

مشتق:

تعریف: مشتق تابع پیوسته  $f(x)$  را در نقطه  $x = a$  با  $f'(a)$  نشان می‌دهیم و از یکی از دو رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (1) \text{تعریف اول مشتق:}$$

😊 تست ۱: در تابع به معادله  $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{tg}x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$  حاصل  $f'(0)$  کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۰ (۳)      ۴ (۴) وجود ندارد

پاسخ:

😊 تست ۲: در تابع به معادله  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  حاصل  $f'(0)$  کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۰ (۳)      ۴ (۴) وجود ندارد

پاسخ:

😊 تست ۳: مشتق تابع  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$  در نقطه  $x = 1$  کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

مثال ۴: مشتق تابع  $y = (x^2 - 4) \text{Arcsin} \sqrt{\frac{x+2}{x^2+4}}$  را در  $x = 2$  به دست آورید.

پاسخ:

😊 **تست ۵:** مشتق تابع  $y = (x^2 - 1)(x^2 - 2) \dots (x^2 - 10)$  به ازای  $x = 3$  چقدر است؟

- ۱)  $6 \times 8!$       ۲)  $8!$       ۳)  $-6 \times 8!$       ۴)  $-8!$

پاسخ: گزینه «۳»

عامل صفرشونده  $(x^2 - 9) \Rightarrow y'(x) = 2x \cdot (x^2 - 1)(x^2 - 2) \dots (x^2 - 10)$

$$\Rightarrow y'(3) = 6 \times (8 \times 7 \times \dots \times 1 \times -1) = -6 \times 8!$$

😊 **تست ۶:** اگر  $f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{x}{4}$  مقدار  $f'(\pi)$  چقدر است؟

- ۱)  $\frac{\sqrt{6}}{4}$       ۲)  $-\frac{\sqrt{6}}{4}$       ۳) صفر      ۴)  $\frac{1}{2}$

پاسخ:

😊 **تست ۷:** اگر  $f(x) = \frac{(x+1)h(x)}{(2x+1)h(2x+1)}$  ،  $f'(-1)$  چقدر است؟

- ۱)  $-2$       ۲)  $-1$       ۳)  $1$       ۴)  $2$

پاسخ:

😊 **تست ۸:** مشتق مرتبه دوم تابع  $y = \frac{(x-1)^2 \cdot \text{Arctg}(2x-1)}{\text{Arc sin}(2x-1)}$  در  $x = 1$  کدام است؟

- ۱)  $9$       ۲)  $27$       ۳)  $18$       ۴)  $36$

**نکته:**

**مشتق راست**  $f$  در  $x = a$ : اگر تابع  $f$  در  $x = a$  از راست پیوسته باشد آنگاه مشتق راست تابع  $f$  را در این نقطه با  $f'_+(a)$  نشان می‌دهند و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

**مشتق چپ**  $f$  در  $x = a$ : اگر تابع  $f$  در  $x = a$  از چپ پیوسته باشد آنگاه مشتق چپ تابع  $f$  را در این نقطه با  $f'_-(a)$  نشان می‌دهند و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

😊 تست ۹: مشتق چپ  $f(x) = \sqrt{4+x[x]}$  در مبدأ کدام است؟

$-\frac{1}{2}$  (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$-\frac{1}{4}$  (۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

پاسخ:

**شروط مشتق پذیری تابع در یک نقطه:**

الف)  $f$  در  $x = x_0$  پیوسته باشد.

ب)  $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

**نتیجه:** اگر تابعی پیوسته نباشد آنگاه تابع مشتق پذیر هم نیست.

به همین ترتیب در صورت عدم وجود پیوستگی راست یا چپ قطعاً منحنی  $f$  در این نقطه دارای مشتقات چپ و یا راست نخواهد بود.

📖 **نکته:** در توابع چندضابطه‌ای تابع از هر طرف که پیوسته باشد می‌توان از آن مشتق گرفت.

**مثال ۱۰:** مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$  را در نقطه  $x = 0$  بررسی کنید.

پاسخ:

😊 تست ۱۱: تابع  $f(x) = \begin{cases} x + \tan x & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ x - \tan x & x < 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  مشتق چپ ... و مشتق راست ...

(۴) ندارد - ندارد

(۳) ندارد - دارد

(۲) دارد - ندارد

(۱) دارد - دارد

پاسخ:

😊 تست ۱۲: تابع  $f$  ضابطه  $f(x) = \begin{cases} ax + b & x < -1 \\ x^2 + a & x \geq -1 \end{cases}$  در  $\mathbb{R}$  مشتق پذیر است.  $b$  کدام است؟

-۳ (۴)

-۲ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

پاسخ:

😊 تست ۱۳: هر گاه تابع  $y = |x| + ax$  در مبدأ مشتق پذیر باشد مقدار  $a$  کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۲ (۱)

پاسخ:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

۷) تعریف دوم مشتق:

نکته: مشتق چپ و راست:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال ۱۴: در تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  حاصل حدود زیر را محاسبه کنید:

