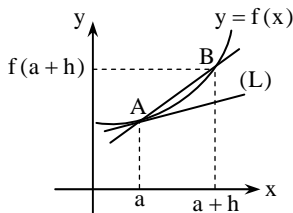


مشتق

۴-۱: مفاهیم اولیه مشتق



در شکل مقابل در نقطه‌ی $A(a, f(a))$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ ، خط L را بر نمودار مماس کرده‌ایم. نقطه‌ی B را نیز با مختصات $(a+h, f(a+h))$ روی نمودار در نظر گرفته‌ایم (در شکل، $h > 0$ و اگر $h < 0$ ، آن‌گاه B سمت چپ A قرار می‌گیرد). شیب پاره‌خط AB برابر است با: $\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$ ، و واضح است وقتی که $h \rightarrow 0$ ، با نزدیک شدن نقطه‌ی B به نقطه‌ی A ، خط AB نیز به خط L نزدیک می‌شود. بنابراین حد کسر بالا همان شیب خط L خواهد شد. به حد کسر فوق، که برابر شیب خط مماس است، مشتق تابع f در نقطه‌ی $x = a$ می‌گویند.

تعریف: فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی $x = a$ تعریف شده باشد. اگر حد زیر وجود داشته باشد، می‌گوییم f در $x = a$ مشتق پذیر است و مقدار حد را «مشتق تابع f در $x = a$ » می‌نامیم.

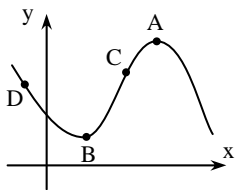
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

◀ **تذکره (۱):** اگر قرار دهید $x = a+h$ ، وقتی $h \rightarrow 0$ داریم: $x \rightarrow a$ و می‌توانیم حد بالا را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

◀ **تذکره (۲):** شیب خط مماس بر نمودار تابع، در نقطه‌ی $A(a, f(a))$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ برابر $f'(a)$ است. در حالتی که $f'(a) = \infty$ ، با وجود آن‌که $f'(a)$ وجود ندارد (زیرا عددی حقیقی نیست)، خط مماس وجود دارد و خطی عمودی (موازی محور y ها) است.

تست (۱): در کدام نقطه واقع بر منحنی روبه‌رو، مقدار مشتق بیش‌تر است؟



(منحنی مربوط به یک تابع مشتق‌پذیر در R است.)

A (۱)

B (۲)

C (۳)

D (۴)

حل: در نقاط A و B خط مماس بر منحنی تقریباً افقی و مقدار مشتق برابر صفر است. در نقطه‌ی D ، شیب خط مماس عددی منفی و در نقطه‌ی C ، شیب خط مماس عددی مثبت است. پس در نقطه‌ی C ، مقدار مشتق تابع بزرگ‌تر است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

مشتق‌های یک‌طرفه:

برای وجود داشتن حد در یک نقطه، باید حدهای چپ و راست در آن نقطه موجود و برابر باشند. به این ترتیب می‌توانیم مشتق‌های چپ و راست را تعریف کنیم:

تعریف مشتق چپ و راست:

اگر تابع f در بازه‌ی $(b, a]$ تعریف شده باشد، مقدار حد زیر را (در صورت وجود)، مشتق چپ تابع f در $x = a$ می‌نامیم:

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{یا} \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

به همین ترتیب برای تابع f که در بازه‌ی $[a, c)$ معین است، مشتق راست در $x = a$ تعریف می‌شود:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{یا} \quad f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

نتیجه: تابع f در $x = a$ مشتق پذیر است، اگر و تنها اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود و برابر باشند.



با استفاده از تعریف مشتق، می‌توانیم مشتق توابع مختلف را به دست آوریم، ولی در بسیاری از موارد، این کار طولانی و طاقت‌فرسا است. به همین دلیل فرمول‌هایی برای مشتق‌گیری توابع وجود دارد که کمی جلوتر به آن‌ها اشاره خواهیم کرد. البته در مسائلی خاص استفاده از تعریف مشتق برای مشتق‌گیری ساده‌تر است که چند نمونه از آن‌ها را مشاهده می‌کنید:

تست (۲): اختلاف بین مشتق چپ و راست تابع $f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 0$ کدام است؟

$$\pi \quad (۱) \quad \frac{\pi}{۲} \quad (۲) \quad \frac{۴\pi}{۳} \quad (۳) \quad \frac{۳\pi}{۴} \quad (۴)$$

حل: اولاً چون $0 = \text{کران‌دار} \times \text{صفر} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $f(0) = 0$ ، تابع f در $x = 0$ پیوسته است. حال داریم:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tan^{-1}(t) = \frac{\pi}{۲}$$

به همین ترتیب $f'_-(0) = -\frac{\pi}{۲}$ و اختلاف دو مشتق $\frac{\pi}{۲} - (-\frac{\pi}{۲}) = \pi$ می‌شود. بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

در توابع شامل جزء صحیح یا قدر مطلق، بهتر است ابتدا با نامساوی‌ها در همسایگی مورد نظر جزء صحیح و قدر مطلق را حذف کنیم.

تست (۳): اگر $f(x) = (x-2)[3x-2]$ ، حاصل $f'_-(2) - f'_+(2)$ کدام است؟

$$۲ \quad (۲) \quad ۱ \quad (۳) \quad -۱ \quad (۴) \quad \text{صفر} \quad (۱)$$

حل: چون $f(2) = 0$ داریم:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)[3x-2]}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} [3x-2] = [4^+] = ۴$$

به همین ترتیب به دست می‌آوریم: $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [3x-2] = [4^-] = ۳$ ، بنابراین $f'_-(2) - f'_+(2) = -۱$ و گزینه‌ی ۴ درست است.

تست (۴): برای تابع $f(x) = |x| \sqrt{2+x}$ در $x = 0$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) مشتق چپ و راست موجود و برابر
(۲) مشتق چپ و راست موجود و نابرابر
(۳) مشتق چپ و راست وجود ندارد.
(۴) مشتق راست موجود است، ولی مشتق چپ وجود ندارد.

حل: در همسایگی راست و چپ $x = 0$ جداگانه ضابطه‌ی تابع و حدهای متناظر را می‌نویسیم:

$$x \rightarrow 0^+ : f(x) = x\sqrt{2+x} \Rightarrow f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2+x} = \sqrt{2}$$

$$x \rightarrow 0^- : f(x) = -x\sqrt{2+x} \Rightarrow f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt{2+x}) = -\sqrt{2}$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

تست (۵): اگر $f(x) = |x^2 - 4|[-x^2]$ ، حاصل $f'_+(2) - f'_-(2)$ کدام است؟

$$۴ \quad (۱) \quad -۴ \quad (۲) \quad ۶۸ \quad (۳) \quad -۶۸ \quad (۴)$$

حل: ابتدا در همسایگی کوچک راست و چپ $x = 2$ ضابطه‌ی تابع را بدون جزء صحیح و قدر مطلق می‌نویسیم:

$$x \rightarrow 2^+ : x > 2 \Rightarrow x^2 > 4, -x^2 < -4 \Rightarrow f(x) = (x^2 - 4)[(-x^2)^-] = -9(x^2 - 4)$$

$$x \rightarrow 2^- : x < 2 \Rightarrow x^2 < 4, -x^2 > -4 \Rightarrow f(x) = (4 - x^2)[(-x^2)^+] = -8(4 - x^2)$$

حال مثلاً برای محاسبه‌ی $f'_+(2)$ داریم:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-9(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} -9(x + 2) = -۳۶$$

به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم: $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 8(x + 2) = ۳۲$ ، بنابراین: $f'_-(2) - f'_+(2) = -۶۸$ و گزینه‌ی ۴ درست است.

○ **مسئله‌ی (۱):** الف) اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{kh}$ را بیابید (m, n, k اعداد حقیقی ثابت هستند).

ب) اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود باشند، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+\nu h) - f(a-\nu h)}{h}$ را بیابید.

حل: الف) با اضافه و کم کردن $f(a)$ در صورت کسر داریم:
 حال مثلاً حد کسر اول را به صورت زیر می‌توانیم برحسب $f'_-(a)$ بیان کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a)}{kh} = \frac{m}{k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a)}{mh} \xrightarrow{t=mh} \frac{m}{k} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = \frac{m}{k} f'_-(a)$$

به همین ترتیب کسر دوم برابر $\frac{n}{k} f'_+(a)$ می‌شود و جواب نهایی برابر است با: $\frac{(m-n)f'_-(a)}{k}$.

ب) اگر قرار دهیم $t = \nu h$ و $k = -\nu h$ ، آن‌گاه داریم: $t \rightarrow 0^+$ و $k \rightarrow 0^-$ (وقتی $h \rightarrow 0^+$)، و می‌توانیم کسر را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} \text{جواب} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+\nu h) - f(a)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a-\nu h) - f(a)}{h} = \nu \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+\nu h) - f(a)}{\nu h} + \nu \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a-\nu h) - f(a)}{-\nu h} \\ &= \nu \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} + \nu \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{f(a+k) - f(a)}{k} = \nu f'_+(a) + \nu f'_-(a) \end{aligned}$$

نتیجه‌ی قسمت الف) نکته‌ی مفیدی است که گاه در حل تست‌ها مفید واقع می‌شود:



نکته: اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، و m ، n و k سه عدد حقیقی باشند، داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{kh} = \frac{m-n}{k} f'_-(a)$$

تست (۴): حد کدام‌یک از کسرهای زیر وقتی $\Delta x \rightarrow 0$ ، برابر $f'(x)$ است؟

$$\frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} \quad (۲) \qquad \frac{f(x + 2\Delta x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (۱)$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (۴) \qquad \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (۳)$$

حل: در گزینه‌ی (۱) طبق نکته‌ی قبل داریم:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + 2\Delta x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{2 - (-1)}{1} f'(x) = 3f'(x)$$

دقت کنید که تغییر نام h به Δx تفاوتی در حد ایجاد نمی‌کند. به همین ترتیب حاصل حدهای گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ به ترتیب $f'(x)$ ، $-f'(x)$ و $f'(x)$ می‌شود. بنابراین پاسخ تست گزینه‌ی ۴ است.

○ **مسئله‌ی (۲):** اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x \geq 1 \\ x^2 - 3x + 6 & x < 1 \end{cases}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h^2) - f(1-2h^2)}{3h^2}$ را به دست آورید.

حل: با اضافه و کم کردن $f(1)$ در صورت کسر می‌توانیم حاصل کسر را برحسب مشتق‌های چپ و راست f بنویسیم:

$$\text{جواب} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h^2) - f(1)}{3h^2} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h^2) - f(1)}{3h^2} = \frac{1}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h^2) - f(1)}{h^2} + \frac{2}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h^2) - f(1)}{-2h^2}$$

اگر قرار دهیم $t = h^2$ و $k = -2h^2$ ، وقتی $h \rightarrow 0$ داریم: $t \rightarrow 0^+$ و $k \rightarrow 0^-$ و حاصل حد اول $f'_+(1)$ و حاصل حد دوم $f'_-(1)$ می‌شود. بنابراین جواب نهایی برابر $\frac{1}{3} f'_+(1) + \frac{2}{3} f'_-(1)$ می‌شود. برای محاسبه‌ی مشتق‌ها با توجه به پیوستگی تابع f در $x = 1$ می‌توانیم از دو ضابطه مشتق بگیریم، که از فرمول‌های مشتق‌گیری می‌دانیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x > 1 \\ 2x - 3 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) = 5, f'_-(1) = -1 \Rightarrow \text{جواب} = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 1$$

مشتق پذیری و مشتق ناپذیری:

دیدیم که تابع f در $x = a$ مشتق پذیر است، اگر حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ موجود باشد. حال می‌خواهیم کمی دقیق‌تر نقاطی را بررسی کنیم که در آن‌ها این حد وجود ندارد، یا به عبارت دیگر نقاط مشتق ناپذیری یک تابع را. ابتدا به قضیه‌ی زیر دقت کنید.

قضیه:

اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آن‌گاه در $x = a$ پیوسته است.
به عبارت دیگر: اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x = a$ نیز مشتق پذیر نیست.

◀ **تذکره:** دقت کنید که عکس قضیه‌ی بالا درست نیست. مثلاً تابع $f(x) = |x|$ در $x = 0$ پیوسته است، ولی مشتق پذیر نیست (زیرا $f'_+(0) = 1$ و $f'_-(0) = -1$).

نتیجه: از قضیه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم که برای پیدا کردن نقاط مشتق ناپذیری یک تابع باید:

۱- نقاط ناپیوستگی را پیدا کنیم. همه‌ی این نقاط، نقاط مشتق ناپذیری هم هستند.

۲- نقاطی که در آن‌ها تابع پیوسته است، ولی یکی از مقادیر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود نباشند، نقاط مشتق ناپذیری‌اند. همین‌طور نقاطی که در آن‌ها $f'_+(a) \neq f'_-(a)$.

برای این‌که بفهمیم چه نقاطی را باید در شرط دوم بررسی کنیم، در ادامه نکاتی را بیان خواهیم کرد.

تست (۷): اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ x^2 + 1 & x < 0 \end{cases}$ ، آن‌گاه در $x = 0$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) مشتق راست وجود دارد، ولی چپ وجود ندارد. (۲) مشتق چپ وجود دارد، ولی راست وجود ندارد.
(۳) مشتق چپ و راست وجود ندارد. (۴) مشتق پذیر است.

حل: اولاً با توجه به ضابطه تابع در $x = 0$ از چپ ناپیوسته و بنابراین مشتق ناپذیر است. ولی مشتق راست نیز ندارد، زیرا:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

تست (۸): کدام تابع در $x = 0$ پیوسته است، ولی مشتق پذیر نیست؟

(۲) $f(x) = x|x|$

(۱) $f(x) = x^2[x]$

(۴) $f(x) = |x|[x]$

(۳) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

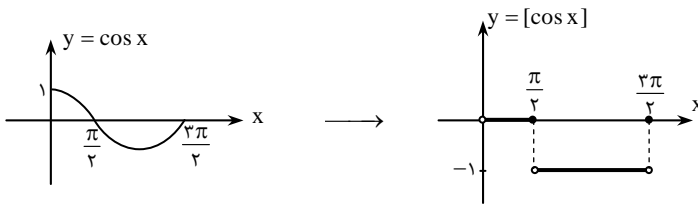
حل: توابع گزینه‌های (۱) و (۴) به دلیل عامل‌های صفر کننده‌ی x^2 و $|x|$ در $x = 0$ پیوسته‌اند. تابع گزینه‌ی (۲) به وضوح در $x = 0$ پیوسته است و برای تابع گزینه‌ی (۳) داریم: $0 = \text{کران‌دار} \times \text{صفر} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، پس در $x = 0$ پیوسته است. تابع گزینه‌ی (۴) در $x = 0$ مشتق پذیر نیست، زیرا:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} [x] \Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} [x] = 0 \\ f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} [x] = 1 \end{cases}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود توابع گزینه‌های دیگر در $x = 0$ مشتق پذیر هستند. بنابراین گزینه‌ی ۴ پاسخ تست است.

تست (۹): کدام گزینه برای تابع $f(x) = [\cos x]$ در $x = \frac{\pi}{2}$ درست است؟

- (۱) مشتق راست دارد، ولی مشتق چپ ندارد.
 (۲) مشتق چپ دارد، ولی مشتق راست ندارد.
 (۳) نه مشتق راست دارد و نه مشتق چپ.
 (۴) مشتق پذیر است.



حل: نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{2}$ ، تابع از چپ پیوسته است و مشتق چپ آن نیز صفر است. بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

مسئله‌ی (۱۰): در توابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$ مقادیر مشتق چپ و راست را در $x = 0$ به دست آورید.

حل: در هر دو تابع بدون در نظر گرفتن نقطه‌ی $x = 0$ می‌توانیم از ضابطه‌ها مشتق بگیریم:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 2x^2 & x < 0 \end{cases}, \quad g'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 3x^2 & x < 0 \end{cases}$$

دقت کنید که در ضابطه‌ی مشتق، شرط $x \geq 0$ در ضابطه‌ی اول توابع، به $x > 0$ تغییر پیدا کرده است. ولی در نقطه‌ی مرزی $x = 0$ چه وضعیتی برقرار است؟ در تابع f داریم:

$$f(0) = 1 \Rightarrow f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

به همین ترتیب به دست می‌آوریم: $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = 0$ ، در نتیجه: $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$ ، یا به بیان دیگر $f'(0) = 0$.

در تابع g نیز با توجه به $g(0) = 1$ ، برای محاسبه‌ی $g'_+(0)$ از همان روابط $f'_+(0)$ استفاده می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم: $g'_+(0) = 0$ ، ولی برای $g'_-(0)$ داریم:

$$g'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

پس $g'_-(0)$ وجود ندارد!

در مسئله‌ی (۳) اگر دقت کنید متوجه می‌شوید که برای محاسبه‌ی $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ می‌توانستیم از همان دو ضابطه‌ی $f'(x)$ استفاده کنیم (از حدهای $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2x$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2$). ولی در محاسبه‌ی $g'_-(0)$ نمی‌توانیم از $\lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2$ (در ضابطه‌ی دوم $g'(x)$) استفاده کنیم. دقت در صورت سؤال نشان می‌دهد که f در $x = 0$ پیوسته و g فقط از راست پیوسته است، به همین دلیل در محاسبه‌ی $f'(0)$ و $g'_+(0)$ می‌توانستیم از ضابطه‌های f' و g' استفاده کنیم.

نکته: در تابع دو ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq a \\ h(x) & x < a \end{cases}$ به شرط پیوستگی f در $x = a$ ، می‌توانیم برای محاسبه‌ی $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ از حد مشتق ضابطه‌ها وقتی $x \rightarrow a$ استفاده کنیم.

تذکره: پیوستگی راست f در $x = a$ برای $f'_+(a)$ و پیوستگی چپ آن برای $f'_-(a)$ کافی است.

تست (۱۰): در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 1 \\ ax + b & x < 1 \end{cases}$ ، اگر $f'(1)$ موجود باشد، b کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۱

حل: از پیوستگی f در $x = 1$ نتیجه می‌گیریم: $a + b = -1 \Rightarrow a + b = -1$ ، حال با فرض پیوستگی داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 1 \\ a & x < 1 \end{cases} \xrightarrow{f'_+(1) = f'_-(1)} 2 \times 1 - 2 = a \Rightarrow a = 0 \xrightarrow{a+b=-1} b = -1$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

دیدیم که نقاط ناپیوستگی اولین دسته‌ی نقاط مشتق‌ناپذیری یک تابع هستند. حال به بررسی نقاط دیگر می‌پردازیم. ابتدا به قضیه‌ی زیر که معادل آن را در بخش حد و پیوستگی نیز بیان کرده‌ایم، دقت کنید:

قضیه: ۱- اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه $f \pm g$ ، fg و $\frac{f}{g}$ (به شرط $g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق‌پذیر خواهند بود.
۲- اگر f در $x = a$ مشتق‌پذیر و g در $x = f(a)$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع $g \circ f$ نیز در $x = a$ مشتق‌پذیر است.

با استفاده از این قضیه نتیجه می‌گیریم توابع چند جمله‌ای، توابع گویا (یعنی $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که P و Q دو چند جمله‌ای اند)، توابع مثلثاتی و جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چنین توابعی در دامنه‌ی خود مشتق‌پذیرند. معمولاً نقاط مشتق‌ناپذیری در سه دسته از توابع ظاهر می‌شوند، ۱- توابع اصم، ۲- توابع شامل قدر مطلق و ۳- توابع شامل جزء صحیح.

نکته: مشتق‌ناپذیری در توابع اصم
۱- تابع $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$) برای n های فرد تنها در نقطه‌ی $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است و برای n های زوج، نقاط $x < 0$ نیز از دامنه‌ی آن حذف می‌شوند.
۲- تابع $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ که در آن f یک چند جمله‌ای است، تنها ممکن است در ریشه‌های f مشتق‌ناپذیر باشد. البته برای n های زوج باید محدوده‌ی دامنه نیز در نظر گرفته شود. به بیان دقیق‌تر، اگر $x = a$ ریشه‌ی ساده یا مکرر f از مرتبه‌ی m تکرار m باشد، و $m < n$ ، تابع g در $x = a$ مشتق‌ناپذیر است.

تذکره: $x = a$ ریشه‌ی مکرر f از مرتبه‌ی تکرار m است، اگر $f(x) = (x - a)^m h(x)$ که $x = a$ ریشه‌ی h نیست. برای مثال در $f(x) = x(x-1)^2(x+1)^3$ ، عدد $x = 0$ ریشه‌ی ساده‌ی f است، ولی $x = 1$ و $x = -1$ ریشه‌های مکرر f از مرتبه‌ی تکرار ۲ و ۳ هستند.
مثال: تابع $g(x) = \sqrt[4]{x^4(x-1)^2(x+2)}$ در نقاط $x = 1$ و $x = -2$ مشتق‌ناپذیر است. ولی در $x = 0$ با آن‌که ریشه‌ی عبارت زیر رادیکال است، مشتق‌پذیر می‌باشد، زیرا درجه‌ی تکرار $x = 0$ از مرتبه‌ی ۴ است و $4 > 3$. ولی درجه‌ی تکرار ۲ ریشه‌ی دیگر، ۲ و ۱ است که هر دو از ۳ کم‌ترند. مثلاً برای $x = 1$ داریم:

$$g'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^4(x-1)^2(x+2)}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^4(x+2)}}{\sqrt[4]{x-1}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{0^+} = +\infty \rightarrow g'_+(1) \text{ وجود ندارد}$$

نکته: مشتق‌ناپذیری در توابع شامل قدر مطلق
اگر $f(x) = |g(x)|$ و تابع g در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، f در صورتی در $x = a$ مشتق‌ناپذیر است که $x = a$ ریشه‌ی ساده‌ی g باشد.

تذکره: برای آن‌که $x = a$ ریشه‌ی ساده‌ی g باشد، باید $g(a) = 0$ ولی $g'(a) \neq 0$.

تذکره: در حالت خاصی که g چند جمله‌ای باشد، باید $g(x) = (x - a)h(x)$ طوری که $h(a) \neq 0$.

مثال: تابع $f(x) = |x^4(x-1)^3(x+2)|$ تنها در نقطه‌ی $x = -2$ مشتق‌ناپذیر است، زیرا ریشه‌ی ساده‌ی عبارت داخل قدر مطلق است. ریشه‌های $x = 0$ و $x = 1$ چون ریشه‌های مکرر از درجه‌ی تکرار بیش‌تر از ۱ هستند، نقاط مشتق‌ناپذیری را مشخص نمی‌کنند.

مسئله‌ی (۱۴): نقاط مشتق‌ناپذیری تابع

$$f(x) = \begin{cases} |(x+1)(x-2)^2| & |x| \leq 3 \\ \frac{\sqrt{(x^2-16)(x+3)^2}}{(x+7)} & |x| > 3 \end{cases}$$

را به دست آورید.

