فصل سوم : حد بی نهایت و حد در بی نهایت

یاد آوری ۱ :

قبل از اینکه وارد بحث حد شویم بد نیست دربارهٔ بخشپذیری چند جمله ایها بر $x-a$ صحبت کنیم :

مثال : الف) چند جمله ای $f(x)=2x^2-5x+1$ را بر $x-3$ تقسیم کنید .

$$\begin{array}{l|l} \cancel{+2x^2}-5x+1 & x-3 \\ \cline{2-2} \cancel{+2x^2}-6x & 2x+1 \\ - \quad + & \\ \hline \quad \cancel{+x}+1 & \\ \quad \cancel{+x}-3 & \\ \quad - \quad + & \\ \hline \qquad +4 & \end{array}$$

ب) حالا $f(3)$ را بدست آورید؟ $f(3)=2(3)^2-5(3)+1=4$

پ) $f(3)$ و R چه رابطه ای با هم دارند؟ $R=f(3)$

ت) اگر $f(x)$ بر $x-3$ بخشپذیر باشد چه نتیجه ای می گیرید ؟ $R=0 \Rightarrow f(3)=0$

بنابراین اگر $f(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کنیم رابطه زیر بدست می آید .

$$\begin{array}{l|l} f(x) & x-a \\ \cline{2-2} & Q(x) \\ \hline R(x) & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad f(x)=(x-a)Q(x)+R$$

پس اگر $f(x)$ بر $x-a$ بخشپذیر باشد . $R=f(a)=0$

تمرینات

تمرین ۱

$f(x)=3x^2-5x$ بر $x-2$ بخشپذیر است ؟

تمرین ۲ نشان دهید چندجمله ای $2x^3+5x^2-3x-10$ بر دو جمله ای $x+2$ بخشپذیر می باشد .

تمرین ۳ باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f\left(x\right)=5x^3-2x^2-3x+1$ را بر $x+1$ پیدا کنید .

تمرین ۴ مقدار m را طوری بیابید که چند جمله ای $f\left(x\right)=x^3+mx^2+4x-6$ بر $x-2$ بخشپذیر باشد .

تمرین ۵ چند جمله ای $f\left(x\right)=3x^3-5x^2+x+1$ را تجزیه کنید .

تمرین ۶ اگر حد تابع $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+ax+a-1}{2x^2+b}$ در $x=-1$ برابر $\dfrac{3}{2}$ باشد، مقدار ab را بدست آورید .

یاد آوری ۲ : حد توابع کسری

از سال گذشته این قضیه را به یاد دارید :

قضیه : اگر دو تابع f و g در نقطه ای به طول a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب l و m باشند، به طوری که $m\neq 0$ ، آن گاه تابع $\dfrac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\dfrac{l}{m}$ است .

مثال : حاصل حدهای زیر را بدست آورید .

$$1)\ \lim_{x\to 5}\frac{x^2-3x+2}{x+1}=\frac{12}{6}=2$$

۲) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

در این مثال، صورت و مخرج به ازای $x=1$ برابر صفرند، بنابراین هم صورت و هم مخرج را به کمک تجزیه در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف می کنیم.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

مثال : حد تابع $f(x)=\dfrac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}$ را در نقطهٔ $x=-2$ در صورت وجود به دست آورید .

حل: در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x=-2$ برابر صفرند. باید عامل $(x+2)$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم . مخرج را می توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعب های دو جمله به حاصل ضرب عامل های اول تجزیه کنیم. اما برای تجزیهٔ صورت، آن را بر $(x+2)$ تقسیم می کنیم :

$$\begin{array}{l|l}
+\cancel{2x^3}+3x^2+4 & x+2 \\ \cline{2-2}
-\left(+\cancel{2x^3}+4x^2\right) & 2x^2-x+2 \\ \cline{1-1}
\quad -\cancel{x^2}+4 & \\
\quad -\left(-\cancel{x^2}-2x\right) & \\ \cline{1-1}
\qquad \cancel{2x}+\cancel{4} & \\
\qquad -\left(\cancel{2x}+\cancel{4}\right) & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

بنابر رابطهٔ تقسیم می توان نوشت $2x^3+3x^2+4=(x+2)\left(2x^2-x+2\right)$. بنابراین :

$$\lim_{x\to -2}f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}\left(2x^2-x+2\right)}{\cancel{(x+2)}\left(x^2-2x+4\right)}=\frac{8+2+2}{4+4+4}=1$$

تذکر: گاهی صورت یا مخرج تابع $\dfrac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$. در این حالت برای محاسبه حد $\dfrac{f}{g}$ در نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم .

