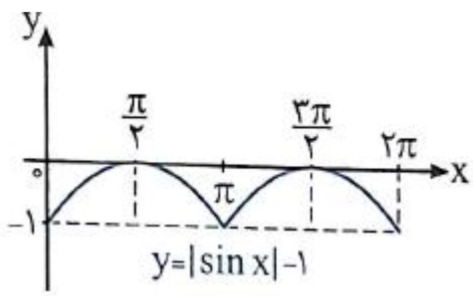


مثال :نمودار تابع $y=|\sin x|-۱$ را با توجه به نمودار $y = \sin x$ در صفحه مختصات رسم کنید.

با قرینه کردن قسمت هایی از نمودار $y = \sin x$ که در پایین محور x ها قرار دارد نسبت به محور x نمودار $y=|\sin x|$ به دست می آید.

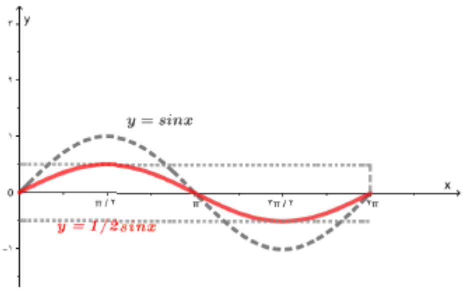


نمودار $y=|\sin x|$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می دهیم تا نمودار $y=|\sin x|-۱$ به دست آید.

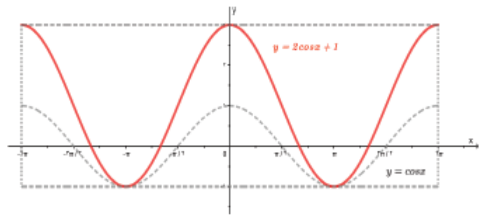


مثال: نمودار هر یک از توابع با ضابطه های زیر را در دستگاه مختصات در بازه های داده شده رسم کنید.

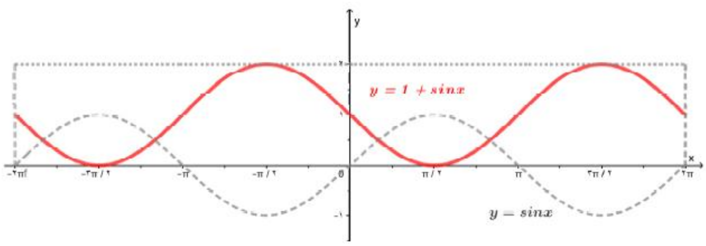
۱) $y=\frac{۱}{۲}\sin x \quad , \quad [۰,۲\pi]$



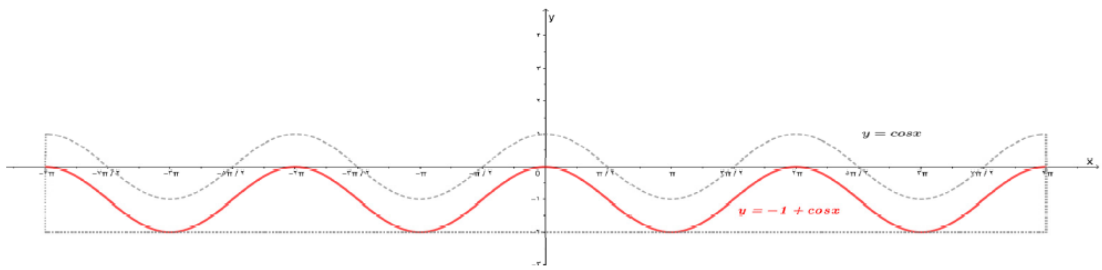
۲) $y=۲\cos x+۱ \quad , \quad [-۲\pi,۲\pi]$