حل: ضابطه‌ی اول در نقطه‌ی $x = -1$ مشتق‌ناپذیر است (ریشه‌ی ساده‌ی عبارت داخل قدر مطلق) که در محدوده‌ی ضابطه (یعنی $|x| \leq 3$) قرار دارد. ضابطه‌ی دوم در نقاط $x = \pm 4$ مشتق‌ناپذیر است که نقاط $x = \pm 4$ در محدوده‌ی ضابطه قرار دارند. تنها باید نقاط مرزی $x = \pm 3$ را بررسی کنیم که به‌وضوح تابع در این نقاط ناپیوسته است. بنابراین طول نقاط مشتق‌ناپذیری تابع f عبارت‌اند از:

$$\{-4, -3, -1, -3, -4\}$$

تذکره: همانند بحث پیوستگی، مشتق پذیری و مشتق ناپذیری فقط در نقاط دامنه‌ی تابع مطرح می‌شود. مثلاً در این مسأله نقطه‌ی $x = -7$ را نباید جزء نقاط مشتق ناپذیری محسوب کنیم، چون اصلاً در دامنه‌ی تابع نیست.

تست (۱۱): اگر تابع $f(x) = (2x^2 + ax + b) | (x-1)(x-2) |$ در R مشتق پذیر باشد، a کدام است؟

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۶ (۴) -۶

حل: طبق نکته‌ی قبل، باید $x = 1$ و $x = 2$ ریشه‌ی ساده‌ی عبارت نباشند، در نتیجه باید هر دو ریشه‌های $2x^2 + ax + b$ باشند. یعنی این عبارت به صورت $2(x-1)(x-2)$ قابل نوشتن است، در نتیجه:

$$2x^2 + ax + b = 2(x-1)(x-2) \Rightarrow 2x^2 + ax + b = 2x^2 - 6x + 4 \Rightarrow a = -6, b = 4$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

نکته: مشتق ناپذیری در توابع شامل جزء صحیح تابع $y = [f(x)]$ در تمام نقاطی که پیوسته است، مشتق پذیر نیز هست (با مشتقی برابر صفر)، و در نقاط دیگر ناپیوسته و مشتق ناپذیر است.

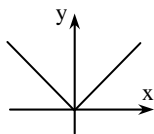
مفهوم نکته‌ی بالا واضح است: در نقاطی که تابع $y = [f(x)]$ پیوسته است، نمودار آن از پاره‌خطی افقی تشکیل شده، بنابراین مشتق پذیر (با مشتقی برابر صفر) می‌باشد.

انواع نقاط مشتق ناپذیری:

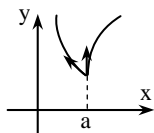
دیدیم که دسته‌ی اول نقاط مشتق ناپذیری یک تابع، همان نقاط ناپیوستگی هستند. ولی نقاط دیگر مشتق ناپذیری را (یعنی نقاطی که تابع در آن‌ها پیوسته است، ولی مشتق پذیر نیست) می‌توانیم به سه دسته‌ی زیر تقسیم کنیم:

۱- نقاط زاویه‌دار: نقاطی که مانند $x = a$ در آن‌ها f پیوسته است و حداقل یکی از دو مقدار $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود است، ولی تابع مشتق ناپذیر است.

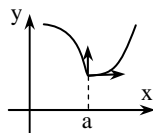
در این نقاط می‌توانیم دو نیم‌ماس از چپ و راست بر نمودار تابع رسم کنیم که با هم یک زاویه تشکیل می‌دهند.



$$f'_+(0) = 1, \quad f'_-(0) = -1$$



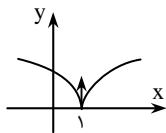
$$\begin{cases} f'_-(a) = \text{عدد حقیقی} \\ f'_+(a) = +\infty \end{cases}$$



$$\begin{cases} f'_-(a) = -\infty \\ f'_+(a) = 0 \end{cases}$$

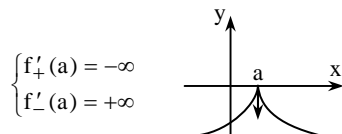
به دو نمودار مقابل نیز دقت کنید:

۲- نقاط بازگشت: نقاطی مانند $x = a$ که در آن‌ها f پیوسته است و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو نامتناهی‌اند، ولی با علامت‌های مختلف (یعنی $f'_+(a) = +\infty$ و $f'_-(a) = -\infty$ یا برعکس).

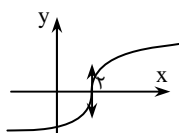


مثال: تابع $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ در نقطه‌ی $x = 1$ نقطه‌ی بازگشت دارد، زیرا $f'_+(1) = +\infty$ و $f'_-(1) = -\infty$. به نمودار تابع دقت کنید:

هم‌چنین به نمودار روبه‌رو دقت کنید:

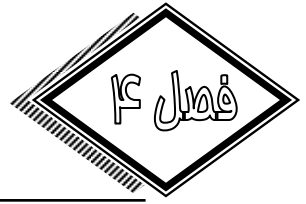


$$\begin{cases} f'_+(a) = -\infty \\ f'_-(a) = +\infty \end{cases}$$



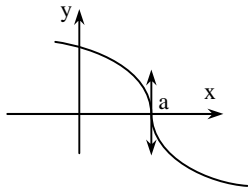
۳- نقاط عطف قائم: نقاطی مانند $x = a$ که در آن‌ها f پیوسته است و $f'_+(a) = f'_-(a) = +\infty$ یا $f'_+(a) = f'_-(a) = -\infty$.

مثال: تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ در نقطه‌ی $x = 2$ عطف قائم دارد. به نمودار تابع دقت کنید. داریم: $f'_-(2) = +\infty$ و $f'_+(2) = +\infty$



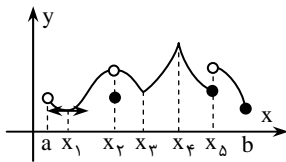
مفاهیم اولیه مشتق

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱- اگر نمودار تابع f به شکل روبه‌رو باشد، کدام گزینه درست است؟

- | | |
|--|--|
| $\begin{cases} f'_+(a) = -\infty \\ f'_-(a) = -\infty \end{cases}$ (۲) | $\begin{cases} f'_+(a) = +\infty \\ f'_-(a) = +\infty \end{cases}$ (۱) |
| $\begin{cases} f'_+(a) = -\infty \\ f'_-(a) = +\infty \end{cases}$ (۴) | $\begin{cases} f'_+(a) = +\infty \\ f'_-(a) = -\infty \end{cases}$ (۳) |



۲- نمودار تابع روبه‌رو در بازه (a, b) در چند نقطه از نقاط x_i مشتق‌ناپذیر است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۳- f تابعی فرد است و $f'_+(1) = 2$ و $f'_-(1) = 1$ و مقدار $f'_-(-1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۴- اگر f یک تابع زوج باشد، با فرض $f'_+(1) = 1$ و $f'_-(1) = 2$ مقدار $f'_+(-1)$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۵- دو نقطه به طول‌های ۲ و $2+h$ روی منحنی $y = \sqrt{x}$ مفروض‌اند. مقدار حد ضریب زاویه‌ی خط گذرنده بر دو نقطه، وقتی $h \rightarrow 0$ ، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۶- شیب وتری که دو نقطه به طول‌های ۲ و x را از نمودار تابع هموار $y = f(x)$ به هم وصل می‌کند، برابر $x^2 + 2x + 4$ است. شیب مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۷- در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & x < -1 \\ |x| & x \geq -1 \end{cases}$ ، حاصل $f'(-2)$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۳

۸- در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{2x^2 + x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ ، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) وجود ندارد.

۹- اگر مشتق چپ تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{ax^2 - x^4}$ در $x = 0$ برابر -۱ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۴

۱۰- اگر مشتق چپ تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 0$ برابر ۲ باشد، مقدار a کدام است؟

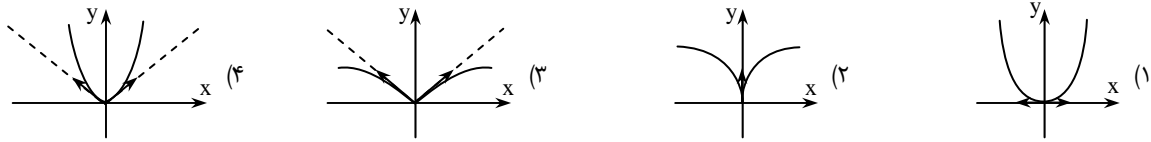
- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$



۱۱- مشتق راست تابع $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ در نقطه‌ی $x = 0$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۱۲- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ در همسایگی $x = 0$ به کدام شکل است؟ *



۱۳- مقدار مشتق تابع $f(x) = |x \tan^{-1} x|$ در نقطه‌ی $x = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) وجود ندارد.

۱۴- اگر $g(x) = [x] \sin x$ ، مقدار $g'(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) ∞ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.

۱۵- مشتق تابع $f(x) = x + [\frac{x}{p}]$ در نقطه‌ی $x_0 = 2k - 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) کدام است؟

- (۱) $2k$ (۲) $2k - 1$ (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.

۱۶- در تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$ ، حاصل $f'_+(2)$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) -2π (۳) صفر (۴) وجود ندارد.

۱۷- در تابع $f(x) = [-x] |x^2 - 8|$ ، مجموع مشتق چپ و راست در $x = 2$ کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) -۱۲

۱۸- مشتق چپ تابع $f(x) = x^2[-x^2] + |x^2 - 1|$ در نقطه‌ی $x_0 = -1$ چقدر است؟

- (۱) موجود نیست. (۲) صفر (۳) ۲ (۴) -۲

۱۹- در تابع $f(x) = (x - a)[-x]$ ، که $a \in \mathbb{N}$ یک عدد ثابت است، حاصل $f'_+(a) + f'_-(a)$ کدام است؟

- (۱) $-2a + 1$ (۲) $-2a - 1$ (۳) $2a$ (۴) $2a - 1$

۲۰- اگر $f(x) = (x^2 - 2x)([x] + [-x])$ ، حاصل $f'(2)$ کدام است؟

- (۱) وجود ندارد. (۲) صفر (۳) -۱ (۴) -۲

۲۱- مشتق راست تابع $f(x) = [\sin x + \cos x]$ در $x = \frac{3\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.

۲۲- اگر مشتق راست تابع $f(x) = a |\cos x - \sin x|$ در $x_0 = \frac{\pi}{4}$ برابر ۱ باشد، a کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۳- کدام گزینه مشتق تابع $f(x) = \sin 2x$ را در $x = \frac{\pi}{4}$ بیان می‌کند؟

(۱) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + h)}{h}$ (۲) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + 2h)}{h}$ (۳) $\lim_{h \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\pi + h) - \sin h}{h - \frac{\pi}{4}}$ (۴) $\lim_{h \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \sin 2h}{h - \frac{\pi}{4}}$

۲۴- اگر تابع f در $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\sqrt{x} - 1}$ کدام است؟

- (۱) $f'(1)$ (۲) $2f'(1)$ (۳) صفر (۴) $\frac{1}{4}f'(1)$

۲۵- اگر تابع f در $x = 2$ مشتق پذیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 + 4}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}f'(2)$ (۲) $\frac{1}{2}f'(2)$ (۳) $\frac{1}{8}f'(2)$ (۴) صفر

۲۶- اگر برای تابع f داشته باشیم: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -2$ مقدار $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2h)}{h}$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) -۲

۲۷- اگر برای تابع f داشته باشیم: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 2$ ، آن گاه حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) ۲

(۳) $2 + f(x_0)$ (۴) به مشتق پذیری یا مشتق ناپذیری f در نقطه‌ی $x = x_0$ بستگی دارد.

۲۸- هرگاه تابع f در $x = x_0$ مشتق پذیر باشد، حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0 - \frac{1}{n}))$ کدام است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

(۱) $\frac{1}{2}f'(x_0)$ (۲) $f'(x_0)$ (۳) $2f'(x_0)$ (۴) $-f'(x_0)$

۲۹- اگر برای تابع f داشته باشیم: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + 2h) - f(x - 4h)}{3h} = \sqrt{2x}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h^2 + 2h}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) ۲

۳۰- اگر $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{4})$ ، حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 - \Delta x) - 1}{\Delta x}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{\pi}{4}$ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ (۳) صفر (۴) $-\pi$

۳۱- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ ، آن گاه حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(4+h) - f^2(4)}{h}$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۶ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۹

۳۲- اگر $f(x) = \begin{cases} x^4 + 1 & x \geq 1 \\ x^2 - 1 & x < 1 \end{cases}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.

۳۳- در تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 2 \\ x^2 - 3 & x < 2 \end{cases}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2-h) - 1}{h}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۴ (۴) وجود ندارد.

۳۴- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x} - 3x & x \leq -1 \\ \frac{5x+1}{x+2} + 2 & x > -1 \end{cases}$ ، در این صورت حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1) - f(h-1)}{h}$ کدام است؟

(۱) ۸ (۲) -۸ (۳) ۱۷ (۴) -۱۷

۳۵- اگر $f(x) = \sqrt{x+4}$ ، آن گاه حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(2\Delta x)}{\Delta x}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

- ۳۶- با فرض $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x & x > 2 \\ 2x + 6 & x \leq 2 \end{cases}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+2h) - f(2-2h)}{h}$ کدام است؟
- (۱) ۲۸ (۲) ۱۰ (۳) -۱۶ (۴) ۱۷
- ۳۷- برای تابع $f(x) = |x|$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2) - f(-2-|h|)}{|h|}$ کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) $-\sqrt{2}$
- ۳۸- با فرض $f(x) = |x| \sqrt{x+4}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2h) - f(-2h)}{h}$ کدام است؟
- (۱) ۱۰ (۲) -۱۰ (۳) ۲ (۴) -۲
- ۳۹- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x \geq 1 \\ x^3 - 3 & x < 1 \end{cases}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h^2) - f(1+h^2)}{h^2}$ کدام است؟
- (۱) -۵ (۲) ۴ (۳) -۷ (۴) ۶
- ۴۰- اگر تابع f در $x=2$ مشتق پذیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x-2}$ کدام است؟
- (۱) $f(2) - f'(2)$ (۲) $f(2) - 2f'(2)$ (۳) ۱ (۴) صفر
- ۴۱- حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - 3}{h}$ کدام است؟
- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۳ (۴) -۳
- ۴۲- عبارت $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ برای بیان مشتق چند تابع در $x=1$ می تواند به کار رود؟
- (۱) فقط یک تابع (۲) بی شمار تابع (۳) هیچ تابع (۴) مربوط به مشتق نیست.
- ۴۳- مشتق تابع f در نقطه $x=2$ به صورت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+h) - 2k - 8}{h} = 12$ بیان شده است. مقدار k کدام است؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶
- ۴۴- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ x^3 & x \leq 1 \end{cases}$ حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (f(1 + \frac{1}{n}) - f(1))$ کدام است؟ ($n \in \mathbb{N}$)
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) صفر (۴) وجود ندارد.
- ۴۵- برای کدام مقدار a و b ، تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & x \geq 2 \\ x^2 + x + a & x < 2 \end{cases}$ در نقطه $x=2$ از راست مشتق پذیر است؟
- (۱) $a = -b = 1$ (۲) $a = b = -1$ (۳) هیچ مقدار a و b (۴) هر مقدار a و b
- ۴۶- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 & x < 1 \\ bx^3 + 2x & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ مشتق پذیر باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟
- (۱) -۶ (۲) -۴ (۳) ۶ (۴) ۴
- ۴۷- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 - x + b & |x| \leq 2 \\ |x - 2| & |x| > 2 \end{cases}$ در $x=2$ مشتق پذیر باشد، مقدار $a+b$ برابر است با:
- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر

۴۸- به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a ، تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 5 & x \geq 1 \\ x^2 - a & x < 1 \end{cases}$ در R مشتق پذیر است؟

- (۱) $\{-2, 2\}$ (۲) $\{-2\}$ (۳) $\{2\}$ (۴) \emptyset

۴۹- تابع f با ضابطه‌ی مقابل در چند نقطه ناپیوسته و در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ x+1 & 0 \leq x < 1 \\ 2x+2 & 1 \leq x < 2 \\ x^2+2 & x \geq 2 \end{cases}$$

(۱) یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر
 (۲) دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر
 (۳) یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر
 (۴) دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر

۵۰- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & x > 1 \\ \sqrt{x+3} & -3 \leq x \leq 1 \end{cases}$ در بازه‌ی $[-3, +\infty)$ مشتق پذیر باشد، مقدار b کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) وجود ندارد.

۵۱- تابع $f(x) = \begin{cases} 1 + \cos x & x > 0 \\ x + 2 & x = 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$ مفروض است. کدام گزاره درست است؟

- (۱) f در $x = 0$ مشتق راست دارد، ولی مشتق چپ ندارد.
 (۲) f در $x = 0$ مشتق چپ دارد، ولی مشتق راست ندارد.
 (۳) f در $x = 0$ نه مشتق راست دارد، نه مشتق چپ.
 (۴) f در $x = 0$ مشتق پذیر است.

۵۲- تابع $f(x) = \begin{cases} x|x| & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$ مفروض است. در نقطه‌ی $x_0 = 0$ کدام گزینه درباره‌ی این تابع درست است؟

- (۱) مشتق پذیر است.
 (۲) فقط مشتق راست دارد.
 (۳) فقط مشتق چپ دارد.
 (۴) مشتق چپ و راست نابرابر دارد.

۵۳- توابع $f(x) = \begin{cases} (x-1)\sin\frac{1}{x-1} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \sin\frac{1}{x-1} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 1$ چه وضعیتی دارند؟

- (۱) هر دو مشتق پذیر
 (۲) هر دو مشتق ناپذیر
 (۳) f مشتق پذیر و g مشتق ناپذیر
 (۴) f مشتق ناپذیر و g مشتق پذیر

۵۴- تابع $f(x) = |x-1|[x]$ در نقطه‌ی $x = 1$
 (۱) پیوسته نیست، ولی حد دارد. (۲) مشتق پذیر است.

- (۳) حد ندارد. (۴) مشتق چپ و راست نابرابر دارد.

۵۵- کدام تابع در $x = 0$ مشتق ناپذیر است؟

(۱) $f(x) = x^3 - 2|x|$ (۲) $f(x) = x\sqrt[3]{x}$ (۳) $f(x) = x|x|$ (۴) $f(x) = x(x-|x|)$

۵۶- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = x|x-1| + a|x-1|$ در $x = 1$ مشتق پذیر است؟

- (۱) $a = 1$ (۲) $a = 0$ (۳) $a = -1$ (۴) همه‌ی مقادیر

۵۷- کدام یک از توابع زیر در $x_0 = 2$ مشتق پذیر است؟

(۱) $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ (۲) $f_2(x) = (x-2)[x]$
 (۳) $f_3(x) = |x-2|(x-2)$ (۴) $f_4(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$

۵۸- اگر تابع $f(x) = |x^2 + x + m|$ در R مشتق پذیر باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $m > \frac{1}{4}$ (۲) $m \geq \frac{1}{4}$ (۳) $m \leq \frac{1}{4}$ (۴) $m > \frac{1}{8}$

۵۹- اگر تابع $f(x) = (x-2)^m[x]$ در $x = 2$ مشتق پذیر باشد، m کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

- ۶۰ اگر تابع $f(x) = (x-1)^n [x+1]$ در $x=1$ مشتقی مخالف صفر داشته باشد، n کدام عدد می تواند باشد؟ ($n \in \mathbb{N}$)
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ هیچ مقدار n (۴)
- ۶۱ تابع $f(x) = (x^2 + ax + b)[2x + 1]$ در $x=1$ مشتق پذیر است. مقدار b کدام است؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) -۴ (۴)
- * -۶۲ اگر $f(x) = (x^2 + ax + b)[x]$ در $x_0 = 2$ مشتق پذیر باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) -۲ (۲) -۴ (۳) ۴ (۴)
- ۶۳ تابع $f(x) = [\sin^3 x]$ در $x = \pi$...
 ۱) مشتق پذیر است. ۲) فقط مشتق راست دارد. ۳) فقط مشتق چپ دارد. ۴) پیوسته است، ولی مشتق پذیر نیست.
- ۶۴ تابع با ضابطه $f(x) = x[\sin x]$ روی بازه $(-\pi, \frac{\pi}{2})$ کدام وضعیت را دارد؟
 ۱) پیوسته - مشتق پذیر ۲) ناپیوسته - مشتق پذیر ۳) پیوسته - مشتق ناپذیر ۴) ناپیوسته - مشتق ناپذیر
- ۶۵ کدام گزینه درباره $f(x) = [|x|]$ در $x=0$ درست است؟
 ۱) پیوسته است، اما مشتق پذیر نیست. ۲) فقط مشتق راست دارد. ۳) فقط مشتق چپ دارد. ۴) مشتق پذیر است.
- ۶۶ در کدام تابع شرایط $f'_-(0) = +\infty$ و $f'_+(0) = -\infty$ برقرار است؟
 ۱) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ۲) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ ۳) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ۴) $f(x) = -\sqrt[3]{x^2}$
- ۶۷ برای تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$ ، نقاط $A(1, 0)$ و $B(-2, 0)$ به ترتیب کدام عنوان را دارند؟
 ۱) عطف و عطف ۲) عطف و بازگشت ۳) بازگشت و عطف ۴) بازگشت و بازگشت
- ۶۸ تابع $f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$ در چند نقطه از دامنه اش مشتق ناپذیر است؟
 ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳
- ۶۹ تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x^2 - 4 & x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & x < 0 \end{cases}$ در چند نقطه از دامنه اش مشتق ناپذیر است؟
 ۱) یک نقطه ۲) دو نقطه ۳) سه نقطه ۴) چهار نقطه
- ۷۰ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| \leq 1 \\ |x| - 1 & |x| > 1 \end{cases}$ در چند نقطه پیوسته است، ولی مشتق پذیر نیست؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ صفر (۴)
- ۷۱ تابع $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & |x| \leq 2 \\ 4x - 1 & |x| > 2 \end{cases}$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)
- ۷۲ تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x-2} & x < 1 \\ \frac{|x-1|}{x+2} & x \geq 1 \end{cases}$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)
- ۷۳ تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2} & x \geq 0 \\ |(x+1)(x+2)^2| & x < 0 \end{cases}$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۴)

- ۷۴- نمودار تابع $f(x) = |x^3| + |x^2 + 2x^2 + x|$ در چند نقطه زاویه‌دار است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۷۵- تابع $y = |x^3 + x - 1|$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟
 (۱) یک نقطه (۲) دو نقطه (۳) سه نقطه (۴) صفر نقطه
- ۷۶- اگر نمودار تابع $f(x) = |x^3 - 2x^2 + ax|$ فقط یک نقطه‌ی زاویه‌دار داشته باشد، مقدار a کدام است؟ ($a \neq 0$)
 (۱) $|a| \leq 1$ (۲) $|a| \geq 1$ (۳) $|a| < 1$ (۴) $a \geq 1$
- * ۷۷- تابع $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)|x+1|(x^2+ax^2+bx+c)}$ در R مشتق‌پذیر است. حاصل $a+2b+3c$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) هیچ مقداری برای a ، b و c وجود ندارد.
- ۷۸- تابع $f(x) = |x^2 - 2|x||$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر
- ۷۹- تابع $f(x) = [\sqrt{5x}]$ در بازه‌ی $(0, 4)$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۴
- ۸۰- تابع $y = |\sin x - 1|$ در چند نقطه از دامنه‌اش در بازه‌ی $(-2\pi, 2\pi)$ مشتق‌ناپذیر است؟
 (۱) یک نقطه (۲) دو نقطه (۳) سه نقطه (۴) صفر نقطه
- * ۸۱- اگر $f(x) = |\tan x - \cot x|$ ، آن‌گاه تابع f در بازه‌ی $(0, \pi)$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۸۲- تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع $f(x) = ||x| - 1|$ بر روی R کدام است؟ (سراسری - ۸۵)
 (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۸۳- تابع با ضابطه‌ی $y = x\sqrt{x^2}$ از نظر پیوستگی و مشتق‌پذیری در صفر چگونه است؟ (سراسری - ۸۷)
 (۱) پیوسته و مشتق‌پذیر است. (۲) پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست.
 (۳) نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر. (۴) فقط از راست پیوسته و از راست مشتق‌پذیر است.
- ۸۴- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in Q \\ 0 & x \in R - Q \end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر است؟ (سراسری - ۸۸)
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر
- ۸۵- مشتق چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ ، در نقطه‌ی $x = 0$ کدام است؟ (سراسری - ۸۹)
 (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$
- ۸۶- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{1+|x|}$ در نقطه‌ی $x = \alpha$ مشتق ندارد. مقدار $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۵)
 (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) تعریف نشده
- ۸۷- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x + \frac{1}{3}] + [x]$ روی بازه‌ی $(0, 3)$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۶)
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۸۸- اگر $f(x) = 1 - |x|$ ، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع با ضابطه‌ی $y = f(f(x))$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۸)
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۸۹- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x}}{x} & x \geq 1 \\ ax^2 + bx & x < 1 \end{cases}$ بر روی \mathbb{R} مشتق پذیر است. مقدار b کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۹)

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) ۵

۹۰- کدام تابع در $x = 1$ مشتق پذیر است؟

(۱) $y = [(x-1)^2]^2$ (۲) $y = (x-1)[\sqrt{x-1}]$ (۳) $y = [\sqrt[3]{(x-1)^2}]$ (۴) $y = \sqrt[3]{x-1}[(x-1)^2]$ (آزاد- ۸۶)

۹۱- در تابع $y = \begin{cases} x^2 & |x| \geq 1 \\ 2x^2 - 1 & |x| < 1 \end{cases}$ ، حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(1+\Delta x) - 1}{\Delta x}$ چقدر است؟

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۴ (۴) -۴ (آزاد- ۸۶)

۹۲- در تابع $f(x) = |x-1| + 3|x-2| - 4$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h^2) + f(2+h^2) - 4}{h^2}$ کدام است؟

(۱) ۷ (۲) -۷ (۳) -۱ (۴) ۲ (آزاد- ۸۶)

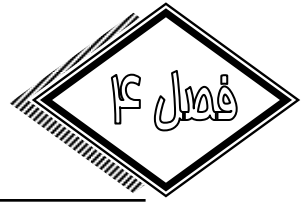
۹۳- برای تابع $f(x) = \frac{|x-1|+1}{|x|+1}$ حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(1-2\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ چقدر است؟

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{3}{2}$ (آزاد- ۸۷)

۹۴- تابع $y = (x^3 + 3x^2 + ax + b)[x]$ در $x = 2$ مشتق پذیر است. مقدار $a + b$ کدام است؟

(۱) ۵۲ (۲) -۵۲ (۳) -۴ (۴) ۴ (آزاد - ۹۰)

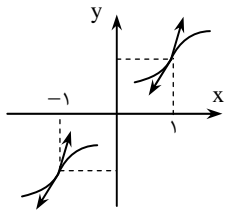
مفاهیم اولیه مشتق



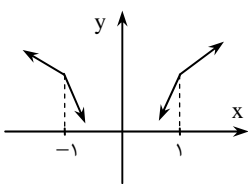
پاسخ‌های تشریحی

A - **گزینه ۲** به شیب خطوط مماس بر نمودار تابع دقت کنید.