مثال : حد تابع $g(x)=\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}$ را در نقطهٔ به طول $x=۵$ در صورت وجود به دست آورید .

حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در نقطهٔ ۵ برابر صفرند . صورت و مخرج را در عبارت $۲+\sqrt{x-۱}$ ضرب می کنیم تا صورت کسر عبارتی گویا شود .

$$\lim_{x\to ۵} g(x)=\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}\times\frac{۲+\sqrt{x-۱}}{۲+\sqrt{x-۱}}=\lim_{x\to ۵}\frac{۴-(x-۱)}{(x-۵)(۲+\sqrt{x-۱})}=\lim_{x\to ۵}\frac{-\cancel{(x-۵)}}{\cancel{(x-۵)}(۲+\sqrt{x-۱})}=\frac{-۱}{۲+۲}=\frac{-۱}{۴}$$

مثال : حد تابع $h(x)=\frac{x^۲-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}$ را در $x=۸$ در صورت وجود به دست آورید .

حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در $x=۸$ برابر صفرند . صورت و مخرج را در عبارت $\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴$ ضرب می کنیم تا مخرج کسر گویا شود .

$$\lim_{x\to ۸} h(x)=\lim_{x\to ۸}\frac{x^۲-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}=\lim_{x\to ۸}\frac{x\cancel{(x-۸)}\left(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴\right)}{\cancel{x-۸}}=۸(۴+۴+۴)=۹۶$$

تمرینات

تمرین ۱ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید .

الف) $\lim_{x\to -۳}\frac{x^۲-۹}{x^۲+۳x}$

ب) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{۴x^۲-۴x+۱}{۲x^۲+x-۱}$

پ) $\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۵x+۶}{۲x^۳-۱۳x+۲۴x-۹}$

ت) $\lim_{x\to -۱}\frac{x^۲-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^{۲}+x-۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{\sqrt[۳]{x}+۱}{x^{۲}+۳x+۲}$

ذکر چند نکته کنکوری :

حدهایی که حد صورت و مخرج آن ها صفر می شود و بعد از جایگذاری به صورت $\frac{۰}{۰}$ در می آید، می توانیم از نکات ذیل استفاده کنیم که به این نکات قوانین هم ارزی می گویند .

وقتی $u\to ۰$ داریم :

۱) $\sin u \sim u$

۲) $\tan u \sim u$

۳) $۱-\cos u \sim \dfrac{u^{۲}}{۲}$

۴) $۱-\cos^{n} u \sim n\times \dfrac{u^{۲}}{۲}$

۵) $\cos u \sim ۱-\dfrac{u^{۲}}{۲}$

۶) $\tan x \sim x$

تمرین ۲ حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید .

۱) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱-\cos ۲x}{\sin^{۲} x}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱-\cos x}{\tan^{۲} x}$

۳) $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} \dfrac{\tan^{۲} x-۱}{\cos ۲x}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱-\sqrt{\cos x}}{\sin^{۲} x}$

۵) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sin x\left(۱-\cos ۲x\right)}{\sin ۲x\left(\cos x-۱\right)}$

تمرین ۳ حاصل حدهای زیر را بدست آورید .