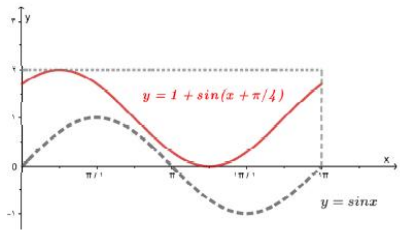
۳) $y=۱-\sin x \quad , \quad [-۲\pi,۲\pi]$



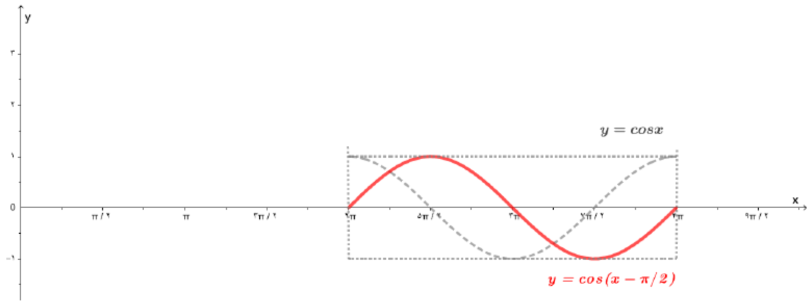
۴) $y=-۱+\cos x \quad , \quad [-۴\pi,۴\pi]$



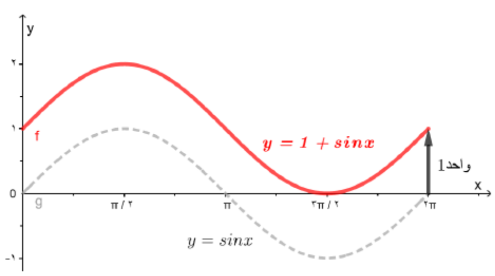
۵) $y=1+\sin(x+\frac{\pi}{4})$, $[0,2\pi]$

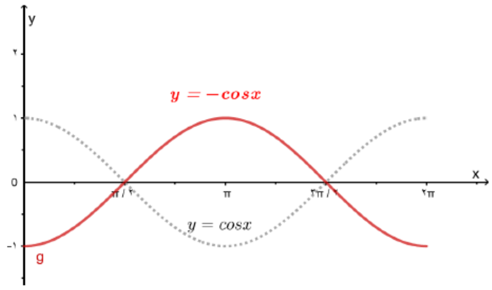


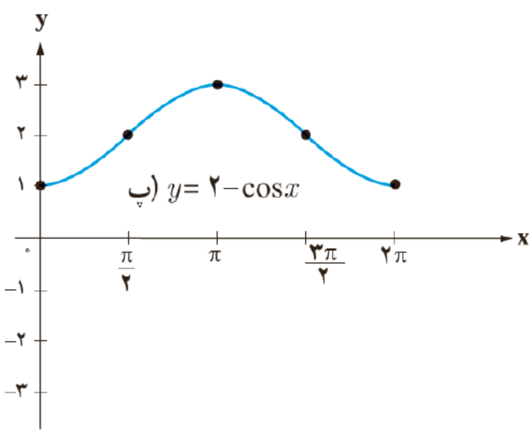
۶) $y=\cos(x-\frac{\pi}{2})$, $[2\pi,4\pi]$

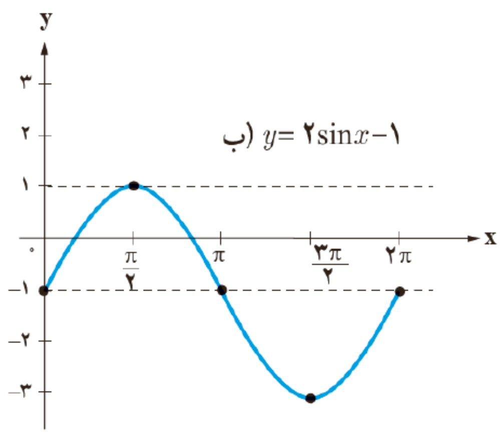


مثال: با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس مشخص کنید هر یک از دو نمودار زیر کدام یک از ضابطه های داده شده را دارند؟ نمودار تابع با سایر ضوابط ها را نیز رسم کنید.