A **۲- گزینه ۳** تابع در نقاط x_1, x_2, x_3, x_4 و x_5 مشتق‌ناپذیر است. نقاط x_6 و x_7 نقاط ناپیوستگی‌اند، نقطه‌ی x_8 نقطه‌ی زاویه‌دار و نقطه‌ی x_9 نقطه‌ی بازگشت است.



B **۳- گزینه ۲** می‌دانیم نمودار توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. وقتی $f'_+(1) = 2$ و $f'_-(1) = 1$ مطابق شکل می‌توانیم دو نیم‌مماس به شیب‌های ۲ و ۱ در راست و چپ نمودار در نقطه‌ی به‌طول $x = 1$ روی آن رسم کنیم. قرینه‌ی این نیم‌مماس‌ها نسبت به مبدأ مختصات را نیز رسم کرده‌ایم که وضعیت نمودار تابع در $x = -1$ را نشان می‌دهند. مطابق شکل داریم: $f'_+(-1) = 1$ و $f'_-(-1) = 2$.



B **۴- گزینه ۱** از فرض $f'_+(1) = 1$ و $f'_-(1) = 2$ نتیجه می‌گیریم در نقطه‌ی $x = 1$ می‌توانیم دو نیم‌مماس با شیب‌های ۱ و ۲ از راست و چپ بر نمودار تابع رسم کنیم. چون f تابعی زوج است، نمودار آن نسبت به محور y ها متقارن است، پس مطابق شکل داریم:

$$f'_+(-1) = -2, f'_-(-1) = -1$$

A **۵- گزینه ۳** اگر قرار دهیم $f(x) = \sqrt{x}$ ، دو نقطه $(2, f(2))$ و $(2+h, f(2+h))$ هستند و ضریب زاویه‌ی خط گذرنده از آن‌ها با کسر

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{2+h-2} \text{ بیان می‌شود. پس با } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) \text{ کار داریم که برابر است با: } \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

C **۶- گزینه ۱۴** شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(2, f(2))$ و $B(x, f(x))$ برابر است با: $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$. پس طبق فرض داریم:

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = x^2 + 2x + 4 \text{ و می‌خواهیم } f'(2) \text{ را بیابیم:}$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

A **۷- گزینه ۱** برای محاسبه‌ی $f'(-2)$ باید از ضابطه‌ی اول تابع استفاده کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(-2) = -4 + 1 = -3$$

A **۸- گزینه ۳** از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x^2}{2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x^2}{(2x+1)x^2} = \frac{-4}{1} = -4$$

A **۹- گزینه ۱۴** می‌دانیم، $f(x) = \frac{1}{2} |x| \sqrt{a - x^2}$ ، حال با توجه به آن که $f(0) = 0$ ، داریم:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt{a - x^2}}{x} = \frac{-1}{2} \sqrt{a}$$

$$\Rightarrow \frac{-\sqrt{a}}{2} = -1 \Rightarrow a = 4$$

B ۱۰- گزینه‌ی (۲) از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{\pi} \lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1}(t) \\ &= \frac{a}{\pi} \times \frac{-\pi}{2} = -\frac{a}{2} \Rightarrow -\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = -4 \end{aligned}$$

B ۱۱- گزینه‌ی (۳) چون $f(0) = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 + \sqrt{1 - x^2})}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1 - 1 + x^2}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

D ۱۲- گزینه‌ی (۴) مانند تست قبل داریم: $f'_+(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $f'_-(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (دقت کنید که برای $x < 0$ ، باید به جای x در مخرج کسر مشتق

قرار دهید: $-\sqrt{x^2}$). پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست‌اند. حال به دلیل نامساوی‌های برگشت‌پذیر زیر گزینه‌ی (۳) نیز رد می‌شود:

$$\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} > \frac{\sqrt{2}}{2} x \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \sqrt{1 - x^2} > \frac{1}{2} x^2 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} x^2 > \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow 1 - x^2 + \frac{1}{4} x^4 > 1 - x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} x^4 > 0$$

معنی نامساوی‌های بالا این است که برای $x > 0$ ، نمودار تابع بالاتر از نیم مماس راست (با معادله‌ی $y = \frac{\sqrt{2}}{2} x$) قرار می‌گیرد. به همین ترتیب

برای $x < 0$ ثابت می‌شود $f(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2} x$.

B ۱۳- گزینه‌ی (۲) با توجه به نمودار $y = \tan^{-1} x$ ، برای $x > 0$ داریم: $\tan^{-1} x > 0$ و برای $x < 0$: $\tan^{-1} x < 0$. پس $\tan^{-1} x$ و x

هم‌علامت‌اند و در نتیجه: $f(x) = x \tan^{-1} x$ ، بنابراین:

B ۱۴- گزینه‌ی (۲) در همسایگی کوچک $x = \frac{\pi}{4}$ داریم: $[x] = 1$ و $g(x) = \sin x$ ، بنابراین:

B ۱۵- گزینه‌ی (۳) در نقطه‌ی مورد نظر داریم: $\frac{x_0}{4} \notin \mathbb{Z}$ ، بنابراین تابع $y_1 = [\frac{x}{4}]$ در این نقطه پیوسته و دارای مشتقی برابر صفر است. پس فقط

باید مشتق $y_2 = x$ را در نقطه‌ی $x_0 = 2k - 1$ بیابیم که به وضوح برابر ۱ است.

B ۱۶- گزینه‌ی (۱) $\sin \pi x$ در $x = 2$ صفر می‌شود، پس به دلیل عامل صفر کننده در پیوستگی، تابع f در $x = 2$ پیوسته است. حال برای

$2 < x < 3$ داریم: $f(x) = 2 \sin \pi x$ و بنابراین:

B ۱۷- گزینه‌ی (۴) علامت عبارت $x^3 - 8$ مانند علامت عبارت $x - 2$ است. بنابراین:

$$x \rightarrow 2^+ : x > 2 \Rightarrow -x < -2, x^3 - 8 > 0 \Rightarrow f(x) = -3(x^3 - 8) \Rightarrow f'(x) = -9x^2 \Rightarrow f'_+(2) = -36$$

$$x \rightarrow 2^- : x < 2 \Rightarrow -x > -2, x^3 - 8 < 0 \Rightarrow f(x) = -2(8 - x^3) \Rightarrow f'(x) = 6x^2 \Rightarrow f'_-(2) = 24$$

B ۱۸- گزینه‌ی (۱) در همسایگی چپ $x_0 = -1$ ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 < -1 \Rightarrow -x^2 \rightarrow (-1)^- \\ x^2 - 1 > 0 \Rightarrow |x^2 - 1| = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -2x^2 + x^2 - 1 = -x^2 - 1$$

پس $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -1 - 1 = -2$ و $f(-1) = 1 \times (-1) + 0 = -1$ ، یعنی تابع f در نقطه‌ی $x_0 = -1$ از چپ ناپیوسته و بنابراین

مشتق ناپذیر است.

B ۱۹- گزینه‌ی (۲) ضابطه‌ی تابع را در همسایگی $x = a$ می‌نویسیم: (دقت کنید که $f(a) = 0$ و تابع در $x = a$ پیوسته است)

$$a < x < a + 1 \Rightarrow -(a + 1) < -x < -a \Rightarrow f(x) = (x - a)(-a - 1) \Rightarrow f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x - a)(-a - 1)}{x - a} = -a - 1$$

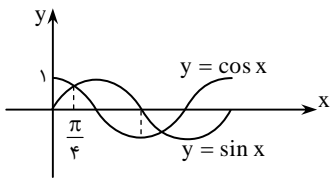
$$a - 1 < x < a \Rightarrow -a < -x < -(a - 1) \Rightarrow f(x) = (x - a)(-a) \Rightarrow f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(x - a)(-a)}{x - a} = -a$$

پس $f'_+(a) + f'_-(a) = -a - 1 - a = -2a - 1$

۲۰- گزینهی (۴) داریم: $f(2) = 0$ و می‌دانیم برای $1 < x < 3$ که $x \neq 2$ داریم: $[x] + [-x] = -1$. بنابراین در همسایگی $x = 2$ داریم:
 $f(x) = -(x^2 - 2x)$ ، یعنی f در $x = 2$ پیوسته است و در نتیجه: $f'(2) = -2 \Rightarrow f'(x) = -2x + 2$.

۲۱- گزینهی (۴) با توجه به آن که $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ، وقتی $x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+$ داریم: $x + \frac{\pi}{4} \rightarrow \pi^+$ ، بنابراین $\sin(x + \frac{\pi}{4}) \rightarrow 0^-$.

یعنی تابع $f(x)$ در همسایگی راست $x = \frac{3\pi}{4}$ مقدار $[-0^-] = -1$ را دارد، ولی $f(\frac{3\pi}{4}) = 0$. پس در این نقطه f از راست ناپیوسته و مشتق ناپذیر است.



۲۲- گزینهی (۳) مطابق نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ که در شکل مقابل رسم شده است، در همسایگی کوچک راست $x = \frac{\pi}{4}$ داریم: $\sin x > \cos x$. بنابراین:

$$f(x) = a(\sin x - \cos x) \Rightarrow f'(x) = a(\cos x + \sin x)$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}a \Rightarrow \sqrt{2}a = 1 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۳- گزینهی (۲) مشتق تابع $f(x) = \sin 2x$ در $x = \frac{\pi}{4}$ با یکی از دو حد زیر می‌توانیم به دست آوریم:

$$۱) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{\pi}{4} + h) - f(\frac{\pi}{4})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + 2h) - \sin \pi}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + 2h)}{h}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \sin \pi}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{x - \frac{\pi}{4}}$$

۲۴- گزینهی (۲) حد مورد نظر را به حدی که بیانگر مشتق تابع است، ربط می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2f'(1)$$

۲۵- گزینهی (۴) چون f در $x = 2$ مشتق پذیر است، پیوسته نیز می‌باشد، بنابراین: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - f(2) = 0$ ، در نتیجه حاصل حد خواسته شده

نیز $\frac{0}{8} = 0$ می‌شود.

۲۶- گزینهی (۲) از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم: $f'(x_0) = -2$ ، حال با توجه به نکات بخش آموزش داریم:

$$\text{جواب} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 0 \times h) - f(x_0 - 2h)}{h} = (0 - (-2))f'(x_0) = 2f'(x_0) = 2 \times (-2) = -4$$

۲۷- گزینهی (۲) از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم $f'_+(x_0) = 2$. با تغییر متغیر $t = -h$ حد مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0) - f(x_0 + t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = f'_+(x_0) = 2$$

۲۸- گزینهی (۳) اگر قرار دهیم $h = \frac{1}{n}$ ، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، داریم: $h \rightarrow 0^+$ و حد مورد نظر به صورت

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$$

می‌آید. چون این حد وجود دارد، بنابر حد دنباله‌ای، حد اولیه نیز وجود دارد و حاصل آن دو یکی است. مقدار حد آخر نیز برابر است با:

$$(1 - (-1))f'(x_0) = 2f'(x_0)$$

۲۹- گزینهی (۱) طبق نکات بخش آموزش داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + 2h) - f(x - 4h)}{2h} = \frac{1}{3}(2 - (-4))f'(x) = 2f'(x) \Rightarrow 2f'(x) = \sqrt{2x} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$$

حال برای کسر دوم می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{جواب} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h(3h+2)} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} = \frac{1}{2}(1 - (-1))f'(2) = f'(2) \xrightarrow{\text{نتیجه بالا}} \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$$

۳۰- گزینهی (۳) اگر قرار دهیم $t = -\Delta x$ ، آن‌گاه $t \rightarrow 0$ و با توجه به این که $f(2) = 1$ داریم:

$$\text{جواب} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+t) - f(2)}{-t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+t) - f(2)}{t} = -f'(2) = -\frac{\pi}{4} \cos(\frac{\pi}{4} \times 2) = 0$$

۳۱- گزینهی (۱) اگر قرار دهیم $g(x) = f^{\sqrt{x}}$ ، مقدار $g'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(4+h) - g(4)}{h}$ را می‌خواهیم. داریم:

$$g(x) = x^{\sqrt{x}} \Rightarrow g'(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} x^{\sqrt{x}} \Rightarrow g'(4) = \frac{\sqrt{4}}{4} \sqrt{4} = 1$$

۳۲- گزینهی (۴) مقدار حد همان $f'_-(1)$ می‌شود، ولی تابع f در نقطه‌ی $x = 1$ از چپ ناپیوسته و از راست پیوسته است ($\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$)

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \text{ پس مشتق چپ ندارد.}$$

تذکره: اگر در کسر مورد نظر مقادیر مربوط را قرار دهید، حاصل حد را $+\infty$ به دست خواهید آورد:

$$h \rightarrow 0^- \Rightarrow 1+h < 1 \Rightarrow f(1+h) - f(1) = (1+h)^2 - 1 - 2 = h^2 + 2h - 2 \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (h + 2 - \frac{2}{h}) = +\infty$$

۳۳- گزینهی (۲) با جای گذاری $t = -h$ ، حد مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(2+t) - 1}{-t} \xrightarrow{f(2)=1} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(2+t) - f(2)}{t} = -f'_+(2)$$

تابع f در $x = 2$ پیوسته است ($\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$)، بنابراین برای محاسبه‌ی مشتق‌های چپ و راست f در $x = 2$ می‌توانیم از

$$x > 2: f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'_+(2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{جواب نهایی} = -\frac{1}{2} \text{ ضابطه‌های آن مشتق بگیریم:}$$

۳۴- گزینهی (۱) تابع در $x = -1$ پیوسته است. حال داریم:

$$\text{جواب} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1) - f(-1+h)}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = -f'_-(-1) = -\left(\frac{-5}{x^2} - 3\right) \Big|_{x=-1} = 8$$

۳۵- گزینهی (۱) حد مورد نظر را با جای گذاری $h = \Delta x$ می‌توانیم به صورت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0+2h)}{h}$ بنویسیم که با توجه به نکات بخش

$$(1-2)f'(0) = -f'(0) = -\frac{1}{2\sqrt{0+4}} = -\frac{1}{4} \text{ آموزش، حاصل آن برابر است با:}$$

۳۶- گزینهی (۱) با اضافه و کم کردن $f(2)$ در صورت کسر، می‌توانیم حد مورد نظر را به صورت مجموع دو حد بیانگر مشتق تفکیک کنیم:

$$\text{جواب} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+3h) - f(2)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2-2h) - f(2)}{h} \\ \xrightarrow{\substack{t=3h \\ k=-2h}} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(2+t) - f(2)}{\frac{1}{3}t} - \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{f(2+k) - f(2)}{-\frac{1}{2}k} = 3f'_-(2) + 2f'_+(2)$$

حال با توجه به آن که f در $x = 2$ پیوسته است، برای محاسبه‌ی مشتق‌های چپ و راست می‌توانیم از مشتق ضابطه‌ها استفاده کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 6x-1 & x > 2 \\ 2 & x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'_-(2) = 2, f'_+(2) = 11 \Rightarrow \text{جواب نهایی} = 3 \times 2 + 2 \times 11 = 28$$

۳۷- گزینهی (۳) با قرار دادن $t = -|h|$ ، حد مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(-2) - f(-2+t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(-2+t) - f(-2)}{t} = f'_-(-2)$$

در همسایگی نقطه‌ی $x = -2$ داریم: $f(x) = -x$ ، بنابراین: $f'(x) = -1$ و در نتیجه: $f'_-(-2) = -1$

۳۸- گزینهی (۳) با اضافه و کم کردن $f(0)$ در صورت کسر، می‌توانیم حد مورد نظر را به صورت مجموع دو حد بیانگر مشتق تفکیک کنیم:

$$\text{جواب} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2h) - f(0)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-2h) - f(0)}{h} \xrightarrow{t=2h} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(0+t) - f(0)}{\frac{1}{2}t} - \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{f(0+k) - f(0)}{-\frac{1}{2}k} \\ = 2f'_-(0) + 2f'_+(0)$$

تابع f در $x = 0$ پیوسته است، و برای $x \rightarrow 0^+$ داریم:

$$f(x) = x\sqrt{x+4} \Rightarrow f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+4} = 2$$

به همین ترتیب داریم: $f'_-(-2) = -2$ ، بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با: $2 \times (-2) + 2 \times 2 = 2$

۱۳۹- گزینهی (۱) با اضافه و کم کردن $f(1)$ در صورت کسر، می‌توانیم حد مورد نظر را به صورت مجموع دو حد بیانگر مشتق تفکیک کنیم:

$$\begin{aligned} \text{جواب} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h^2) - f(1)}{h^2} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h^2) - f(1)}{h^2} \xrightarrow[k=h^2]{t=-2h^2} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(1+t) - f(1)}{-\frac{1}{2}t} - \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{f(1+k) - f(1)}{k} \\ &= -2f'_-(1) - f'_+(1) \end{aligned}$$

با توجه به آن که f در $x=1$ پیوسته است، برای محاسبه‌ی مشتق‌های بالا می‌توانیم از ضابطه‌ها مشتق بگیریم:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x > 1 \\ 3x^2 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) = -1, f'_-(1) = 3 \Rightarrow \text{جواب نهایی} = -2 \times 3 - (-1) = -5$$

۱۴۰- گزینهی (۲) راه اول: با اضافه و کم کردن $2f(2)$ در صورت کسر داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2) - 2f(2)}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 2f(2)}{x-2} = f(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} - 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f(2) - 2f'(2)$$

راه دوم: با توجه به ابهام $\frac{0}{0}$ از قاعده‌ی هسپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\text{جواب} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2) - 2f'(x)}{1} = f(2) - 2f'(2)$$

برای استفاده از این راه باید فرض کنید تابع f' در $x=2$ پیوسته است.

۱۴۱- گزینهی (۱) اگر قرار دهیم $f(x) = x^2 + 2x$ ، آن‌گاه $f(1) = 3$ و $f'(x) = 2x + 2$ ، هم‌چنین داریم:

$$\text{جواب} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 2 \times 1 + 2 = 4$$

۱۴۲- گزینهی (۲) اگر قرار دهیم $f(x) = x^2 + x + c$ که c یک عدد حقیقی دلخواه است، $f'(1)$ را می‌توان با حد مورد نظر بیان کرد.

۱۴۳- گزینهی (۳) اگر قرار دهیم $g(x) = 2x^2 + kx$ ، حد مورد نظر به صورت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h}$ در می‌آید. بنابراین $g'(2) = 12$ و

چون $g'(x) = 4x + k$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$12 + k = 12 \Rightarrow k = 4$$

۱۴۴- گزینهی (۱) تابع f در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته است و می‌دانیم $f'_+(1) = 2$ ، زیرا $f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 3x^2 & x < 1 \end{cases}$. بنابراین:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} g(h) = 2 \text{ پس اگر قرار دهیم: } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$$

حال دنباله‌ی $\{\frac{1}{n^2}\}$ را در نظر بگیرید. وقتی $n \rightarrow \infty$ ، داریم: $a_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0^+$ ، بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = \lim_{h \rightarrow 0^+} g(h) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (f(1 + \frac{1}{n^2}) - f(1)) = 2$$

۱۴۵- گزینهی (۴) برای $x \geq 2$ تابع یک چند جمله‌ای است $(f(x) = ax^2 + bx)$ ، بنابراین در $x=2$ همواره از راست پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۱۴۶- گزینهی (۳) از پیوستگی f در $x=1$ نتیجه می‌گیریم: $a = b + 2$ ، حال با فرض پیوستگی داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 1 \\ 2bx^2 + 2 & x > 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{پیوسته}]{x=1 \text{ در } f} f'_+(1) = 3b + 2, f'_-(1) = 2a \Rightarrow \begin{cases} 2a = 3b + 2 \\ a = b + 2 \end{cases} \Rightarrow a = 4, b = 2$$

۱۴۷- گزینهی (۳) از پیوستگی f در $x=2$ نتیجه می‌گیریم: $4a - 2 + b = 0$. حال با فرض پیوستگی در همسایگی $x=2$ داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - 1 & -2 < x < 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases} \xrightarrow[\text{مشتق‌پذیر}]{x=2 \text{ در } f} 4a - 1 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \xrightarrow{4a - 2 + b = 0} b = 0$$

۱۴۸- گزینهی (۴) از پیوستگی f در $x=1$ نتیجه می‌گیریم: $a + 5 = 1 - a \Rightarrow a = -2$ ، حال با فرض پیوستگی داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} a & x > 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases} \xrightarrow{f'_+(1) = f'_-(1)} a = 2 \rightarrow a = -2 \text{ در تناقض با نتیجه‌ی } a = -2$$

B ۱۴۹- گزینهی (۳) تابع در نقطه‌ی $x = 1$ ناپیوسته (و بنابراین مشتق ناپذیر) است، زیرا
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 + 2 = 4$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + 1 = 2$.
 همچنین ضابطه‌ی $f'(x)$ را به صورت روبه‌رو می‌توان نوشت.
 در نقاط $x = 0$ و $x = 2$ نیز تابع مشتق ناپذیر است. پس روی هم یک نقطه‌ی ناپیوستگی و سه نقطه‌ی مشتق ناپذیری داریم.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 < x < 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$$

B ۵۰- گزینهی (۴) تابع f در $x = -3$ از راست مشتق پذیر نیست، پس در بازه‌ی $[-3, +\infty)$ مشتق پذیر نیست. زیرا:

$$f(-3) = 0 \Rightarrow f'_+(-3) = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{f(x)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{\sqrt{x+3}}{x+3} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{1}{\sqrt{x+3}} = +\infty$$

A ۵۱- گزینهی (۱) تابع f در $x = 0$ پیوستگی راست دارد $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$ ، تابع $y = 1 + \cos x$ نیز در \mathbb{R} مشتق پذیر است. بنابراین f در $x = 0$ از راست مشتق پذیر است.

