



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

مجموعه کتاب های
آموزشی مبحثی ریاضیات

دنباله هندسی

مؤلف:

مهندس مازیار احمدی ناو

۱۳۹۶

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سرشناسه	:	احمدی ناو، مازیار، ۱۳۵۶-
عنوان و نام پدیدآور	:	مجموعه کتاب های آموزشی مبحثی ریاضیات، دنباله هندسی / مولف مازیار احمدی ناو
مشخصات نشر: رشت	:	انتشارات رمه، ۱۳۹۶.
مشخصات ظاهری	:	۲۷ ص.
شابک	:	
وضعیت فهرست نویسی	:	فیبا
موضوع	:	
موضوع	:	
موضوع	:	
موضوع	:	
رده بندی کنگره	:	
رده بندی دیویی	:	
شماره کتاب شناسی ملی	:	

- عنوان کتاب: مجموعه کتاب های آموزشی مبحثی ریاضیات، دنباله هندسی
- مولف: مازیار احمدی ناو
- ناشر: انتشارات رمه
- نوبت چاپ: اول - ۱۳۹۶
- چاپ و صحافی: معراج
- شمارگان: ۱۰۰۰ عدد
- بهاء: ۳۵۰۰۰ ریال
- شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۶۸۹۲-۳۳-۷

کلیه حقوق برای مولف محفوظ است و هرگونه کپی برداری به موجب قانون پیگرد قانونی دارد.

تلفن دفتر فروش: ۳۳۱۲۳۳۷۸ - ۰۱۳

مقدمه

کتابی که مطالعه می فرمایید از سری کتاب های آموزش مبحثی ریاضیات، (مبحث دنباله ی هندسی) است. این مبحث در رشته های ریاضی فیزیک، تجربی و علوم انسانی آموزش داده می شود و در اکثر سال ها در سوالات کنکور از این مبحث سوال مطرح می گردد. دنباله ی هندسی به عنوان یک مبحث پایه ای در ریاضیات از اهمیت خاصی برخوردار است. و در سال های بعد نیز در بسیاری از مباحث نظیر دنباله های سال چهارم، (بررسی کرانداری و همگرایی و واگرایی) احتمال، سری ها و ... نیز کاربرد دارد. هدف از تالیف کتاب های مبحثی آموزش ریاضیات، تعمیق و تفهیم کامل مفاهیم به دانش آموزان همراه با مثال های مختلف از سوالات کنکورهای سراسری و آزاد سنوات گذشته داخل و خارج کشور و نیز کنکورهای آزمایشی معتبر می باشد. دانش آموزان با مطالعه کامل و دقیق این کتاب ها کاملا می توانند بر این مبحث مسلط شده و به سوالات طرح شده از آن پاسخ دهند. در آخر عنوان می دارم که قطعاً این مجموعه عاری از نقص نبوده و از عزیزانی که به مطالعه این کتاب می پردازند خواهشمندم نظرات و انتقادات و پیشنهادات خود را با شماره ۰۹۱۱۱۳۷۴۰۵۷ با بنده در میان بگذارند. همچنین از زحمات همکار گرامی و خواهر بزرگوارم خانم شروین مجرد که همواره در تالیف مجموعه کتاب های آموزش مبحثی ریاضیات بنده را همراهی کردند نهایت تشکر و امتنان را دارم.

مازیار احمدی ناو

فروردین ۱۳۹۶

تقدیم به

برادر عزیزم

سپاس

بابت تمام زحماتی که برای پدر و مادرمان کشیدی

تقدیم به

غلامرضای عزیزم

فهرست:

- ۱ دنباله ی هندسی - قدر نسبت - جمله ی عمومی - یکنوایی
- ۲ واسطه ی هندسی - درج m واسطه ی هندسی بین دو عدد
- ۳ ارتباط دنباله ی حسابی و هندسی
- ۴ تا ۱۵ مثال های دنباله ی هندسی با پاسخ تشریحی
- ۱۵ حاصل ضرب های n جمله ی اول دنباله ی هندسی
- ۱۵ تا ۲۰ مثال های دنباله ی هندسی با پاسخ تشریحی
- ۲۰ نکاتی از روابط بین ریشه های معادله ی درجه ی دوم
- ۲۰ تا ۲۱ مثال های دنباله ی هندسی با پاسخ تشریحی

دنباله هندسی

دنباله ای را که هر جمله ی آن (غیر از جمله اول) با ضرب یک عدد ثابت در جمله ی قبلی بدست آید را دنباله ی هندسی می گوئیم و به آن عدد ثابت قدر نسبت دنباله گفته و با q و جمله ی اول را با a نشان می دهیم.