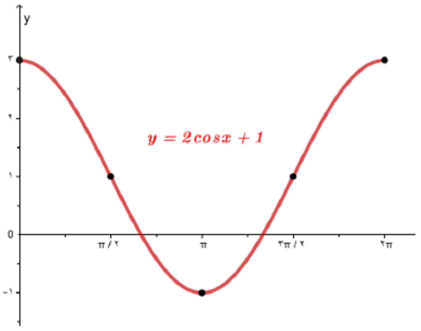




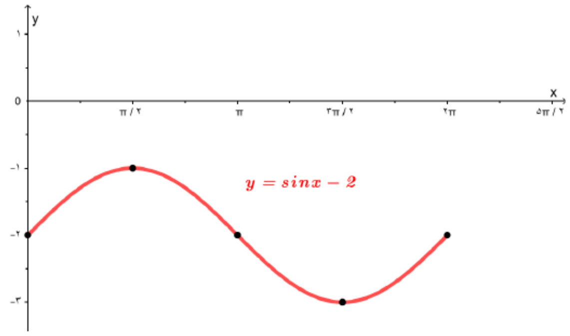




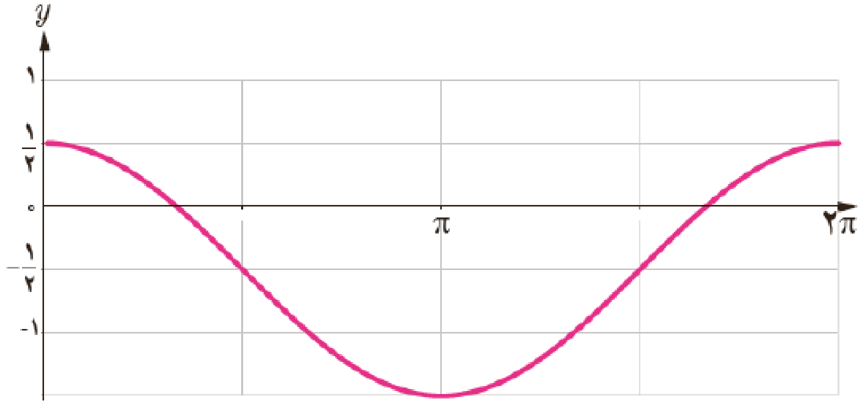
الف) $y=۲\cos x+۱$



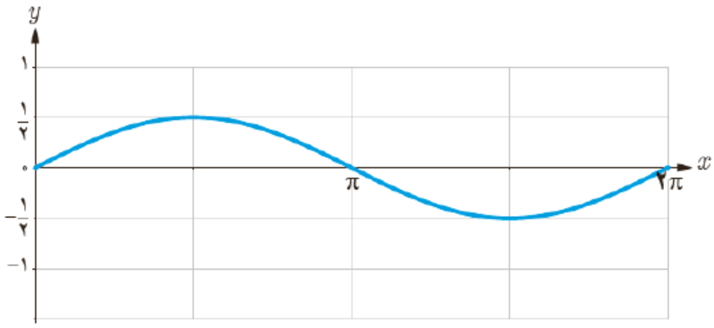
ت) $y=\sin x-۲$



$$y=\cos x-\frac{۱}{۲}$$



$$y=\frac{۱}{۲}\sin x$$



مثال : هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته‌ی تابع $y=\sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y=\sqrt{۲+x} \rightarrow a$