B ۵۲- گزینهی (۳) تابع در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته است. پس برای مشتق چپ و راست آن در این نقطه، می‌توانیم از مشتق‌های دو ضابطه استفاده کنیم. تابع $y_1 = x|x|$ در \mathbb{R} مشتق پذیر است، ولی تابع $y_2 = \sqrt{x}$ در $x = 0$ مشتق ناپذیر است، پس تابع f در $x = 0$ فقط مشتق چپ دارد.

B ۵۳- گزینهی (۴) برای تابع f داریم: $f(1) = 0 = \text{کران دار} \times \text{صفر}$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ ، پس تابع f در $x = 1$ پیوسته است (و به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم g نیز در $x = 1$ پیوسته است). f در $x = 1$ مشتق ناپذیر است، زیرا:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{1}{x - 1} \rightarrow \text{وجود ندارد}$$

با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم $g'(1) = 0$ ، پس g در $x = 1$ مشتق پذیر است.

B ۵۴- گزینهی (۴) در همسایگی $x = 1$ ضابطه‌ی تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| & 1 \leq x < 2 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ در $x = 1$ پیوسته و مشتق ناپذیر

B ۵۵- گزینهی (۱) گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) در $x = 0$ مشتق پذیرند، مثلاً برای تابع گزینه‌ی (۴) داریم:

$$f(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x - |x| = 0$$

ولی تابع گزینه‌ی (۱) از جمع یک تابع مشتق پذیر و یک تابع مشتق ناپذیر تشکیل شده، بنابراین خود مشتق ناپذیر است.

B ۵۶- گزینهی (۳) چون $f(x) = (x+a)|x-1|$ ، اگر ریشه‌ی $x+a$ نباشد، تابع در $x = 1$ مشتق ناپذیر است. پس باید $1+a = 0$ ، بنابراین $a = -1$.

B ۵۷- گزینهی (۳) چون $f_1(x) = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ ، تابع f_1 در نقطه‌ی $x = 2$ مشتق ناپذیر است. همچنین طبق نکات بخش آموزش، تابع گزینه‌ی (۴) نیز در $x = 2$ مشتق ناپذیر است. تابع گزینه‌ی (۳) مشتق پذیر است، زیرا:

$$f'_r(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f_r(x) - f_r(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} |x-2| = 0$$

به همین ترتیب می‌توانید نشان دهید $f'_l(2)$ وجود ندارد.

B ۵۸- گزینهی (۲) اگر عبارت $x^2 + x + m$ ریشه‌ی ساده (غیر مضاعف) داشته باشد، تابع f در آن نقطه مشتق ناپذیر است. پس برای آن که تابع f در \mathbb{R} مشتق پذیر باشد، باید عبارت $x^2 + x + m$ یا ریشه نداشته باشد، یا ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، یعنی:

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 1 - 4m \leq 0 \Rightarrow m \geq \frac{1}{4}$$

B ۵۹- گزینهی (۱) اگر $m \geq 2$ ، تابع در $x = 2$ مشتق پذیر است، زیرا با فرض $m \geq 2$ داریم: $(m \in \mathbb{N})$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^m [x]}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^{m-1} [x]$$

که چون $m-1 \geq 1$ ، عامل $(x-2)^{m-1}$ در $x = 2$ برابر صفر می‌شود و طبق عامل صفر کننده در پیوستگی، مقدار حد نیز برابر صفر می‌شود.

۶۰- گزینهی (۴) C چون $n \in \mathbb{N}$ داریم: $f(1) = 0$ ، بنابراین: $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^n [x+1]}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{n-1} [x+1]$

اگر $n = 1$ ، به حد $\lim_{x \rightarrow 1} [x+1]$ می‌رسیم که وجود ندارد. اگر $n \geq 2$ ، عامل $(x-1)^{n-1}$ به‌ازای $x = 1$ برابر صفر می‌شود و طبق نکته‌ی عامل صفر کننده در پیوستگی مقدار حد برابر صفر می‌شود. پس هیچ‌گاه مقدار مشتق غیر صفر نمی‌شود.

۶۱- گزینهی (۱) C باید $x = 1$ ریشه‌ی مضاعف $x^2 + ax + b$ باشد، یعنی:

$$x^2 + ax + b = (x-1)^2 \Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow a = -2, b = 1$$

تذکره: برای اثبات نتیجه‌ی فوق به این دقت کنید که اولاً برای پیوسته بودن f در $x = 1$ باید عبارت $x^2 + ax + b$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود، پس $x = 1$ ریشه‌ی آن است و داریم: $x^2 + ax + b = (x-1)g(x)$. حال با این فرض می‌توانیم بنویسیم:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)g(x)[2x+1]}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)[2x+1]$$

برای وجود داشتن حد بالا باز هم باید $x = 1$ ریشه‌ی $g(x)$ باشد، یعنی $x = 1$ ریشه‌ی مضاعف عبارت اولیه است.

۶۲- گزینهی (۴) D برای آن‌که f در $x = 2$ پیوسته باشد، باید $g(x) = x^3 + ax + b$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود، یعنی باید $g(2) = 0$ ، پس $g(x) = (x-2)h(x)$. حال برای مشتق‌پذیری f در $x = 2$ باید حد زیر موجود باشد:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)h(x)[x] - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} h(x)[x]$$

برای موجود بودن حد بالا باید $h(x)$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود، یعنی $h(2) = 0$. پس باید $g(x)$ بر $(x-2)^2$ بخش‌پذیر باشد، که

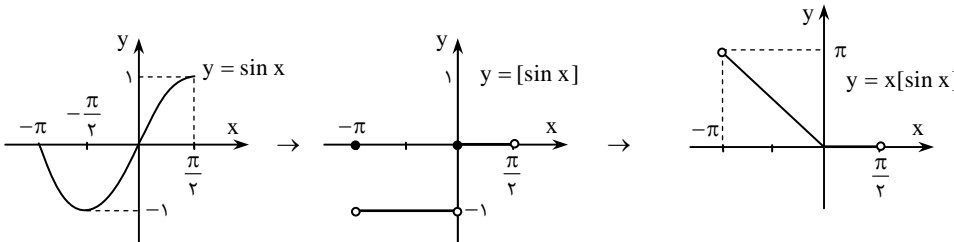
$$\left. \begin{aligned} g(2) = 0 &\Rightarrow 8 + 2a + b = 0 \\ g'(2) = 0 &\Rightarrow 3 \times 2 + a = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -12, b = 16 \Rightarrow a + b = 4$$

داریم: $g(2) = g'(2) = 0$.

۶۳- گزینهی (۳) B اگر قرار دهیم $g(x) = \sin^x x$ ، با توجه به دایره‌ی مثلثاتی داریم: $g(\pi) = 0$ و برای $x \rightarrow \pi^-$ داریم: $g(x) \rightarrow 0^+$ و

برای $x \rightarrow \pi^+$ داریم: $g(x) \rightarrow 0^-$ ، بنابراین تابع $f(x) = [g(x)]$ در نقطه‌ی $x = \pi$ از چپ پیوسته و مشتق‌پذیر است.

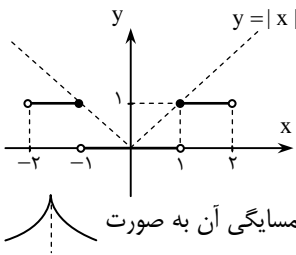
۶۴- گزینهی (۳) B نمودار $y = x[\sin x]$ را در بازه‌ی $(-\pi, \frac{\pi}{2})$ رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار در این بازه تابع پیوسته است، ولی در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

۶۵- گزینهی (۴) B

نمودار تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، $f(x)$ در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.



۶۶- گزینهی (۴) B با توجه به فرض نتیجه می‌گیریم نقطه‌ی $x = 0$ بازگشت تابع است و نمودار تابع در همسایگی آن به صورت

می‌شود. در بین گزینه‌ها، گزینه‌ی ۴ چنین نموداری دارد.

۶۷- گزینهی (۳) C با تجزیه‌ی عبارت زیر رادیکال ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به صورت $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}$ بنویسیم. حال در نقطه‌ی

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2} \times \sqrt[3]{x+2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{0^+} = +\infty$$

داریم: $A(1, 0)$

به همین ترتیب به دست می‌آوریم: $f'_-(1) = -\infty$ ، بنابراین با توجه به پیوستگی f در $x = 1$ ، نقطه‌ی A بازگشت تابع است. به همین

ترتیب نتیجه می‌گیریم: $f'_+(-2) = f'_-(-2) = +\infty$ و نقطه‌ی $B(-2, 0)$ ، نقطه‌ی عطف قائم تابع می‌شود.

تذکره: این‌گونه تست‌ها را با روش ساده‌تری نیز می‌توان حل کرد که بر اساس تحلیل رفتار نمودار تابع در همسایگی نقطه‌ی مورد نظر است. با این

روش در فصل «کاربرد مشتق» آشنا خواهید شد.

- A ۶۸- گزینهی (۳)** ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به صورت $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}$ بنویسیم. بنابراین تابع در $x = \pm 2$ مشتق‌ناپذیر است.
- B ۶۹- گزینهی (۱)** اولاً در $x = 0$ تابع ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است. ضابطه‌ی دوم در تمام نقاط $\mathbb{R} - \{0\}$ (و در نتیجه برای $x < 0$) مشتق‌پذیر است. ضابطه‌ی اول نیز یک تابع گویا است که در دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. بنابراین فقط یک نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری ($x = 0$) داریم.
- B ۷۰- گزینهی (۲)** ضابطه‌ی دوم در نقطه‌ی $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است که در محدوده‌ی تعریف ضابطه ($|x| > 1$) قرار ندارد. پس فقط باید نقاط مرزی $x = \pm 1$ را بررسی کنیم. در هر دوی این نقاط تابع پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست، زیرا:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & |x| \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2x & |x| < 1 \\ 1 & x > 1 \\ -1 & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) = 1, f'_-(1) = -2, f'_+(-1) = 2, f'_-(-1) = -1$$

- A ۷۱- گزینهی (۲)** ضابطه‌ی اول در دو نقطه‌ی $x = \pm 1$ مشتق‌ناپذیر است که هر دو در محدوده‌ی $|x| \leq 2$ قرار دارند. همچنین تابع در نقاط مرزی $x = \pm 2$ ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است. مثلاً برای $x = -2$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = |4-1| = 3, \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -8-1 = -9$$

- B ۷۲- گزینهی (۲)** ضابطه‌ی اول در نقطه‌ی $x = -1$ مشتق‌ناپذیر است که در محدوده‌ی $x < 1$ قرار دارد. ضابطه‌ی دوم در نقطه‌ی $x = 1$ مشتق‌ناپذیر است. در این نقطه تابع، ناپیوسته نیز است ($\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$)، پس نقاط مشتق‌ناپذیری تابع عبارت‌اند از $x = \pm 1$.

- B ۷۳- گزینهی (۲)** اولاً در نقطه‌ی $x = 0$ تابع ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است ($\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$). ضابطه‌ی اول (برای

$x > 0$)، در $x = 1$ به علت حضور $x-1$ مشتق‌ناپذیر است که در محدوده‌ی ضابطه قرار دارد. همچنین در ضابطه‌ی دوم به علت حضور $x+1$ ، $x = -1$ ریشه‌ی ساده‌ی عبارت است که ضابطه در آن مشتق‌ناپذیر است. پس روی هم تابع در سه نقطه‌ی $x = 0$ و $x = \pm 1$ مشتق‌پذیر نیست.

- B ۷۴- گزینهی (۲)** چون $x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$ ، پس $x = -1$ ریشه‌ی مضاعف عبارت داخل قدر مطلق است و عبارت دوم تنها در نقطه‌ی $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است. ولی عبارت اول در نقطه‌ی $x = 0$ مشتق‌پذیر است ($x = 0$ ریشه‌ی مکرر x^2 است). پس مجموع دو عبارت در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر و زاویه‌دار است، و نقطه‌ی زاویه‌دار دیگری نداریم.

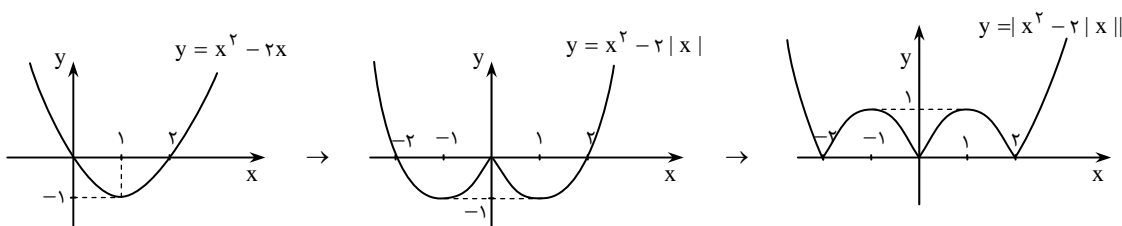
- B ۷۵- گزینهی (۱)** تابع $g(x) = x^3 + x - 1$ چند جمله‌ای درجه‌ی سوم است که چون $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ ، همواره اکیداً صعودی است و تنها یک ریشه‌ی ساده دارد. طبق نکات بخش آموزش $y = |g(x)|$ در این ریشه مشتق‌ناپذیر است.

- C ۷۶- گزینهی (۴)** باید $g(x) = x^3 - 2x^2 + ax$ فقط یک ریشه‌ی ساده داشته باشد، زیرا ریشه‌های ساده‌ی g ، نقاط زاویه‌دار f را مشخص می‌کنند. چون $g(x) = x(x^2 - 2x + a)$ ، پس $x = 0$ ریشه‌ی g است و چون $a \neq 0$ ، $x = 0$ ریشه‌ی ساده‌ی g است (زیرا دیگر ریشه‌ی $x^2 - 2x + a$ نیست). پس باید عبارت $x^2 - 2x + a$ دیگر ریشه‌ی ساده نداشته باشد، یعنی: $\Delta \leq 0$ ، بنابراین: $a \geq 1 \Rightarrow 4 - 4a \leq 0$.

- D ۷۷- گزینهی (۴)** تابع f باید در نقاط $x = \pm 1$ (ریشه‌های عبارت زیر رادیکال) مشتق‌پذیر باشد، پس باید زیر رادیکال با فرجه‌ی ۳، حداقل توان عوامل $(x-1)$ و $(x+1)$ برابر ۳ باشد، یعنی باید عبارت زیر رادیکال بر $(x-1)^3(x+1)^3$ بخش‌پذیر باشد، پس عبارت درجه‌ی چهار $ax^2 + bx + c$ همان $x^4 + ax^2 + bx + c$ یا معادلاً $(x^4 - 2x^2 + 1)$ می‌باشد. ولی دقت کنید که در این صورت داریم:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^3 |x+1|(x+1)^2} = \sqrt[3]{(x-1)^3 (|x+1|)^2} = (x-1)|x+1| \rightarrow x = -1 \text{ مشتق‌ناپذیر}$$

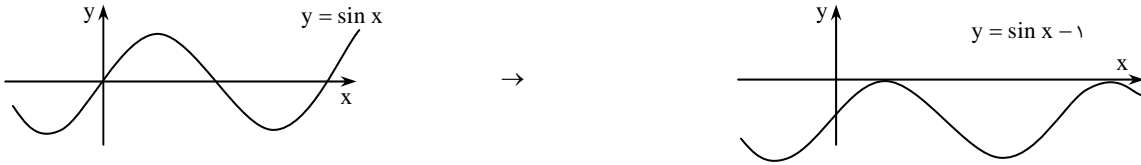
- C ۷۸- گزینهی (۳)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم. از این که $|x|^2 = x^2$ در رسم نمودار کمک گرفته‌ایم. با توجه به نمودار، تابع در ۳ نقطه به طول‌های $x = 0$ و $x = \pm 2$ مشتق‌ناپذیر است.



- B ۷۹- گزینهی (۲)** در تمام نقاطی که f ناپیوسته است، مشتق‌پذیر نیز نیست و در نقاط دیگر f مشتق‌پذیر است. بنابراین باید تعداد نقاطی را بیابیم که $\sqrt{5x} \in \mathbb{Z}$ که $\sqrt{5x} \in \mathbb{Z} \rightarrow \sqrt{5x} \in \{1, 2, \dots, 8\} \rightarrow \sqrt{5x} \in \{1, 2, \dots, 8\} \rightarrow 0 < x < 4 \Rightarrow 0 < \sqrt{5x} < 4\sqrt{5} \xrightarrow[\lambda < 4\sqrt{5} < 9]{\sqrt{5x} \in \mathbb{Z}}$ نقطه ۸

۸۰- گزینه‌ی (۴) راه اول: تابع $y = |\sin x - 1|$ در صورتی در نقطه‌ی $x = x_0$ مشتق ناپذیر است که x_0 ریشه‌ی ساده‌ی $g(x) = \sin x - 1$ باشد. یعنی $g(x_0) = 0$ ولی $g'(x_0) \neq 0$. در حالی که اگر $g(x_0) = 0$ یا معادلاً $\sin x_0 = 1$ ، داریم: $g'(x_0) = \cos x_0 = 0$ ، بنابراین تابع اصلی در همه‌ی نقاط مشتق پذیر است.

راه دوم: با رسم نمودار تابع نیز می‌توانید به همین نتیجه برسید:



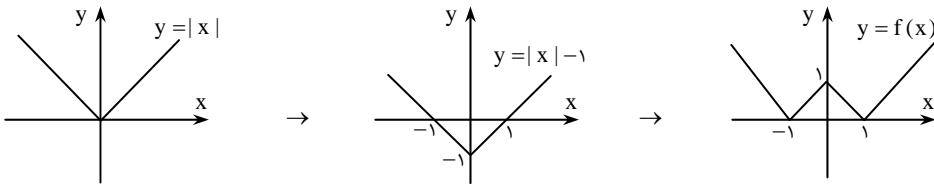
در تابع $y = \sin x - 1$ ، نمودار بر محور x ها در بی‌شمار نقطه مماس است. در تابع $y = |\sin x - 1|$ ، نمودار عیناً نسبت به محور x ها قرینه می‌شود که باز هم در هیچ نقطه‌ای زاویه‌دار یا مشتق ناپذیر نیست.

۸۱- گزینه‌ی (۳) اولاً در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ ، تابع f تعریف نشده است (در واقع به دلیل حضور $\tan x$ و $\cot x$ در ضابطه‌ی آن، در تمام نقاط $x = \frac{k\pi}{4}$ که $k \in \mathbb{Z}$ ، تابع f نامعین است)، پس به این نقطه کاری نداریم. حال اگر قرار دهیم $g(x) = \tan x - \cot x$ ، در نقاطی که $g(x) = 0$ ولی $g'(x) \neq 0$ ، تابع $f(x) = |g(x)|$ مشتق ناپذیر است. داریم:

$$g(x) = 0 \Rightarrow \tan x = \cot x \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan x = \pm 1 \xrightarrow{x \in (0, \pi)} x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}$$

در هر دوی این نقاط داریم: $g'(x) = 1 + \tan^2 x + 1 + \cot^2 x \neq 0$ ، بنابراین در هر دو نقطه f مشتق ناپذیر است.

۸۲- گزینه‌ی (۴) نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



از نمودار تابع مشخص است که سه نقطه‌ی زاویه‌دار (و بنابراین مشتق ناپذیر) وجود دارد.

۸۳- گزینه‌ی (۱) ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به صورت $f(x) = x|x|$ نشان دهیم که به‌وضوح در $x = 0$ پیوسته است. هم‌چنین تابع در این

نقطه مشتق پذیر است، زیرا: $f'_+(\circ) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0$ ، $f'_-(\circ) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = 0$

۸۴- گزینه‌ی (۱) چون حد تابع $y = x^2$ تنها در نقطه‌ی $x = 0$ برابر صفر (مقدار ضابطه‌ی دوم) می‌شود، پس تابع f تنها در نقطه‌ی $x = 0$

پیوسته است (برای توضیح بیش‌تر به تست‌های بخش پیوستگی مراجعه کنید). هم‌چنین با توجه به این که $f(0) = 0$ ، داریم: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

و چون مقدار این حد برای هر دو ضابطه‌ی $y_1 = x^2$ و $y_2 = 0$ برابر صفر می‌شود، داریم: $f'(0) = 0$.

۸۵- گزینه‌ی (۳) چون $f(0) = 0$ داریم:

$$f'_-(\circ) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{-\sqrt{x^2}}$$

دقت کنید که چون $x < 0$ ، به جای x می‌توانیم $-\sqrt{x^2}$ قرار دهیم. حال داریم:

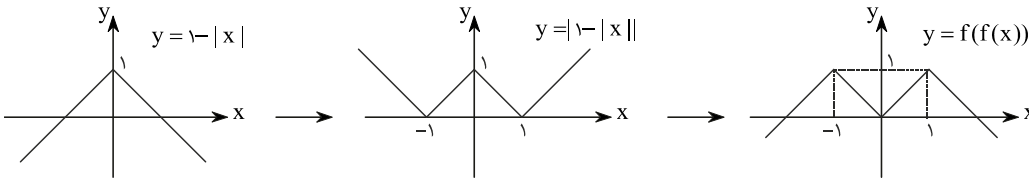
$$f'_-(\circ) = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 + \sqrt{1 - x^2})}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})}} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{1 - 1 + x^2}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})}} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۸۶- گزینه‌ی (۳) با توجه به ضابطه، نقطه‌ی مشتق ناپذیری تابع $x = 0$ است. داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & x \geq 0 \\ \sqrt{1-x} & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} & x > 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} & x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{در } x=0 \text{ پیوسته}} \begin{cases} f'_+(\circ) = \frac{1}{2} \\ f'_-(\circ) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f'_+(\circ) - f'_-(\circ) = 1$$

۸۷- گزینهی (۴) B به دلیل حضور جزء صحیح‌ها در هر نقطه‌ای که تابع ناپیوسته باشد، مشتق ناپذیر است. یعنی باید نقاطی را بیابیم که $x \in Z$ یا $x + \frac{1}{p} \in Z$. در هر یک از این نقاط یکی از دو تابع $[x]$ و $[x + \frac{1}{p}]$ پیوسته و دیگری ناپیوسته است، بنابراین مجموع آن دو نیز ناپیوسته است. در بازه‌ی $(0, 3)$ این نقاط عبارت‌اند از $\{\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}, 2, \frac{4}{3}\}$.