۱)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

۲)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{h}$

۳)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+7h) - f(1+2h)}{h}$

۴)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+7h) - f(1+2h)}{h^2 + 2h}$

😊 تست ۱۵: اگر  $f(x) = \sqrt{1+x}$  باشد حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3+h)}{h}$  کدام است؟

$-\frac{1}{2}$  (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)



تست ١٠: حاصل حد  $\lim_{k \rightarrow \infty} k \left( \sin\left(x + \frac{2}{k}\right) - \sin\left(x + \frac{3}{k}\right) \right)$  کدام است؟

(١)  $\sin x$       (٢)  $\cos x$       (٣)  $-\sin x$       (٤)  $-\cos x$

پاسخ:

تست ١١: اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2x + \Delta h) - f^2(2x)}{h} = 4x + 6$  باشد حاصل  $f(2) \cdot f'(2)$  کدام است؟

(١) ١      (٢) ٢      (٣) -١      (٤) صفر

پاسخ:

$$H = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \times \Delta \cdot f'(2x + \Delta h) \cdot f(2x + \Delta h)}{1} = 1 \cdot f(2x) \cdot f'(2x) = 4x + 6$$

$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 \cdot f(2) \cdot f'(2) = 1 \cdot 0 \Rightarrow f(2) \cdot f'(2) = 0$$

تست ١٢: حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1 - \sinh)^2 - (x^2 + 1)^2}{h}$  برابر است با:

(١)  $2(x^2 + 1)$       (٢)  $-2(x^2 + 1)$       (٣)  $4x(x^2 + 1)$       (٤)  $-4x(x^2 + 1)$

پاسخ:

$$\sinh \sim h \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1 - h)^2 - (x^2 + 1)^2}{h} \stackrel{H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(x^2 + 1 - h)}{1} = -2(x^2 + 1)$$

مثال ١٣: اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & x > 1 \\ \Delta x & x \leq 1 \end{cases}$  باشد حاصل حدود زیر را بیابید:

١)  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1 + 2h) - f(1 - \Delta h)}{3h}$

٢)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h^2) - f(1 + 3h^2)}{h^2}$

مثال ۲۴: اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x > 1 \\ 5x & x \leq 1 \end{cases}$  باشد حاصل حدود زیر را بیابید:

۱)  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+2h) - f(1-\Delta h)}{3h}$

۲)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h^2) - f(1-\Delta h^2)}{h^2}$

تست ۲۵: اگر  $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x > 2 \\ 5x & x \leq 2 \end{cases}$  باشد حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+3h) - f(2-\Delta h)}{3h}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{34}{3}$  (۲)  $\frac{3}{34}$  (۳)  $-\frac{16}{3}$  (۴) وجود ندارد

پاسخ:

f در  $x = 2$  از راست ناپیوسته است پس مشتق راست ندارد و جواب وجود ندارد  $\rightarrow H = f'_+(2) + \frac{\Delta}{3} f'_-(2)$

مثال ۲۶: اگر  $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 1 \\ 5x & x < 1 \end{cases}$  باشد حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+3h) - f(1-h)}{3h}$  را بیابید.

تست ۲۷: اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ x-1 & x < 1 \end{cases}$  باشد، حاصل حد  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1-h) - f(1)}{\Delta h}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{5}$  (۲)  $-\frac{1}{5}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $-\frac{2}{5}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1-h) - f(1)}{\Delta h} = -\frac{1}{5} f'_+(1) = -\frac{1}{5} (2x) \Big|_{x=1} = -\frac{2}{5}$$

تست ۲۸: در تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x \geq 1 \\ x^2 - 3x + 6 & x < 1 \end{cases}$  حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h^2)}{h^2}$  کدام است؟

(۱) ۵ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) -۲

پاسخ: گزینه «۲»

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h^2)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h \cdot f'(1-h^2)}{2h} = f'_-(1)$$

پیوسته  $x=1 \rightarrow f \rightarrow f'_-(1) = 2x - 3 \Big|_{x=1} = -1$

تست ۲۹: هر گاه  $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & : x \geq 1 \\ \cos \pi x & : x < 1 \end{cases}$  باشد حاصل  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ f\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - f(1) \right]$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲)  $-\pi$  (۳)  $\pi$  (۴) -۱

پاسخ: گزینه «۲» صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ f\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - f(1) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - f(1)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'_+(1)$$

$$x > 1 \rightarrow f(x) = \sin \pi x \rightarrow f'_+(x) = \pi \cos \pi x \rightarrow f'_+(1) = -\pi \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -\pi$$

مثال ۳۰: دو نقطه به طولهای ۱ و  $1+h$  روی منحنی تابع  $y = x^{1.5}$  قرار دارند. شیب خط گذرنده بر دو نقطه وقتی  $h \rightarrow 0$  را بیابید.

