



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سرشناسه	: احمدی‌ناو، مازیار، ۱۳۵۶ -
عنوان و نام	: دنباله‌های حسابی / مولف مازیار احمدی‌ناو، رسول فرجی تسوجی.
مشخصات نشر	: رشت: انتشارات رمه، ۱۳۹۵
مشخصات ظاهری	: ۳۹ ص.
شابک	: ۹۷۸-۶۰۰-۶۸۹۲-۲-۶ ریال ۴۵۰۰۰
وضعیت فهرست نویسی	: فیپا
موضوع	: دنباله‌ها (ریاضیات) -- راهنمای آموزشی (متوسطه)
موضوع	: (Sequences (Mathematics) -- Study and teaching (Secondary
موضوع	: دنباله‌ها (ریاضیات) -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (متوسطه)
موضوع	: (Sequences (Mathematics) Examinations, questions, etc. (Secondary
موضوع	: دنباله‌ها (ریاضیات) -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (متوسطه)
موضوع	: (Sequences (Mathematics) --Problems, exercises , etc. (Secondary
شناسه افزوده	: فرجی تسوجی، رسول، ۱۳۶۸ -
رده بندی کنگره	: ۱۳۹۵ ۳د۹ الف / QA۲۹۲
رده بندی دیویی	: ۵۱۵/۲۴
شماره کتابشناسی ملی	: ۴۵۷۵۶۷۳



- عنوان کتاب: دنباله‌های حسابی
- مولفین: مازیار احمدی‌ناو و رسول فرجی تسوجی
- ناشر: انتشارات رمه
- نوبت چاپ: اول - ۱۳۹۵
- حروفچینی و صفحه‌آرایی: هنر و انیشه
- چاپ و صحافی: معراج
- شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه
- قیمت: ۴۵۰۰۰ ریال
- شابک: ۳ - ۲۸ - ۶۸۹۲ - ۶۰۰ - ۹۷۸

---



---

کلیه حقوق برای مؤلف محفوظ است و هرگونه کپی برداری به موجب قانون پیگرد قانونی دارد

تقدیم به:

محضر تمام

معلمان دلسوز و زحمت کشی که در اقصی نقاط

میهن عزیزمان

عمده دار آموزش فرزندان عزیز

ایران زمین

می باشند

احمدی ناو- فرجی

## فهرست مطالب

مقدمه	۵
دنباله مسابى، تعريف و مفاهيم	۶
بررسى صعودى و نزولى بودن دنباله مسابى	۶
درج $m$ واسطه مسابى بين دو عدد $a$ و $b$	۸
نكات و نمونه سوالات كنكورى و تاليفى دنباله مسابى	۶-۳۸

## مقدمه:

رویکرد فعلی نظام آموزشی و نیز سیستم انتخاب دانشجو (کنکور) به گونه ایست که متأسفانه دانش آموزان عزیز کتاب ها و منابع کمتری جهت یادگیری عمیق مفاهیم درسی در اختیار دارند. قالب کتاب های موجود در بازار با رویکردستی و روش های خلاصه نویسی تالیف می شوند و این سبک آموزش حتی در برنامه ی صدا و سیما نیز ترویج داده می شود. از طرف دیگر خلاء وجود کتاب های کم حجم و مجبئی به وضوح در بازار کتاب کشور قابل لمس است. به طوری که اگر دانش آموزی بخواهد در یک بحث خاص مسلط تر شود و درک عمیق تری از مفاهیم داشته باشد، برای دسترسی به یک کتاب خاص در این زمینه با مشکل روبرو می شود. از این جهت کتابی که پیش روی شماست از مجموعه کتاب های آموزشی مجبئی ریاضیات می باشد که در آن سعی شده است بایان مفاهیم بحث دنباله ی حسابی با زبان ساده و رعایت ترتیب مطالب از آسان به سخت و بهره گیری از کتاب درسی و تمرینات آن، تا حد زیادی مشکلات دانش آموزان در این بحث مرتفع گردد.

ارائه نکات کوتاه تستی پس از آموزش مفهومی درس با بهره گیری از تست های کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور و نیز کنکورهای آزمایشی معتبر و طرح سوالات تالیفی از دیگر ویژگی های این کتاب می باشد که امید است دانش آموزان عزیز با مطالعه آن ها بتوانند به تسلط کامل بر این بحث دست یابند. در پایان از دوست عزیز و گرامی ام جناب مهندس رسول فرجی تسوجی که در تالیف این کتاب همواره در کنارم بوده و زحمات فراوانی را متحمل شده اند تشکر می نمایم.

ارادتمند شما

مازیار احمدی ناو

## دنباله حسابی



دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله‌ی قبل از خودش به دست می‌آید، یک **دنباله حسابی** نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت **قدر نسبت** دنباله می‌گویند.



بنابراین مطابق جدول زیر داریم:

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	...	$t_n$
$t_1$	$t_1 + 1d$	$t_1 + 2d$	$t_1 + 3d$	$t_1 + 4d$	...	$t_1 + (n-1)d$

مطابق با جدول بالا، جمله‌ی  $n$ ام یک دنباله حسابی با جمله‌ی اول  $t_1$  و قدر نسبت  $d$  به صورت زیر است:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

در دنباله‌ی حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله‌ی بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی را به دست آورید؟ (**کتاب درسی**)



$z$  و  $y$  و  $x$  و  $17$  و  $13$  و  $9$  و  $5$

پاسخ:

قدر نسبت:  $d = 9 - 5 = 13 - 9 = 17 - 13 = 4$

در نتیجه  $\Rightarrow 5$  و  $9$  و  $13$  و  $17$  و  $21$  و  $25$  و  $29$



باتوجه به رابطه جمله عمومی  $t_n = t_1 + (n - 1)d$  و  $d = 4$  و  $t_1 = 5$  می‌توان نوشت:

$$t_n = 5 + (n - 1) \times 4 \Rightarrow t_n = 4n + 1$$

برای به دست آوردن قدر نسبت کافی است هر جمله‌ی دلخواه را منهای جمله قبلی کنیم:

$$d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = \dots = t_n - t_{n-1}$$



**بررسی صعودی و نزولی بودن دنباله حسابی:**





بررسی صعودی و نزولی بودن دنباله‌ی حسابی، با توجه به مقدار قدر نسبت صورت می‌گیرد.

**الف)** اگر  $d > 0$  باشد، دنباله حسابی **صعودی** است یعنی مقادیر جملات آن رفته رفته اضافه شده و به عبارتی هر جمله از جملات قبلی **بزرگ‌تر** است.

مثلاً:  $d = 2 > 0$       ... و ۱۱ و ۹ و ۷ و ۵ و ۳

**ب)** اگر  $d < 0$  باشد، دنباله‌ی حسابی **نزولی** است. یعنی مقادیر جملات آن رفته رفته کم شده و به عبارتی هر جمله از جملات قبلی **کوچک‌تر** است.

مثلاً:  $d = -3 < 0$       ... و -۵ و -۲ و ۱ و ۴ و ۷ و ۱۰

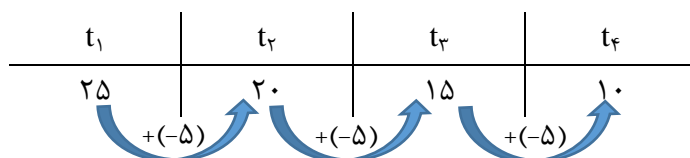
**ج)** اگر  $d = 0$  باشد، دنباله حسابی همان دنباله‌ی **ثابت** خواهد بود. یعنی تمام جملات دنباله باهم برابرند و در این حالت دنباله **هم صعودی و هم نزولی** خواهد بود.

مثلاً:  $d = 0$       ... و ۴ و ۴ و ۴ و ۴



یک دنباله حسابی مثال بزنید که قدر نسبت آن منفی بوده و جمله‌ی چهارم آن ۱۰ باشد؟ (**کتاب درسی**)

پاسخ:



دنباله‌ی حسابی مثال بزنید که تنها ۳ جمله‌ی مثبت را داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشد؟ (**کتاب درسی**)

پاسخ:

$d = -3 \Rightarrow \dots$  و -۷ و -۴ و -۱ و ۲ و ۵ و ۸



در دنباله حسابی زیر جمله شانزدهم را به دست آورید؟ (**کتاب درسی**)

... و ۲۵ و ۱۸ و ۱۱ و ۴



پاسخ:



$$t_1 = 4 \Rightarrow d = 11 - 4 = 7$$

باتوجه به رابطه جمله عمومی  $t_n = t_1 + (n - 1)d$  و  $d = 7$  و  $t_1 = 4$  می توان نوشت:

$$t_{16} = 4 + (16 - 1) \times 7 \Rightarrow t_{16} = 109$$

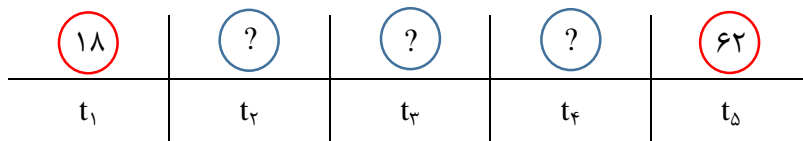


### درج m واسطه حسابی بین دو عدد a و b:

اگر بین دو عدد a و b طوری m عدد قرار دهیم که با دو عدد a و b دنباله‌ی حسابی بسازند، در این حالت بین دو عدد a و b، به تعداد m واسطه حسابی درج کرده‌ایم.