مثلاً در دنباله ی $2, 6, 18, 54, \dots$ داریم $q = 3, a = 2$

چگونه قدر نسبت را پیدا کنیم؟

اگر بخواهیم قدرنسبت یک دنباله هندسی با جملات غیرصفر را پیدا کنیم، کافی است هر جمله دلخواه را بر جمله ی

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \text{مثلاً} \quad q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_8}{a_7} = \dots$$
 قبلی تقسیم کنیم.

جمله ی عمومی یک دنباله هندسی

فرض کنید در یک دنباله ی هندسی جمله ی اول a و قدر نسبت q باشد در آن صورت برای بدست آوردن مقدار هر

$$a_n = aq^{n-1} \quad \text{جمله داریم:}$$

$$a_1 = aq^0 \quad \text{یا} \quad a_n = aq^n \quad \text{مثلاً}$$

تشخیص صعودی یا نزولی بودن دنباله ی هندسی ($a > 0$)

اگر $q = 1$ باشد دنباله به دنباله ی ثابت تبدیل می شود که هم صعودی است و هم نزولی

اگر $q < 0$ باشد دنباله نه صعودی است و نه نزولی

اگر $0 < q < 1$ باشد دنباله نزولی است

اگر $q > 1$ باشد دنباله صعودی است.

تشخیص صعودی یا نزولی بودن دنباله ی هندسی ($a < 0$)

اگر $q = 1$ باشد دنباله به دنباله ی ثابت تبدیل می شود که هم صعودی است و هم نزولی

اگر $q < 0$ باشد دنباله نه صعودی است و نه نزولی

اگر $0 < q < 1$ باشد دنباله صعودی است

اگر $q > 1$ باشد دنباله نزولی است

واسطه ی هندسی

فرض کنید a, b, c سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشند در این صورت b را واسطه ی هندسی یا میانگین هندسی بین دو عدد a, c می نامیم.

$$b^2 = ac$$

درج m واسه ی هندسی بین دو عدد

اگر بخواهیم بین دو عدد a, b به تعداد m عدد طوری قرار دهیم که با این دو عدد دنباله ی هندسی تشکیل دهند داریم:

$$a, \underbrace{\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \dots, \bigcirc}_{m \text{ واسه ی هندسی}}, b \Rightarrow q^{m+1} = \frac{b}{a}$$

نکته ۱

اگر a, b, c, d چهار جمله متوالی دنباله ی هندسی باشند، $ad = bc$

نکته ۲

اگر a, b, c, d, e پنج جمله متوالی دنباله ی هندسی باشند، $c^2 = ae = bd$

نکته ۳

فرض کنید در یک سوال بدانیم ۳ جمله دنباله هندسی می سازند ولی مقدار آنها را نداشته باشیم به صورت $\frac{a}{q}, a, aq$ نشان می دهیم.

نکته ۴

حال اگر بدانیم ۵ جمله دنباله هندسی می سازند و مقدار آنها را نداشته باشیم در آن صورت آنها را به صورت

$$\frac{a}{q^2}, \frac{a}{q}, a, aq, aq^2 \text{ نشان می دهیم.}$$

مثال ۱ جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله ی حسابی می توانند ۳ جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی

باشند. قدر نسبت دنباله ی هندسی کدام است؟

$$(۱) \quad \frac{۵}{۳} \quad (۲) \quad \frac{۷}{۴} \quad (۳) \quad \frac{۷}{۳} \quad (۴) \quad \frac{۹}{۴}$$