پاسخ:



**تابع مشتق:**

تابع  $g$  به معادله  $g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  را تابع مشتق تابع  $f$  گفته که به صورت  $y = f'(x)$  نیز نمایش می‌دهند. بدیهی است دامنه تابع مشتق  $f$  نقاطی است که  $f'(x)$  موجود می‌باشد. پس نقاطی که تابع در آنها مشتق پذیر نیست جزء دامنه تابع مشتق تابع  $f$  و یا به عبارت دیگر دامنه تابع  $f'$  نمی‌باشد.

نکته: علاوه بر  $f'(x)$  از نماد  $\frac{dy}{dx}$  نیز استفاده می‌شود.

😊 تست ۳۱: اگر  $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ ، آن گاه  $D_{f'}$  کدام است؟

- (۱)  $[0, 4]$       (۲)  $(0, 4)$       (۳)  $(-4, 4)$       (۴)  $(0, 2]$

**پاسخ:**

😊 تست ۳۲: در تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  دامنه  $f'(x)$  کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R}$       (۲)  $\mathbb{R} - \{0\}$       (۳)  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$       (۴)  $\emptyset$

**پاسخ:**

قواعد مشتق گیری:

۱- مشتق توابع جبری

ردیف	تابع	مشتق
۱	$y = c$	$y' = 0$
۲	$y = x$	$y' = 1$
۳	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
۴	$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
۵	$y = u \pm v \pm \dots$	$y' = u' \pm v' \pm \dots$ ( u و v ... تابعی از x هستند )
۶	$y = u.v$	$y' = u'.v + v'.u$
۷	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$
۸	$y =  u $	$y' = \frac{u'}{ u } = \frac{u' u }{u}$
۹	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1}.u'$
۱۰	$y = \sqrt[m]{u^n}$	$y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$
۱۱	$y = \frac{k}{f}$	$y' = -\frac{kf'}{f^2}$

۲- مشتق توابع مثلثاتی

ردیف	تابع	مشتق
۱	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
۲	$y = \sin^m u$	$y' = mu' \cos u \sin^{m-1} u$
۳	$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$
۴	$y = \cos^m u$	$y' = -mu' \sin u \cos^{m-1} u$
۵	$y = \tan u$	$y' = u'(1 + \tan^2 u)$
۶	$y = \tan^m u$	$y' = mu'(1 + \tan^2 u) \tan^{m-1} u$
۷	$y = \cot g u$	$y' = -u'(1 + \cot^2 u)$
۸	$y = \cot g^m u$	$y' = -mu'(1 + \cot^2 u) \cot g^{m-1} u$

۳- مشتق توابع معكوس مثلثاتی

ردیف	تابع	مشتق
۱	$y = \text{Arc sin } u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
۲	$y = \text{Arc cos } u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
۳	$y = \text{Arc tan } u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
۴	$y = \text{Arc cot } u$	$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$

مثال ۳۳: مشتق تابع  $y = \frac{2x^5 + 7}{x^5 + 2}$  را در نقطه  $x = 1$  بیابید.

**نگاه:** قبل از مشتق گیری تا جایی که ممکن است تابع را ساده کنید.

😊 **تست ۳۴:** مشتق تابع  $y = \text{Arctg}(\frac{1}{\sqrt{x}}) + \text{Arc Cotg}(\frac{1}{\sqrt{x}})$  برابر است با:

- (۱)  $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$       (۲)  $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}$       (۳)  $\frac{\pi}{2}$       (۴) صفر
- پاسخ:**

😊 **تست ۳۵:** مشتق تابع به معادله  $y = \frac{2x + 3\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 3}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{(2\sqrt{x} + 3)^2}$       (۲)  $\frac{12x}{(12\sqrt{x} + 3)^2}$       (۳)  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$       (۴)  $\frac{x - \sqrt{x}}{(2\sqrt{x} + 3)^2}$
- پاسخ:**

😊 تست ۳۶: اگر  $f(x) = (x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$ ، آن گاه  $f'(0)$  کدام است؟

- ۱۵ (۱)      ۵ (۲)      ۱ (۳)      -۱ (۴)
- پاسخ:

😊 تست ۳۷: مشتق تابع  $y = \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x$  برابر است با:

- ۱)  $\cos 4x$       ۲)  $\sin 4x$       ۳)  $4 \sin 4x$       ۴)  $4 \cos 4x$
- پاسخ:

😊 تست ۳۸: مشتق تابع  $y = \frac{1 - \sin 2x}{\sin x - \cos x}$  عبارت است از:  $(x \neq k\pi + \frac{\pi}{4})$

- ۱)  $\sin x - \cos x$       ۲)  $\sin x + \cos x$       ۳)  $\frac{1}{(\sin x - \cos x)^2}$       ۴)  $1 - \sin 2x$
- پاسخ: گزینه «۲»

$$y = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin x - \cos x} = \sin x - \cos x \Rightarrow y' = \cos x - \sin x$$

😊 تست ۳۹: اگر  $y = \frac{-\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$  حاصل  $y'(\frac{\pi}{8})$  کدام است؟