بین دو عدد ۱۸ و ۶۲ سه عدد چنان قرار داده‌ایم که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند. آن اعداد را مشخص کنید؟ (کتاب درسی)

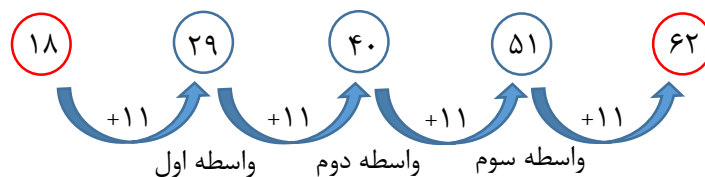


پاسخ:



$$\text{می دانیم: } t_5 = t_1 + (5 - 1)d \Rightarrow 62 = 18 + 4d$$

$$4d = 44 \Rightarrow d = 11$$



اگر بخواهیم بین دو عدد a و b چنان m عدد قرار دهیم که با این دو عدد دنباله حسابی تشکیل دهند، قدر نسبت از رابطه‌ی زیر به دست می آید:



$$d = \frac{b-a}{m+1}$$



در مسائلی به فرم بالا اگر  $t_n$  جمله‌ای بین  $a$  و  $b$  باشد:



$$\text{واسطه‌ی } (n-1)\text{ام} = \text{جمله‌ی } n\text{ام}$$

در یک دنباله‌ی حسابی جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؟ (کتاب درسی)



پاسخ:

$$\begin{aligned} t_3 = 20 &\Rightarrow t_1 + 2d = 20 \\ t_7 = 56 &\Rightarrow t_1 + 6d = 56 \end{aligned}$$



حال با تشکیل دستگاه مقادیر  $t_1$  و  $d$  را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} t_1 + 2d = 20 \\ t_1 + 6d = 56 \end{cases}$$

$$4d = 36 \Rightarrow d = 9 \text{ و } t_1 = 2$$

$$\rightarrow \dots \text{ و } 38 \text{ و } 29 \text{ و } 20 \text{ و } 11 \text{ و } 2$$

در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله‌ی اول ۳ و مجموع سه جمله‌ی بعدی ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید؟ (کتاب درسی)



پاسخ:

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 = 3 &\Rightarrow t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) = 3 \\ t_4 + t_5 + t_6 = 39 &\Rightarrow (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d) = 39 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3t_1 + 3d = 3 \\ 3t_1 + 12d = 39 \end{cases}$$

$$4d = 36 \Rightarrow d = 9 \text{ و } t_1 = -3$$

$$\rightarrow \dots \text{ و } 17 \text{ و } 13 \text{ و } 9 \text{ و } 5 \text{ و } 1 \text{ و } -3$$



واسطه حسابی بین دو عدد  $a$  و  $b$  همان میانگین آن‌ها و برابر  $\frac{a+b}{2}$  است.



واسطه حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟ (کتاب درسی)



پاسخ:

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{20+30}{2} = 25$$



قدیمی ترین کتاب ریاضی جهان "پاپیروس راینند" نام دارد که تاریخ تقریبی آن ۱۶۵۰ قبل از میلاد است. این کتاب یک متن ریاضی است که تا حدودی ماهیت یک کتاب راهنما را دارد و شامل ۸۵ مسئله به خط هیراتی است. احمس<sup>۱</sup> کاتب، آن را از روی یک اثر قدیمی تر نسخه برداری کرده است.



پاپیروس راینند در سال ۱۹۲۷ منتشر شد. این پاپیروس حدود ۵/۵ متر طول و ۳۰ سانتی متر عرض دارد.

### مسئله ای از پاپیروس راینند:

۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد؟ (کتاب درسی)



پاسخ:

فرض کنید سهم ۵ مرد به ترتیب  $t_1$  و  $t_2$  و  $t_3$  و  $t_4$  و  $t_5$  باشد. طبق صورت مسئله می‌توان نوشت:



$$\frac{1}{3}(t_3 + t_4 + t_5) = t_1 + t_2$$

$$\frac{1}{3}(t_1 + 2d + t_1 + 3d + t_1 + 4d) = t_1 + t_1 + d$$

$$\frac{3t_1 + 9d}{3} = 2t_1 + d \Rightarrow \frac{3(t_1 + 3d)}{3} = 2t_1 + d \Rightarrow t_1 = 2d$$



از طرفی می‌دانیم:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 100$$

$$t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d + t_1 + 3d + t_1 + 4d = 100$$

$$5t_1 + 10d = 100 \Rightarrow t_1 + 2d = 20$$



$$t_1 + 2d = 20 \xrightarrow{t_1 = 2d} 4d = 20 \Rightarrow d = 5 \quad \text{و} \quad t_1 = 10$$

<sup>۱</sup> Ahmes

$$\Rightarrow 10 \text{ و } 15 \text{ و } 20 \text{ و } 25 \text{ و } 30$$

شرط آنکه c و b و a سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند آن است که:

$$b = \frac{a+b}{2}$$



مقدار k را طوری پیدا کنید که ۳ عدد زیر جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند؟

$$k \text{ و } 4k \text{ و } 6k+5$$



پاسخ:

$$4k = \frac{k+6k+5}{2} \Rightarrow 8k = 7k + 5 \Rightarrow k = 5$$



۱- سه جمله متوالی یک دنباله‌ی عددی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$a-d \text{ و } a \text{ و } a+d$$



۲- همچنین پنج جمله متوالی یک دنباله‌ی عددی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$a-2d \text{ و } a-d \text{ و } a \text{ و } a+d \text{ و } a+2d$$

مزیت این نوع نمایش آن است که مجموع آن‌ها همواره مستقل از d می‌باشد.

مجموع ۳ جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی برابر ۱۵ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۰۵ است. اگر دنباله صعودی باشد جمله‌ی بزرگ‌تر کدام است؟



پاسخ:

$$a-d + a + a+d = 15$$



$$a = 5$$



$$a(a-d)(a+d) = 105 \xrightarrow{\text{با جایگذاری } a=5} 5(25-d^2) = 105$$

دنباله صعودی

$$25 - d^2 = 21 \implies d = \pm 2 \implies d = 2 \text{ قابل قبول}$$

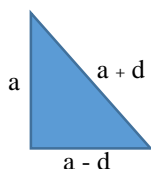
پس جملات دنباله عبارتند از: ۳ و ۵ و ۷

سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه ۳ جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی عددی هستند. ضلع کوچک‌تر کدام است؟



پاسخ:

سه جمله متوالی را به صورت  $a + d$  و  $a$  و  $a - d$  در نظر می‌گیریم و می‌دانیم بزرگ‌ترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه وتر است.



$$(a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2 \text{ فیثاغورث}$$

$$a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + a^2 - 2ad + d^2 \implies a = 4d$$

پس سه ضلع عبارتند از:  $3d$  و  $4d$  و  $5d$

یعنی کوچک‌ترین ضلع برابر  $3d$  است.

کدام جمله از دنباله‌ی ... و ۸ و ۵ و ۲ برابر ۵۶ است؟



پاسخ:

باتوجه به رابطه جمله عمومی  $t_n = t_1 + (n - 1)d$  و  $d = 3$  و  $t_1 = 2$  می‌توان نوشت:



$$56 = 2 + (n - 1) \times 3 \implies 54 = 3(n - 1) \implies n - 1 = 18 \implies n = 19$$

اگر در یک دنباله‌ی حسابی  $t_m = m'$  و  $t_n = n'$  باشد برای محاسبه قدر نسبت می‌توان نوشت:

$$d = \frac{m' - n'}{m - n}$$



اگر جمله‌ی دهم یک دنباله‌ی حسابی  $-43$  و جمله‌ی هجدهم آن  $-91$  باشد، دنباله را مشخص کنید؟



پاسخ:



$$\begin{cases} t_{10} = -43 \\ t_{18} = -91 \end{cases} \longrightarrow d = \frac{-91 - (-43)}{18 - 10} = \frac{-48}{8} = -6$$

باتوجه به رابطه جمله عمومی  $t_n = t_1 + (n - 1)d$  و  $d = -6$  و  $t_{10} = -43$  می توان نوشت:

$$t_1 + 9d = -43 \longrightarrow t_1 = -43 + 54 \longrightarrow t_1 = 11$$

پس جملات دنباله عبارتند از:  $-1$  و  $5$  و  $11$

کدام گزینه جمله عمومی یک دنباله حسابی است؟



$$t_n = 8n + 3 \quad (2)$$

$$t_n = n^2 + n \quad (1)$$

$$t_n = \sqrt{4n + 1} \quad (4)$$

$$t_n = \frac{2}{4n+1} \quad (3)$$

هر دنباله که جمله عمومی آن بر حسب  $n$  از **درجه اول** باشد، یک جمله عددی است.

$$t_n = An + B \quad d = A$$



پاسخ:

تنها گزینه‌ای که درجه اول است، گزینه ۲ است.



قانون اندیس‌ها در دنباله حسابی:

$$(1) \quad m+n = P+k \longrightarrow t_m + t_n = t_p + t_k$$

$$(2) \quad \frac{m+n}{2} = P \longrightarrow t_m + t_n = 2t_p$$



در یک دنباله عددی جمله پنجم دو برابر جمله هفتم است. جمله نهم کدام است؟



$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 0 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$

پاسخ: طبق قاعده اندیس‌ها داریم:

$$\frac{9+5}{2} = 7 \Rightarrow t_9 + t_5 = 2t_7 \xrightarrow{\text{طبق سوال } t_5 = 2t_7} t_9 + 2t_7 = 2t_7 \Rightarrow t_9 = 0$$



اگر در یک دنباله حسابی جمله‌ی عمومی به صورت  $t_n = \frac{9n+4}{2}$  باشد، قدر نسبت کدام است؟ (تالیفی)

- ۲٫۵ (۱)      ۴٫۵ (۲)      ۹ (۳)      ۷ (۴)



**d**

**طبق  $t_n = An + B$**

$$t_n = \left(\frac{9}{2}\right)n + 2 \quad \longrightarrow \quad d = \frac{9}{2} = 4,5$$

پاسخ:



دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۶۳ و قدر نسبت -۴ چند جمله‌ی مثبت دارد؟ (آزاد ریاضی ۸۴)

- ۱۵ (۱)      ۱۶ (۲)      ۱۷ (۳)      ۱۸ (۴)



پاسخ: باتوجه به رابطه جمله عمومی  $t_n = t_1 + (n-1)d$  و  $d = -4$  و  $t_1 = 63$  می‌توان نوشت:

$$t_n = 63 + (n-1)(-4) \quad \longrightarrow \quad t_n = -4n + 67$$


چون گفته شده چند جمله‌ی مثبت دارد پس  $t_n > 0$  است.

$$-4n + 67 > 0 \quad \longrightarrow \quad -4n > -67$$

در تقسیم طرفین یک نامعادله بر یک عدد منفی جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$n < \frac{67}{4} \quad \longrightarrow \quad n < 16,75$$

توجه

توجه

در مسائل دنباله‌ها  $n \in \mathbb{N}$  است پس:

$$n = 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots \text{ و } 16$$

بنابراین ۱۶ جمله‌ی مثبت دارد.