۱) $\lim\limits_{x\to ۵}\dfrac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}$

۳) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{x+\sqrt{۲x+۳}}{۲-\sqrt{۳-x}}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^{۲}+x-۲}$

۵) $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{x^{۲}-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}$

۶) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^{۳}+x-۲}{\sqrt[۳]{x}-۱}$

یاد آوری اتحاد چاق و لاغر:

$$a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲}) \quad , \quad a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})$$

مثال : حاصل حدهای زیر را پیدا کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{x^{۲}+۱}{x-۲}=\dfrac{۵}{۰^{+}}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^{-}}\dfrac{۲x+۳}{x-۳}=\dfrac{۹}{۰^{-}}=-\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۲x-۵}{(x-۱)^{۲}}=\dfrac{-۳}{۰^{+}}=-\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\dfrac{[x]-۳}{x-۱}=\dfrac{۰-۳}{۰^{-}}=+\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^{۲}-۲x}{|x-۳|}=\dfrac{۳}{۰^{+}}=+\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\dfrac{۲x-۸}{x^{۲}-۲x+۱}=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\dfrac{۲x-۸}{(x-۱)^{۲}}=\dfrac{-۶}{۰^{+}}=-\infty$

تمرین ۴ حاصل حدهای زیر را به دست آورید .

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{x^۲ - ۴}{x^۲ - x - ۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۳x^۲ - ۲x - ۱}{x^۳ + x - ۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x^۲ - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - ۱}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{\sqrt[۳]{x} - ۱}{x^۲ + ۲x - ۳}$

تمرین ۵ حاصل حدهای زیر را پیدا کنید .

الف) $\lim\limits_{x\to ۵^+} \frac{۳x - ۱}{x - ۵}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۵^-} \frac{x - ۷}{x - ۵}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{x^۲ + x - ۵}{۳ - x}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{۲x^۲ - ۹}{۲ - x}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{x + ۳}{x^۲ - ۴x + ۴}$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{[x] - ۲}{۴x^۲ - ۴x + ۱}$

چ) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{|x| - ۱}{|x - ۲|}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{x - \sqrt{x - ۱}}{\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}}$

خ) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x^۲ + x - ۲}{x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱}$

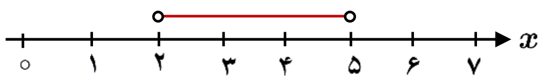
د) $\lim\limits_{x\to -۱} \frac{-x^۲ + ۴x + ۵}{x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱}$

حد نامتناهی :

تابعی مثل f را در نظر بگیرید که در نزدیکی یک نقطه مثل a ، مقدارش از هر عدد دلخواه مثبتی بتواند بزرگ تر شود؛ به عبارت دیگر، در نقطهٔ a حد آن $+\infty$ شود . در اینجا، حدهایی از این نوع را بررسی می کنیم . ابتدا به چند تعریف نیاز داریم .

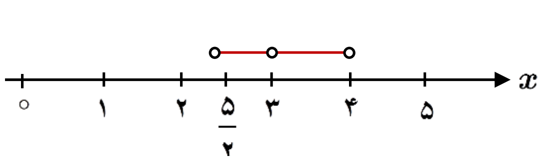
همسایگی : هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی $x_۰$ را یک همسایگی $x_۰$ می نامیم . به عبارت دیگر اگر $x_۰ \in (a,b)$ آنگاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی $x_۰$ می باشد .

مثال : بازهٔ $(۲,۵)$ یک همسایگی ۳ است . آیا بازهٔ $(۰,۴)$ هم یک همسایگی برای ۳ محسوب می شود ؟ شما دو همسایگی دیگر برای ۳ بنویسید و جواب خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید .



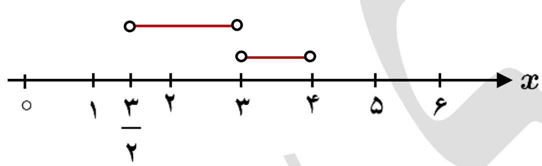
همسایگی محذوف : اگر بازهٔ (a,b) یک همسایگی عدد حقیقی $x_۰$ باشد، آنگاه مجموعهٔ $(a,b)-\{x_۰\}$ یک همسایگی محذوف $x_۰$ نامیده می شود .

مثال : مجموعهٔ $(\frac{۵}{۲},۴)-\{۳\}$ یک همسایگی محذوف ۳ می باشد .



همسایگی چپ و راست: اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x_۰,x_۰+r)$ یک همسایگی راست $x_۰$ نامیده می شود .
همچنین، $(x_۰-r,\ x_۰)$ را یک همسایگی چپ $x_۰$ می نامیم .