- ۱ (۱)       $\sqrt{2}$  (۲)       $2\sqrt{2}$  (۳)      صفر (۴)
- پاسخ:

**نکته:** در برخی سوالات ممکن است حاصل یک عبارت دشوار خواسته شود در حالی که خود آن عبارت مشتق عبارت دیگری باشد. به سوالات زیر دقت کنید:

😊 **تست ۴۰:** اگر  $y = \sqrt[5]{x^3 - 2x}$ ، آن گاه حاصل  $\Delta y' y^4$  کدام است؟

(۱)  $-\Delta(3x^2 - 2) \sqrt[5]{(x^3 - 2x)^4}$  (۲)  $2 - 3x^2$

(۳)  $3x^2 - 2$  (۴)  $\Delta(3x^2 - 2) \sqrt[5]{(x^3 - 2x)^4}$

پاسخ:

😊 **تست ۴۱:** اگر  $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$ ،  $g(x) = x + \sqrt{x^2 - x}$ ، آن گاه حاصل  $f'(9) \cdot g(9) + f(9) \cdot g'(9)$  کدام است؟

(۱) ۳ (۲)  $\frac{1}{18}$  (۳) ۱ (۴)  $\frac{1}{3}$

پاسخ:

😊 **تست ۴۲:** اگر  $u$  و  $v$  توابعی از  $x$  باشند و  $\frac{u'}{v'} - \frac{u}{v} = 0$ ، آن گاه:

(۱)  $\frac{u}{v}$  ثابت است (۲)  $u \cdot v$  ثابت است

(۳)  $u + v$  ثابت است (۴)  $u - v$  ثابت است

پاسخ:

😊 **تست ۴۳:** اگر  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x - 3}}$ ،  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{x^2 - x - 3}}}$ ، آن گاه حاصل  $f'(4)g(4) - g'(4)f(4)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{7} - 2}{7}$  (۲)  $\frac{1}{2\sqrt{7}}$  (۳)  $\frac{\sqrt{7}}{2}$  (۴)  $\frac{2 - \sqrt{7}}{7}$

$$k = f'(4)g(4) - g'(4)f(4) = g^2(4) \left(\frac{f}{g}\right)'(4)$$

$$\frac{f}{g}(x) = (\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x - 3}})(\sqrt{x - \sqrt{x^2 - x - 3}}) = \sqrt{x + 3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(4) = \frac{1}{2\sqrt{7}}, g(4) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

مثال ۴۴: اگر  $f(x) = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$  حاصل  $\cos x \cdot f(x) + \sin x \cdot f'(x)$  کدام است؟

تست ۴۵: اگر  $V = \sqrt{x} \cos x$ ,  $u = \sqrt{x} \cdot \sin x$  آن گاه  $V \cdot u' + v v'$  برابر است با:

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  (۳) ۱ (۴)  $\sqrt{x}$

پاسخ:

نکته: مشتق تابع مرکب: اگر  $f$  تابعی مشتق پذیر باشد، داریم:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u)$$

تست ۴۶: اگر مشتق تابع  $f(x)$  برابر با  $\frac{1}{x}$  باشد آن مشتق تابع  $f(ax)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{x}$  (۲)  $\frac{a}{x}$  (۳)  $\frac{1}{ax}$  (۴)  $\frac{a^2}{x}$

پاسخ:

تست ۴۷: اگر مشتق تابع  $f(x)$  برابر با  $\tan x$  باشد آن گاه مشتق  $y=f(ax)$  کدام است؟

- (۱)  $a \tan x$  (۲)  $\tan ax$  (۳)  $\tan x$  (۴)  $a \tan ax$

پاسخ: گزینه ۴ درست است. با توجه به قاعده مشتق تابع مرکب داریم:

$$y' = (f(ax))' = \underbrace{f'(ax)}_{f'(u)} \cdot \underbrace{(ax)'}_u = \tan ax \times a = a \cdot \tan ax$$

تست ۴۸: اگر  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{3}{2}$  آن گاه مشتق  $f(\frac{1}{x})$  در  $x = \frac{1}{3}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{27}{2}$  (۲)  $\frac{27}{2}$  (۳)  $-\frac{1}{6}$  (۴)  $\frac{1}{6}$

پاسخ:

😊 تست ۴۹: اگر  $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^3+1}}$ ، آن گاه مشتق تابع  $f(\sqrt[4]{x})$  برای  $x = 16$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{8}$       (۲)  $\frac{1}{96}$       (۳)  $\frac{1}{24}$       (۴)  $\frac{1}{32}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$y = f(\sqrt[4]{x}) \Rightarrow y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} f'(\sqrt[4]{x}) \Rightarrow y'(16) = \frac{1}{32} f'(2) = \frac{1}{32} \times \frac{2+1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{32}$$

😊 تست ۵۰: اگر مشتق تابع  $f(\sin x)$  برابر با  $\cos^3 x$  باشد آن گاه مشتق تابع  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $1 + x^2$       (۲)  $1 - x^2$       (۳)  $1 - \sin^2 x$       (۴)  $1 + \sin^2 x$