درسنامه

اگر a_m, a_n, a_k سه جمله از یک دنباله ی حسابی، ۳ جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشند، قدر نسبت

$$q = \frac{k-n}{n-m} \Rightarrow a_r, a_\delta, a_{12} \Rightarrow q = \frac{۱۲-۵}{۵-۲} = \frac{۷}{۳} \quad \text{دنباله ی هندسی برابر است با:}$$

مثال ۲ در یک دنباله هندسی، جمله دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می توانند ۳ جمله متوالی از یک

دنباله ی حسابی باشند. بزرگ ترین این ۳ عدد چند برابر کوچکترین آنهاست؟

$$(۱) \quad ۲ + \sqrt{۳} \quad (۲) \quad ۵ + ۲\sqrt{۳} \quad (۳) \quad ۵ + ۴\sqrt{۳} \quad (۴) \quad ۷ + ۴\sqrt{۳}$$

$$\frac{a_r + a_\lambda}{۲} = ۲a_\delta \Rightarrow a_r + a_\lambda = ۴a_\delta$$

$$\Rightarrow ۴aq^r = aq + aq^\lambda \Rightarrow aq(۴q^r) = aq(۱ + q^\lambda)$$

$$q^r - ۴q^\lambda + ۱ = ۰ \quad q^r \equiv A \Rightarrow A^2 - ۴A + ۱ = ۰ \quad A = ۲ \pm \sqrt{۳}$$

$$q^r = ۲ + \sqrt{۳}, \quad q^r = ۲ - \sqrt{۳} \Rightarrow q = \sqrt[۳]{۲ - \sqrt{۳}}, q = \sqrt[۳]{۲ + \sqrt{۳}}$$

در حالت اول دنباله نزولی است

$$\frac{\text{بزرگ ترین عدد}}{\text{کوچک ترین عدد}} = \frac{a_r}{a_\lambda} = \frac{aq}{aq^\lambda} = q^{-r} \Rightarrow \left(\sqrt[۳]{۲ - \sqrt{۳}}\right)^{-۶} = (۲ - \sqrt{۳})^{-۲}$$

$$= \frac{۱}{(۲ - \sqrt{۳})^۲} = \frac{۱}{۴ + ۳ - ۴\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۷ - ۴\sqrt{۳}}$$

در حالت دوم دنباله صعودی است

$$\frac{\text{بزرگ ترین عدد}}{\text{کوچک ترین عدد}} = \frac{a_\lambda}{a_r} = \frac{aq^\lambda}{aq} = q^r \Rightarrow \left(\sqrt[۳]{۲ + \sqrt{۳}}\right)^۶ = (۲ + \sqrt{۳})^۲$$

$$۴ + ۳ + ۴\sqrt{۳} = ۷ + ۴\sqrt{۳}$$

مثال ۳ بین دو عدد ۳۲۴ و ۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله ی هندسی دهند.

مجموع این پنج عدد مثبت کدام است؟

۴۸۸ (۴)
۴۸۶ (۳)
۴۸۴ (۲)
۴۸۲ (۱)

$$\begin{array}{c}
 4 \quad \quad \quad 324 \\
 \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 a \quad \quad \quad a_0
 \end{array}
 \Rightarrow aq^4 = 324 \Rightarrow 4q^4 = 324 \Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow q = \pm 3$$

چون سوال گفته جملات مثبت اند پس $q = 3$

$$\Rightarrow 4, 12, 36, 108, 324 \Rightarrow \text{جمع } 5 \text{ عدد} = 484$$

مثال ۴ در یک دنباله هندسی مجموع ۳ جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن ها ۲۱۶ می باشد. تفاضل کوچکترین

و بزرگ ترین این سه عدد کدام است؟

۷ (۴)
۶ (۳)
۵ (۲)
۴ (۱)

سه جمله را $\frac{a}{q}, a, aq$ می گیریم.