۸۸- گزینهی (۳) B داریم $f(f(x)) = 1 - |1 - |x||$ ، حال نمودار این تابع را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار، $y = f(f(x))$ در سه نقطه‌ی $x = 0$ و $x = \pm 1$ مشتق ناپذیر است.

۸۹- گزینهی (۴) B باید تابع در $x = 1$ پیوسته باشد، بنابراین $a + b = 2$. با این فرض داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^{\frac{-1}{2}} & x \geq 1 \\ ax^{\frac{1}{2}} + bx & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -x^{-\frac{3}{2}} & x > 1 \\ \frac{1}{2}ax + b & x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{در } x=1 \text{ پیوسته}} \begin{cases} f'_+(1) = -1 \\ f'_-(1) = \frac{1}{2}a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -1 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \end{cases}$$

۹۰- گزینهی (۳) C می‌دانیم $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ در $x = 1$ مقداری برابر صفر و برای $x \neq 1$ مقداری مثبت دارد، پس در $x = 1$ می‌نیمب‌نسی دارد و تابع $y = [f(x)]$ در این نقطه پیوسته و مشتق‌پذیر است. پس گزینه‌ی (۳) درست است. به دلیلی مشابه تابع گزینه‌ی (۱) در این نقطه ناپیوسته و مشتق ناپذیر است. هم‌چنین برای تابع گزینه‌ی (۲) داریم:

$$y'|_{x=1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)[\sqrt[3]{x-1}]}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} [\sqrt[3]{x-1}]$$

که حد آخر به دلیل این که در $x = 1$ با می‌نیمب‌نسی $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ سروکار نداریم، وجود ندارد (حدهای چپ و راست متفاوت‌اند). گزینه‌ی (۴) را نیز می‌توانید با استدلالی مشابه رد کنید.

۹۱- گزینهی (۳) B با توجه به آن که $f(1) = 1$ ، حاصل حد مورد نظر همان $f'_-(1)$ است. چون تابع f در $x = 1$ پیوسته است، می‌توانیم $f'_-(1)$ را با مشتق گرفتن از ضابطه‌ی دوم تابع به دست آوریم:

$$f'_-(1) = 4 \times 1 = 4$$

۹۲- گزینهی (۴) C داریم: $f(1) = 3$ و $f(2) = 1$ ، بنابراین اگر قرار دهیم $t = h^2$ ، آن‌گاه $t \rightarrow 0^+$ و داریم:

$$\text{جواب} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(2+t) - f(2)}{t} = f'_+(1) + f'_+(2)$$

$$\left. \begin{aligned} x \rightarrow 1^+ : x-1 > 0, x-2 < 0 \Rightarrow f(x) = x-1-3(x-2) \Rightarrow f'_+(1) = 1-3 = -2 \\ x \rightarrow 2^+ : x-1 > 0, x-2 > 0 \Rightarrow f(x) = x-1+3(x-2) \Rightarrow f'_+(2) = 1+3 = 4 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جواب}} = 2$$

۹۳- گزینهی (۲) B اگر قرار دهیم $t = -2\Delta x$ ، آن‌گاه $t \rightarrow 0^-$ و داریم:

$$\text{جواب} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(1+t) - f(1)}{-\frac{t}{2}} = -2 \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = -2f'_-(1)$$

در همسایگی کوچک چپ $x = 1$ ، علامت $x-1$ منفی و علامت x مثبت است، بنابراین:

$$f(x) = \frac{1-x+1}{x+1} = \frac{-x+2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2} \Rightarrow -2f'_-(1) = -2 \times \frac{-3}{4} = \frac{3}{2}$$

۹۴- گزینهی (۴) C ضابطه‌ی تابع را به صورت $f(x) = g(x)[x]$ می‌نویسیم. برای پیوستگی تابع f در $x = 2$ ، طبق نکته‌ی عامل صفر کننده باید $g(2) = 0$. بنابراین $g(x) = (x-2)h(x)$ و داریم:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)h(x)[x] - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} h(x)[x]$$

برای آن که حد بالا موجود باشد، باید $h(2) = 0$ ، بنابراین $g(x)$ بر $(x-2)^2$ بخش‌پذیر است و در نتیجه $g(2) = g'(2) = 0$. حال داریم:

$$\begin{cases} g(2) = 0 \Rightarrow 8 + 12 + 2a + b = 0 \\ g'(2) = 0 \Rightarrow 12 + 12 + a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -24 \\ b = 28 \end{cases} \Rightarrow a + b = 4$$

مشق توابع

۵-۷: آهنگ تغییرات

با مفهوم «آهنگ تغییر» یا «نرخ رشد یا زوال یک متغیر» در مسائل روزمره آشنا هستید. مثلاً وقتی که داخل یک بالن هوا وارد می‌کنیم، حجم و شعاع بالن با سرعت‌های مختلف (و در عین حال مرتبط با هم) افزوده می‌شوند. این نرخ تغییر حجم یا شعاع، همان آهنگ تغییر آن‌ها است. حجم و شعاع بالن نمونه‌ای از «کمیت‌های وابسته» هستند. معمولاً وقتی در یک آزمایش روزمره با چند کمیت وابسته به یکدیگر مواجه‌ایم، به‌دست آوردن آهنگ تغییر یکی از آن‌ها ساده‌تر از کمیت‌های دیگر است. مثلاً در آزمایش «وارد کردن هوا به بالن»، اندازه‌گیری آهنگ تغییر حجم بالن (که همان حجم هوای ورودی به بالن است) با استفاده از درجه‌های منابع تأمین‌کننده‌ی این هوا بسیار ساده است. ولی اندازه‌گیری شعاع بالن و به‌دست آوردن آهنگ تغییر آن به شیوه‌ی کاملاً تجربی امری مشکل است. حال آن‌که کافی است با یک معادله‌ی ساده، آهنگ تغییر این دو کمیت را به هم مربوط سازید تا از یکی، دیگری را به‌دست آورید.

تعریف: ۱- فرض کنید $y = f(x)$ تابعی از x باشد. «آهنگ متوسط تغییر» تابع y نسبت به x در فاصله‌ی $[a, b]$ ، برابر نسبت تغییرات y به تغییرات x است، یعنی:

$$\bar{y} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

۲- اگر فاصله‌ی $[a, b]$ به یک لحظه محدود شود، «آهنگ آنی» یا «آهنگ لحظه‌ای» تغییر تابع به‌دست می‌آید. به بیان دقیق‌تر:

$$\text{آهنگ آنی تغییر} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

پس همواره منظور از آهنگ آنی یا لحظه‌ای تغییر، همان مقدار مشتق تابع است. مفهوم آهنگ تغییر معمولاً برای توابعی به کار می‌رود که بر حسب زمان بیان شده‌اند.

○ **مسئله‌ی (۱):** تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x$ مفروض است.

(الف) آهنگ متوسط تغییر تابع را بر بازه‌ی $[3, 3/3]$ بیابید.

(ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع را در نقطه‌ی $x = 3$ به‌دست آورید.

حل: الف) آهنگ متوسط تغییر، برابر نسبت تغییرات $f(x)$ به تغییرات x است:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{3}(x_2^2 - x_1^2) - (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2) - 1 \xrightarrow{x_1=3, x_2=3/3} \frac{1}{3}(x_1 + x_2) - 1 = 2/15$$

(ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر همان مشتق تابع است:

$$f'(x) = x - 1 \Rightarrow f'(3) = 2$$

○ **مسئله‌ی (۲):** یک بالن کروی شکل را با هوا پر می‌کنیم.

(الف) آهنگ تغییر (متوسط و لحظه‌ای) حجم بالن نسبت به شعاع آن را به‌دست آورید.

(ب) آهنگ آنی تغییر شعاع نسبت به حجم را به‌دست آورید.

حل: الف) می‌دانیم حجم کره‌ی بالن از معادله‌ی $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ به‌دست می‌آید. V تابعی از R است (و می‌توانیم آن را با $V(R)$ نشان دهیم).

برای آهنگ متوسط تغییر V نسبت به R (از شعاع R_1 تا R_2) داریم:

$$\frac{\Delta V}{\Delta R} = \frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1} = \frac{4}{3}\pi \times \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2 - R_1} = \frac{4}{3}\pi(R_2^2 + R_1R_2 + R_1^2)$$

برای محاسبه‌ی آهنگ آنی تغییر V نسبت به R ، مطابق تعریف، باید مشتق بگیریم:

$$\frac{dV}{dR} = \frac{4}{3}\pi \times 3R^2 = 4\pi R^2$$

ب) این بار R را به عنوان تابعی بر حسب V در نظر گرفته‌ایم و می‌خواهیم $\frac{dR}{dV}$ را به دست آوریم. از دو طرف معادله بر حسب V مشتق می‌گیریم (به صورت ضمنی):

$$1 = \frac{4}{3}\pi \times 3R^2 \frac{dR}{dV} \Rightarrow \frac{dR}{dV} = \frac{1}{4\pi R^2}$$

مسئله‌ی (۳): از یک بالن کروی شکل، هوا با سرعت $\frac{1}{10} \frac{m}{s}$ خارج می‌شود. هنگامی که قطر بالن ۶ متر است، آهنگ تغییر شعاع و مساحت کره را بیابید.

حل: منظور از سرعت خارج شدن هوا، همان سرعت کم شدن حجم کره است. می‌دانیم مفهوم «سرعت»، به معنای آهنگ تغییر حجم کره نسبت به زمان است. یعنی V تابعی بر حسب زمان می‌باشد و داریم: $\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{10} \frac{m^3}{s}$. با این فرض می‌خواهیم $\frac{dR}{dt}$ و $\frac{dS}{dt}$ را بیابیم. با توجه به رابطه‌ی $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ، طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \times 3R^2 \frac{dR}{dt} = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt}$$

حال در حالت $R = 3$ (قطر کره برابر ۶ متر)، داریم:

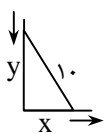
$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{10} \frac{m^3}{s}, \quad R = 3 \Rightarrow -\frac{1}{10} = 4\pi \times 3^2 \frac{dR}{dt} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{-\frac{1}{10}}{36\pi} = -\frac{1}{360\pi}$$

برای محاسبه‌ی آهنگ تغییر مساحت کره، آن را به شعاع ارتباط می‌دهیم:

$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 8\pi R \frac{dR}{dt} \xrightarrow{R=3} \frac{dS}{dt} = 24\pi \times \left(-\frac{1}{360\pi}\right) = -\frac{1}{15}$$

پس شعاع کره با آهنگ تغییر $\frac{1}{360\pi} \frac{m}{s}$ و مساحت کره با آهنگ $\frac{1}{15} \frac{m^2}{s}$ کاهش می‌یابند.

مسئله‌ی (۴): نردبانی به طول ۱۰ متر به یک دیوار عمودی تکیه داده‌ایم و پایه‌ی آن تا دیوار ۶ متر فاصله دارد. پایه‌ی نردبان با سرعت $\frac{1}{5} \frac{m}{s}$ شروع به لغزیدن می‌کند. لبه‌ی بالایی نردبان با چه سرعتی روی دیوار به پایین سر می‌خورد؟



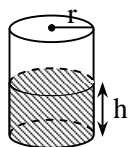
حل: شکل مقابل بیانگر وضعیت شهودی نردبان است. می‌خواهیم وقتی که $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{5} \frac{m}{s}$ و $x = 6m$ ، مقدار $\frac{dy}{dt}$ را بیابیم. مانند مثال قبل x و y را با یک تساوی به هم ربط می‌دهیم و از دو طرف تساوی بر حسب t مشتق می‌گیریم:

$$x^2 + y^2 = 10^2 = 100 \Rightarrow 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{5} \Rightarrow x + y \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}$$

در حالتی که $x = 6m$ ، داریم: $y = 8m$ ، بنابراین: $\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$. علامت منفی نشان دهنده‌ی حرکت لبه‌ی بالایی در خلاف جهت لبه‌ی پایینی است. یعنی یکی در جهت کاهش متغیر و دیگری در جهت افزایش متغیر حرکت می‌کنند. پس در این شرایط لبه‌ی بالایی نردبان با سرعت $\frac{0.75}{1} \frac{m}{s}$ به پایین می‌سرد.

مسئله‌ی (۵): از یک مخزن استوانه‌ای شکل به شعاع قاعده‌ی ۳m، آب با آهنگ $\frac{3}{5} \frac{lit}{s}$ خارج می‌شود. سطح آب در این مخزن با چه سرعتی پایین می‌رود؟

حل: اگر $r = 3m$ شعاع قاعده، h ارتفاع آب در مخزن و V حجم آب باشد، طبق فرض مسأله $\frac{dV}{dt} = -\frac{3}{5} \frac{lit}{s}$ و می‌خواهیم $\frac{dh}{dt}$ را حساب کنیم. داریم:



$$\frac{dV}{dt} = -\frac{3}{5} \frac{lit}{s} = -3 \times \frac{1}{1000} \frac{m^3}{s} = -\frac{3}{1000} \frac{m^3}{s}$$

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow -\frac{3}{1000} = \pi \times 3^2 \times \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-1}{3000\pi} \frac{m}{s}$$

نتیجه:

روش کلی حل مسائل آهنگ تغییرات در کمیت‌های وابسته

- ۱- مسائل را به دقت بخوانید و در صورت امکان شکل برای آن رسم کنید.
- ۲- متغیرها را با نمادهای مناسب نامگذاری کنید و هر کدام را به صورت توابعی از زمان در نظر بگیرید.
- ۳- اطلاعات و فرض‌های مسئله را به صورت ریاضی بیان کنید و خواسته‌ی مسئله را مشخص کنید.
- ۴- معادلاتی بنویسید که توسط آن‌ها متغیرهای مختلف به هم ربط داده شده باشند. اگر می‌توانید با استفاده از هندسه‌ی مسئله (و جای گذاری) تعداد متغیرها را کاهش دهید.
- ۵- از دو طرف معادلات بر حسب زمان مشتق بگیرید و با جای گذاری فرض‌ها، خواسته‌ی سؤال را به دست آورید.

مسئله‌ی (۶): یک مخزن آب به شکل یک مخروط معکوس با شعاع قاعده‌ی ۲ متر و ارتفاع ۴ متر مفروض است. آب با سرعت

$2 \frac{m^3}{min}$ به داخل مخزن وارد می‌شود. در لحظه‌ای که ارتفاع آب ۲ متر است، نرخ رشد ارتفاع را به دست آورید.

حل: ارتفاع آب در مخروط را h و شعاع قاعده‌ی آب را r و حجم آن را V فرض می‌کنیم. می‌دانیم

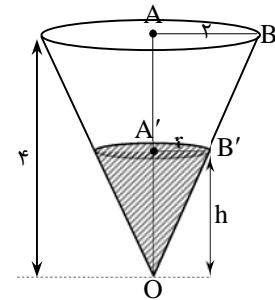
$$\frac{dV}{dt} = 2 \frac{m^3}{min} \text{ و می‌خواهیم در لحظه‌ای که } h = 2 \text{ m, مقدار } \frac{dh}{dt} \text{ را بیابیم.}$$

معادله‌ی مربوط کننده‌ی متغیرها $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ (فرمول حجم مخروط) است (که هر سه متغیر r ، h و V

توابعی بر حسب زمان هستند)، ولی می‌توانیم با استفاده از تشابه دو مثلث OAB و $OA'B'$ متغیرها را کاهش دهیم. داریم:

$$\frac{r}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow r = \frac{h}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12} h^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \times 3h^2 \frac{dh}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 2 \frac{m^3}{min} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{8}{\pi h^2} \xrightarrow{h=2} \frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi} \frac{m}{min}$$



مسئله‌ی (۷): در یک خیابان یک لامپ روی تیر چراغ برقی به ارتفاع ۳ متر قرار گرفته است. کودکی با قد $1/2$ متر با سرعت

$4 \frac{m}{s}$ در خیابان می‌دود و از تیر چراغ برق دور می‌شود.

(الف) در لحظه‌ای که فاصله‌ی شخص با تیر برق ۲ متر است، سرعت افزایش طول سایه‌ی فرد روی زمین چقدر است؟

(ب) اگر α زاویه‌ی رؤیت سایه از ناظری روی لامپ باشد (زاویه‌ی بین خط رؤیت انتهای سایه و راستای عمود)، نرخ رشد α را در این لحظه به دست آورید.

حل: در شکل مقابل A مکان لامپ و B انتهای سایه‌ی فرد است. x فاصله‌ی فرد از تیر چراغ و y طول سایه‌ی فرد است. α نیز زاویه‌ی رؤیت انتهای سایه از لامپ است.

طبق فرض: $\frac{dx}{dt} = 4 \frac{m}{s}$ ، و لحظه‌ای را برای تحلیل در نظر گرفته‌ایم که $x = 2m$.

(الف) در این حالت $\frac{dy}{dt}$ را می‌خواهیم. از تشابه دو مثلث OAB و BDC استفاده می‌کنیم:

$$\frac{y}{x+y} = \frac{1/2}{3} \Rightarrow \frac{y}{x+y} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1/6}{1-1/6} = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{1}{5}x \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{5} \times \frac{dx}{dt} = \frac{1}{5} \times 4 = \frac{4}{5} \frac{m}{s}$$

(ب) در این حالت $\frac{d\alpha}{dt}$ را می‌خواهیم. رابطه‌ی مربوط کننده‌ی α ، x و y به صورت زیر است:

$$\tan \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{x+y}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y$$

حال از دو طرف نسبت به t مشتق بگیرید:

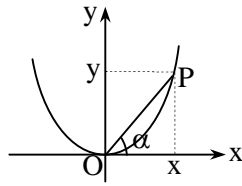
$$(1 + \tan^2 \alpha) \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{3} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{3} \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{3(1 + \tan^2 \alpha)} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \right)$$

حال در حالت $x = 2$ داریم:

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{5}x = \frac{2}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{x=2} = \frac{1}{3(1 + \frac{16}{25})} \left(4 + \frac{4}{5} \right) = \frac{180}{181} \frac{rad}{s}$$

○ **مسئله (۸):** ذره P در ربع اول دستگاه مختصات روی سهمی $y = x^2$ چنان حرکت می کند که تصویر ذره روی محور x ها با سرعت $10 \frac{m}{s}$ پیش می رود. آهنگ تغییر زاویه OP با جهت مثبت محور x ها را بیابید وقتی که $x = 3m$.



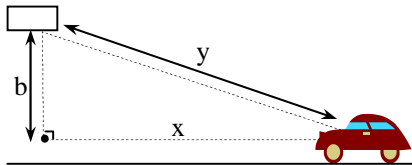
حل: زاویه مورد نظر را α نامیده ایم. به وضوح همواره $y = x^2$ و داریم:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{x^2}{x} = x \Rightarrow (1 + \tan^2 \alpha) \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \frac{dx}{dt}$$

از فرض سؤال می دانیم: $\frac{dx}{dt} = 10 \frac{m}{s}$ ، بنابراین:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{10}{1 + \tan^2 \alpha} \xrightarrow{\tan \alpha = x = 3} \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{x=3} = \frac{10}{10} = 1 \frac{\text{rad}}{s}$$

○ **مسئله (۹):** هواپیمای مراقبت جاده با سرعت $a \frac{m}{s}$ در ارتفاع b متری از سطح زمین، بالای جاده در مسیر مستقیمی حرکت می کند و به بالای اتومبیلی نزدیک می شود. رادار هواپیما مشخص می کند که فاصله ی بین اتومبیل روی جاده و هواپیما c متر است، و این فاصله با آهنگ $k \frac{m}{s}$ در حال کاهش می باشد. سرعت اتومبیل در جاده را بیابید.



حل: فاصله ی اتومبیل و هواپیما را y می نامیم و فاصله ی اتومبیل تا تصویر قائم هواپیما را x،

واضح است که $y^2 = b^2 + x^2$. از فرض سؤال می دانیم: $\frac{dy}{dt} = k \frac{m}{s}$

اگر سرعت هواپیما V_1 و سرعت اتومبیل V_2 باشد، داریم: $V_1 + V_2 = \frac{dx}{dt}$. (دقت کنید که چون هر دو متحرک اند، فاصله ی x از هردوی آن ها

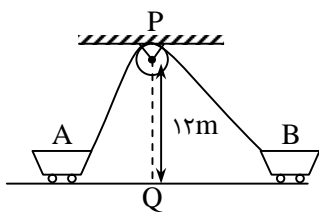
متأثر است، و نرخ تغییرات x برابر با مجموع نرخ تغییرات اتومبیل و هواپیما می باشد). چون $V_1 = a$ ، پس: $V_2 = \frac{dx}{dt} - a$ و داریم:

$$y^2 = b^2 + x^2 \Rightarrow 2y \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = k \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{ky}{x}$$

در لحظه ی مورد نظر داریم $y = c$ ، بنابراین: $x = \sqrt{c^2 - b^2}$ و در نتیجه:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ky}{x} = \frac{kc}{\sqrt{c^2 - b^2}} \Rightarrow V_2 = \frac{dx}{dt} - a = \frac{kc - a\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}$$



○ **مسئله (۱۰):** واگن های A و B با طنابی به طول ۳۳m که حول قرقره ی P به راحتی حرکت می کند، به هم متصل شده اند. ارتفاع P از سطح زمین ۱۲ متر است. واگن A با سرعت $2 \frac{m}{s}$ از نقطه ی Q دور می شود. در لحظه ای که فاصله ی A از Q، Q ، ۵ متر است، واگن B با چه سرعتی به Q نزدیک می شود؟

حل: شکل روبه رو را که صورت ساده شده ی شکل اصلی است، در نظر بگیرید. می دانیم $\frac{dy}{dt} = 2 \frac{m}{s}$ و می خواهیم $\frac{dx}{dt}$ را بیابیم.

لحظه ای را که $y = 5$ است، $t = t_0$ می نامیم. داریم:

$$y = 5 \Rightarrow (33 - a)^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow 33 - a = 13 \Rightarrow a = 20 \Rightarrow x^2 = 20^2 - 12^2 \Rightarrow x = 16$$

حالا آهنگ تغییر متغیرها را حساب می کنیم: $(33 - a)^2 = 12^2 + y^2 \Rightarrow -2(33 - a) \frac{da}{dt} = 2y \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{da}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{2 \times 5 \times 2}{-2 \times 13} = -\frac{10}{13}$

$$a^2 = 12^2 + x^2 \Rightarrow 2a \frac{da}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{20}{16} \times \left(-\frac{10}{13}\right) = -\frac{25}{26}$$

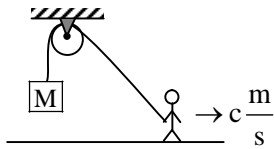
پس واگن دوم با سرعت $\frac{25}{26} \frac{m}{s}$ به نقطه ی Q نزدیک می شود.

تمرین‌های بخش ۵-۷

۱- شعاع دایره‌ای با سرعت $2 \frac{cm}{s}$ افزایش می‌یابد. در لحظه‌ای که شعاع برابر 10 cm است، سرعت افزایش مساحت دایره چقدر است؟

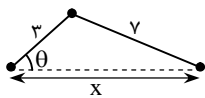
۲- یک ضلع مستطیلی با سرعت $10 \frac{m}{s}$ کاهش و ضلع دیگر با سرعت $20 \frac{m}{s}$ افزایش می‌یابد. سرعت تغییر مساحت و قطر مستطیل را بیابید در لحظه‌ای که ضلع اول برابر 20 cm و ضلع دوم برابر 10 cm است.