در یک دنباله‌ی حسابی  $t_1 = 4$  و  $t_{n+1} = t_n + 2$  جمله‌ی  $n$ ام کدام است؟ (تالیفی)

$$t_n = 4n + 2 \quad (1)$$

$$t_n = 2n + 2 \quad (4)$$

$$t_{n+1} - t_n = 2 \quad \longrightarrow \quad d = 2 \quad \text{و} \quad t_1 = 4$$

پاسخ: باتوجه به رابطه جمله عمومی  $t_n = t_1 + (n-1)d$  و  $d = 2$  و  $t_1 = 4$  می‌توان نوشت:

$$t_n = 4 + (n-1) \times 2 \quad \longrightarrow \quad t_n = 2n + 2$$





دنباله‌ی حسابی را به فرم بازگشتی نیز نشان می‌دهند:

$$t_1 = k \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad t_{n+1} - t_n = d$$

مقادیر  $x$  و  $y$  و  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{6}$  چهار جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند. در این صورت مقدار  $x+y$  کدام است؟ (تالیفی)

$$\frac{1}{6} \quad (1) \quad -\frac{1}{6} \quad (2) \quad \frac{1}{5} \quad (3) \quad -\frac{1}{5} \quad (4) \quad \frac{1}{6}$$

پاسخ:

$$d = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = t_3 = t_1 + 2d \\ y = t_4 = t_1 + 3d \end{array} \right\} \longrightarrow x+y = 2t_1 + 5d = 2\left(\frac{1}{3}\right) + 5\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

مجموع ۲ جمله‌ی  $n$ ام و  $(n-1)$ ام دنباله حسابی ... و ۱۰ و ۸ و ۶ و ۴ و ۲ کدام است؟ (سراسری انسانی ۸۲)

$$4n+1 \quad (1) \quad 4n \quad (2) \quad 4n-1 \quad (3) \quad 4n-2 \quad (4)$$

پاسخ: باتوجه به رابطه جمله عمومی  $t_n = t_1 + (n-1)d$  و  $d = 2$  و  $t_1 = 2$  می‌توان نوشت:

$$t_n = 2 + (n-1) \times (2) \longrightarrow t_n = 2n$$

$$t_n = 2n \quad \xrightarrow{\text{n-1 را جایگذاری می‌کنیم}} \quad t_{n-1} = 2(n-1)$$

$$\longrightarrow t_n + t_{n-1} = 2n + 2(n-1) = 4n-2$$

قطار سریع‌السیری بطور آزمایشی فاصله دو شهر را بار اول در ۴ ساعت طی کرده است. طبق برنامه‌ی تعیین شده، در هر رفت یا برگشت ۵ دقیقه از مدت زمان نوبت قبل کاسته می‌شود تا زمان این مسافت به ۲ ساعت پیش‌بینی برسد. تعداد نوبت‌های آزمایشی کدام است؟ (سراسری انسانی ۸۶)

$$16 \quad (1) \quad 20 \quad (2) \quad 24 \quad (3) \quad 25 \quad (4)$$

پاسخ: سرعت طی شده در نوبت اول توسط قطار را به دقیقه تبدیل می‌کنیم:  $t_1 = 4 \times 60 = 240$



۲۴۰

۲۳۵

۲۳۰

...

۱۲۰



$$t_n = t_1 + (n - 1)d \quad t_1 = 240 \text{ و } d = -5 \quad 120 = 240 + (n - 1)(-5) \rightarrow n = 25$$

در یک دنباله حسابی  $t_1 = 3 + \sqrt{2}$  و  $t_2 = 5 + \sqrt{2}$  می‌باشند. مجموع ۴ جمله چهارم چقدر از مجموع ۴ جمله دوم بیشتر است؟



۳۲ (۴)      ۱۶ (۳)      ۶۴ (۲)      ۸ (۱)

پاسخ:



$$(t_{13} + t_{14} + t_{15} + t_{16}) - (t_5 + t_6 + t_7 + t_8)$$

می‌دانیم  $t_m - t_n = (m-n)d$  پس بهتر است بنویسیم:

$$(t_{13} - t_5) + (t_{14} - t_6) + (t_{15} - t_7) + (t_{16} - t_8)$$

$$\rightarrow 8d + 8d + 8d + 8d = 32d$$

$$d = t_2 - t_1 = (5 + \sqrt{2}) - (3 + \sqrt{2}) = 2$$

$$\rightarrow 32d = 32(2) = 64$$

در یک دنباله حسابی  $t_m = 2n$  و  $t_n = 2m$  می‌باشد، مقدار  $t_1 - t_4$  چند است؟



-۱۲ (۴)      -۸ (۳)      ۸ (۲)      ۱۲ (۱)

$$\begin{cases} t_m = 2n \\ t_n = 2m \end{cases} \rightarrow d = \frac{2m - 2n}{n - m} = \frac{2(m - n)}{-(m - n)} = -2$$

پاسخ:



$$t_1 - t_4 = 6d \rightarrow 6(-2) = -12$$

بین دو عدد  $12 + \sqrt{17}$  و  $\sqrt{17} - 8$  چند عدد می‌توان قرارداد که اعداد حاصل تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت ۲ می‌دهند؟



۹ (۴)      ۶ (۳)      ۸ (۲)      ۷ (۱)

پاسخ: گفتیم که اگر بین ۲ عدد  $a$  و  $b$  بخواهیم  $m$  واسطه‌ی حسابی درج کنیم:

$$d = \frac{b - a}{m + 1}$$

$$2 = \frac{(12 + \sqrt{17}) - (\sqrt{17} - 8)}{m + 1}$$

$$\rightarrow 2m + 2 = 20 \rightarrow m = 9$$



در دنباله‌ای که جمله اول ۲ است بین جمله‌ی اول و ۱۲، سه عدد قرار می‌دهیم که با این دو عدد دنباله‌ی حسابی بسازند. جمله‌ی هفتم این دنباله کدام است؟

۱۹٫۵ (۱) ۱۷ (۲) ۱۵٫۵ (۳) ۱۸ (۴)

پاسخ:

$$a = 2 \quad b = 12 \quad m = 3 \quad t_7 = ?$$

$$d = \frac{b-a}{m+1} \quad \longrightarrow \quad d = \frac{12-2}{3+1} = 2/5$$

... و ۱۷ و ۱۴٫۵ و ۱۲ و ۹٫۵ و ۷ و ۴٫۵ و ۲

پس جمله هفتم برابر ۱۷ است.

بین دو عدد  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$  و  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$  کدام عدد را قرار دهیم تا سه عدد دنباله حسابی بسازند؟

پاسخ: در واقع واسطه‌ی حسابی بین این دو عدد را خواسته و می‌دانیم واسطه حسابی بین a و b برابر  $\frac{a+b}{2}$  است.

$$\frac{(\sqrt{y} + \sqrt{x})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{x})^2}{2} = \frac{x+y+2\sqrt{xy} + x+y-2\sqrt{xy}}{2}$$

$$\frac{2x+2y}{2} = \frac{2(x+y)}{2} = x+y$$

اعداد  $5P-1$  و  $3P+4$  و  $2P+3$  سه جمله‌ی متوالی یک دنباله حسابی هستند. قدر نسبت این دنباله کدام است؟ (سراسری ۸۴)

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

پاسخ: شرط آنکه a و b و c دنباله حسابی بسازند آنست که:  $b = \frac{a+b}{2}$

$$3P+4 = \frac{5P-1+2P+3}{2} \quad \longrightarrow \quad 7P+2 = 6P+8 \quad \longrightarrow \quad P = 6$$

$$P = 6 \quad \longrightarrow \quad 15 \text{ و } 22 \text{ و } 29 \quad \longrightarrow \quad d = 7$$

در یک دنباله حسابی  $t_1 t_4 = 40$  و  $t_1 + t_3 = 8$  می‌باشد. جمله صدم چقدر از جمله نود و نهم بیشتر است؟

پاسخ: سوال قدر نسبت را خواسته است:  $t_1 \dots t_{99} = d$

قاعده اندیسیها  $\longrightarrow$

$$t_1 + t_3 = 8 \quad \longrightarrow \quad 2t_2 = 8 \quad \longrightarrow \quad t_2 = 4$$

$$t_2 t_4 = 40 \quad \longrightarrow \quad 4 \times t_4 = 40 \quad \longrightarrow \quad t_4 = 10$$

$$\left. \begin{array}{l} t_2 = 4 \\ t_4 = 10 \end{array} \right\} \longrightarrow d = \frac{10 - 4}{4 - 2} = 3$$

زوایای مثلثی تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. اگر یک زاویه  $70^\circ$  درجه باشد، اندازه‌ی کوچکترین زاویه کدام است؟



- ۳۰ (۴)    ۵۰ (۳)    ۶۰ (۲)    ۴۰ (۱)

فرض کنید  $A$  و  $B$  و  $C$  زوایای مثلثی باشند در آن صورت چنانچه این زوایا دنباله حسابی بسازند داریم:

$$B = \frac{A+C}{2} \quad \longrightarrow \quad A + C = 2B$$



$$A + B + C = 180^\circ \quad \longrightarrow \quad 2B + B = 180^\circ \quad \longrightarrow \quad B = 60^\circ$$

پس اگر زوایای مثلثی دنباله‌ی حسابی بسازند حتماً یک زاویه  $60^\circ$  درجه است.

$$60^\circ + 70^\circ + x = 180^\circ \quad \longrightarrow \quad x = 50^\circ$$

پاسخ:

پس اندازه کوچکترین زاویه  $50^\circ$  است.