$$\frac{a}{q} \times a \times aq = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{a}{q} + a + aq = 19 \Rightarrow \frac{a=6}{q} + 6 + 6q = 19$$

$$\xrightarrow{\times q} 6 + 6q + 6q^2 = 19q \Rightarrow 6q^2 - 13q + 6 = 0 \cdot \begin{cases} q = \frac{3}{2} \\ q = \frac{2}{3} \end{cases}$$

اگر $q = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{q}, a, aq \Rightarrow 4, 6, 9$

$$\Rightarrow \max - \min = 9 - 4 = 5$$

اگر $q = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{q}, a, aq \Rightarrow 9, 6, 4$

مثال ۵ در یک دنباله هندسی صعودی به صورت $\dots, b, 9, a, 4$ مجموع ۶ جمله ی اول کدام است؟

$83 \frac{1}{8}$ (۴)
 $82 \frac{3}{8}$ (۳)
 $81 \frac{7}{8}$ (۲)
 $81 \frac{3}{8}$ (۱)

$$4, a, 9 \Rightarrow a^2 = 4 \times 9 \Rightarrow a = \pm 6$$

$$a = 6 \Rightarrow 4, 6, 9 \Rightarrow q = \frac{3}{2}$$

$$a = -6 \Rightarrow 4, -6, 9 \Rightarrow q = -\frac{3}{2} \text{ (دنباله صعودی است) غ ق ق ق}$$

هر جمله در $\frac{3}{2}$ ضرب می شود $4, 6, 9, \frac{27}{2}, \frac{81}{4}, \frac{243}{8}$

$$\Rightarrow \text{مجموع 6 جمله} = 4 + 6 + 9 + \frac{27}{2} + \frac{81}{4} + \frac{243}{8} = \frac{243}{8} = 83 \frac{1}{8}$$

مثال ۶ در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ می باشد. مجموع ۶ جمله اول کدام است؟

$$13/4 \text{ (۴)}$$

$$12/6 \text{ (۳)}$$

$$11/2 \text{ (۲)}$$

$$10/8 \text{ (۱)}$$

$$\boxed{a + aq^2 = 1} \quad I$$

$$a + aq + aq^2 + aq^3 = 3 \xrightarrow{a + q^2 = 1} aq + aq^2 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow aq + aq^2 = 2 \Rightarrow \boxed{aq(1 + q^2) = 2} \quad II$$

$$\frac{II}{I} = \frac{aq(1 + q^2)}{a(1 + q^2)} = \frac{2}{1} \Rightarrow q = 2$$

حال اگر در رابطه I قرار دهیم $a = \frac{1}{5}$

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{16}{5}, \frac{32}{5} = \frac{63}{5} = 12 \frac{3}{5}$$

مثال ۷ بین ۲ عدد ۲، $16\sqrt{2}$ شش عدد چنان درج شده اند که ۸ عدد حاصل دنباله ی هندسی تشکیل داده اند. مجموع این ۸ عدد کدام است؟

$$36(\sqrt{2} + 1) \text{ (۴)}$$

$$30(\sqrt{2} + 1) \text{ (۳)}$$

$$48\sqrt{2} \text{ (۲)}$$

$$30(\sqrt{2} + 2) \text{ (۱)}$$



$$a_8 = aq^7 \Rightarrow 16\sqrt{2} = q^7 \Rightarrow q^7 = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$$

$$q = \sqrt[7]{8\sqrt{2}} = \sqrt[7]{2^3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[7]{2^{\frac{7}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

که مجموع آنها برابر $30(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow 30 + 30\sqrt{2} \Rightarrow 30, 30\sqrt{2}, 60, 60\sqrt{2}, 90, 90\sqrt{2}, 120, 120\sqrt{2} \Rightarrow 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8, 8\sqrt{2}, 16, 16\sqrt{2}$

مثال ۸ در یک دنباله ی هندسی $a_1 a_3 a_5 = 8 a_2 a_4 a_6$ قدر نسبت این دنباله کدام است؟

$$\sqrt[2]{2} \quad (۴) \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad (۳) \qquad 2 \quad (۲) \qquad \frac{1}{2} \quad (۱)$$

با حذف a_5 از طرفین $aaq^2 = 8aq^5 \times aq^6$

$$\Rightarrow q^9 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \sqrt[9]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