۳- مقدار گاز مصرفی یک ماشین گازسوز (G) به مسافت طی شده توسط آن (s) وابسته است. مقدار مسافت طی شده نیز به زمان حرکت ماشین (t) وابسته است. اگر 0.5 گالن گاز برای طی هر کیلومتر مصرف شود و سرعت ماشین $30 \frac{km}{hr}$ باشد، سرعت مصرف گاز چقدر است؟

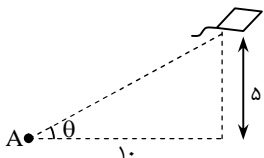


۴- شخص A به وسیله طنابی به طول b وزنه‌ای به جرم M را نگه داشته است. قرقره در فاصله‌ی a متری سطح زمین قرار دارد. اگر شخص با سرعت $c \frac{m}{s}$ در جهت مشخص شده حرکت کند، در زمانی که فاصله‌ی وزنه تا زمین k متر است، سرعت بالا رفتن وزنه‌ی M را تعیین کنید.

۵- در مثلث متساوی‌الساقین ABC می‌دانیم $BC = 10$ و $AB = AC$. آهنگ تغییر ارتفاع AH به نسبت زاویه‌ی B را در حالت $AB = 5\sqrt{2}$ بیابید.

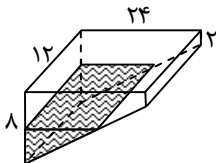


۶- در موتور یک ماشین، میله‌ای به طول ۷ سانتی‌متر به یک دسته به شعاع ۳ سانتی‌متر متصل است. محور دسته در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند (در جهت افزایش زاویه‌ی θ)، در نتیجه پیستون حرکت می‌کند (در جهت کاهش x). اگر سرعت حرکت محور دسته ۲۰۰ دور در دقیقه باشد، در لحظه‌ای که $\theta = \frac{\pi}{3}$ ، سرعت پیستون چقدر است؟

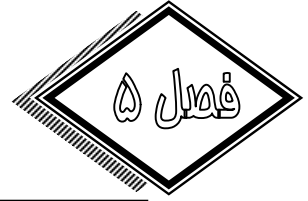


۷- بادبادکی در ارتفاع ۵ متر از سطح زمین توسط ناظر A با زاویه‌ی θ از سطح افق دیده می‌شود. بادبادک با سرعت $2 \frac{m}{s}$ به طور افقی در حال دور شدن از ناظر است. در لحظه‌ای که فاصله‌ی تصویر بادبادک روی زمین از ناظر ۱۰ متر است، سرعت کاهش زاویه‌ی دید ناظر چقدر است؟

۸- نقطه‌ای بر هذلولی $3x^2 - y^2 = 12$ چنان حرکت می‌کند که مختصات y آن با سرعت $4 \frac{m}{s}$ زیاد می‌شود. وقتی که $x = 4 \text{ m}$ است، مختصات x آن با چه آهنگی تغییر می‌کند؟



۹- به استخری مطابق شکل روبرو به عرض ۱۲ متر، طول ۲۴ متر، و عمق متغیر ۲ تا ۸ متر، آب با سرعت $16 \frac{m^3}{s}$ داخل می‌شود. در حالتی که عمق آب در بخش عمیق استخر ۲ متر است، سرعت افزایش ارتفاع آب را به دست آورید.



آهنگ تغییرات

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر کند، برابر آهنگ لحظه‌ای در نقطه‌ی $x = a$ است. a کدام است؟ (سراسری - ۸۳)

- (۱) ۱۱/۷۵ (۲) ۱۲/۲۵ (۳) ۱۳/۵ (۴) ۱۳/۷۵

۲- اگر آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در واحد تغییر x ، در نقطه‌ی $x = 2$ برابر $-\frac{3}{2}$ باشد، آن‌گاه حد عبارت $\frac{f(2) - f(2+h)}{h}$ وقتی $h \rightarrow 0$ برابر کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۳

۳- آهنگ متوسط تغییر تابع $y = x^3 + 2x$ ، وقتی x از ۲ به $\frac{2}{1}$ می‌رسد، کدام است؟

- (۱) ۱۳/۸۲ (۲) ۱۳/۹۱ (۳) ۱۴/۵۲ (۴) ۱۴/۶۱

۴- نسبت تغییرات متوسط $f(x) = \sin x$ به تغییرات متغیر x روی بازه‌ی $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2\pi}$ (۲) $\frac{1}{3\pi}$ (۳) $\frac{2}{3\pi}$ (۴) $\frac{3}{2\pi}$

۵- آهنگ آنی تغییر مساحت یک دایره نسبت به شعاع r در $r_0 = 10$ کدام است؟

- (۱) 10π (۲) 15π (۳) 25π (۴) 20π

۶- اگر A مساحت ناحیه‌ی هاشورزده باشد، $\frac{dA}{dr}$ وقتی $r = 3$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}\pi$ (۲) $\frac{8}{3}\pi$

- (۳) $\frac{20}{3}\pi$ (۴) $\frac{16}{3}\pi$

۷- در یک کره به شعاع R ، آهنگ تغییر حجم کره نسبت به مساحت آن چقدر است؟

- (۱) R (۲) $\frac{R}{2}$ (۳) $2R$ (۴) $\frac{R}{4}$

۸- طول هر ضلع مکعب با سرعت 0.04 متر بر ثانیه افزایش می‌یابد. سرعت افزایش حجم آن در لحظه‌ای که طول ضلع مکعب 15 واحد باشد، چقدر است؟

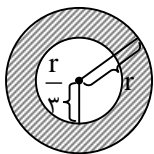
- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۲۷ (۴) ۳۰

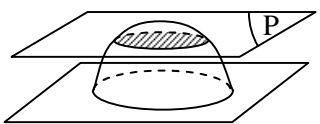
۹- ذره‌ای روی مسیر $xy^2 - x^2 = 1$ حرکت می‌کند. اگر مؤلفه‌ی x آن با سرعت 0.1 متر بر ثانیه افزایش یابد، در نقطه‌ی $(1, 1)$ مؤلفه‌ی y آن با چه سرعتی در ثانیه تغییر می‌کند؟

- (۱) -0.5 (۲) -0.1 (۳) -0.15 (۴) -0.2

۱۰- ذره‌ای بر روی مسیر $y = 2\cos^2 x - 1$ حرکت می‌کند. در نقطه‌ای با کدام طول، سرعت مؤلفه‌ی x آن برابر سرعت مؤلفه‌ی y آن است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{6}$ (۲) $\frac{5\pi}{12}$ (۳) $\frac{7\pi}{12}$ (۴) $\frac{7\pi}{6}$



- ۱۱- در مثلثی به طول قاعده‌ی ۳۲ و ارتفاع ۲۸ واحد، خطی موازی قاعده با سرعت 0.2 واحد بر ثانیه به رأس مقابل آن نزدیک می‌شود و با دو ضلع دیگر مثلث، مثلث‌های متشابه می‌سازد. در لحظه‌ای که فاصله‌ی این خط تا رأس مقابل 7 واحد است، سرعت کاهش این مساحت‌ها کدام است؟
 (۱) 0.7 (۲) 0.8 (۳) 0.14 (۴) 0.16
- ۱۲- نقطه‌ی M بر روی نیم‌دایره‌ای به قطر $AB = 9$ در حرکت است. تصویر نقطه‌ی M بر قطر AB با سرعت ثابت 0.5 واحد در ثانیه از نقطه‌ی A دور می‌شود. در لحظه‌ای که این فاصله برابر $6/25$ واحد است، سرعت افزایش طول وتر AM کدام است؟
 (۱) 0.24 (۲) 0.30 (۳) 0.45 (۴) 0.72
- ۱۳- در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع‌های مثلث با سرعت $4 \frac{m}{s}$ افزایش می‌یابند. در لحظه‌ای که یک ضلع مثلث 2 متر است، سرعت افزایش مساحت کدام است؟
 (۱) $3/5$ (۲) 8 (۳) $4/5$ (۴) 5
- ۱۴- اگر مقدار بار الکتریکی که t ثانیه در یک هادی جریان دارد، $Q = \frac{2}{3}t^3 + t + 4\sqrt{t}$ کولن باشد، شدت جریان پس از 4 ثانیه چقدر است؟
 (۱) 33 (۲) 33 (۳) 34 (۴) 35
- ۱۵- اگر ذره‌ای روی مسیر $\frac{xy^3}{1+y^2} = \frac{8}{5}$ حرکت کند و مؤلفه‌ی x آن با سرعت 6 متر در ثانیه افزایش یابد، آن‌گاه وقتی که ذره از نقطه‌ی $(1, 2)$ می‌گذرد، مؤلفه‌ی y آن با کدام سرعت تغییر می‌کند؟
 (۱) افزایش $\frac{50}{9}$ (۲) کاهش $\frac{50}{9}$ (۳) افزایش $\frac{60}{7}$ (۴) کاهش $\frac{60}{7}$
- ۱۶- مخروط دواری با زاویه‌ی رأس 90° مفروض است. آهنگ تغییر حجم این مخروط نسبت به سطح قاعده‌ی آن، وقتی که شعاع قاعده‌ی آن 6 واحد است، برابر است با:
 (۱) 6 (۲) 3 (۳) 6π (۴) 3π
- ۱۷- در دایره‌ای به شعاع 5 ، طول وتر AB برابر 8 است. اگر AB به موازات خود و با سرعت 0.2 از مرکز دایره دور شود، سرعت کاهش طول وتر AB چقدر است؟
 (۱) 0.3 (۲) 0.15 (۳) 0.25 (۴) 0.5
- ۱۸- در یک نیم‌کره به شعاع 25 واحد، صفحه‌ی P همواره موازی صفحه‌ی قاعده با سرعت 0.4 از آن دور می‌شود. در حالی که فاصله‌ی دو صفحه 12 واحد است، سرعت کاهش مساحت دایره‌ی مقطع صفحه‌ی P و نیم‌کره کدام است؟ (سراسری - ۸۷)
 (۱) 0.48π (۲) 0.72π (۳) 0.84π (۴) 0.96π
- 
- ۱۹- نقطه‌ای بر روی منحنی به معادله‌ی $\sqrt{x} + \sqrt{x+y} = 5$ در حرکت است. در لحظه‌ای که ذره از نقطه‌ی $(4, 5)$ عبور می‌کند، اگر سرعت افزایش x برابر 0.2 واحد در ثانیه باشد، سرعت تغییر y کدام است؟ (سراسری - ۸۹)
 (۱) -0.3 (۲) -0.5 (۳) -0.4 (۴) -0.6



آهنگ تغییرات

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی (۲)

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(25) - f(4)}{25 - 4} = \frac{5 - 2}{21} = \frac{1}{7}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{7} \Rightarrow \sqrt{a} = 3/5 \Rightarrow a = 12/25$$

۲- گزینه‌ی (۳) از فرض داریم: $f'(2) = -\frac{3}{2}$ و چون $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{h}$ پس جواب $\frac{3}{2}$ می‌شود.

۳- گزینه‌ی (۴) طبق تعریف، آهنگ متوسط تغییر تابع برابر است با:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2^2 - x_1^2) + 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = (x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) + 2 \xrightarrow{x_2=2/1, x_1=2} 14/61$$

۴- گزینه‌ی (۱)

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = 3x \Rightarrow A = \frac{\Delta f}{\Delta g} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{6})}{3(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})} = \frac{1}{2\pi}$$

۵- گزینه‌ی (۴)

$$S = \pi r^2 \Rightarrow \frac{dS}{dr} = 2\pi r \Rightarrow \left. \frac{dS}{dr} \right|_{r=1} = 2\pi$$

۶- گزینه‌ی (۴)

$$A = \pi r^2 - \pi \left(\frac{r}{3}\right)^2 = \frac{8\pi r^2}{9} \Rightarrow \frac{dA}{dr} = \frac{16\pi r}{9} \Rightarrow \left. \frac{dA}{dr} \right|_{r=3} = \frac{16\pi}{3}$$

۷- گزینه‌ی (۲)

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \frac{dV}{dR} = 4\pi R^2 \\ S &= 4\pi R^2 \Rightarrow \frac{dS}{dR} = 8\pi R \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dV}{dS} = \frac{4\pi R^2}{8\pi R} = \frac{R}{2}$$

۸- گزینه‌ی (۳) اگر ضلع مکعب را a و حجم آن را V بنامیم، داریم:

$$V = a^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 3a^2 \frac{da}{dt} = 3a^2 \times 0.4 \Rightarrow \left. \frac{dV}{dt} \right|_{a=15} = 3 \times 15^2 \times \frac{4}{10} = 27 \frac{m^3}{s}$$

۹- گزینه‌ی (۱)

$$2y^2 - x^2 = 1 \Rightarrow 4y \frac{dy}{dt} - 2x \frac{dx}{dt} = 0 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{x}{2y} \frac{dx}{dt} \xrightarrow{(x,y)=(1,1)} \left. \frac{dy}{dt} \right|_{(1,1)} = \frac{1}{2} \times 0.1 = 0.05$$

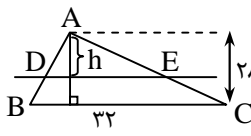
۱۰- گزینه‌ی (۳)

$$y = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 4 \cos x \times (-\sin x) \times \frac{dx}{dt} = -2 \sin 2x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow -2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2n\pi - \frac{\pi}{6} \text{ یا } 2x = 2n\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = n\pi - \frac{\pi}{12} \text{ یا } x = n\pi + \frac{7\pi}{12}$$

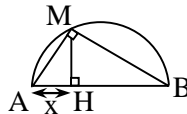
که $n \in Z$ ، و واضح است که از بین گزینه‌ها، گزینه‌ی (۳) در این شرایط صدق می‌کند.

۱۱- گزینهی (۴) مطابق شکل فاصله‌ی خط تا رأس مقابل را h می‌نامیم. اگر مساحت ADE را با S نشان دهیم، $\frac{dS}{dt}$ را می‌خواهیم. داریم: (مساحت ABC را با S' نشان داده‌ایم و k نسبت تشابه است.)



$$\begin{aligned} \triangle ADE \sim \triangle ABC &\Rightarrow \frac{S}{S'} = k^2 = \left(\frac{h}{AH}\right)^2 \\ \Rightarrow S &= \frac{S'}{AH^2} \times h^2 = \frac{32}{24 \times 28} h^2 = \frac{4}{7} h^2 \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{8}{7} h \frac{dh}{dt} \\ \frac{dh}{dt} &= -0.02 \Rightarrow \frac{dS}{dt} \Big|_{h=7} = \frac{8}{7} \times 7 \times (-0.02) = -0.16 \end{aligned}$$

۱۲- گزینهی (۲) با توجه به آن که مثلث AMB در رأس M قائم‌الزاویه است و MH ارتفاع وارد بر وتر آن می‌باشد، از خواص مثلث قائم‌الزاویه داریم: ($AM = y$)



$$\begin{aligned} y^2 &= x \cdot AB \Rightarrow y^2 = 9x \Rightarrow 2y \frac{dy}{dt} = 9 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{9}{2y} \frac{dx}{dt} \\ x &= 6/25 \Rightarrow y = \sqrt{9 \times 6/25} = 6/5, \quad \frac{dx}{dt} = 0.05 \Rightarrow \frac{dy}{dt} \Big|_{x=6/25} = \frac{9}{2 \times 6/5} \times 0.05 = 0.03 \end{aligned}$$

۱۳- گزینهی (۲) اگر a طول ضلع مثلث باشد، ارتفاع آن برابر است با: $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ و مساحت آن: $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$. بنابراین:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} a \frac{da}{dt}, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{da}{dt} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = a \times \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dS}{dt} \Big|_{a=2} = 2 \times 4 = 8$$

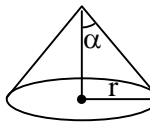
۱۴- گزینهی (۳) شدت جریان یک هادی همان آهنگ تغییر بار الکتریکی در هادی است. پس:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = 2t^2 + 1 + \frac{4}{\sqrt{t}} \Rightarrow I(4) = 32 + 1 + 1 = 34 \text{ A}$$

۱۵- گزینهی (۴)

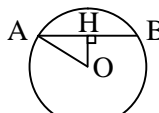
$$\begin{aligned} \delta xy^2 &= 8 + 8y^2 \Rightarrow \delta \left(\frac{dx}{dt} y^2 + x \times 2y \frac{dy}{dt} \right) = 8 \times 2y \frac{dy}{dt} \\ \frac{dx}{dt} &= 6, \quad (x, y) = (1, 2) \Rightarrow \delta(6 \times 8 + 3 \times 4 \frac{dy}{dt}) = 8 \times 4 \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} \Big|_{(1,2)} = -\frac{6}{7} \end{aligned}$$

۱۶- گزینهی (۲) با توجه به آن که زاویه‌ی رأس مخروط 90° است، داریم: $\alpha = 45^\circ$ و اگر ارتفاع مخروط را h بنامیم، نتیجه می‌گیریم $h = r$. اکنون $\frac{dV}{dS}$ را می‌خواهیم. داریم:



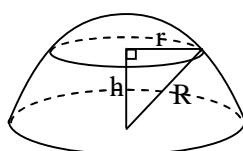
$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = \pi r^2 \\ S &= \pi r^2 \Rightarrow \frac{dS}{dr} = 2\pi r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dV}{dS} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2} \xrightarrow{r=6} \frac{dV}{dS} = 3$$

۱۷- گزینهی (۱) اگر طول وتر AB را x و فاصله‌ی OH را h بنامیم، داریم:



$$\begin{aligned} OA^2 &= OH^2 + AH^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow 0 = 2h \frac{dh}{dt} + 2 \times \frac{x}{2} \times \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{2h}{x} \times \frac{dh}{dt} \\ x &= 8 \Rightarrow h = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \Rightarrow \frac{dx}{dt} \Big|_{x=8} = -\frac{4 \times 3}{8} \times 0.2 = -0.3 \end{aligned}$$

۱۸- گزینهی (۴) با توجه به شکل، طبق فرض سؤال داریم: $\frac{dh}{dt} = 0.04$ و می‌خواهیم در حالتی که $h = 12$ ، $\frac{dS}{dt}$ را بیابیم ($S = \pi r^2$). داریم:



$$\begin{aligned} r^2 + h^2 &= R^2 \Rightarrow S = \pi r^2 = \pi(R^2 - h^2) \Rightarrow \frac{dS}{dt} = -2\pi h \frac{dh}{dt} \\ \frac{dh}{dt} &= 0.04, \quad h = 12 \Rightarrow \frac{dS}{dt} = -2\pi \times 12 \times (0.04) = -0.96\pi \end{aligned}$$

۱۹- گزینهی (۲) می‌خواهیم با فرض $\frac{dx}{dt} = 0.2$ ، مقدار $\frac{dy}{dt} = 0.2$ ، مقدار $\frac{dy}{dt}$ را بیابیم. با مشتق‌گیری از فرض سؤال داریم:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \right) = \frac{x=4, y=5}{\frac{dx}{dt}=0.2} \Rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{10} + \frac{dy}{dt} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}$$

مشتق توابع

۵-۵: مشتق تابع مرکب و تابع وارون

با استفاده از قضیه‌هایی که در بخش قبل خوانده‌ایم، می‌توانیم مشتق برخی از توابع پیچیده را به‌دست آوریم. ولی آن قضایا برای محاسبه‌ی مشتق تابعی چون $y = \sqrt{1+x^2}$ کمکی نمی‌کنند. چون این تابع را می‌توانیم به‌صورت ترکیبی از توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 1+x^2$ بیان کنیم، پس باید قاعده‌ای برای مشتق توابع مرکب پیدا کنیم.

قضیه: قاعده‌ی زنجیره‌ای

فرض کنید f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند و $F = f \circ g$ ترکیب آن دو باشد. در این صورت داریم:

$$F'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

◀ **مثال:** فرض کنید $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $g(x) = x^2 - 4$ و $h(x) = f \circ g(x)$. مشتق‌های دو تابع f و g عبارتند از: $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ و $g'(x) = 2x$.

بنابراین:

$$h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = \frac{-1}{(g(x))^2} \times 2x = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$$

حال با استفاده از قضیه‌ی تقسیم مشتق‌ها، مشتق تابع $h(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ را بیابید و با رابطه‌ی بالا آن را مقایسه کنید.

◀ **تذکره:** قاعده‌ی زنجیره‌ای را با نماد دیگر مشتق، می‌توان به این شکل جالب نیز بیان کرد:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dg} \times \frac{dg}{dx}$$

قاعده‌ی زنجیره‌ای، مهم‌ترین بحث محاسبه‌ی مشتق توابع است، که با حل مثال‌های متنوع می‌توانید بر آن تسلط پیدا کنید. در مثال‌های اولیه سعی کنید توابع را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید و با جای‌گذاری در قاعده، مشتق تابع را حساب کنید. در این صورت مهارت‌تان افزایش می‌یابد و می‌توانید در مثال‌های بعدی مستقیماً عمل کنید.

○ مسأله‌ی (۱): مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = (7x - 3)^{10}$ ب) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$ پ) $f(x) = \left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^9$

ت) $f(x) = \sin x^2$ ث) $f(x) = \cos(\sin x)$ ج) $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$

حل: الف) اگر $g(x) = 7x - 3$ و $h(x) = x^{10}$ داریم: $f = g \circ h$ ، حال با توجه به مشتق‌ها داریم:

$$g'(x) = 10x^9, \quad h'(x) = 7 \Rightarrow f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 10 \cdot (7x - 3)^9 \times 7 = 70 \cdot (7x - 3)^9$$

ب) اگر $g(x) = x^{\frac{-1}{3}}$ و $h(x) = x^2 + x + 1$ داریم: $f = g \circ h$ ، حال با توجه به مشتق‌ها داریم:

$$g'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}, \quad h'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = g'(h(x))h'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-\frac{4}{3}} \times (2x + 1)$$

(پ) اگر $g(x) = x^9$ و $h(x) = \frac{x-2}{2x+1}$ ، داریم: $f = goh$ ، حال با توجه به مشتق‌ها داریم:

$$g'(x) = 9x^8, \quad h'(x) = \frac{1 \times 1 - (-2) \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 9\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^8 \times \frac{5}{(2x+1)^2} = \frac{45(x-2)^8}{(2x+1)^{10}}$$

(ت) اگر $g(x) = \sin x$ و $h(x) = x^2$ ، داریم: $f = goh$ ، حال با توجه به مشتق‌ها داریم:

$$g'(x) = \cos x, \quad h'(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = g'(h(x))h'(x) = \cos x^2 \times 2x$$

(ث) اگر $g(x) = \cos x$ و $h(x) = \sin x$ ، داریم: $f = goh$ ، حال با توجه به مشتق‌ها داریم:

$$g'(x) = -\sin x, \quad h'(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = g'(h(x))h'(x) = -\sin(\sin x) \cos x$$

(ه) اگر $g(x) = \sqrt{x}$ و $h(x) = \sin x^2$ ، داریم: $f = goh$ می‌توانیم بنویسیم:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = g'(h(x))h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin x^2}} \times h'(x)$$

اما تابع $h(x)$ خود یک تابع مرکب است و مشتق آن طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای مانند قسمت (ث) به دست می‌آید:

$$h'(x) = 2x \cos x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cos x^2}{2\sqrt{\sin x^2}} = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$$

در مسأله‌ی (۱)، قسمت‌های (الف) - (ث) نمونه‌هایی از ترکیب دو تابع را حل کردید. ولی در قسمت (ج) تابع نهایی ترکیبی از سه تابع بود. در همه‌ی قسمت‌ها به این نکته دقت کنید که در زنجیره‌ای از توابع، از بیرونی‌ترین تابع شروع می‌کنیم و با مشتق‌گیری مرحله به مرحله به درونی‌ترین تابع می‌رسیم. در مسأله‌ی بعد چند نمونه‌ی پیچیده‌تر را بررسی می‌کنیم.