پاسخ:

😊 تست ۵۱: اگر مشتق  $f(\operatorname{tg} x)$  برابر  $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$  باشد، آن گاه مشتق  $f(\operatorname{Sin} x)$  کدام است؟

(۱)  $\cot gx$       (۲)  $\frac{1 + \operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Sin} x}$

(۳)  $(1 + \operatorname{Sin}^2 x) \operatorname{Cot} gx$       (۴)  $\operatorname{tg} x$

پاسخ: گزینه «۱»

$$y = f(\operatorname{tg} x) \Rightarrow y' = (1 + \operatorname{tg}^2 x) f'(\operatorname{tg} x) = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow f'(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y = f(\operatorname{Sin} x) \Rightarrow y' = \operatorname{Cos} x f'(\operatorname{Sin} x) = \operatorname{Cos} x \frac{1}{\operatorname{Sin} x} = \operatorname{Cot} gx$$

😊 تست ۵۲: اگر  $f(5x+1) + g(3x-2) = 2x^2$ ،  $f'(6) = 2$  در این صورت  $g'(1)$  کدام است؟

- (۱) ۳      (۲) ۲      (۳) -۲      (۴) -۱

پاسخ:

😊 تست ۵۳: اگر  $f(x) = \sin(4x - f(x))$  و  $f(0) = 0$ ، آن گاه  $f(x)$  در  $x = 0$  کدام است؟

- (۱) ۲      (۲) -۲      (۳) ۱      (۴) -۱

پاسخ:

تست ۵۴: اگر  $g$  مشتق پذیر باشد و  $g(x) + g(2x) + \dots + g(nx) = nx$  حاصل  $g'(0)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{n+1}$  (۲)  $\frac{2}{n}$  (۳)  $\frac{n}{2}$  (۴)  $\frac{n+1}{2}$

پاسخ:

تست ۵۵: اگر تابع  $f$  مشتق پذیر و همواره  $f(3x-2) + 2f(2-3x) = 9x$ ، آن گاه  $f'(1)$  کدام است؟

- (۱)  $-3$  (۲)  $3$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $6$

پاسخ:

تست ۵۶: اگر  $f > 0$  پیوسته و مشتق پذیر باشد و  $f''(x) + f(x^2) = 6x$  باشد  $f'(1)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $1$

پاسخ:

**مشتق توابع شامل قدر مطلق:**

برای محاسبه مشتق توابع شامل قدر مطلق در همسایگی یک نقطه ابتدا علامت عبارت داخل قدر مطلق را در اطراف نقطه داده شده بررسی کرده و قدر مطلق را از بین می بریم و در آخر مشتق می گیریم.

تست ۵۷: در تابع با ضابطه  $f(x) = |5 - x\sqrt{x}|$  مقدار  $f'(1) + f'(4)$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $3$

پاسخ:



😊 تست ۵۸: مشتق چپ تابع  $f(x) = 2x + |x^2 - 5|$  در  $x = \sqrt{5}$  چقدر است؟

- ۱)  $2\sqrt{5}$       ۲)  $-2\sqrt{5}$       ۳)  $2 - 2\sqrt{5}$       ۴)  $2 + 2\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$x \rightarrow \sqrt{5}^- \Rightarrow x^2 - 5 < 0 \Rightarrow f(x) = 2x + 5 - x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - 2x \Rightarrow f'(\sqrt{5}) = 2 - 2\sqrt{5}$$

😊 تست ۵۹: مشتق تابع  $y = |x| + |x+1| + \dots + |x+99|$  در  $x = -\frac{9}{2}$  چه قدر است؟

- ۱) ۹۰      ۲) -۹۰      ۳) ۱۰۰      ۴) -۱۰۰

پاسخ: گزینه «۱»

$$-\frac{9}{2} \text{ در همسایگی} \Rightarrow y = (-x - x - 1 - x - 2 - x - 3 - x - 4 + x + 5 + x + 6 + \dots + x + 99) \\ = 90x + k \Rightarrow y' = 90$$

😊 تست ۶۰: اگر  $f(x) = |(x-1)(x^2-9)|$  مفروض است حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$  کدام است؟

- ۱) صفر      ۲) ۶      ۳) -۶      ۴) ۱۲

پاسخ:

**مشتق توابع شامل جزء صمیع:**

الف: مشتق تابع به فرم  $y = [f(x)]$  در نقاطی که مشتق پذیر باشد صفر است.

ب: هنگام مشتق گیری از توابعی به فرم کلی  $f(x) = g(x)[h(x)]$  در نقطه‌ای به طول  $a$  (البته به شرطی که  $h(a)$  صحیح نشود) دو راه وجود دارد.

- ۱) از همان ابتدا  $[h(a)]$  را که عدد صحیح می‌باشد، حساب کرده، سپس از تابع ساده شده، مشتق بگیریم و  $a$  را در آن قرار دهیم.
- ۲) با جزء صحیح، مثل یک ضریب عددی برخورد می‌کنیم و از تابع مشتق می‌گیریم، سپس عدد  $a$  را در جواب، قرار می‌دهیم.