مثال ۹ در یک دنباله ی هندسی $a_2 a_3 a_4 = 8$ حاصل $a_1 \cdot a_5$ کدام است؟

$$16 \quad (۴) \qquad 2 \quad (۳) \qquad 8 \quad (۲) \qquad 4 \quad (۱)$$

$$aaq^2 aq^3 aq^4 = 8 \Rightarrow a^3 q^9 = 8 \Rightarrow (aq^3)^3 = 8 \Rightarrow aq^3 = 2$$

حاصل می خواهیم حاصل $a_1 \cdot a_5$ را حساب کنیم:

$$a \times aq^4 = a^2 q^4 = (aq^3)^2 = (2)^2 = 4$$

مثال ۱۰ در یک دنباله ی هندسی قدر نسبت برابر $\frac{1}{2}$ است. حاصل $\frac{a_5 + a_7}{a_8 + a_{10}}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۴) \qquad 2 \quad (۳) \qquad 8 \quad (۲) \qquad \frac{1}{8} \quad (۱)$$

$$\frac{aq^4 + aq^6}{aq^7 + aq^9} = \frac{aq^4(1 + q^2)}{aq^7(1 + q^2)} = \frac{1}{q^3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

مثال ۱۱ در یک دنباله ی هندسی مجموع جملات اول و دوم $\frac{9}{2}$ و مجموع جملات چهارم و پنجم 36 می باشد. جمله

سوم این دنباله کدام است؟

$$12 \quad (۴) \qquad 9 \quad (۳) \qquad 8 \quad (۲) \qquad 6 \quad (۱)$$

$$a + a_2 = a + aq = \frac{9}{2}$$

$$a_4 + a_5 = aq^3 + aq^4 = 36 \Rightarrow q^3(a + aq) = 36$$

$$a + aq = \frac{9}{2} \text{ می دانیم}$$

$$\Rightarrow q^3 \times \frac{9}{2} = 36 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

$$a + aq = \frac{9}{2} \Rightarrow a + 2a + \frac{9}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a_3 = aq^2 = \frac{3}{2} \times 4 = 6 \text{ حالا هم جمله ی اول و هم قدر نسبت را داریم}$$

مثال ۱۲ در یک دنباله هندسی حاصل ضرب جملات هشتم و بیستم برابر ۱۰۸ است. اگر جمله سیزدهم ۹ باشد،

جمله ی پانزدهم کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

$$a_8 \times a_{20} = 108 \Rightarrow aq^7 \times aq^{19} = 108 \Rightarrow a^2 q^{26} = 108$$

$$a_{13} = 9 \Rightarrow aq^{12} = 9$$

$$\frac{a^2 q^{26}}{aq^{12}} = \frac{108}{9} \Rightarrow aq^{14} = 12 \Rightarrow a_{15} = 12$$

با تقسیم ۲ رابطه بر هم:

مثال ۱۳ بزرگ ترین جمله ی دنباله ی هندسی $a, b, \frac{1}{3}, c, d, \frac{1}{24}$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{8}{3}$ (۲)

۱ (۱)


$$a_3 = \frac{1}{4}, a_6 = \frac{1}{24}, aq^2 = \frac{1}{4}, aq^5 = \frac{1}{24}$$

$$\text{با تقسیم بر هم} \frac{aq^5}{aq^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24} = \frac{4}{3} \text{ بزرگ ترین جمله}$$

مثال ۱۴ کوچک ترین جمله ی دنباله ی $a_n = \left(-\frac{3}{7}\right)^{n+1}$ کدام است؟

- (۱) $\left(-\frac{3}{7}\right)^3$ (۲) $\left(-\frac{3}{7}\right)^2$ (۳) $\left(-\frac{3}{7}\right)^4$ (۴) $\left(-\frac{3}{7}\right)^5$

جملات دنباله $\left(-\frac{3}{7}\right)^2, \left(-\frac{3}{7}\right)^3, \left(-\frac{3}{7}\right)^4, \left(-\frac{3}{7}\right)^5, \dots$


نکته

در دنباله های C^n وقتی $0 < C < 1$ همواره بیشترین و کمترین جمله بین جمله ی اول و دوم هستند.