مثال : بازهٔ $(۳,۴)$ یک همسایگی راست ۳ و بازهٔ $(\frac{۳}{۲},۳)$ یک همسایگی چپ ۳ است . شما یک همسایگی راست دیگر برای ۳ و یک همسایگی چپ برای آن بنویسید .



مثال : $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲}$ را در صورت وجود بدست آورید.

توضیح حل : می دانیم $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ در هر نقطه غیر صفر تعریف شده است یعنی $D=R-\{۰\}$

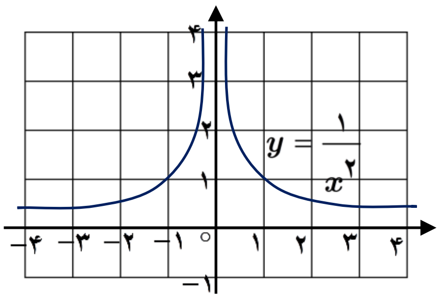
به رفتار تابع در یک همسایگی محذوف صفر توجه کنید .

x	$\cdots\ -۰/۱$	$-۰/۰۰۱$	$-۰/۰۰۰۱$	$\to ۰ \leftarrow$	$۰/۰۰۰۱$	$۰/۰۰۱$	$۰/۱\ \cdots$
$f(x)=\frac{۱}{x^۲}$	۱۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰	$+\infty$	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰

هر چه از راست و یا چپ به صفر نزدیک می شود مقدار $x^۲$ نیز به صفر نزدیک می شود و مقادیر $\frac{۱}{x^۲}$ به اندازه دلخواه بزرگ می شود.

و بنابراین دیده می شود که $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲}=+\infty$

توجه: همان طور که می دانید $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ صرفاً به حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد به این معنا که $\frac{1}{x^2}$ را به هر اندازه که بخواهیم می توانیم بزرگ کنیم، مشروط بر اینکه x را به قدر کافی به صفر نزدیک کرده باشیم به این گونه حدها حد نامتناهی یا حد بی نهایت می گوییم .



قضیه زیر را بدون اثبات بپذیرید :

فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ در این صورت داریم :

۱) اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد آن گاه، $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.

۲) اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد آن گاه، $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

۳) اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد آن گاه، $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

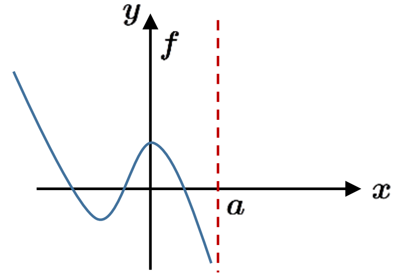
۴) اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد آن گاه، $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.

توجه: قضیه بالا برای حالتی که $x\to a^+$ و یا $x\to a^-$ نیز برقرار است .

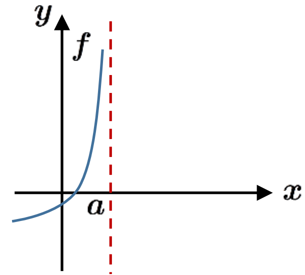
۵) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$: به این معناست که می توان مقدار $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر کرد، به شرط این که x با مقادیر بزرگ تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود .

۶) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$: به این معناست که می توان مقدار $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر کرد، به شرط این که x با مقادیر کوچکتر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود .

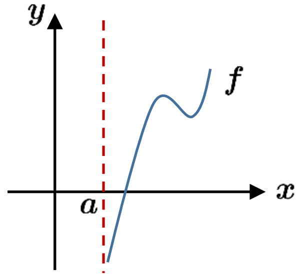
نمودارهایی از حالت های حدود نامتناهی یک طرفه :



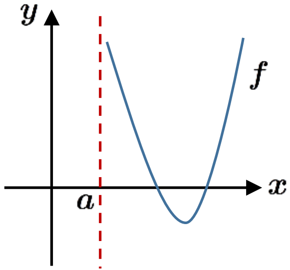
$\lim\limits_{x\to a^-} f\left(x\right) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f\left(x\right) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} f\left(x\right) = -\infty$



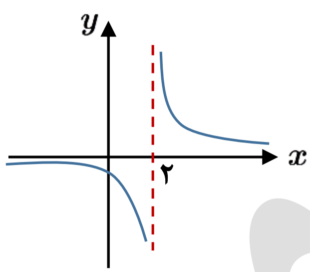
$\lim\limits_{x\to a^+} f\left(x\right) = +\infty$

مثال : حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{۱}{x-۲} = ?$ وجود ندارد .