مثال ۶۱: مشتق تابع  $y = x^2 [x]$  در  $x = \frac{4}{3}$  را به دست آورید.

پاسخ:

مثال ۶۲: مشتق تابع  $y = x^3 [x^2]$  را در  $x = 1$  به دست آورید.

پاسخ:

😊 تست ۶۳: اگر تابع  $y = (x^3 + ax + b) \cdot [x]$  در  $x = 1$  دارای مشتق باشد  $a+b$  کدام است؟

(۱) -۱      (۲) ۲      (۳) -۳      (۴) ۴

پاسخ:

مشتقات مراتب بالاتر :

😊 تست ۶۴: اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx - c & x > 1 \\ |x-1| + ax^2 & x \leq 1 \end{cases}$  در  $x = 1$  دو بار مشتق پذیر باشد. آن گاه  $a-b+c$  کدام است؟

(۱) ۰      (۲) ۱      (۳) -۱      (۴) ۲

پاسخ:

☺ تست ۶۵: تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x - \sin x & x \geq 0 \\ ax^n & x < 0 \end{cases}$  در نقطه  $x = 0$  مشتق مرتبه سوم دارد.  $a$  کدام است؟

$\frac{1}{3}$  (۴)

$\frac{1}{4}$  (۳)

$\frac{1}{6}$  (۲)

$\frac{1}{8}$  (۱)

☺ تست ۶۶: در تابع  $f(x) = \begin{cases} |x^3| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  مشتق از کدام مرتبه به بعد در نقطه صفر وجود ندارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه «۳»

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x > 0 \\ 3x^2 & x < 0 \end{cases} : f'_+(\cdot) = 0 = f'_-(\cdot) \Rightarrow \text{مشتق اول دارد}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & x > 0 \\ -6x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f''_+(\cdot) = 0 = f''_-(\cdot) \Rightarrow \text{مشتق دوم دارد}$$

$$\Rightarrow f''' = \begin{cases} 6 & x > 0 \\ -6 & x < 0 \end{cases} : f'''_+(\cdot) \neq f'''_-(\cdot) \Rightarrow \text{مشتق سوم ندارد}$$

**نکته:** مشتق n ام چند تابع معروف:

(۱) مشتق n ام تابع  $y = x^n$  برابر  $y^{(n)} = n!$  و مشتق  $(n + 1)$  ام به بعد این تابع برابر صفر است.  
مشتق مرتبه m ام آن از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$y = x^n \Rightarrow y^{(m)} = \frac{n!}{(n - m)!} x^{n - m}$$

(۲) همواره مشتق  $(\sin)$  و  $(\cos)$  خودش می‌شود.

(۶) مشتق n ام تابع  $y = \frac{1}{ax + b}$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot a^n}{(ax + b)^{n+1}}$$

**مثال ۶۷:** مشتق هفدهم و هجدهم تابع f به معادله  $f(x) = (x^3 - x + 1)^3 (x^2 - 6x + 1)^4$  را بیابید.

**تست ۶۸:** اگر  $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$  در این صورت  $f^{(3)}(1)$  چقدر است؟

- ۷۲ (۱)      ۸۴ (۲)      ۶۴ (۳)      ۴ (۴) صفر

**پاسخ:**

حل:  $f(x) = x^4 + (1 + 2 + 3 + 4)x^3 + \dots \Rightarrow f^{(3)}(x) = 4!x + 1 \cdot 3! \Rightarrow f^{(3)}(1) = 24 + 6 = 30$

**تست ۶۹:** اگر  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x & x \geq 0 \\ x^2 + 3x & x < 0 \end{cases}$  آن گاه  $f^{(5)}(0)$  کدام است؟

- ۳! (۱)      ۴! (۲)      ۳ (۳) صفر      (۴) وجود ندارد

**پاسخ:**

**تست ۷۰:** مقدار مشتق مرتبه پانزدهم  $y = \frac{1}{2^{14}} \sin 2x$  در  $x = \frac{\pi}{6}$  چقدر است؟

- ۲ (۱)      -۱ (۲)      ۱ (۳)      ۲ (۴)

**پاسخ:**

مثال ۷۱: مشتق مرتبه بیست و ششم تابع  $y = \sin^2 x$  را بیابید.