مثال ۱۵ در دنباله ی هندسی با جمله ی عمومی $a_n = 7 \times 3^{2n+1}$ قدر نسبت چند است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۴۹

نکته

در فرمول جمله ی عمومی دنباله ی هندسی به صورت $a_n = a \times b^{cn+d}$ قدر نسبت برابر b^c است.

$$\Rightarrow 3^2 = 9$$

مثال ۱۶ واسطه ی هندسی بین عدد $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) وجود ندارد (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

واسطه ی هندسی بین دو عدد a, b برابر \sqrt{ab} است.

$$\Rightarrow \sqrt{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \sqrt{-1} \quad \text{وجود ندارد}$$

مثال ۱۷ اعداد $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$ سه جمله ی متوالی از دنباله ی هندسی اند. واسطه ی عددی بین a, b کدام

است؟

- (۱) $2/5$ (۲) ۲ (۳) $1/5$ (۴) ۵

چون $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$ دنباله ی هندسی می سازند پس

$$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 32 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a + b = 5$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} = 2/5 \quad \text{واسطه ی حسابی بین } a, b \text{ برابر } \frac{a+b}{2} \text{ است.}$$

مثال ۱۸ سه عدد $3, a, 27$ جملات متوالی دنباله ی عددی است. از عدد a چند واحد کم شود تا دنباله ی

هندسی بدست آید؟

$$7 \quad (4) \qquad 6 \quad (3) \qquad 4 \quad (2) \qquad 3 \quad (1)$$

$$3, a, 27 \xrightarrow{\text{دنباله ی حسابی}} \frac{3 + 27}{2} = a \Rightarrow 2a = 30 \Rightarrow a = 15$$

در دنباله ی هندسی $3, a, 27$ داریم

$$a^2 = 3 \times 27 \Rightarrow a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$$

پس از a ، ۶ واحد کم شده است.

قاعده ی اندیس ها در دنباله ی هندسی

$$\text{اگر } m + n = r + s \Rightarrow a_m \cdot a_n = a_r \cdot a_s$$

$$\Rightarrow \text{اگر } \frac{m+n}{2} = s \Rightarrow a_m \cdot a_n = a_s^2$$

مثال ۱۹ در یک دنباله ی هندسی حاصل ضرب جملات سوم تا ششم برابر ۳ است. حاصل ضرب ۸ جمله ی اول

آن کدام است؟

$$a_3 a_4 a_5 a_6 = 2 \xrightarrow{a_3 a_6 = a_4 a_5} (a_4 a_5)^2 = 3 \Rightarrow a_4 a_5 = \sqrt{3}$$

$$a_1 a_2 \dots a_8 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = \underbrace{a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6}_{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} =$$

$$3 a_1 \cdot a_2 \cdot a_7 \cdot a_8 = 3(a_1 a_8)(a_2 a_7)$$

$$a_4 a_5 = a_7 a_8 = a_1 a_8 \quad \text{طبق قاعده اندیس ها} \Rightarrow 3(\sqrt{3})(\sqrt{3}) = 9$$

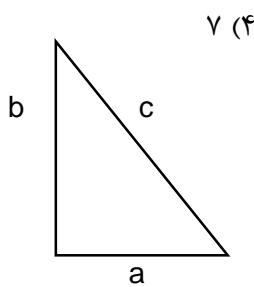
مثال ۲۰ در یک دنباله ی هندسی، جمله چهارم میانگین جملات دوم و سوم می باشد. مجموع مقادیر بدست آمده برای قدر نسبت کدام است؟

$$a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2} \Rightarrow aq^3 = \frac{aq + aq^2}{2}$$

$$\Rightarrow aq + aq^2 = 2aq^3 \Rightarrow \cancel{aq}(1 + q) = 2\cancel{aq}.q^2$$

$$\Rightarrow 2q^2 - q - 1 = 0 \Rightarrow q = 1, q = -\frac{1}{2} \Rightarrow q \text{ جمع مقادیر } = \frac{1}{2}$$