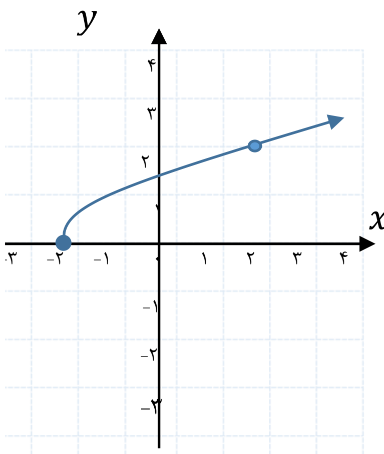
ب) $y=۲+\sqrt{x} \rightarrow d$

پ) $y=-۲\sqrt{x} \rightarrow e$

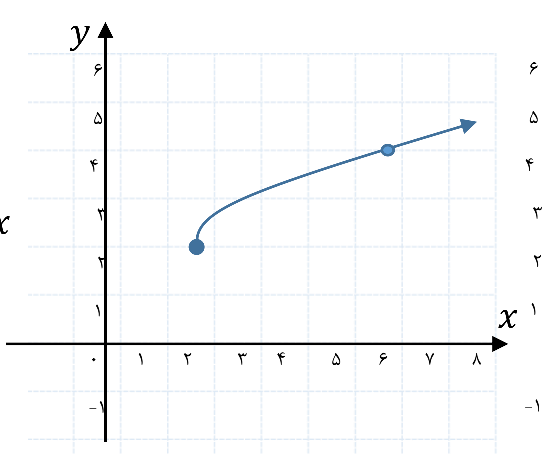
ت) $y=\sqrt{\frac{x}{۲}} \rightarrow c$

ث) $y=۲+\sqrt{x-۲} \rightarrow b$

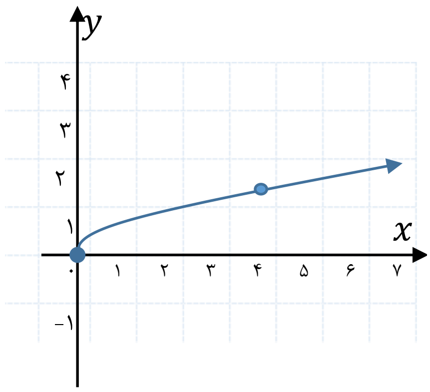
ج) $y=\sqrt{-۲x} \rightarrow$ ب



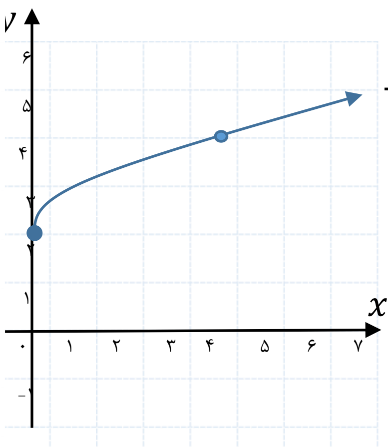
(a)



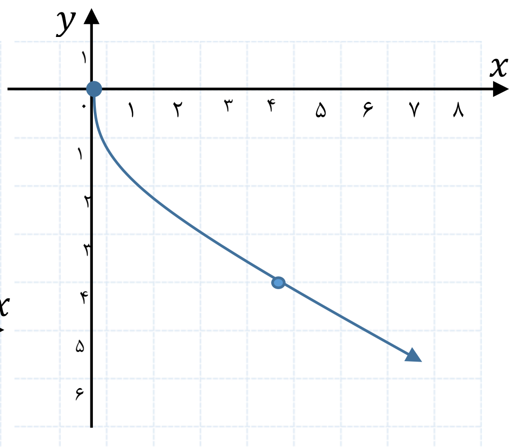
(b)



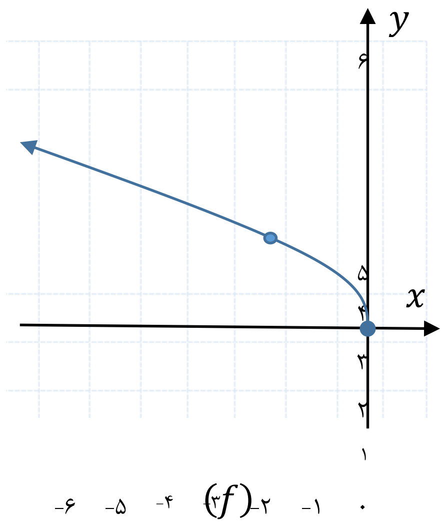
(c)