در یک مثلث قائم‌الزاویه با محیط  $24\text{cm}$  طول اضلاع تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند.



پاسخ: اضلاع مثلث را  $a+d$  و  $a$  و  $a-d$  در نظر می‌گیریم.

$$a - d + a + a + d = 24 \quad \longrightarrow \quad a = 8$$



بزرگ‌ترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه وتر است، پس رابطه فیثاغورث را می‌نویسیم:

$$(a+d)^2 = (a-d)^2 + a^2$$

$$a^2 + 2ad + d^2 = a^2 - 2ad + d^2 + a^2$$

$$a^2 = 4ad \quad \longrightarrow \quad 64 = 32d \quad \longrightarrow \quad d = 2$$

اندازه وتر  $a+d = 10$  است.

تفاضل جمله‌ی دهم از جمله‌ی دوازدهم یک دنباله حسابی  $5$  و مجموع  $2$  جمله‌ی دهم و دوازدهم  $25$  است. جمله‌ی بیست و یکم این دنباله چند است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۴)



- ۳۸,۵ (۴)    ۳۷,۵ (۳)    ۳۶ (۲)    ۳۵ (۱)

پاسخ:



$$t_{12} - t_{10} = 5 \quad \longrightarrow \quad 2d = 5 \quad \longrightarrow \quad d = 2,5$$

$$t_{12} + t_{10} = 25$$

$$t_1 + 11d + t_1 + 9d = 25$$

$$2t_1 + 20(2,5) = 25$$

$$2t_1 + 50 = 25$$

$$t_1 = -12,5$$

$$t_{21} = t_1 + 20d = -12,5 + 20(2,5) = 50 - 12,5 = 37,5$$

واسطه‌ی حسابی بین جملات هشتم و چهاردهم دنباله‌ی حسابی ... و ۱۲ و ۸ و ۴ کدام است؟



پاسخ:



$$t_8 = t_1 + 7d \quad \longrightarrow \quad t_8 = 4 + 7(4) = 32$$

$$t_{14} = t_1 + 13d \quad \longrightarrow \quad t_{14} = 4 + 13(4) = 56$$

$$44 = \frac{t_8 + t_{14}}{2}$$
 واسطه‌ی حسابی بین  $t_8$  و  $t_{14}$  برابر است با

اعداد  $3x+3$  و  $x+4$  و  $2x-1$  جملات اول و سوم و پنجم از یک دنباله‌ی حسابی هستند. جمله‌ی دوم دنباله کدام است؟



$$t_1 = 2x-1 \quad t_3 = x+4 \quad t_5 = 3x+3$$

در یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت  $d$  جملات مساوی الفاصله  $t_{m+2k}$  و  $t_{m+k}$  و  $t_m$  تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت  $kd$  می‌دهند.



پاسخ:



$$\frac{t_1 + t_5}{2} = t_3 \quad \longrightarrow \quad \frac{2x-1 + 3x+3}{2} = x+4 \quad \longrightarrow \quad x=2$$

$$t_1 = 3 \quad t_3 = 6 \quad t_5 = 9$$

$$2d = 3 \quad \longrightarrow \quad d = 1,5$$

طبق نکته بالا:

... و  $(5,5)$ ،  $6$ ،  $4,5$ ،  $3$

در یک دنباله‌ی حسابی غیرثابت  $t_n + t_k = t_{n-1} + t_{k+1}$  در این دنباله  $\frac{t_1}{d}$  کدام است؟



(۱)  $k$  (۲)  $-k$  (۳)  $n-k$  (۴)  $2n-k$

پاسخ:



$$t_n + t_k = t_{n-1} \quad \longrightarrow \quad t_{n-1} + d + t_k = t_{n-1} \quad \longrightarrow \quad d + t_k = 0$$

$$t_k = t_1 + (k-1)d \quad \text{می دانیم که:}$$

$$d + t_1 + (k-1)d = 0 \quad \longrightarrow \quad d + t_1 + kd - d = 0 \quad \longrightarrow \quad t_1 = -kd$$

$$\longrightarrow \quad \frac{t_1}{d} = -k$$

اگر به قدر نسبت یک دنباله‌ی حسابی ۴ واحد اضافه کنیم به جمله دهم دنباله حاصل چند واحد اضافه می‌شود؟



۳۸ (۴)      ۳۲ (۳)      ۳۴ (۲)      ۳۶ (۱)

پاسخ: روش اول:



$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$t_{10} = t_1 + 9d \quad \text{در حالت اول:}$$

$$\text{حال به قدر نسبت ۴ واحد اضافه می‌کنیم} \quad \longrightarrow \quad t_{10} = t_1 + 9(d+4)$$

$$\longrightarrow \quad t_{10} = t_1 + 9d + 36$$

یعنی ۳۶ واحد اضافه می‌شود.

روش دوم:

در یک دنباله‌ی حسابی اگر  $k$  واحد به قدر نسبت و  $b$  واحد به جمله‌ی اول اضافه شود، دنباله حسابی جدیدی ساخته می‌شود که تفاضل جمله عمومی آن با جمله‌ی عمومی دنباله‌ی قبلی  $b+(n-1)k$  است. یعنی به جمله  $n$ ام دنباله‌ی جدید  $b+(n-1)k$  تا اضافه می‌شود.

پس در سوال بالا  $36 = 4 \times (10-1)$  واحد اضافه می‌شود.

تذکر

- ۱- اگر همه‌ی جملات یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت  $d$  را با یک عدد ثابت جمع و یا از یک عدد ثابت تفریق کنیم، دنباله‌ی حاصل مجدداً یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت  $d$  می‌باشد.
- ۲- اگر همه‌ی جملات یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت  $d$  را در یک عدد ثابت مثل  $k$  ضرب کنیم دنباله‌ی حاصل مجدداً یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت  $kd$  است.
- ۳- اگر همه جملات یک دنباله حسابی با قدر نسبت  $d$  را به توان  $n$  برسانیم دنباله‌ی حاصل می‌تواند حسابی باشد یا نباشد.

۴- اگر در یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت  $d$  جملاتی را به فاصله  $k$  تا  $k$  انتخاب شوند، آنگاه جملات انتخاب شده تشکیل یک دنباله حسابی با قدر نسبت  $kd$  می‌دهند. (منظور از جملاتی با فاصله  $k$  تا  $k$  آنست که اندیس‌ها با هم  $k$  واحد فاصله داشته باشند)

جمله عمومی یک دنباله حسابی به صورت:  $t_n = (a^2 - 9)n^2 + \frac{a+n}{a^2 + 2a + 2}$  است. اگر قدر نسبت  $\frac{1}{17}$  باشد



مقدار  $a$  چند است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳)  $\pm 3$  (۴)  $\pm 2$

می‌دانیم جمله عمومی دنباله حسابی به صورت  $t_n = An + B$  است، پس ضریب  $n^2$

**پاسخ:**

باید برابر صفر شود:



$$a^2 - 9 = 0 \quad \longrightarrow \quad a = \pm 3$$

$$t_n = \frac{a}{a^2 + 2a + 2} + \frac{n}{a^2 + 2a + 2} \quad \longrightarrow \quad t_n = \frac{1}{a^2 + 2a + 2} n + \frac{a}{a^2 + 2a + 2}$$

$$a = 3 \quad \longrightarrow \quad t_n = \frac{1}{17} n + \frac{3}{17} \quad d = \frac{1}{17}$$

$$a = -3 \quad \longrightarrow \quad t_n = \frac{1}{5} n + \frac{3}{5} \quad \longrightarrow \quad d = \frac{1}{5}$$

در کدام دنباله‌ی حسابی جملات کاهش می‌یابند؟



$$t_n = \frac{-1+2n}{3} \quad (۴) \quad t_{n+1} = t_n + 4 \quad (۳) \quad 3 + t_{n+1} = t_n \quad (۲) \quad t_n - t_{n-1} = \frac{1}{5} \quad (۱)$$

اگر جملات یک دنباله‌ی حسابی کاهش یابند، آن دنباله **نزولی** است. بنابراین قدر

**پاسخ:**

نسبت باید **منفی** باشد.

در گزینه ۲ داریم:

$$3 + t_{n+1} = t_n \quad \longrightarrow \quad t_{n+1} - t_n = -3 \quad \longrightarrow \quad d < 0$$

پس نزولی است.



اگر دنباله‌ی ... و  $y^4 + y$ ،  $125$ ،  $x^3 + x^2$ ،  $35$  یک دنباله حسابی باشد آنگاه جمله دوازدهم آن کدام است؟



- (۱) ۵۳۰ (۲) ۵۲۰ (۳) ۲۵۰ (۴) ۳۵۰

**پاسخ:**

$$t_1 = 35 \quad \text{و} \quad t_3 = 125$$

$$t_3 = t_1 + 2d \quad \longrightarrow \quad 125 = 35 + 2d \quad \longrightarrow \quad d = 45$$

$$t_{12} = t_1 + 11d \quad \longrightarrow \quad t_{12} = 530$$



جملات دوم و چهارم برای ردگم کردن بود.