مثال ۲۱ در یک مثلث قائم الزاویه اضلاع تشکیل دنباله ی هندسی می دهند. اگر سینوس کوچکترین زاویه را به صورت $\frac{\sqrt{x-y}}{z}$ نشان دهیم حاصل $x + y + z$ کدام است؟



۷ (۴)

۸ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

$a, b, c \Rightarrow$ دنباله هندسی می سازند

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ b^2 = ac \end{cases} \Rightarrow a^2 + ac = c^2$$

معادله درجه ی دوم را بر حسب a حل کنید.

$$a = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4(-c^2)}}{2} = \frac{-c \pm \sqrt{5}c}{2} = \frac{c(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

$$a = \frac{(-1 - \sqrt{5})c}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad (\text{نسبت طول ها منفی می شود}) \quad \text{غ ق ق}$$

$$a = \frac{(-1 + \sqrt{5})c}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow x + y + z = 5 + 1 + 2 = 8$$

مثال ۲۲ در دنباله ی هندسی ... $8^{3m}, 6^{2m-1}, 4^{m+1}$ مقدار m در کدام نامساوی می تواند قرار بگیرد؟

$m < 1/5$ (۴)

$m > 1/5$ (۳)

$m < 1$ (۲)

$m > 4$ (۱)

$$((16)^{2m-1})^2 = 4^{m+1} \times 8^{3m} \Rightarrow 2^{16m-8} = 2^{2m+2+9m}$$

$$\Rightarrow 16m - 8 = 11m + 2 \Rightarrow m = 2$$

گزینه ۳ صحیح است

مثال ۲۳ اعداد $3 + \sqrt{5}, x, 3 - \sqrt{5}$ جملات متوالی از دنباله هندسی نزولی اند. قدر نسبت کدام است؟

$$(1) \frac{1}{3}(3 - \sqrt{5}) \quad (2) \text{نشدنی} \quad (3) \frac{1}{4}(3 + \sqrt{5}) \quad (4) 3 - \sqrt{5}$$

$$(\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} - 3) = x^2 \Rightarrow x^2 = 5 - 9 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow \text{نشدنی است}$$

مثال ۲۴ در یک دنباله هندسی مجموعه جملات اول و سوم، $\frac{1}{3}$ برابر مجموع جمله های دوم و چهارم است و

مجموع ۴ جمله ی اول برابر ۱۶۰ است. مجموع جملات اول و دوم و سوم چقدر است؟

$$(1) 32 \quad (2) 48 \quad (3) 52 \quad (4) 38$$

$$a(1 + q + q^2 + q^3) = 160 \quad (1)$$

$$aq(1 + q^2) = 3a(1 + q^2) \Rightarrow q = 3 \quad (2)$$

با جاگذاری (۲) یعنی $q = 3$ در رابطه ی (۱) داریم:

$$a(1 + 3 + 9 + 27) = 160 \Rightarrow a = 4$$

$$52 = \text{مجموع ۳ جمله} \Rightarrow 4, 12, 36$$

مثال ۲۵ در یک دنباله ی هندسی $a_2 + a_4 = -5$ و $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = -32$ مجموع مقادیر

بدست آمده برای q کدام است؟

$$(1) 2 \quad (2) 1/5 \quad (3) 2/5 \quad (4) 3$$

$$\frac{1 + 5}{2} = 3 \Rightarrow a_1 \cdot a_5 = a_3^2 \Rightarrow \frac{2 + 4}{2} = 3 \Rightarrow a_2 + a_4 = a_3^2$$

$$\Rightarrow a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = a_3^2 \cdot a_3^2 \cdot a_3 = a_3^5 = -32 \Rightarrow a_3 = -2$$

$$a_2 + a_4 = -5 \Rightarrow \frac{a_3}{q} + a_3 q = -5 \Rightarrow \frac{-2}{q} - 2q = -5$$

$$\times q \Rightarrow -2q^2 + 5q - 2 = 0 \Rightarrow q = 2, \frac{1}{2} \Rightarrow q \text{ جمع مقادیر} = 2 + \frac{1}{2} = 2.5$$