😊 تست ۷۱: مشتق بیست و دوم تابع  $f(x) = 3 \cos^2 x + \sin^2 x$  کدام است؟

(۱)  $-2^{23} \sin x \cos x$       (۲)  $2^{22} \cos 2x$       (۳)  $2^{22} - 2^{23} \sin^2 x$       (۴)  $2^{23} \sin^2 x - 2^{22}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$f(x) = 3 \cos^2 x + \sin^2 x = (2 \cos^2 x) + (\cos^2 x + \sin^2 x) = 2 \cos^2 x + 1 = \cos 2x + 2$$

$$\Rightarrow f^{(22)}(x) = -2^{22} \cos 2x = 2^{22} (2 \sin^2 x - 1)$$

😊 تست ۷۲: مشتق پنجاه و هفتم تابع به معادله  $f(x) = \sin x + \cos x$  با کدامیک از مشتقات زیر برابر است؟

(۱) مشتق اول      (۲) مشتق دوم      (۳) مشتق سوم      (۴) مشتق چهارم

پاسخ: گزینه «۱»، مشتقات مضارب ۴ تابع برابر خود تابع می‌باشد، بنابراین:

$$y^{(fn)} = y \Rightarrow y^{(56)} = y \Rightarrow y^{(57)} = y'$$

بنابراین مشتق پنجاه و هفتم تابع برابر مشتق اول تابع است.

مثال ۷۳: مشتق هفتم تابع  $y = \frac{3x+8}{x+1}$  در نقطه  $x = 0$  چقدر است؟

😊 تست ۷۴: اگر تابع  $f(x) = (x^3 + ax^2 + bx + c)[x]$  در  $x = 1$  دارای مشتق اول و دوم باشد، آن گاه  $a + 2b + c$  کدام

است؟

(۱) ۱      (۲) -۱      (۳) ۲      (۴) -۲

پاسخ:

تست ۷۵: اگر  $y = (1 - \cos x)^2$ ،  $y^{(n)}(0)$  موجود باشد بیشترین مقدار  $n$  چقدر است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

**نکته:** مشتق تابع زوج یا فرد:

الف) اگر  $f(x)$  تابعی مشتق پذیر زوج باشد آنگاه مشتق  $f$ ، تابعی فرد خواهد بود.  
 ب) اگر  $f(x)$  تابعی مشتق پذیر فرد باشد؛ آنگاه مشتق  $f$ ، تابعی زوج خواهد بود.

تست ۷۶: هر گاه تابع  $f$  فرد باشد و داشته باشیم:  $f'(3) = -2$  آنگاه  $f'(-3)$  کدام است؟

۱ (۱)      -۲ (۲)      -۱ (۳)      ۲ (۴)

پاسخ:

تست ۷۷: مشتق یازدهم تابع  $y = \frac{1}{1-x^2}$  در  $(x=0)$  کدام است؟

۱ (۱)      ۱۱! (۲)      ۳ صفر (۳)      ۱۰ (۴)      ۱۱!

پاسخ:

$$\begin{cases} y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} \\ x'_y = -\frac{f'_y}{f'_x} \end{cases}$$

**مشتق ضمنی:** هر رابطه بین  $x$  و  $y$  که به صورت  $f(x, y) = 0$  باشد، رابطه ضمنی نامیده می شود. در این روابط  $y'_x$  (مشتق  $y$  نسبت به  $x$ ) و  $x'_y$  (مشتق  $x$  نسبت به  $y$ ) از دو فرمول زیر محاسبه می شوند.

مثال ۷۸: مشتق تابع  $\cos \frac{x}{y} = \sin \frac{x}{y}$  در نقطه  $(\pi, 4)$  را به دست آورید.

پاسخ:

😊 تست ۷۹: در رابطه ضمنی  $\cos(x+y) + (x-y)^3 = \cos xy$  حاصل  $y'(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳)  $\frac{1}{\pi}$  (۴)  $\pi$

پاسخ: گزینه «۱» داریم.  $\cos(x+y) + (x-y)^3 - \cos xy = 0$  بنابراین.

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{-\sin(x+y) + 3(x-y)^2 + y\sin xy}{-\sin(x+y) - 3(x-y)^2 + x\sin xy}$$

$$\Rightarrow y'(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}) = -\frac{-\sin(\cdot) + 3(4\pi) + (-\sqrt{\pi})\sin(-\pi)}{-\sin(\cdot) - 3(4\pi) + (\sqrt{\pi})\sin(-\pi)} = 1$$

😊 تست ۸۰: در رابطه ضمنی  $\sqrt{y} + \sqrt[4]{y} + \sqrt[5]{y} = xy^3$  حاصل  $x'(1)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{156}{27}$  (۲)  $-\frac{27}{156}$  (۳)  $\frac{161}{20}$  (۴)  $-\frac{161}{20}$

پاسخ:

😊 تست ۸۱: در نمودار منحنی  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ ، در کدام نقطه خط مماس بر نمودار منحنی موازی خط  $y = -x$  است؟

- (۱)  $x = 2$  (۲)  $x = \sqrt{2}$  (۳)  $x = 4$  (۴)  $x = 1$

پاسخ:

😊 تست ۸۲: در رابطه ضمنی  $\arcsin \frac{y}{x} = x$ ، حاصل  $y'(\frac{\pi}{2})$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴)  $\pi - 1$

پاسخ:

😊 تست ۸۳: مشتق تابع  $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \dots}}}$  بر حسب  $x$  کدام است؟

$\frac{\cos x}{2y+1}$  (۴)       $\frac{\cos x + y}{2y}$  (۳)       $\frac{\cos x}{2y}$  (۲)       $\frac{\cos x}{2y-1}$  (۱)

پاسخ:

😊 تست ۸۴: مشتق تابع  $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\dots}}}$  چقدر است؟

(۱) صفر      (۲) ۱      (۳)  $\sqrt{x}$       (۴)  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

پاسخ: گزینه «۲».

$$y = \sqrt{xy} \Rightarrow y^2 - xy = 0 \Rightarrow y(y-x) = 0 \Rightarrow y = x \rightarrow y' = 1$$

مثال ۸۵: در تابع  $x^2 + y^2 = 4$  مطلوب است محاسبه  $y''_x$ .