○ مسأله‌ی (۲): مشتق توابع زیر را به دست آورید.

(پ) $f(x) = \sin(x \cos x)$

(ب) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x^3}}$

(الف) $f(x) = \sin(\cos(\tan x))$

(ث) $f(x) = \sin(\tan(\sqrt{\sin x}))$

(ت) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

حل: الف) اگر قرار دهیم $g(x) = \cos(\tan x)$ ، داریم:

$$g(x) = \cos(\tan x) \Rightarrow g'(x) = -\sin(\tan x) \times (1 + \tan^2 x)$$

$$f(x) = \sin(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \cos(g(x))g'(x) = -\cos(\cos(\tan x)) \times \sin(\tan x) \times (1 + \tan^2 x)$$

(ب) اگر قرار دهیم $g(x) = \cos x^3$ ، داریم:

$$g(x) = \cos x^3 \Rightarrow g'(x) = -\sin x^3 \times (x^3)' = -\sin x^3 \times 3x^2$$

$$f(x) = (g(x))^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}(g(x))^{-\frac{3}{2}} \times g'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}(\cos x^3)^{-\frac{3}{2}} \sin x^3 \times x^2$$

(پ) طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x) = \cos(x \cos x) \times (x \cos x)' = \cos(x \cos x) \times (\cos x + x(-\sin x)) = (\cos x - x \sin x) \cos(x \cos x)$$

(ت) اگر $g(x) = x + \sqrt{x + \sqrt{x}}$ ، داریم:

$$g'(x) = 1 + (\sqrt{x + \sqrt{x}})' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} (x + \sqrt{x})' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \times g'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \times \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$$

ث) طبق قاعدهی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x) = \cos(\tan(\sqrt{\sin x})) \times (\tan(\sqrt{\sin x}))'$$

$$= \cos(\tan(\sqrt{\sin x})) \times (1 + \tan^2(\sqrt{\sin x})) \times (\sqrt{\sin x})' = \cos(\tan(\sqrt{\sin x})) \times (1 + \tan^2(\sqrt{\sin x})) \times \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \times (\cos x)$$



همان‌طور که در دو مسأله‌ی قبل ملاحظه کردید، قاعدهی زنجیره‌ای قاعده‌ای نکته‌دار و پیچیده نیست. نامی هم که بر آن گذاشته‌اند، کاملاً برانده‌ی مفهوم آن است. همواره در امتحانات نهایی و سؤال‌های کنکور، سؤال‌هایی از قاعدهی زنجیره‌ای وجود دارد. مهارت در استفاده این قاعده نیز فقط با تمرین به‌دست می‌آید.

تست (۱): مقدار مشتق $f(x) = \sin^3 \sqrt{x}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi^2}{9}$ چقدر است؟ (سراسری - ۸۳)

(۱) $\frac{9}{16\pi}$ (۲) $\frac{9}{8\pi}$ (۳) $\frac{27}{16\pi}$ (۴) $\frac{27}{8\pi}$

حل: با استفاده از قاعدهی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x) = 3 \sin^2(\sqrt{x}) \cos(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi^2}{9}\right) = 3 \times \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \frac{1}{2 \times \frac{\pi}{3}} = \frac{27}{16\pi}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست (۲): اگر $f(x) = \sin x$ ، مقدار مشتق $\frac{f \circ f}{f^2}$ در $x = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟ (سراسری - ۸۲)

(۱) صفر (۲) $\sin 1$ (۳) $\cos 1$ (۴) ۱

حل: اگر $g_1(x) = f \circ f(x)$ و $g_2(x) = f^2(x)$ ، داریم:

$$\left. \begin{aligned} g_1'(x) &= \cos(\sin x) \cos x \Rightarrow g_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos 1 \times 0 = 0 \\ g_2'(x) &= 2 \sin x \cos x \Rightarrow g_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{f \circ f}{f^2} \right) \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{g_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) g_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - g_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) g_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(g_2\left(\frac{\pi}{2}\right))^2} = 0$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

مسأله‌ی (۳): فرض کنید f بر R مشتق‌پذیر باشد. مشتق هریک از توابع زیر را بر حسب f' بیان کنید.

(الف) $y = f(4x)$ (ب) $y = f(2 - 3f(4 - 5x))$

حل: الف) اگر $g(x) = 4x$ ، داریم:

$$y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \times g'(x) = f'(4x) \times 4 = 4f'(4x)$$

ب) اگر $g(x) = 2 - 3f(4 - 5x)$ ، داریم:

$$g'(x) = -3f'(4 - 5x) \times (4 - 5x)' = -3f'(4 - 5x)(-5) = 15f'(4 - 5x)$$

$$y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = f'(g(x))g'(x) = 15f'(2 - 3f(4 - 5x))f'(4 - 5x)$$

تست (۳): اگر $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ و $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ، آن‌گاه مقدار $g'\left(\frac{3}{4}\right)$ کدام است؟

(۱) $\frac{16}{15}$ (۲) $\frac{15}{16}$ (۳) $-\frac{15}{16}$ (۴) $-\frac{16}{15}$

حل: چون $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ، با استفاده از قاعدهی زنجیره‌ای داریم: $g'\left(\frac{3}{4}\right) = f'\left(\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right)^2$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{5} \Rightarrow g'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{-16}{9} = -\frac{16}{15}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

○ **مسئله ۱۴:** اگر مشتق $f(\sin x)$ برابر $\frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}$ باشد، مشتق $f(\tan x)$ را به دست آورید.

حل: اگر $g(x) = f(\sin x)$ ، داریم: $g'(x) = f'(\sin x) \times \cos x$. از طرفی می‌دانیم:

$$g'(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} \xrightarrow{g'(x) = f'(\sin x) \times \cos x} f'(\sin x) = \frac{2 \sin x}{1 + \sin^2 x}$$

اگر قرار دهیم $t = \sin x$ ، ضابطه‌ی تابع f' را به دست می‌آوریم:

$$t = \sin x \Rightarrow f'(t) = \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

حالا اگر قرار دهیم $h(x) = f(\tan x)$ ، داریم:

$$h'(x) = f'(\tan x)(1 + \tan^2 x) = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} (1 + \tan^2 x) = 2 \tan x$$

تست ۱۴: مقدار مشتق تابع $f(x) = (x^{100} + x^{50} + 50x^2 + 50x + 1)^{10}$ در $x = 0$ چقدر است؟

(۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۴۰۰ (۴) ۵۰۰

حل: اگر عبارت داخل پرانتز را $g(x)$ بنامیم، داریم: $f(x) = (g(x))^{10}$ ، بنابراین:

$$f'(x) = 10(g(x))^9 g'(x) \xrightarrow{x=0} f'(0) = 10(g(0))^9 g'(0)$$

داریم: $g(0) = 1$. همچنین اگر از $g(x)$ مشتق بگیریم، یک چندجمله‌ای دیگر حاصل می‌شود که عدد ثابت آن برابر ۵۰ است و بقیه‌ی جملات

$$g'(0) = 50 \Rightarrow f'(0) = 10 \times 1 \times 50 = 500$$

مضربی از توان‌های x هستند. پس:

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.



در مثال‌ها و تست‌های قبل مفهوم قاعده‌ی زنجیره‌ای و چگونگی استفاده از آن را آموخته‌ایم. اما بسیاری از مواقع قاعده‌ی زنجیره‌ای را باید با قضایای دیگر مخلوط کنید و حتی گاه دست به ابتکارهایی بزنید تا بتوانید مشتق تابع را از روش‌های کوتاه‌تر پیدا کنید. در مسأله‌ی بعد چند نمونه از این مسائل را بررسی می‌کنیم.

○ **مسئله ۵:** مشتق توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^2} \quad (\text{ت}) \quad f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \quad (\text{پ}) \quad f(x) = \frac{2 \sin x + 3}{3 \sin x + 2} \quad (\text{ب}) \quad f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}} \quad (\text{الف})$$

حل: الف) اگر $g(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$ و $h(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$ ، داریم: $g(x) = h(x^3)$. تابع h تابعی هموگرافیک است، پس:

$$h'(x) = \frac{1 \times (-1) - 1 \times 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(x) = h'(x^3) \times 3x^2 = \frac{-6x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

$$f(x) = (g(x))^4 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}(g(x))^{-3} \times g'(x) = \frac{-3}{4} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1} \right)^{-3} \times \frac{x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

ب) مانند قسمت (الف) عمل کنید. اگر $g(x) = \frac{2x + 3}{3x + 2}$ ، $g(x)$ یک تابع هموگرافیک است و داریم:

$$g'(x) = \frac{2 \times 2 - 3 \times 3}{(3x + 2)^2} = -\frac{5}{(3x + 2)^2} \xrightarrow{f(x) = g(\sin x)} f'(x) = g'(\sin x) \cos x = \frac{-5 \cos x}{(3 \sin x + 2)^2}$$

پ) اگر نخست کسر ضابطه‌ی تابع را گویا کنید، راه کوتاه‌تر می‌شود:

$$f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \times \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = x + \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \times 2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

(ت) با توجه به آن که $(1+x)^2 - (1-x)^2 = 4x$ ، داریم:

$$f(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right)$$

با توجه به این که مشتق $g(x) = x^{-2}$ برابر است با $g'(x) = -2x^{-3}$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{-2}{(x-1)^3} - \frac{-2}{(x+1)^3} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x+1)^3} \right) = -\frac{1}{2} \times \frac{2(3x^2+1)}{(x-1)^3(x+1)^3} = \frac{-3x^2-1}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

○ **مسئله (۶):** اگر $f(x) = (1+x)(1+2x)\dots(1+nx)$ مقدار $f'(0)$ را بیابید. ($n \in \mathbb{N}$)

حل: ضابطه‌ی f پس از ضرب کردن عبارات به صورت یک چندجمله‌ای درمی‌آید، که درجه‌ی آن برابر n است (چرا؟)، یعنی:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} \Rightarrow f'(0) = a_1$$

واضح است که:

پس برای حل مسئله باید ضریب x را در عبارت $f(x)$ بیابیم. برای ایجاد هر جمله‌ی شامل x ، باید از یک پرانتز، جمله‌ی شامل x در عددهای ۱ از پرانتزهای دیگر ضرب شود. بنابراین جملات شامل x عبارتند از: x ، $2x$ ، ... و nx که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$x + 2x + \dots + nx = x(1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{2}x \Rightarrow a_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

برای درک بهتر، استدلال بالا را خودتان برای $n = 3$ تکرار کنید.

○ **مسئله (۷):** اگر $f(x) = \sqrt{4x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}$ و $g(x) = \sqrt{4x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 1}$ ، آن‌گاه ثابت کنید: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g'(x)}{f'(x)}$

حل: باید ثابت کنیم $ff' = gg'$. عبارت ff' شما را یاد مشتق چه تابعی می‌اندازد؟ اگر تابع $y = f^2(x)$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$y' = 2f(x)f'(x)$$

$$\left. \begin{aligned} f^2(x) &= 4x^2 + \sqrt{x^2 + 1} \\ g^2(x) &= 4x^2 + 4 + \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f^2(x) - g^2(x) = -4 \Rightarrow f_1(x) - g_1(x) = -4 \Rightarrow f_1'(x) - g_1'(x) = 0 \Rightarrow f_1'(x) = g_1'(x)$$

◇ عامل صفرکننده

عامل صفرکننده، یکی از نکات مهم در محاسبه‌ی مشتق توابع در نقاطی خاص است که مخصوصاً در کنکورهای سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. به مسأله‌ی بعد توجه کنید:

○ **مسئله (۸):** الف) اگر $f(x) = \frac{(x-2)\sqrt[3]{21x-10}}{(x+1)^3}$ مقدار $f'(2)$ را بیابید.

ب) اگر $f(x) = \sin x \cos x$ مقدار $f'(\pi)$ را بیابید.

حل: الف) محاسبه‌ی مشتق $f(x)$ در نقطه‌ی $x = 2$ از راه تعریف آن، بسیار ساده‌تر از محاسبه‌ی تابع مشتق f است. داریم:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{(x-2)\sqrt[3]{21x-10}}{(x+1)^3} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{21x-10}}{(x+1)^3} = \frac{2}{27}$$

ب) چون $\sin \pi = 0$ ، پس $f(\pi) = 0$. اگر بخواهیم از تعریف مشتق $f(x)$ استفاده کنیم، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$f'(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x \cos x - 0}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \times \lim_{x \rightarrow \pi} \cos x$$

چون $\sin \pi = 0$ ، مقدار حد اول همان مشتق $\sin x$ در نقطه‌ی $x = \pi$ است، زیرا:

$$\frac{d}{dx}(\sin x)|_{x=\pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x - \sin \pi}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \cos \pi = -1$$

بنابراین: $f'(\pi) = (-1) \times \lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = (-1) \times (-1) = 1$



در مسأله‌ی (۸)، در هر دو قسمت مشتق تابع را در نقطه‌ای می‌خواستیم به‌دست آوریم که آن نقطه ریشه‌ی یکی از اجزای تابع بود، یعنی تابع از ضرب چند تابع دیگر تشکیل می‌شد که یکی از آن‌ها به ازای آن نقطه صفر می‌شد. به چنین عاملی اصطلاحاً «عامل صفرکننده» می‌گویند.

نکته:

عامل صفرکننده

فرض کنید می‌خواهیم مشتق $f(x) = g(x)h(x)$ را در نقطه‌ی $x = a$ بیابیم و می‌دانیم $x = a$ ریشه‌ی $g(x)$ است. در این صورت اگر g در $x = a$ مشتق‌پذیر و h در این نقطه پیوسته باشد، داریم:

$$f'(a) = g'(a)h(a)$$

به بیان دیگر: برای محاسبه‌ی مشتق تابع در نقطه‌ای که ریشه‌ی عامل صفرکننده‌ی آن است، کافی است تنها از همان عامل صفرکننده مشتق بگیریم.

◀ **تذکره:** در حالت خاص، اگر $f(x) = (x - a)h(x)$ ، با شرط پیوستگی h در $x = a$ ، داریم:

$$f'(a) = h(a)$$

اثبات: با توجه به این که $x = a$ ریشه‌ی g است، داریم:

$$g(a) = 0 \Rightarrow f(a) = g(a)h(a) = 0$$

حال با استفاده از تعریف مشتق، مقدار $f'(a)$ را می‌یابیم:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 0}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) = g(x)h(x)}{x - a} \rightarrow f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)h(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x - a} \times \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

$$\left. \begin{aligned} g(a) = 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a) \\ h &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x) = h(a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(a) = g'(a)h(a)$$

○ **مسأله‌ی (۹):** مشتق هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بیابید.

(ب) $f(x) = \sin(\pi x) |x - 10|$ در $x = 10$

(الف) $f(x) = \sin(\pi x) \cos^{-1}(\frac{\pi}{4}x)$ در $x = 1$

(پ) $f(x) = x[x]$ در $x = 0$

حل: الف) $x = 1$ مقدار $\sin(\pi x)$ را صفر می‌کند. پس تنها کافی است از $\sin(\pi x)$ مشتق بگیریم:

$$\frac{d}{dx}(\sin \pi x) = \cos(\pi x) \times \pi \Rightarrow f'(1) = \pi \times \cos(\pi) \times \cos^{-1}(\frac{\pi}{4}) = \pi \times (-1) \times (\frac{1}{\sqrt{2}})^{-1} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

ب) هر دو تابع $\sin(\pi x)$ و $|x - 10|$ را صفر می‌کند. ولی $|x - 10|$ در $x = 10$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟)، و عامل صفرکننده همان $\sin \pi x$ است. پس:

$$f'(10) = \pi \times \cos(10\pi) \times |10 - 10| = 0$$

پ) عامل صفرکننده x است، ولی چون $y = [x]$ در $x = 0$ پیوسته نیست، نمی‌توانیم از نکته‌ی ذکر شده استفاده کنیم. در واقع این تابع در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x[x] - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x[x] - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$$

تست (۵): مشتق تابع $y = \sin 2x \tan x + \frac{3x}{x^2 - 1}$ در $x = 0$ کدام است؟ (آزاد - ۸۳)

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) -۳

حل: در هر دو عبارت $\sin 2x \tan x$ و $\frac{3x}{x^2 - 1}$ می‌توانیم از عامل صفرکننده استفاده کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f(x) = \tan x \sin 2x &\Rightarrow f'(0) = (1 + \tan^2 0) \sin 0 = 0 \\ g(x) = x \times \frac{3}{x^2 - 1} &\Rightarrow g'(0) = \frac{3}{0 - 1} = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y'|_{x=0} = f'(0) + g'(0) = -3$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.



مشتق در توابع چند ضابطه‌ای

در بخش (۳-۵) مثال‌هایی مقدماتی از توابع چندضابطه‌ای حل کردیم و مشتق‌پذیری آن‌ها به ویژه در نقاط مرزی را بررسی کردیم. اکنون با توجه به مطالبی که آموخته‌ایم، می‌توانیم چنین مسائلی را بهتر بررسی کنیم.

◀ **مثال:** فرض کنید مشتق تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 2x-1 & x < 1 \end{cases}$ را می‌خواهیم به دست آوریم. به جز نقطه‌ی احتمالی $x=1$ تابع در بقیه‌ی نقاط مشتق‌پذیر است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$$

می‌بینید که شرط ضابطه‌ی اول، یعنی $x \geq 1$ ، به $x > 1$ تغییر کرده است. برای یافتن دقیق‌تر مشتق باید نقطه‌ی $x=1$ را نیز بررسی کنیم. می‌توانیم از تعریف مشتق، دو حد $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1}$ و $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1-1}{x-1}$ را تشکیل دهیم. ولی راه بهتر استفاده از همان ضابطه‌ی $f'(x)$ است. در واقع چون تابع f در $x=1$ پیوسته است (چرا؟)، می‌توانیم مقادیر $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ را از همان دو ضابطه‌ی f' به دست آوریم، یعنی:

$$f'_+(1) = 2 \times 1 = 2 \quad \text{و} \quad f'_-(1) = 2 \quad \text{پس} \quad f'(1) \text{ وجود دارد و می‌توانیم ضابطه‌ی } f'(x) \text{ را به شکل دقیق‌تر بنویسیم.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 2 & x \leq 1 \end{cases}$$

نکته:

اگر یک تابع چندضابطه‌ای در نقطه‌ی مرزی $x=a$ (نقطه‌ی مرزی بین دو ضابطه) پیوسته باشد، برای محاسبه‌ی مقدار مشتق چپ و راست آن در نقطه‌ی $x=a$ می‌توانیم از مشتق‌های دو ضابطه استفاده کنیم.

○ مسأله‌ی (۱۰): مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در R مشتق‌پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x < 0 \\ 2\sin x + 3\cos x & x \geq 0 \end{cases}$$

حل: ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم. هر دو ضابطه به تنهایی در R پیوسته‌اند، پس تنها باید نقطه‌ی مرزی $x=0$ را بررسی کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow a \times 0 + b = 2\sin 0 + 3\cos 0 \Rightarrow b = 3$$

حال مشتق تابع را به دست می‌آوریم. به جز نقطه‌ی احتمالی $x=0$ ، در نقاط دیگر تابع مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} a & x < 0 \\ 2\cos x - 3\sin x & x > 0 \end{cases}$$

برای مشتق‌پذیری تابع در R ، باید $f'_+(0) = f'_-(0)$ ، چون f در $x=0$ پیوسته است، پس می‌توانیم طبق نکته‌ی قبل از ضابطه‌ها استفاده کنیم:

$$f'_+(0) = 2\cos 0 - 3\sin 0 = 2, \quad f'_-(0) = a \xrightarrow{f'_+(0)=f'_-(0)} a = 2$$

○ مسأله‌ی (۱۱): آیا تابع $f(x) = \begin{cases} 2\sin x - 1 & x > 0 \\ 2x - 3 & x \leq 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر است؟

حل: خیر! بعضی از دانش‌آموزان به اشتباه به این صورت مسأله را حل می‌کنند. ابتدا از دو ضابطه مشتق می‌گیرند:

$$f'(x) = \begin{cases} 2\cos x & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

سپس با استفاده از ضابطه‌ها نتیجه می‌گیرند که $f'_+(0) = 2$ ، $f'_-(0) = 2$ و می‌گویند f در $x=0$ مشتق‌پذیر است. در حالی که این تابع در $x=0$ اصلاً پیوسته نیست که مشتق‌پذیر باشد! علت اشتباه این دانش‌آموزان این است که به شرط پیوستگی در نکته‌ی قبل دقت نکرده‌اند.

* **مسئله (۱۲):** اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ، مقادیر $f'(0)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ را به دست آورید.

حل: با توجه به این که ضابطه‌ی اول در تمام نقاط $R - \{0\}$ مشتق پذیر است، از آن مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$$

حد اول برابر صفر است (طبق قضیه‌ی فشردگی)، ولی حد دوم وجود ندارد. پس $f'(x)$ وجود ندارد. اما نتیجه‌ی جالب این است که $f'(0)$ وجود دارد:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

یادداشت: این تابع نمونه‌ای از توابعی است که در R مشتق پذیرند، ولی مشتق آن‌ها در R پیوسته نیست.

تست (۶): تابع f با ضابطه‌ی مقابل به ترتیب در چند نقطه ناپیوسته و در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟ (سراسری - ۸۲)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ x+1 & 0 \leq x < 1 \\ 2x+2 & 1 \leq x < 2 \\ x^2+2 & x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} ۲، ۱ (۱) \\ ۲، ۲ (۲) \\ ۳، ۱ (۳) \\ ۳، ۲ (۴) \end{matrix}$$

حل: برای بررسی پیوستگی باید نقاط مرزی را بررسی کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x+2) = 6 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2+2)$$

پس تابع تنها در نقطه‌ی $x=1$ ناپیوسته است. برای بررسی مشتق ناپذیری، می‌دانیم تابع در $x=1$ مشتق ناپذیر است و علاوه بر آن:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 < x < 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$$

باید تنها نقاط $x=0$ و $x=2$ را بررسی کنیم که با توجه به پیوستگی تابع در این دو نقطه، طبق نکته می‌توانیم از ضابطه‌ها استفاده کنیم:

$$f'_+(0) = 1, \quad f'_-(0) = 0, \quad f'_+(2) = 4, \quad f'_-(2) = 2$$

پس تابع در هر سه نقطه‌ی $x \in \{1, 2, 3\}$ مشتق ناپذیر است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

مشتق در توابع شامل قدرمطلق

معمولاً در توابعی که قدرمطلق دارند، بهتر است ابتدا با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق و تعیین محدوده، قدرمطلق را حذف کنیم، سپس از تابع مشتق بگیریم.

* **مسئله (۱۳):** مشتق تابع $f(x) = (x^2 - 1)^2 |x + 1|$ را به دست آورید.