(d)



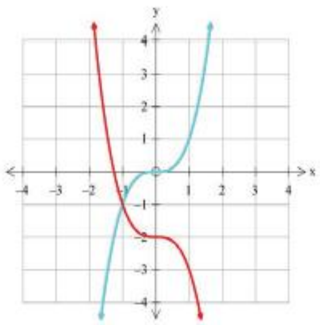
(e)

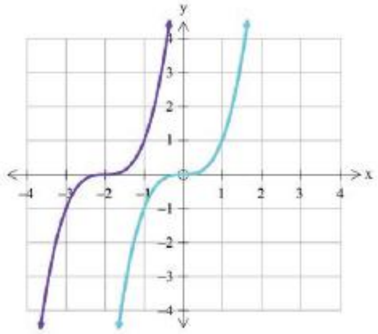


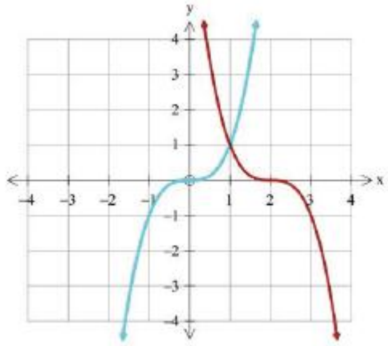
(f)

مثال: باتوجه به نمودارتابع $y = x^3$ نمودار توابع زیر را رسم کنید

الف) $y = -x^3 - 2$ ب) $y = (x+2)^3$ پ) $y = -(x-2)^3$





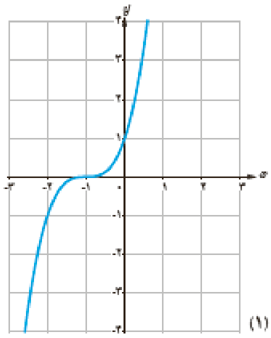


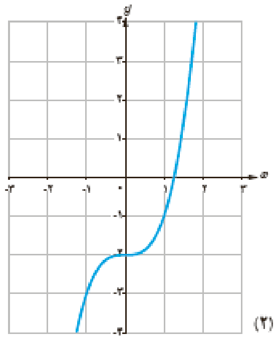
مثال: به کمک نمودارتابع $y = x^3$ ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

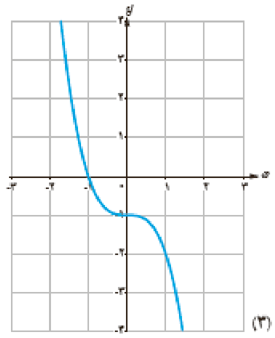
الف) $y=(x-1)^3+2$ ۶ ب) $y=(x-2)^3$ ۹ پ) $y=-x^3+1$ ۸

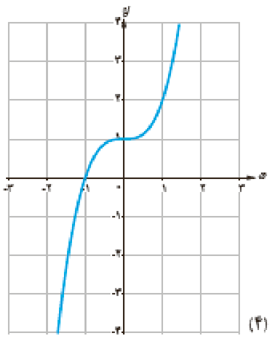
ت) $y=(x+1)^3-1$ ۷ ث) $y=-x^3$ ۵ ج) $y=(x+1)^3$ ۱

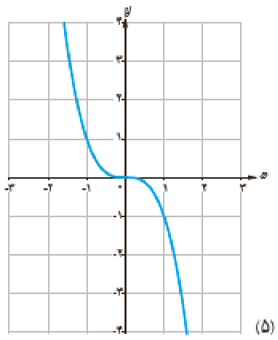
چ) $y=x^3+1$ ۴ ح) $y=-x^3-1$ ۳ خ) $y=x^3-2$ ۲