دنباله‌ی  $a+۳۹۸$  و ... و  $a+۲$  و  $a-۲$  و  $a-۶$  چند جمله دارد؟



- ۱۰۱ (۱)    ۱۰۲ (۲)    ۱۰۳ (۳)    ۱۰۴ (۴)

پاسخ:



$$t_n = t_1 + (n - 1)d \quad \text{و} \quad d = (a-۲) - (a-۶) = ۴$$

$$a + ۳۹۸ = a-۶ + (n-1)۴$$

$$۴۰۴ = ۴(n-1)$$

$$\rightarrow ۱۰۱ = n-1 \quad \rightarrow \quad n = ۱۰۲$$

در یک دنباله‌ی حسابی  $a_{۱۵}^۳ = a_{۵}^۳ + ۱$  و  $a_{۱۵}^۲ + a_{۵}^۲ = ۷ - a_{۱۵}a_{۵}$  در این دنباله قدر نسبت کدام است؟



- $\frac{1}{۵۰}$  (۱)     $\frac{1}{۴۰}$  (۲)     $\frac{1}{۷۰}$  (۳)     $\frac{1}{۶۰}$  (۴)

پاسخ:



$$a_{۱۵}^۲ + a_{۱۵}a_{۵} + a_{۵}^۲ = ۷$$

$$a_{۱۵}^۳ - a_{۵}^۳ = ۱ \quad \rightarrow \quad \underbrace{(a_{۱۵} - a_{۵})}_{۱ \cdot d} \underbrace{(a_{۱۵}^۲ + a_{۱۵}a_{۵} + a_{۵}^۲)}_{۷} = ۱$$

$$\rightarrow ۷ \cdot d = ۱ \quad \rightarrow \quad d = \frac{1}{۷}$$

چند عدد ۳ رقمی داریم که مضرب ۷ باشند؟



- ۱۲۸ (۱)    ۱۲۷ (۲)    ۱۲۹ (۳)    ۱۲۶ (۴)

پاسخ:



$$۱۰۰ \leq ۷k \leq ۹۹۹ \quad \xrightarrow[\text{تقسیم بر ۷}]{k \in \mathbb{N}} \quad ۱۴,۲ \leq k \leq ۱۴۲,۷$$

$$k = ۱۵ \text{ و } ۱۶ \text{ و } \dots \text{ و } ۱۴۲ \quad \rightarrow \quad ۱۴۲ - ۱۵ + ۱ = ۱۲۸$$

۱ + اولی - آخری = شمارش اعداد صحیح متوالی



چند عدد ۲ رقمی وجود دارد که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر عدد ۵ برابر ۲ باشد؟



اعداد صحیحی را که در تقسیم بر عدد  $k$  باقی مانده‌ای برابر  $r$  دارند ( $r < k$ ) به صورت  $nk + r$  هستند.



پاسخ:



$$10 \leq 5n+2 \leq 99 \quad \longrightarrow \quad 8 \leq 5n \leq 97$$

$$1,6 \leq n \leq 19,4$$

$$\longrightarrow \quad n = 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots \text{ و } 19$$

$$19 - 2 + 1 = 18$$

عدد ۷۸ واسطه‌ی حسابی بین  $t^2$  و  $t$  می‌باشد. حاصل ضرب مقادیر قابل قبول برای  $t$  کدام است؟



- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (-۱)      ۴ (-۱۵۶)

پاسخ:



$$\frac{t+t^2}{2} = 78 \quad \longrightarrow \quad t^2 + t = 156$$

$$\longrightarrow \quad t^2 + t - 156 = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{c}{a} = -156$$

در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر معادله دارای ۲ ریشه‌ی  $\alpha$  و  $\beta$  باشد داریم:

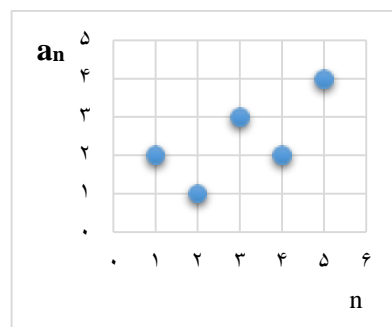
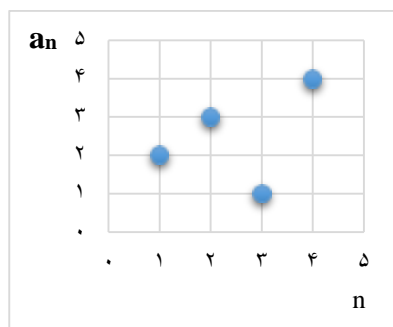
$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

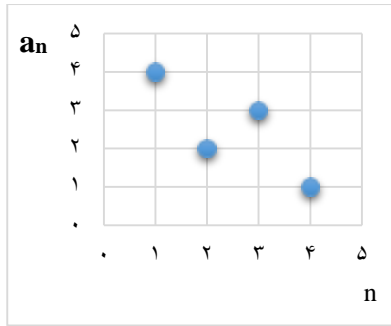
$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$



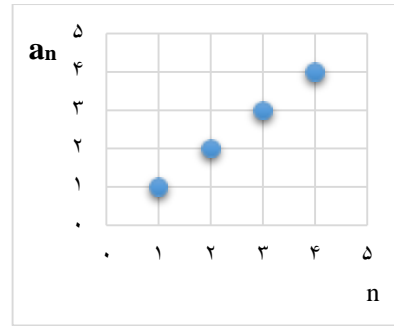
کدام یک از شکل‌های زیر می‌تواند نمودار یک دنباله‌ی حسابی باشد؟







(۴)



(۳)

**پاسخ:** جمله عمومی دنباله‌ی حسابی به صورت  $a_n = An + B$  است، یعنی خطی است. پس گزینه‌ای درست است که نقاط بر روی یک خط قرار بگیرند. (گزینه ۳)



مجموع ۵ جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی برابر ۱۰ و مجموع مربعات آنها برابر ۶۰ است. حاصل ضرب مقادیر ممکن برای قدر نسبت چقدر است؟



(۱) -۶      (۲) -۸      (۳) -۴      (۴) -۹

**پاسخ:** جملات را  $a+2d$  و  $a+d$  و  $a$  و  $a-d$  و  $a-2d$  می‌گیریم.



$$a-2d + a-d + a + a+d + a+2d = 10 \quad \longrightarrow \quad a = 2$$

$$(a-2d)^2 + (a-d)^2 + (a)^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2 = 60$$

$$5a^2 + d^2 = 60 \quad \longrightarrow \quad d^2 = 4 \quad \longrightarrow \quad d = \pm 2$$

$$\text{حاصلضرب قدر نسبت‌های به‌دست آمده} = (-2)(2) = -4$$

در دنباله‌ی حسابی ... و ۸ و ۳ و ۲ - دومین جمله بزرگ‌تر از ۱۸۰ چند است؟



(۱) ۱۸۷      (۲) ۱۸۹      (۳) ۱۸۸      (۴) ۱۸۳

**پاسخ:**



$$t_1 = -2 \quad \text{و} \quad d = 5 \quad \longrightarrow \quad t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$\longrightarrow \quad t_n = -2 + (n-1)5$$

$$\longrightarrow \quad t_n = 5n - 7$$

$$5n - 7 > 180 \quad \longrightarrow \quad 5n > 187 \quad \longrightarrow \quad n > 37.4 \quad \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \quad n = 38$$

$$t_{38} = 5(38) - 7 = 183$$

جمله سی و هشتم یعنی:

۲۴

اولین جمله‌ایست که از ۱۸۰ بیست‌و‌هشت‌است. پس جمله‌ی بعدی بزرگتر از ۱۸۰ عبارت است از ۱۸۸.

فرم کلی معادله‌ی درجه‌ی دوم به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$  است.

$$\frac{a+c}{2} = b \quad \leftarrow \text{ c, b و دنباله‌ی حسابی می‌سازند:}$$

$$\rightarrow a + c = 2b \quad (I)$$



در یک معادله‌ی درجه دوم ضرایب  $x^2$ ،  $x$  و عدد ثابت دنباله حسابی می‌سازند (جملات متوالی یک دنباله حسابی‌اند). اگر عدد ۲، یک ریشه‌ی این معادله باشد، ریشه‌ی دیگر این معادله کدام است؟



پاسخ:

عدد ۲ یک ریشه معادله است پس به جای  $x$  عدد ۲ قرار می‌دهیم:



$$x = 2 \quad \rightarrow \quad 4a + 2b + c = 0 \quad (II)$$

در رابطه II بجای  $2b$  مقدارش را  $\rightarrow 4a + a + c + c = 0 \quad \rightarrow 5a + 2c = 0$   
از رابطه I قرار می‌دهیم

$$\frac{c}{a} = -\frac{5}{2}$$

می‌دانیم  $\frac{c}{a}$  همان حاصلضرب ۲ ریشه است

$$\alpha \times \beta = -\frac{5}{2} \quad \xrightarrow{\alpha = 2} \quad 2\beta = -\frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad \beta = -\frac{5}{4}$$

اگر  $\{t_n\}$  دنباله‌ای حسابی باشد آنگاه حاصل  $\frac{1}{t_1 t_2} + \frac{1}{t_2 t_3} + \frac{1}{t_3 t_4} + \dots + \frac{1}{t_{n-1} t_n}$  کدام است؟



$$\frac{2n}{t_n t_1} \quad (4) \quad \frac{n+1}{t_n t_1} \quad (3) \quad \frac{n-1}{t_n t_1} \quad (2) \quad \frac{1}{t_n t_1} \quad (1)$$