حل: تابع f را می‌توان به صورت دو ضابطه‌ای بیان کرد:

$$f(x) = (x^2 - 1)^2 |x + 1| = \begin{cases} (x^2 - 1)^2 (x + 1) & x \geq -1 \\ -(x^2 - 1)^2 (x + 1) & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 & x \geq -1 \\ -(x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1) & x < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 5x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 & x > -1 \\ -5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1 & x < -1 \end{cases}$$

تنها باید در نقطه‌ی $x = -1$ جداگانه مشتق را بررسی کنیم که: $f'_+(-1) = f'_-(-1) = 0$

مسئله (۱۵): مشتق تابع $f(x) = [x] \sin^2 \pi x$ را به دست آورید.

حل: در فاصله $n < x < n+1$ ($n \in \mathbb{Z}$) داریم: $[x] = n$ ، بنابراین $f(x) = n \sin^2 \pi x$. یعنی $[x]$ به صورت یک ضریب عددی ثابت در تابع ظاهر می‌شود که عیناً در مشتق آن تکرار می‌شود. داریم:

$$f'(x) = n \times 2 \sin \pi x \cos \pi x \times (\pi) = n\pi \sin 2\pi x \xrightarrow{n=[x]} f'(x) = \pi[x] \sin 2\pi x$$

در نقاط $x = n \in \mathbb{Z}$ ، مقدار $\sin \pi x$ برابر صفر می‌شود، پس تابع پیوسته است (چرا؟)، همچنین برای محاسبه‌ی مشتق راست تابع f در $x = n$ ، باید از $n \sin^2 \pi x$ مشتق بگیریم و برای مشتق چپ آن از $(n-1) \sin^2 \pi x$. که هر دو مشتق برابر صفر می‌شوند، در نتیجه:

$$f'(n) = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

که می‌توان آن را با نتیجه‌ی اول به صورت $f'(x) = \pi[x] \sin 2\pi x$ (برای هر $x \in \mathbb{R}$) ترکیب کرد.

تست (۹): مقدار مشتق تابع $y = x^3 + x[\frac{3}{x} - x]$ در نقطه‌ی $x = 2$ چقدر است؟

$$10 \quad (4) \qquad 13 \quad (3) \qquad 11 \quad (2) \qquad 12 \quad (1)$$

حل: در نقطه‌ی $x = 2$ ، داریم $[\frac{3}{x} - x] = [-\frac{1}{2}] = -1$ ، چون به ازای $x = 2$ عبارت داخل جزء صحیح عددی صحیح نیست، در یک همسایگی

$$y = x^3 - x \Rightarrow y' = 3x^2 - 1 \xrightarrow{x=2} y' = 3 \times 4 - 1 = 11$$

$x = 2$ ، مقدار جزء صحیح برابر -1 است، در نتیجه:

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

مشتق تابع وارون

یکی از نتایجی که از قاعده‌ی زنجیره‌ای می‌توان به دست آورد، درباره‌ی مشتق تابع وارون است. فرض کنید $f(a) = b$ و f تابعی وارون پذیر باشد. از $f(a) = b$ نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(b) = a$. حال برای مشتق گیری از f^{-1} ، از رابطه‌ی $f^{-1}(f(x)) = x$ استفاده می‌کنیم. طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$(f^{-1})'(f(x)) \times f'(x) = (x)' \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \times f'(x) = 1$$

$$\xrightarrow{\substack{x=a \\ f(a)=b}} (f^{-1})'(b) \times f'(a) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

مشتق تابع وارون

قضیه:

اگر تابع f در همسایگی نقطه‌ی $x = a$ وارون پذیر و مشتق پذیر باشد و $f(a) = b$ ، آن گاه با فرض $f'(a) \neq 0$ داریم:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

مسئله (۱۶): در هر حالت، مقدار خواسته شده را به دست آورید.

$$(f^{-1})'(7) = ? , f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & x \geq 1 \\ 2x - 4 & x < 1 \end{cases} \quad (ب) \qquad (f^{-1})'(3) = ? , f(x) = x^3 + 2\sqrt{x} \quad (الف)$$

حل: الف) باید نقطه‌ای را بیابیم که $f(x) = 3$. واضح است که $f(1) = 3$ ، بنابراین طبق قضیه‌ی قبل داریم: $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)}$. از طرفی

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{4} \quad \text{چون } f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ پس } f'(1) = 4, \text{ بنابراین:}$$

ب) باید نقطه‌ای را بیابیم که $f(x) = 7$. داریم:

$$3x - 2 = 7 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{پس } f(3) = 7, \text{ در نتیجه } (f^{-1})'(7) = \frac{1}{f'(3)}. \text{ از طرفی به وضوح } f'(3) = 3, \text{ بنابراین } (f^{-1})'(7) = \frac{1}{3}.$$

مشتق توابع وارون مثلثاتی

با استفاده از قضیه‌ی مشتق تابع وارون می‌توانیم مشتق توابع وارون مثلثاتی را پیدا کنیم. فرض کنید می‌خواهیم $(\sin^{-1})'(a)$ را بیابیم. $x_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ را در نظر می‌گیریم که $\sin x_0 = a$. طبق قضیه داریم:

$$(\sin^{-1})'(a) = \frac{1}{\sin'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0}$$

از طرفی چون $x_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ و $\sin x_0 = a$ ، نتیجه می‌گیریم: $\cos x_0 = \sqrt{1-a^2}$ ، بنابراین:

$$(\sin^{-1})'(a) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

قضیه: مشتق توابع وارون مثلثاتی

$$1- \text{مشتق تابع } y = \sin^{-1} x \text{ برابر است با: } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in (-1, 1)$$

$$2- \text{مشتق تابع } y = \cos^{-1} x \text{ برابر است با: } y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in (-1, 1)$$

$$3- \text{مشتق تابع } y = \tan^{-1} x \text{ برابر است با: } y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$4- \text{مشتق تابع } y = \cot^{-1} x \text{ برابر است با: } y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

رابطه‌ی اول را ثابت کرده‌ایم. اثبات رابطه‌های دیگر را به خودتان واگذار می‌کنیم.

مسئله‌ی (۱۷): با استفاده از مشتق، اتحاد $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ را ثابت کنید.

حل: تابع $f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ را در نظر می‌گیریم. این تابع در فاصله‌ی $[-1, 1]$ پیوسته است. از طرفی در فاصله‌ی $(-1, 1)$ ، با مشتق‌گیری از f داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

می‌دانیم فقط مشتق تابع ثابت برابر صفر است، بنابراین از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم f تابعی ثابت است. حال با توجه به آن که $f(x) = \frac{\pi}{2}$ ، پس مقدار ثابت تابع برابر $\frac{\pi}{2}$ است. به این ترتیب برای هر $-1 < x < 1$ داریم: $f(x) = \frac{\pi}{2}$. برای دو نقطه‌ی مرزی $x = \pm 1$ نیز به راحتی درستی اتحاد اثبات می‌شود.

مسئله‌ی (۱۸): مشتق توابع زیر را به دست آورید.

$$(ب) \quad f(x) = \sin(\tan^{-1}(\tan x))$$

$$(الف) \quad f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

حل: الف) با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \times \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2 + 4x^2} \times \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2+2x^2}{1+2x^2+x^4} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

ب) با استفاده‌ی متوالی از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x) = \cos(\tan^{-1}(\tan x)) \times \frac{1}{1 + \tan^2 x} \times (1 + \tan^2 x) = \cos(\tan^{-1}(\tan x))$$

❖ خواص متقابل f و f'

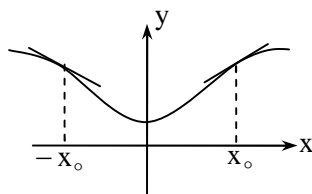
درباره‌ی ویژگی‌های متقابل f و f' احکامی را می‌توان ثابت کرد که در این جا ما به ذکر دو نکته‌ی نسبتاً مهم از آن‌ها بسنده می‌کنیم.

۱- زوج و فرد بودن

نکته: اگر تابع f زوج باشد، آن‌گاه f' فرد است و اگر f فرد باشد، آن‌گاه f' زوج است.

اثبات: اگر f زوج باشد، داریم: $f(-x) = f(x)$. از دو طرف نسبت به x مشتق می‌گیریم. اگر قرار دهیم $g(x) = f(-x)$ ، طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم: $g'(x) = f'(-x) \times (-1) = -f'(-x)$. از طرفی چون $g(x) = f(-x) = f(x)$ ، داریم: $g'(x) = f'(x)$ ، بنابراین: $-f'(-x) = f'(x) \Rightarrow f'(-x) = -f'(x)$

این شرط نشان می‌دهد که تابع f' ، تابعی فرد است. تنها باید ثابت کنیم دامنه‌ی آن نسبت به صفر متقارن است. با توجه به این که نمودار f نسبت به محور عرض‌ها متقارن است (چرا؟)، اگر نقطه‌ای سمت راست محور عرض‌ها قرار داشته باشد و مماسی قابل رسم بر نمودار تابع در آن نقطه موجود باشد، در قرینه‌ی آن نیز چنین مماسی قابل رسم است. پس اگر f در $x = x_0$ مشتق‌پذیر باشد، در $x = -x_0$ نیز مشتق‌پذیر است.



بنابراین دامنه‌ی f' نسبت به صفر متقارن است. برای درک بهتر به شکل روبه‌رو نگاه کنید که نمونه‌ای از یک تابع زوج با نمودار متقارن نسبت به محور y ها است. دو خط که در نقاط x_0 و $-x_0$ بر نمودار مماس شده‌اند، به وضوح شیبی قرینه دارند.

به همین ترتیب اگر f فرد باشد، می‌توان ثابت کرد f' زوج است. زیرا:

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= f(-x) \Rightarrow g'(x) = f'(-x) \times (-1) \\ f(-x) &= -f(x) \Rightarrow g(x) = -f(x) \Rightarrow g'(x) = -f'(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -f'(x) = -f'(-x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

پس تابع f' زوج است. سعی کنید این نتیجه را با نمودار f نیز توجیه کنید.

○ **مسئله‌ی (۱۹):** اگر $f(x) = \frac{x^4 + \cos x - 1386}{x^4 - 2}$ ، مقدار $f'(0)$ را بیابید.

حل: تابع f زوج است و در $x = 0$ مشتق‌پذیر است (چرا؟)، پس مشتق آن فرد است. می‌دانیم اگر تابع فردی در نقطه‌ی $x = 0$ مقدار داشته باشد، حتماً مقدار آن صفر است، پس: $f'(0) = 0$



پرسش: آیا عکس نکته‌ی اخیر نیز، گزاره‌ای درست است؟ یعنی اگر f' فرد باشد، آن‌گاه f زوج است؟ یا اگر f' زوج باشد، لزوماً f فرد است؟

پاسخ: اگر f' زوج باشد، درباره‌ی f نمی‌توان حکمی صادر کرد. مثلاً $f(x) = x^3 + x + 1$ ، نه زوج است و نه فرد، ولی $f'(x) = 3x^2 + 1$ تابعی زوج است.

اما اگر f' فرد باشد، قطعاً f زوج است (البته به شرط آن که f در \mathbb{R} مشتق‌پذیر باشد). زیرا:

$$\left. \begin{aligned} f'(-x) &= -f'(x) \Rightarrow f'(-x) + f'(x) = 0 \\ g(x) &= f(-x) \Rightarrow g'(x) = -f'(-x) \Rightarrow f'(-x) = -g'(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(x) - g'(x) = 0 \Rightarrow (f - g)'(x) = 0$$

اگر مشتق یک تابع مشتق‌پذیر در \mathbb{R} صفر باشد، آن تابع قطعاً یک تابع ثابت است. یعنی عدد ثابت $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد که:

$$f(x) - g(x) = c \Rightarrow f(-x) = f(x) - c$$

رابطه‌ی فوق برای هر $x \in \mathbb{R}$ برقرار است، اگر قرار دهیم $x = 0$ نتیجه می‌گیریم:

$$f(0) = f(0) - c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow \text{زوج } f$$

۲- تناوب

نکته: اگر تابع f متناوب باشد، آن گاه f' نیز متناوب است.

درک شهودی نکته‌ی فوق بسیار واضح است. چون تابع f متناوب است، رفتار آن در فاصله‌های دوره‌ی تناوب آن عیناً تکرار می‌شود، پس از نظر خطوط مماس بر منحنی نیز عیناً رفتاری مشابه خواهد داشت و f' نیز متناوب می‌شود. برای اثبات دقیق‌تر فرض کنید T دوره‌ی تناوب f باشد، آن‌گاه: $f(x+T) = f(x)$ و از دو طرف نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$f'(x+T) \times (x+T)' = f'(x) \Rightarrow f'(x+T) \times 1 = f'(x) \Rightarrow f'(x+T) = f'(x)$$

پس f' نیز متناوب است.



پرسش: آیا عکس این نکته نیز برقرار است؟ یعنی اگر f' متناوب باشد، f نیز متناوب است؟

پاسخ: خیر. مثلاً تابع $f(x) = x + \cos x$ تابعی متناوب نیست، ولی مشتق آن $f'(x) = 1 - \sin x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب 2π است.

کاربردهایی از مشتق

بحث تابع مشتق و خواص آن به پایان رسیده است. در انتهای این بخش چند مسأله‌ی نمونه حل می‌کنیم که شاید مانند مثال‌های قبل در کنکور و آزمون‌های مشابه آن، اهمیت نداشته باشند، ولی درک شما را از مفهوم مشتق کامل‌تر می‌کنند و علاوه بر آن مسأله‌ی جالب و زیبا هستند! ابتدا از کاربرد مشتق در معادلات تابعی می‌گوییم. در ریاضیات عالی، بسیاری از توابع را پیش از آن که ضابطه‌ای صریح برای آن‌ها بیابند، با معادلات تابعی توصیف می‌کنند و بعضی از خواص آن‌ها را کشف می‌کنند. یکی از این خواص، طبیعتاً مشتق تابع است!

* **مسأله‌ی (۲۰): الف)** تابع مشتق‌پذیر f برای تمام مقادیر حقیقی و مثبت x و y در معادله‌ی $f(xy) = f(x) + f(y)$ صدق می‌کند.

$$\text{ثابت کنید: } f'(x) = \frac{1}{x} f'(1)$$

ب) تابع مشتق‌پذیر f برای تمام مقادیر حقیقی x و y در معادله‌ی $f(x+y) = f(x)f(y)$ صدق می‌کند. ثابت کنید: $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$

حل: الف) اگر در معادله‌ی تابعی قرار دهیم $x = y = 1$ ، به دست می‌آوریم:

$$f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$$

اکنون برای به دست آوردن مشتق تابع از تعریف آن استفاده می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

برای آن که حد فوق را بتوانیم ساده کنیم، و به نوعی از معادله‌ی تابعی استفاده کنیم، $x+h$ را به صورت ضرب دو عدد می‌نویسیم که $f(x+h)$ به معادله‌ی تابعی مربوط شود:

$$x+h = x\left(1 + \frac{h}{x}\right) \Rightarrow f(x+h) = f\left(x\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right) = f(x) + f\left(1 + \frac{h}{x}\right) \Rightarrow f(x+h) - f(x) = f\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \xrightarrow{f(1)=0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{h}$$

$$t = \frac{h}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{tx} = \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = \frac{1}{x} f'(1)$$

یادداشت: نمونه‌ای از توابعی که در معادله‌ی قسمت (الف) صدق می‌کنند (که در ریاضیات به آن معادله‌ی دوم کوشی می‌گویند)، تابع $f(x) = \log x$ است.

ب) اگر در معادله‌ی تابعی قرار دهیم $x = y = 0$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$f(0) = (f(0))^2 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ یا } f(0) = 1$$

اگر $f(\circ) = \circ$ ، با قرار دادن $y = \circ$ در معادله‌ی تابع داریم: $f(x) = f(x)f(\circ) = \circ$ ، در نتیجه تابع f ، یک تابع ثابت با مقدار صفر است که در حکم سؤال به وضوح صدق می‌کند. در حالت دیگر، یعنی $f(\circ) = 1$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{f(x)(f(h) - 1)}{h}$$

$$= f(x) \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{f(h) - 1}{h} = f(x) \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{f(h) - f(\circ)}{h} = f(x)f'(\circ)$$

یادداشت: نمونه‌ای از توابعی که در این معادله صدق می‌کنند (که به آن معادله‌ی سوم کوشی می‌گویند)، توابع نمایی هستند، مثلاً $f(x) = 2^x$.

با استفاده از مشتق می‌توان بعضی از اتحادها را نیز ثابت کرد:

○ **مسئله‌ی (۲۱):** با استفاده از اتحاد $\sin(x+a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a$ ، اتحاد مشابه برای $\cos(x+a)$ را ثابت کنید.

حل: از دو طرف اتحاد فوق نسبت به x مشتق می‌گیریم. دقت کنید که a پارامتر است و با آن مثل یک عدد ثابت برخورد می‌کنیم.

$$g(x) = \sin(x+a) \Rightarrow g'(x) = \cos(x+a) \times 1 = \cos(x+a)$$

$$g(x) = \sin x \cos a + \cos x \sin a \Rightarrow g'(x) = \cos x \cos a - \sin x \sin a$$

مقایسه‌ی دو تساوی فوق، اتحاد $\cos(x+a) = \cos x \cos a - \sin x \sin a$ را نتیجه می‌دهد.

○ **مسئله‌ی (۲۲):** ابتدا ثابت کنید: $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ و با استفاده از آن حاصل $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ را

به‌دست آورید.

حل: اثبات اتحاد اول که به راحتی با اتحاد چاق و لاغر انجام می‌شود. حال از دو طرف تساوی نسبت به x مشتق بگیریم.

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \Rightarrow f'(x) = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

$$f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

برابری دو تساوی بالا، پاسخ سؤال را حاصل می‌کند.

تمرین‌های بخش ۱-۶

۱- مشتق هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ ب) $f(x) = (1 + \frac{\sqrt{x-2}}{3})^4$ پ) $f(x) = \frac{1}{2 + \sqrt{3x+4}}$

ت) $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$ ث) $f(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$ ج) $f(x) = \sin^3(x^3 + x^2)$

چ) $f(x) = (2x+1)^5 (x^3 - x + 1)^4$ ح) $f(x) = \sqrt{\cos(\sin^2 x)}$

۲- اگر f بر R مشتق پذیر باشد، مشتق هریک از توابع زیر را بر حسب f' بیان کنید.

الف) $y = f(\delta x - x^2)$ ب) $y = f(2f(3f(x)))$ پ) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$

۳- مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

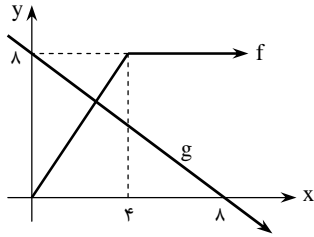
الف) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^4}{1+x^4}}$ ب) $f(x) = \cos^3(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}})$ پ) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$

ت) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^5 \sin(x^2 + 3x - 1)^5$ ث) $f(x) = \sin(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x)$

$$f(x) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \quad (\text{ج}) \quad f(x) = \frac{4x + 6}{\sqrt{x^2 + 3x + 4}} \quad (\text{د}) \quad f(x) = \sin^n x \cos nx \quad (\text{ه})$$

$$f(x) = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x \quad (\text{و}) \quad f(x) = \frac{(2-x^2)(3-x^2)}{(1-x)^2} \quad (\text{ز})$$

$$f(x) = \sin(\cos^2(\tan^3 x)) \quad (\text{ح})$$



۴- در شکل روبه‌رو نمودار توابع f و g رسم شده است. اگر $h(x) = f(g(x))$ و $k(x) = g(f(x))$ حاصل $h'(1)$ و $k'(2)$ را به‌دست آورید.

۵- فرض کنید $\frac{d}{dx}(f(x) - f(2x))|_{x=1} = 5$ و $\frac{d}{dx}(f(x) - f(2x))|_{x=2} = 7$. حاصل $\frac{d}{dx}(f(x) - f(4x))|_{x=1}$ را به‌دست آورید.

۶- در هر حالت مقدار خواسته شده را به‌دست آورید.

$$f'(1) = ? , f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 3}} \quad (\text{الف})$$

$$f'(\frac{\pi}{4}) = ? , f'(\pi) = ? , f(x) = \sin x \cos^4 x \quad (\text{ب})$$

$$f'(-3) = ? , f'(2) = ? , f(x) = (x+3)(x-2)^2 [x-2] \quad (\text{پ})$$

۷- اگر تابع f بر \mathbb{R} مشتق‌پذیر باشد، مقادیر a و b را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 1 \\ \frac{1}{|x|} & x > 1 \end{cases}$$

$$۸- * \quad \text{اگر } f(x) = \begin{cases} x^2 [\frac{1}{x}] & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{، آن‌گاه } f'(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \text{ را به‌دست آورید.}$$

۹- در هر حالت، حاصل حد خواسته شده را به‌دست آورید.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}, f(x) = 2 + \sqrt{24 + 2x - x^2} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h^2) - f(1)}{h^2}, f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq 1 \\ x^2 + 3 & x < 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h^2) - f(1+h^2)}{h^2}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x \geq 1 \\ x^2 - 3 & x < 1 \end{cases} \quad (\text{پ})$$

۱۰- مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

$$f(x) = \tan x |\sin x| \quad (\text{ب}) \quad f(x) = \sin x - |\sin x| \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = |x^2 - 3x| + |x - 2| \quad (\text{ت}) \quad f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| \quad (\text{پ})$$

۱۱- * تابعی متناوب با دوره‌ی اصلی تناوب T مثال بنویسید که دوره‌ی تناوب تابع مشتق آن برابر $\frac{1}{3}T$ باشد.

۱۲- در هر حالت، مقدار خواسته شده را به دست آورید.

(الف) $f(x) = \sqrt{2x} + 3x + \sqrt[3]{x}$ ، $(f^{-1})'(30) = ?$

(ب) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ ، $(f^{-1})'(10) = ?$ ، $(f^{-1})'(-5) = ?$

۱۳- با استفاده از مشتق اتحادهای زیر را ثابت کنید.

(الف) $\cot^{-1} x + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{4}$ (ب) $\sin^{-1} x = \cos^{-1}(\sqrt{1-x^2})$ (برای $0 \leq x \leq 1$)

۱۴- مشتق توابع زیر را به دست آورید.

(الف) $f(x) = \tan^{-1}(\sin^2 x)$ (ب) $f(x) = \cot^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)$

(پ) $f(x) = \frac{\cos^{-1} x}{x}$

* ۱۵- (الف) تابع مشتق پذیر f در معادله‌ی تابعی $f(x+y) = f(x) + f(y)$ صدق می‌کند (به این معادله، معادله‌ی اول کوشی می‌گویند). ثابت کنید:

$$f'(x) = f'(0)$$

(ب) تابع مشتق پذیر f برای همه‌ی مقادیر x و y در معادله‌ی تابعی $f(xy) = f(x)f(y)$ صدق می‌کند (به این معادله، معادله‌ی چهارم کوشی

می‌گویند). ثابت کنید برای $x \neq 0$ داریم: $f'(x) = \frac{f(x)}{x} f'(1)$

* ۱۶- فرض کنید $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$. تابع $g(x) = xf'(x)$ را تشکیل دهید و با استفاده از آن مجموع

$$S = x + 4x^2 + 9x^3 + \dots + n^2 x^n$$

را بیابید.

* ۱۷- اتحاد دوجمله‌ای نیوتن را برای بسط $(1+x)^n$ در نظر بگیرید و با استفاده از آن مجموع زیر را حساب کنید:

$$S = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n}$$