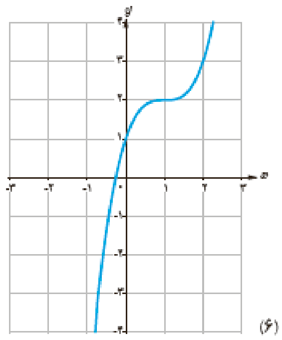

(۱)

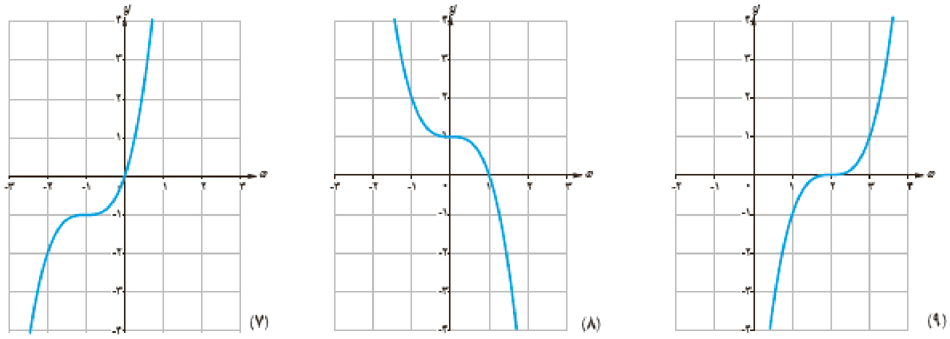

(۲)


(۳)


(۴)


(۵)

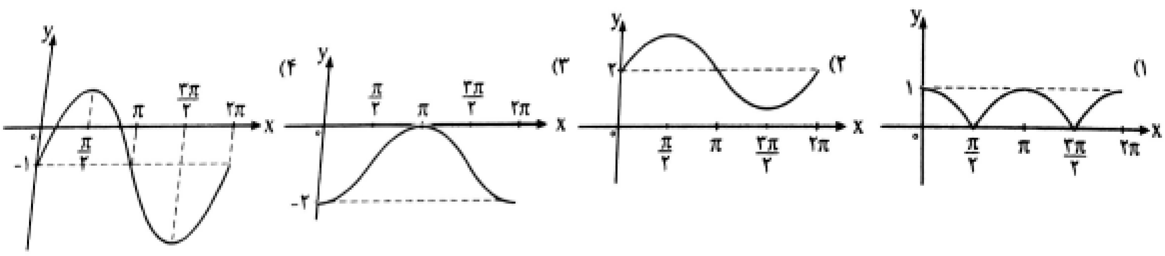

(۶)



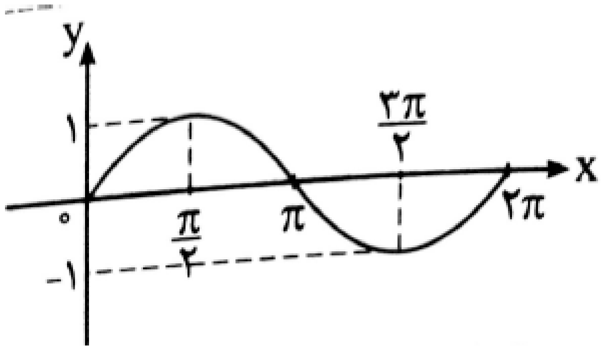
مثال: با توجه به نمودارهای داده شده مشخص کنید هر یک از نمودارها دارای کدام یک از ضابطه های داده شده هستند؟