پاسخ:

$$\frac{1}{t_1 t_2} = \frac{1}{d} \left( \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right) = \frac{1}{d} \left( \frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2} \right)$$



$$\frac{1}{t_p t_p} = \frac{1}{d} \left( \frac{1}{t_p} - \frac{1}{t_p} \right) = \frac{1}{d} \left( \frac{t_p - t_p}{t_p t_p} \right)$$

$$\frac{1}{d} \left( \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_p} + \frac{1}{t_p} - \frac{1}{t_p} + \dots + \frac{1}{t_{n-1}} - \frac{1}{t_n} \right)$$

$$\frac{1}{d} \left( \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_n} \right) = \frac{1}{d} \left( \frac{t_n - t_1}{t_n t_1} \right)$$

$$\frac{1}{d} \left( \frac{t_1 + (n-1)d - t_1}{t_n t_1} \right) = \frac{n-1}{t_n t_1}$$

اگر جمله اول یک دنباله‌ی حسابی برابر ۵ و قدر نسبت آن ۴ باشد، آنگاه این دنباله چند جمله‌ی مربع کامل دارد؟



(۱) ندارد (۲) یکی (۳) بی‌شمار (۴) ۱۰ تا

**پاسخ:**

جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$



$$t_n = 5 + (n-1)4$$

$$\rightarrow t_n = 4n + 1$$

می‌باشد. که در آن جمله چهارم مربع کامل است زیرا:

$$t_4 = 25$$



حال دقت کنید که عدد  $4^2 + 2 \times 5 \times 4 + 25$  نیز مربع کامل است  $(5+4)^2$  واضح است که این عدد جز جملات دنباله است (از ۴ فاکتور بگیرید) به همین ترتیب  $4^2 + 2 \times 9 \times 4 + 9^2$  که یکی دیگر از جملات دنباله است به صورت  $(9+4)^2$  نیز مربع کامل است و به همین ترتیب می‌توان بی‌شمار جمله مربع کامل پیدا کرد.

دو دنباله‌ی حسابی روبرو با هم جملات مشترکی دارند. جمله عمومی جملات مشترک ۲ دنباله کدام است؟



$$\left\{ \begin{array}{l} \dots و ۱۰ و ۷ و ۴ و ۱ \\ \dots و ۱۴ و ۱۰ و ۶ و ۲ \end{array} \right.$$

$$(1) \quad 10n+8 \quad (2) \quad 12n+2 \quad (3) \quad 10n-8 \quad (4) \quad 12n-2$$



**پاسخ:** می‌دانیم که قدر نسبت دنباله جدید برابر (ک.م.م) قدر نسبت‌های دو دنباله‌ی اولی

است. مشخص است اولین جمله‌ی مشترک آنها ۱۰ است.



$$d_1 = 3 \quad \text{و} \quad d_2 = 4 \quad \rightarrow \quad (4 \text{ و } 3 \text{ عدد دو ک.م.م}) = 12 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} d = 12 \text{ جدید} \\ t_1 = 10 \text{ جدید} \end{cases}$$

$$\rightarrow t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$t_n = 10 + (n-1) \times 12 \quad \longrightarrow \quad t_n = 12n - 2$$

تعداد جملات مشترک دو دنباله‌ی حسابی زیر که کمتر از ۳۲۹ و بیشتر از ۱۷۶ هستند چندتاست؟



$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \text{ و } ۱۳ \text{ و } ۸ \text{ و } ۳ \\ \dots \text{ و } ۱۶ \text{ و } ۹ \text{ و } ۲ \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} ۵ \text{ (۱)} \\ ۴ \text{ (۲)} \\ ۶ \text{ (۳)} \\ ۷ \text{ (۴)} \end{array}$$

پاسخ:



... و ۳۸ و ۳۳ و ۲۸ و ۲۳ و ۱۸ و ۱۳ و ۸ و ۳ ...  
 ... و ۴۴ و ۳۷ و ۳۰ و ۲۳ و ۱۶ و ۹ و ۲ ...

مشخص است اولین جمله مشترک آنها ۲۳ است.

$$d_1 = 5 \quad d_2 = 7 \quad \longrightarrow \quad (\text{ک.م.م دو عدد } 5 \text{ و } 7) = 35 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} d = 35 \text{ جدید} \\ t_1 = 23 \text{ جدید} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$\longrightarrow \quad t_n = 23 + (n-1) \times 35 \quad \longrightarrow \quad t_n = 35n - 12$$

$$176 < 35n - 12 < 329 \quad \xrightarrow{+12} \quad 176 < 35n - 12 < 329$$

$$\xrightarrow{\div 35} \quad 5/3 < n < 9/7 \quad \quad n = 6, 7, 8, 9$$

واسطه‌ی عددی بین دو عدد  $1 + \sqrt{3}$  و  $\frac{2}{1 - \sqrt{3}}$  ... کدام است؟



$$\begin{array}{l} ۱ \text{ (۴)} \\ \sqrt{3} \text{ (۳)} \\ \frac{1}{2} \text{ (۲)} \\ \text{صفر (۱)} \end{array}$$

واسطه‌ی حسابی بین دو عدد همان میانگین ۲ عدد است.

پاسخ:



$$\longrightarrow \quad \frac{\frac{2}{1-\sqrt{3}} + \sqrt{3} + 1}{2} = \frac{2 + (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}{2(1 - \sqrt{3})}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{2 + 1 - 3}{2(1 - \sqrt{3})} = \frac{0}{2(1 - \sqrt{3})} = 0$$

در دنباله حسابی ... و  $-21$  و  $x$  و  $-27$  مجموع جملات منفی کدام است؟



- (۱)  $-135$       (۲)  $-15$       (۳)  $-75$       (۴)  $-27$

پاسخ:



$$x = \frac{-27 - 21}{2} = -24$$

... و ۳ و ۰ و ۳- و ۶- و ۹- و ۱۲- و ۱۵- و ۱۸- و ۲۱- و ۲۴- و ۲۷-

مجموع جملات منفی برابر  $-135$  است.

در یک دنباله‌ی حسابی مجموع دو جمله اول ۶ و مجموع ۲ جمله‌ی بعدی ۱۲ است. اگر  $t_1 d = \left(\frac{x}{y}\right)^n$  باشد، حاصل  $x + y + n$  کدام است؟ ( $x$  و  $y$  نسبت به هم اولند)



- (۱) ۷      (۲) ۹      (۳) ۶      (۴) ۸

پاسخ:



$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 6 \\ t_3 + t_4 = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2t_1 + d = 6 \\ 2t_1 + 3d = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = \frac{3}{2} \\ t_1 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow t_1 \cdot d = \left(\frac{27}{8}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \rightarrow x = 3 \text{ و } y = 2 \text{ و } n = 3$$

$$\rightarrow x + y + n = 8$$

اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌ای دنباله حسابی می‌سازند. مجموع ۲ ضلع دیگر این مثلث چند برابر وتر یک مثلث است؟



- (۱)  $\frac{3}{4}$       (۲)  $\frac{1}{5}$       (۳)  $\frac{7}{5}$       (۴)  $\frac{4}{3}$

پاسخ:



اضلاع مثلث را  $a+d$  و  $a$  و  $a-d$  می‌گیریم:

می‌دانیم بزرگترین ضلع وتر است. و طبق رابطه فیثاغورث:

$$(a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2 \rightarrow a = 4d$$

$$\rightarrow 3d \text{ و } 4d \text{ و } 5d$$

$$\rightarrow \frac{rd + 4d}{5d} = \frac{7}{5}$$

اگر اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه دنباله‌ی حسابی بسازند، اندازه ضلع متوسط ۴ برابر قدر نسبت است.



$$a = 4d$$

اگر ۵ و n و m و نیز m+۳ و ۲n و ۶ دنباله حسابی بسازند واسطه‌ی حسابی بین m و n کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{3}$     (۲) ۱    (۳)  $\frac{1}{2}$     (۴)  $\frac{1}{4}$

پاسخ



۵ و n و m     $\xrightarrow{\text{دنباله حسابی}}$      $n = \frac{m+5}{2} \rightarrow m + 5 = 2n \rightarrow m = 2n - 5$  :

۶ و ۲n و m+۳     $\xrightarrow{\text{دنباله حسابی}}$      $n = \frac{m+3+6}{2} \rightarrow m+9 = 4n \rightarrow m = 4n - 9$

$4n - 9 = 2n - 5 \rightarrow 2n = 4 \rightarrow n = 2$  و  $m = -1$

واسطه حسابی بین m و n  $\frac{m+n}{2} = n \rightarrow \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$

در دنباله ... و t و Z و ۱۷ و Y و X و ۳ به ازای  $n \geq 2$  همواره  $t_n - t_{n-1}$  مقداری ثابت است. این مقدار ثابت کدام است؟



- (۱)  $\frac{7}{3}$     (۲)  $\frac{8}{3}$     (۳)  $\frac{13}{3}$     (۴)  $\frac{14}{3}$

پاسخ:



این مقدار ثابت در دنباله حسابی برابر قدر نسبت است.