حل : اگر به نمودارش دقت کنید، داریم :

$\lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{۱}{x-۲} = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{۱}{x-۲} = +\infty$



ب) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \dfrac{\left[x\right]-۳}{\left|۲x-۱\right|} = \dfrac{-۳}{۰^+} = -\infty$ (طبق قضیه قبل)

پ) $\lim\limits_{x\to ۵^-} \dfrac{۲x}{x-۵} = \dfrac{۱۰}{۰^-} = -\infty$ مخرج در نزدیکی ۵ با مقادیر منفی به صفر نزدیک می شود و حد صورت هم برابر ۱۰ است پس حد کسر برابر $-\infty$ است .

ت) $\lim\limits_{x\to ۵^+} \dfrac{۲x}{x-۵} = \dfrac{۱۰}{۰^+} = +\infty$ مخرج در نزدیکی ۵ با مقادیرمثبت به صفر میل می کند و حد صورت هم برابر ۱۰ است پس حد کسر برابر $+\infty$ است .

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{-۱}{x^۲} = \dfrac{-۱}{۰^+} = -\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{۲}{\left|x-۳\right|} = \dfrac{۲}{۰^+} = +\infty$

چ) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۳}} \frac{[x]}{|۳x+۱|} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$

ح) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{x+۱}{\sin^۲ x} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$

تمرین ۶ حدود زیر را محاسبه کنید .

الف) $\lim\limits_{x\to ۵^-} \frac{۲x}{x-۵}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۵^+} \frac{۲x}{x-۵}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{-۱}{x^۲}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{۲}{|x-۳|}$

ث) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۳}} \frac{[x]}{|۳x+۱|}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{x+۱}{\sin^۲ x}$

تمرین ۷ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف ۲− تعریف شده باشد به طوری که $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x) = +\infty$. پاسخ خود را با جواب های دوستانتان مقایسه کنید .

تمرین ۸ الف) نشان دهید چندجمله ای $f(x) = ۲x^۳ + x^۲ + ۱$ بر دوجمله ای $x+۱$ بخش پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل ها بنویسید.

تمرین ۹ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید .

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۲x^۲ - x}{۴x^۲ - ۱}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۵} \dfrac{x^{۳} - ۴x^{۲} - ۴x - ۵}{x^{۲} - ۲۵}$

پ) $\lim\limits_{x\to -۴} \dfrac{x^{۲} + ۳x - ۴}{x^{۳} + ۴x^{۲} + x + ۴}$

تمرین ۱۰ حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید .

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x - \sqrt{۲x - ۱}}{x^{۲} - x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^{۲} - ۹}{۲ - \sqrt{x + ۱}}$

پ) $\lim\limits_{x\to -۸} \dfrac{۲x + ۱۶}{\sqrt[۳]{x} + ۲}$

تمرین ۱۱ حدهای زیر را تعیین کنید .

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} \dfrac{۱}{x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{-۱}{|x|}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} \dfrac{۱}{x - ۱}$

ت) $\lim\limits_{x\to -۶} \dfrac{۹}{(x + ۶)^{۲}}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{-۱}{(x - ۳)^{۴}}$

ج) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} \dfrac{۴x + ۱}{(۲x + ۱)^{۲}}$

چ) $\lim\limits_{x\to ۳^{+}} \dfrac{۱ - ۵x}{x^{۲} - ۹}$

ح) $\lim\limits_{x\to (-۲)^{-}} \dfrac{-۳x}{x^{۲} - ۴}$

خ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{+}} \dfrac{۱}{\cos x}$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{-}} \tan x$

ذ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{+}} \tan x$

ر) $\lim\limits_{x\to ۳^{-}} \dfrac{[x] - ۳}{x - ۳}$

تمرین ۱۲

الف) عبارت $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ **به چه معناست؟ توضیح دهید .**

ب) عبارت $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ **به چه معناست؟ توضیح دهید .**

پ) نمودار تابعی مانند f **را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد ؟**