آ) $y=\sin x+۲$ ب) y =-cosx-۱

پ) y = |cosx| ت) $y=۲\sin x-۱$

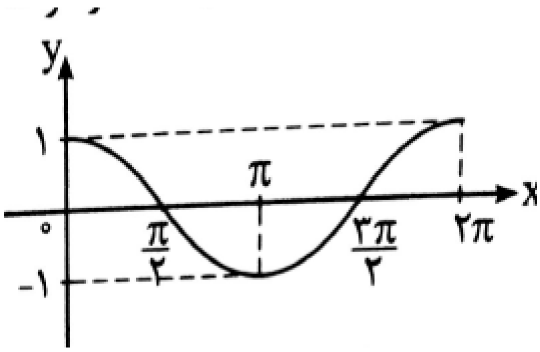


آ) نمودار y = sin x به صورت زیراست

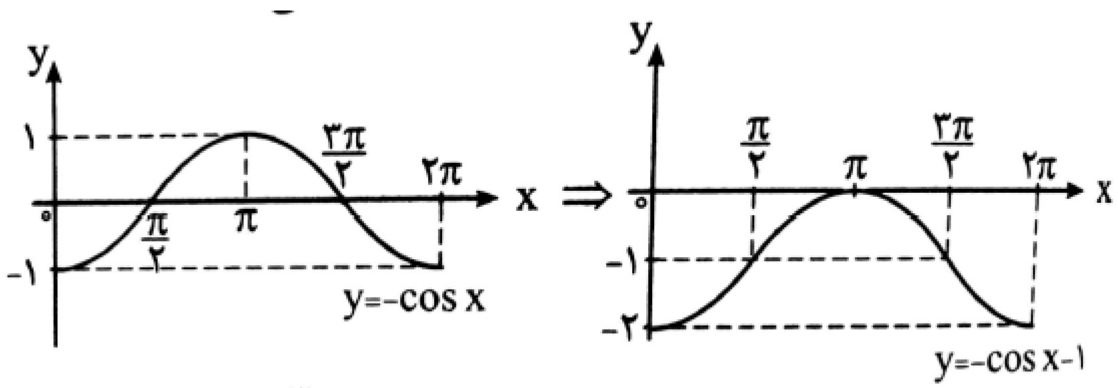


اگر این نمودار ۲ واحد به سمت بالا انتقال داده شود نمودار شکل (۳) به دست می اید.

ب) نمودار $y = \cos x$ به صورت زیراست.

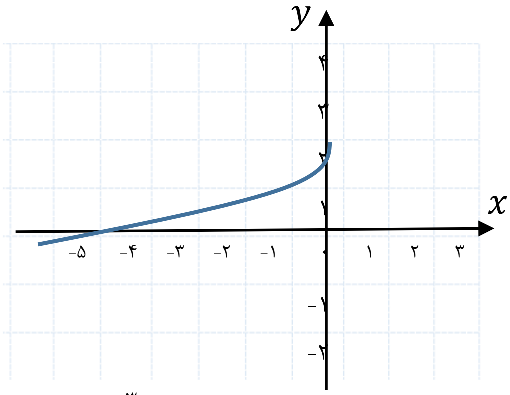


اگر این نمودار را ابتدا نسبت به محور x ها قرینه کنیم و سپس یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم نمودار شکل (۲) به دست می آید:



پ) با قرینه کردن نمودار y =cosx درباره $\left(\frac{\pi}{۳},\frac{۳\pi}{۲}\right)$ نسبت به محور x ها نمودار y=|cosx| به دست می آید که این نمودار در شکل (۱) حاصل می شود.

ت) اگر عرض نقاط واقع برنمودار y= sinx را دو برابر کنیم و سپس نمودار را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم. نمودار $y = ۲\sin x - ۱$ به دست می آید که نمودار شکل (۴) نمودار حاصل است.



مثال: نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به‌دست آمده است. ضابطه‌ی این تابع را بنویسید.

نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ هم نسبت به محور xها و هم نسبت به محور yها قرینه شده است و ۲ واحد در راستای قائم به بالا منتقل شده است. بنابر این ضابطه‌ی این تابع به صورت زیر می‌باشد. $y = -\sqrt{-x} + ۲$