$t_1 = 3$  و  $t_4 = 17$

$t_4 = t_1 + 3d \rightarrow 17 = 3 + 3d \rightarrow d = \frac{14}{3}$

چند جمله از جملات دنباله حسابی ... و ۳ و  $\frac{1}{3}$  و -۲ از ۹۷ کمتر است؟



- (۱) ۳۹    (۲) ۴۰    (۳) ۴۱    (۴) ۴۲

پاسخ:



$$t_n = t_1 + (n-1)d \quad \longrightarrow \quad t_n = -2 + (n-1)\frac{5}{2} = \frac{5}{2}n - \frac{9}{2}$$

$$t_n < 97 \quad \longrightarrow \quad \frac{5}{2}n - \frac{9}{2} < 97 \quad \longrightarrow \quad 5n - 9 < 194$$

$$n < \frac{203}{5} \quad \longrightarrow \quad n \leq 40$$

جمله‌ی پنجم یک دنباله حسابی دو برابر جمله‌ی هشتم آن است. حاصل  $t_{17} \times t_{11} \times t_5$  کدام است؟



- ۴۹ (۴)      ۲۸ (۳)      ۰ (۲)      ۳۱ (۱)

پاسخ:



$$t_5 = 2t_8 \quad \longrightarrow \quad t_1 + 4d = 2(t_1 + 7d)$$

$$\longrightarrow t_1 + 4d = 2t_1 + 14d \quad \longrightarrow \quad t_1 + 10d = 0$$

$$\longrightarrow t_{11} = 0$$

$$\longrightarrow t_{17} \times t_{11} \times t_5 = 0$$

در دنباله‌ای حسابی با جملات متمایز ... و  $3m-1$  و  $m^2+1$  و  $3-m$  جمله‌ی ششم چند برابر جمله سوم است؟



- ۷ (۴)      ۶ (۳)      ۵ (۲)      ۴ (۱)

پاسخ:



$$m^2+1 = \frac{3-m+3m-1}{2} \quad \longrightarrow \quad 2m^2+2 = 2m+2 \quad \longrightarrow \quad 2m^2-2m = 0$$

$$\longrightarrow 2m(m-1) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

اگر  $m=1$  باشد  $\longleftarrow$  ... و ۲ و ۲ و ۲ که جملات متمایز نیستند، پس قبول نیست

اگر  $m=0$  باشد  $\longleftarrow$  ... و -۱ و ۱ و ۳ که قبول است.

$$\dots \text{ و } -7 \text{ و } -5 \text{ و } -3 \text{ و } -1 \text{ و } 1 \text{ و } 3 \quad \longrightarrow \quad \frac{t_6}{t_3} = \frac{-7}{-1} = 7$$

جمله اول یک دنباله‌ی حسابی صعودی ۴ است. به جمله دوم ۲ واحد و به جمله سوم ۲۰ واحد اضافه می‌کنیم. ۳ جمله متوالی تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. قدر نسبت دنباله حسابی چند است؟



۴ (۱)      ۵ (۲)      ۳ (۳)      ۶ (۴)

**پاسخ:** جملات دنباله حسابی را ۴ و  $t_2$  و  $t_3$  و جملات دنباله هندسی را ۴ و  $t'_2$  و  $t'_3$  می‌نامیم.



اگر  $d$  قدر نسبت دنباله حسابی باشد داریم:

$$t'_3 = t_3 + 20 \xrightarrow{t_r = 4 + 2d} 4 + 2d + 20 = 24 + 2d$$

$$t'_2 = t_2 + 2 \xrightarrow{t_r = 4 + 2d} 4 + d + 2 = 6 + d$$

طبق خاصیت دنباله هندسی داریم:

$$t_3'^2 = t_2' t_4' \longrightarrow (6+d)^2 = 4(24+2d) \longrightarrow d^2 + 4d - 60 = 0$$

$$(d-6)(d+10) = 0 \longrightarrow \begin{cases} d = 6 \checkmark \\ d = -10 \end{cases}$$

از مبلغ  $A$  ریال پس‌انداز در مرتبه‌ی اول  $\frac{1}{28}A$  را برداشت کرده‌ایم. اگر در مرتبه‌های بعدی مبلغ برداشت  $\frac{1}{28}A$  از مبلغ برداشت مرتبه ماقبل بیشتر باشد پس از چند بار مبلغ پس‌انداز به صفر می‌رسد؟



۶ (۱)      ۵ (۲)      ۸ (۳)      ۷ (۴)

$$\frac{1}{28}A \text{ و } \frac{2}{28}A \text{ و } \frac{3}{28}A \text{ و } \frac{4}{28}A \text{ و } \frac{5}{28}A \text{ و } \frac{6}{28}A \text{ و } \frac{7}{28}A$$

**پاسخ:**



$$\frac{1A+2A+3A+4A+5A+6A+7A}{28} = \frac{28A}{28} = A \text{ اگر همه را جمع کنیم:}$$

اگر جملات چهارم و دهم و شانزدهم یک دنباله حسابی به ترتیب  $\log_2(4x)$  و  $\log_2(2x+6)$  و  $\log_2(x+8)$  باشد، مقدار  $\log_2(2x-1)$  کدام است؟



**پاسخ:**

$$\frac{\log_2(x+8) + \log_2 4x}{2} = \log_2(2x+6) \longrightarrow \log_2(x+8) + \log_2 4x = 2\log_2(2x+6)$$

$$\log_2(x+8) + \log_2 4x = \log_2(2x+6)^2 \longrightarrow 4x(x+8) = (2x+6)^2$$





$$4x^2 + 32x = 4x^2 + 24x + 36 \quad \rightarrow \quad x = \frac{9}{2}$$

$$\rightarrow \log_{\frac{1}{4}} 2x - 1 = \log_{\frac{1}{4}} 2\left(\frac{9}{2}\right) - 1 = \log_{\frac{1}{4}} 8 = \frac{3}{2}$$

بعدا در قواعد لگاریتم خواهید خواند که :

$$\log_b a^m = m \log_b a \quad \log_{b^n} a = \frac{1}{n} \log_b a \quad \log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$$

$$\log_b a + \log_b c = \log_b ac \quad \log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$$



در یک دنباله‌ی صعودی  $t_3 \times t_5 = 1$  اگر مجموع مجزورات جملات چهارم و قدرنسبت برابر ۵ باشد، جمله دهم چقدر از جمله نهم بیشتر است؟

$$\sqrt{2} \text{ (۴)} \quad \sqrt{1} \text{ (۳)} \quad \sqrt{5} \text{ (۲)} \quad \sqrt{3} \text{ (۱)}$$



پاسخ:

$$t_3 \times t_5 = 1 \quad \rightarrow \quad (t_3 - d)(t_3 + d) = 1 \quad \rightarrow \quad t_3^2 - d^2 = 1$$

$$\text{از طرفی داریم} \quad t_3^2 + d^2 = 5$$

$$\begin{cases} t_3^2 - d^2 = 1 \\ t_3^2 + d^2 = 5 \end{cases} \rightarrow 2d^2 = 4 \rightarrow d^2 = 2 \rightarrow \begin{cases} d = \sqrt{2} \quad \checkmark \\ d = -\sqrt{2} \end{cases}$$

چون دنباله صعودی است.

در یک دنباله‌ی حسابی صعودی  $t_1 t_3 = 7$  و  $t_1 + t_5 = 1$  می‌باشد مجموع جملات منفی این دنباله چند است؟

$$-16 \text{ (۴)} \quad -12 \text{ (۳)} \quad -5 \text{ (۲)} \quad -11 \text{ (۱)}$$



پاسخ:

$$t_1 + t_5 = 1 \quad \rightarrow \quad (t_1 + d) + (t_1 + 4d) = 1$$

$$2t_1 + 5d = 1 \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{1-5d}{2} \quad (I)$$



$$t_1 t_3 = 7 \quad \longrightarrow \quad t_1 (t_1 + 2d) = 7 \quad \longrightarrow \quad t_1^2 + 2t_1 d = 7$$

$$\stackrel{(I)}{\longrightarrow} \quad \left(\frac{1-\Delta d}{2}\right)^2 + (1-\Delta d)d = 7$$

$$1 + 2\Delta d^2 - 1 \cdot d + 4d - 2 \cdot d^2 = 28 \quad \longrightarrow \quad \Delta d^2 - 6d - 27 = 0$$

$$(\Delta d + 9)(d - 3) = 0 \quad \stackrel{d > 0}{\longrightarrow} \quad d = 3 \quad \longrightarrow \quad t_1 = \frac{1-15}{2} = -7$$

$-12 =$  مجموع جملات منفی  $\longrightarrow$  ... و 2 و -1 و -4 و -7: جملات دنباله

X و Y و Z سه زاویه‌ی یک مثلث می‌باشند. اگر این 3 زاویه، 3 جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی نیز باشند حاصل  $(\sin^3 x + \sin^3 z)$  کدام است؟



- ۱ (۱)      ۲ (-۱)      ۳ (۰)      ۴ (۳۲)

$$\begin{cases} Y + X + Z = 180^\circ \\ 2Y = X + Z \end{cases} \quad \longrightarrow \quad 3Y = 180^\circ \quad \longrightarrow \quad Y = 60^\circ$$

پاسخ:



بنابراین 3 زاویه‌ی مثلث باید به فرم  $-x$ ،  $120-x$  و  $x$  باشند.

$$\sin^3 x + \sin^3 z = \sin^3 x + \sin^3(120-x)$$

$$\longrightarrow \sin^3 x + \sin^3(360 - 3x) = \sin^3 x - \sin^3 x = 0$$

در یک دنباله‌ی حسابی، جملات سوم و هفتم و نهم می‌توانند، 3 جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی باشند. چندمین جمله‌ی دنباله‌ی حسابی صفر است؟



- ۱) هشتم      ۲) نهم      ۳) یازدهم      ۴) دهم

$$t_7^2 = t_3 \times t_9 \quad \longrightarrow \quad (t_1 + 6d)^2 = (t_1 + 2d)(t_1 + 8d)$$

پاسخ:



$$t_7^2 + 12t_1 d + 36d^2 = t_1^2 + 10t_1 d + 16d^2$$

$$2t_1 d + 20d^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad 2d(t_1 + 10d) = 0$$

$$\begin{cases} d = 0 \quad \text{غیرقابل قبول} \\ t_1 + 10d = 0 \quad \longrightarrow \quad t_{11} = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

اگر a و b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی باشند در آن صورت:

$$b^2 = ac$$



جملات هفتم و دهم و بیستم یک دنباله حسابی، ۳ جمله‌ی متوالی از یک دنباله هندسی اند. قدرنسبت دنباله‌ی هندسی برابر است با:

$$\frac{3}{10} \quad (1) \quad \frac{10}{3} \quad (2) \quad \frac{7}{3} \quad (3) \quad \frac{3}{7} \quad (4)$$

اگر جملات  $a_k$  و  $a_n$  و  $a_m$  یک دنباله‌ی حسابی، ۳ جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله‌ی هندسی برابر است با:

$$q = \frac{k-n}{n-m}$$



پاسخ:

$$a_7 \text{ و } a_{10} \text{ و } a_{20} \quad \longrightarrow \quad q = \frac{20-10}{10-7} = \frac{10}{3}$$



دنباله‌ی  $c$  و  $4$  و  $b-2$  و  $a-1$  هم هندسی است و هم حسابی. واسطه بین  $b$  و  $c$  چند است؟

$$3 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$

اگر جملات یک دنباله هم هندسی باشند و هم حسابی، در آن صورت آن دنباله، دنباله ثابت است یعنی تمام جملات دنباله با هم برابرند.