پاسخ:

مشتق تابع معکوس:

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$$

😊 تست ۸۶: شیب خط مماس بر وارون تابع  $y = x^3 + 2x - 1$  در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر تابع وارون کدام است؟

(۱) ۵      (۲)  $\frac{1}{5}$       (۳) ۱۶      (۴)  $\frac{1}{16}$

پاسخ:



☺ تست ۸۷: اگر  $f(x) = x^3 - 3x$ ,  $x > 1$ ، اندازه مشتق تابع  $f^{-1}(x)$  در نقطه تلاقی آن با  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{9}$       (۲)  $\frac{1}{3}$       (۳) ۳      (۴) ۹

پاسخ: **۱**

☺ تست ۸۸: شیب خط مماس بر وارون تابع  $y = \text{Arc sin}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$  در نقطه تقاطع آن با محور عرض‌ها کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$       (۲) ۳      (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (۴)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$(a, 0) \in f^{-1} \Rightarrow (0, a) \in f \Rightarrow \text{Arc sin}\left(\frac{a-1}{a+2}\right) = 0 \Rightarrow a = 1$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\left(\frac{3}{(x+2)^2}\right)_{x=1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2}} = 3$$

☺ تست ۸۹: اگر  $f$  تابعی در  $\mathbb{R}$  مشتق پذیر و معکوس پذیر باشد و  $f'(x) = \sqrt{7 - 2f(x) + f^2(x)}$ ، آنگاه  $(f^{-1})'(x)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{\sqrt{7 - 2x + x^2}}$       (۲)  $\sqrt{7 - 2x + x^2}$       (۳)  $\frac{-2 + 2x}{2\sqrt{7 - 2x + x^2}}$       (۴)  $\frac{\sqrt{7 - 2x + x^2}}{-1 + 2x}$

پاسخ: **۱**

☺ تست ۹۰: تابع معکوس تابع  $y = x^5 + x^3 + 1$  در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

- (۱) صفر      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۳

پاسخ: **۱**

مشتق های خاص:

تیپ ۱:

☺ تست ۹۰: اگر  $y = 2u^2 - u$ ,  $u = \sin 2x$  باشد، آن گاه  $y'_x$  در  $x = \frac{\pi}{6}$  برابر است با:

(۱)  $2\sqrt{3} - 1$       (۲)  $3\sqrt{2} - 1$       (۳)  $3\sqrt{2} + 1$       (۴)  $2\sqrt{3} - 1$

پاسخ:

تیپ ۲:

☺ تست ۹۱: مشتق تابع  $y = x^3 - 2x^2$  نسبت به  $y = x^2 - 1$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}x + 1$       (۲)  $x - 1$       (۳)  $\frac{3}{2}x - 2$       (۴)  $2x$

پاسخ:

☺ تست ۹۲: هر گاه  $f(x) = \sin x - \cos x$  باشد حاصل  $f'_{\sin x}$  کدام است؟

(۱)  $1 + \tan x$       (۲)  $1 + \cot x$       (۳)  $\operatorname{tg} x$       (۴)  $\cot x - 1$

پاسخ:

$$\begin{cases} f(x) = \sin x - \cos x \rightarrow f'(x) = \sin x + \cos x \\ g(x) = \sin x \rightarrow g'(x) = \cos x \end{cases} \Rightarrow f'_{\sin x} = \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} = \tan x + 1$$

تیپ ۳:

☺ تست ۹۳: شیب خط مماس بر تابع  $\begin{cases} x = \sin \theta - \cos \theta \\ y = \tan \theta - \cot \theta \end{cases}$  به ازاء  $\theta = \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt{2}$       (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (۳)  $2\sqrt{2}$       (۴)  $4\sqrt{2}$

پاسخ:

$$\text{مثال ۹۴: در تابع } \begin{cases} x = t^2 - 7 \\ y = t^4 - 1 \end{cases} \text{ مطلوب است محاسبه } y'(2).$$

**پاسخ:** چون  $y'(2)$  خواسته شده، پس  $x = 2$  و از آن جا  $t^2 - 7 = 2$  پس  $t = \pm 3$  حال مشتق تابع را در  $t = \pm 3$  محاسبه می‌کنیم.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4t^3}{2t} = 2t^2 \xrightarrow{t=\pm 3} y'_x(2) = 12$$