پاسخ:

$$a-1 = b-2 = c = 4 \quad \longrightarrow \quad c = 4 \text{ و } a = 5 \text{ و } b = 6$$



واسطه‌ی حسابی بین  $b$  و  $c$  برابر است با:

$$\frac{b-c}{2} = \frac{6+4}{2} = 5$$

اگر جملات دنباله‌ی حسابی به عدد ۴ نزدیک شوند، حاصل  $\frac{2d^7 + 4t_7^{11}d^8 + 9t_7^{11}}{4d^{11} + 8t_9^4d^4 + 18t_9^{11}}$  چقدر است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{1}{4} \quad (2) \quad \frac{1}{6} \quad (3) \quad \frac{1}{8} \quad (4)$$

اگر جملات دنباله‌ی حسابی به عددی نزدیک شوند در آن صورت دنباله ثابت است یعنی قدرنسبت صفر و تمام جملات دنباله با همان عددی که دنباله به آن نزدیک می‌شوند، برابرند.



$d=0$  و  $t_1 = t_2 = t_3 = \dots = t_n = 4$

پاسخ:



$$\rightarrow \frac{0 + 0 + 9 \times 4^{11}}{0 + 0 + 184^{11}} = \frac{1}{2}$$

در یک دنباله‌ی حسابی  $t_{16} - t_{12} = 20$  می‌باشد. حاصل  $t_3 - t_2$  چند است؟



- ۵۰ (۱)      ۳۰ (۲)      ۴۰ (۳)      ۲۰ (۴)

در دنباله‌ی حسابی داریم:

$$a_m - a_n = (m-n)d$$



پاسخ:

$$t_{16} - t_{12} = (16-12)d = 20 \rightarrow d = 5$$

$$t_3 - t_2 = (3-2)d = 1 \cdot d = 5$$



در یک دنباله‌ی عددی مجموع جملات ششم و بیستم، ۱۱۶ و حاصل ضرب جملات پنجم و سیزدهم ۱۰۴۴ است. قدر نسبت کدام است؟



- $\frac{1}{5}$  (۱)      ۵ (۲)       $\frac{1}{4}$  (۳)      ۴ (۴)

$$\begin{cases} t_6 + t_{13} = 116 \\ t_5 \times t_{13} = 1044 \end{cases}$$

پاسخ:



$$\text{می‌دانیم: } \frac{20+6}{2} = 13 \rightarrow t_6 + t_{13} = 2t_{13} \rightarrow t_{13} = 58$$

$$t_5 \times t_{13} = 1044 \rightarrow t_5 \times 58 = 1044 \rightarrow t_5 = 18$$

$$\begin{cases} t_{13} = 58 \\ t_5 = 18 \end{cases} \rightarrow d = \frac{18-58}{13-5} = 5$$

اگر  $x_1$  و  $x_2$  و  $x_3$  جملات متوالی یک دنباله حسابی باشد و  $f(x) = 4x-3$  باشد آنگاه  $f(x_1)$  و  $f(x_2)$  و  $f(x_3)$  جملات متوالی یک دنباله:



- (۱) هندسی‌اند      (۲) دنباله‌ای نمی‌سازند      (۳) حسابی‌اند      (۴) قابل بررسی نیست

$$x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } x_3 \rightarrow d = \frac{x_1 + x_3}{2} \rightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$$

پاسخ:



از طرفین ۶ کم کنید  $\rightarrow$   $4x_1 + 4x_3 = 8x_2$   $\rightarrow$  دو طرف را در ۴ ضرب کنید

- $4x_1 + 4x_2 - 6 = 8x_2 - 6$
- $4x_1 - 3 + 4x_2 - 3 = 2(4x_2 - 3)$
- $f(x_1) + f(x_2) = 2f(x_2)$

پس دنباله حسابی می سازند.

در دنباله‌ی حسابی  $a_n$  جمله عمومی  $a_n = 5n + 1$  و در دنباله‌ی حسابی  $b_n$  جمله عمومی  $b_n = 3n + 2$  می باشد. ششمین جمله‌ی مشترک آنها چه عددی است؟



- (۱) ۷۱
- (۲) ۹۲
- (۳) ۸۷
- (۴) ۸۶

پاسخ:



... و ۲۱ و ۱۶ و ۱۱ و ۶: در دنباله‌ی  $a_n$

... و ۱۴ و ۱۱ و ۸ و ۵: در دنباله‌ی  $b_n$

اولین جمله‌ی مشترک ۱۱ است.

از طرفی  $d$  دنباله‌ی جدید ک.م.م دو دنباله یعنی (ک.م.م ۳ و ۵) است.

→  $d = ۱۵$  جدید

۸۶ و ۷۱ و ۵۶ و ۴۱ و ۲۶ و ۱۱: **دنباله‌ی جملات مشترک** →  $d = ۱۵$  و  $t_1 = ۱۱$

در دنباله‌ی حسابی  $a_n$  و  $a_{n-1}$  و ... و  $a_2$  و  $a_1$  اگر جملات اول و آخر به ترتیب ۹ و ۲۲۵ باشند.



مجموع  $(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2})^{-1} + (\sqrt{t_2} + \sqrt{t_3})^{-1} + \dots + (\sqrt{t_{n-1}} + \sqrt{t_n})^{-1}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{n}{18}$
- (۲)  $\frac{n-1}{18}$
- (۳)  $\frac{n}{16}$
- (۴)  $\frac{n-1}{16}$

پاسخ:



$$\frac{1}{\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1}} + \frac{1}{\sqrt{t_3} + \sqrt{t_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{t_{n-1}} + \sqrt{t_n}}$$

$$\frac{\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}}{d} + \frac{\sqrt{t_3} - \sqrt{t_2}}{d} + \dots + \frac{\sqrt{t_n} - \sqrt{t_{n-1}}}{d} = \frac{\sqrt{t_n} - \sqrt{t_1}}{d}$$

همه کسرها را گویا می کنیم:

→ **گویا کنید**  $\frac{t_n - t_1}{d(\sqrt{t_n} + \sqrt{t_1})} = \frac{(n-1)d}{d(15+3)} = \frac{n-1}{18}$

در یک دنباله‌ی حسابی  $t_{20} = x$  و  $t_x = 20$  و ... در این صورت  $t_{x+20}$  کدام است؟ ( $x \neq 20$ )



پاسخ:

$$\begin{cases} t_{20} = t_1 + 19d = x \\ t_x = t_1 + (x-1)d = 20 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم کنید}} 19d - (x-1)d = x-20$$



$$20d - xd = x-20 \quad \rightarrow \quad d = -1$$

$$t_{x+20} = t_1 + (x+19)d = \underbrace{t_1 + 19d}_x + xd \xrightarrow{d=-1} x - x = 0$$

اگر جملات دنباله‌ی حسابی  $1+2x$  و  $2+x$  و  $1-x$  را در عدد حقیقی  $m$  ضرب کنیم، قدر نسبت دنباله جدید ۴۸ می‌شود.  $m$  چند است؟



(۱)  $-14$  (۲)  $-12$  (۳)  $-18$  (۴)  $-16$

پاسخ:

$$\frac{1-x+1+2x}{2} = 2+x \quad \rightarrow \quad x+2 = 4+2x \quad \rightarrow \quad x = -2$$



$$\rightarrow -3 \text{ و } 0 \text{ و } 3 \xrightarrow{\text{در } m \text{ ضرب کنید}}$$

$$\rightarrow -3m \text{ و } 0 \text{ و } 3m$$

$$d = -3m \text{ جدید}$$

$$-3m = 48 \quad \rightarrow \quad m = -16$$

در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی هفتم ۵ برابر جمله‌ی سوم است. حاصل  $\frac{t_{10}}{t_7}$  کدام است؟



(۱)  $2/1$  (۲)  $1/6$  (۳)  $2/2$  (۴)  $1/4$

پاسخ:

$$t_7 = 5t_3 \quad \rightarrow \quad t_1+6d = 5(t_1+2d) \quad \rightarrow \quad t_1 = -d$$



$$\rightarrow \frac{t_{10}}{t_7} = \frac{t_1+9d}{t_1+6d} = \frac{-d+9d}{-d+6d} = \frac{8d}{5d} = \frac{8}{5} = 1.6$$

در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات سوم و پنجم و هشتم، دو برابر جمله ششم است. کدام جمله این دنباله برابر صفر است؟



(۱) دهم (۲) چهارم (۳) سوم (۴) نهم

$$t_3+t_5+t_8 = 2t_6$$

پاسخ:

$$\rightarrow t_1+2d + t_1+4d + t_1+7d = 2(t_1+5d)$$



$$\rightarrow 3t_1 + 13d = 2t_1 + 10d \quad \rightarrow \quad t_1 + 3d = 0 \quad \rightarrow \quad t_4 = 0$$