مثال ۲۶ اگر α, β جواب های معادله ی $(k + 2)x^2 - 2tx + 9k - 3t = 0$ باشند به ازای چه

مقدار t اعداد $\alpha, 3, \beta$ دنباله ی هندسی می سازند؟

$$\alpha, 3, \beta \xrightarrow{\text{دنباله ی هندسی}} \alpha\beta = 3^2 \Rightarrow \alpha\beta = 9$$

$$P_1 = 2\pi R \quad P_2 = 2\pi \frac{R}{2} + 2\pi \frac{R}{2} = 2\pi R$$

$$P_3 = 2\pi \frac{R}{4} + 2\pi \frac{R}{4} + 2\pi \frac{R}{4} + 2\pi \frac{R}{4} = 2\pi R$$

\Rightarrow دنباله P_1, P_1, P_1, \dots ثابت

مثال ۳۰ واسطه ی هندسی بین جمله نهم و پانزدهم از دنباله $0, 4, 8, \dots$ کدام است؟

$$32\sqrt{7} \quad (4) \quad 16\sqrt{7} \quad (3) \quad 16\sqrt{3} \quad (2) \quad 14\sqrt{6} \quad (1)$$

این دنباله یک دنباله ی حسابی است $d = 4, a = 0$ است.

$$a_9 = a + 8d \Rightarrow a_9 = 32 \quad a_{15} = a + 14d \Rightarrow a_{15} = 56$$

$$\Rightarrow \text{واسطه ی هندسی} = \sqrt{32 \times 56} = 16\sqrt{7}$$

مثال ۳۱ در یک دنباله ی هندسی قدر نسبت جواب معادله ی $5^{2x+1} = 1$ و جمله پنجم برابر $-\frac{1}{16}$ است.

مجموع ۵ جمله ی اول کدام است؟

$$\frac{11}{16} \quad (4) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad -\frac{1}{4} \quad (2) \quad -\frac{11}{16} \quad (1)$$

$$5^{2x+1} = 1 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow q = -\frac{1}{2}$$

$$aq^4 = -\frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{16}a = -\frac{1}{16} \Rightarrow a = -1$$

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16} \text{ مجموع} = -\frac{11}{16}$$

مثال ۳۲ اعداد $3^a, 3\sqrt{3}, 9, b$ جملات متوالی یک دنباله ی هندسی هستند. واسطه ی هندسی بین دو عدد

$b, a\sqrt{3}$ کدام است؟

$$9 \quad (4) \quad \sqrt{3} \quad (3) \quad 3 \quad (2) \quad 3\sqrt{3} \quad (1)$$

$$(3\sqrt{3})^2 = 9 \times 3^a \Rightarrow 27 = 9 \times 3^a \Rightarrow a = 1$$

$$(9)^2 = 3\sqrt{3} \times b \Rightarrow b = 9\sqrt{3}$$

$$\sqrt{9\sqrt{3}} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Leftarrow b \text{ و } a \text{ هندسی بین}$$

مثال ۳۳ در یک دنباله ی عددی جملات اول و نهم و چهل و نهم سه جمله ی متوالی از دنباله ی هندسی

هستند. جمله ی پانزدهم این دنباله چند برابر جمله ی سوم آن است؟

$$4 \quad (4) \qquad 3/5 \quad (3) \qquad 3 \quad (2) \qquad 2/5 \quad (1)$$

$$a, (a + 8d), (a + 48d) \Rightarrow a(a + 48d) = (a + 8d)^2$$

$$\Rightarrow 32ad = 64d^2 \Rightarrow a = 2d$$

$$\frac{a_{15}}{a_3} = \frac{a + 14d}{a + 2d} = \frac{16d}{4d} = 4$$

مثال ۳۴ دنباله ی اعداد $4, x, 2, y, \dots$ جملات متوالی دنباله ی هندسی غیر یکنوا هستند. جمله ششم کدام

است؟

$$\frac{1}{2} \quad (4) \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3) \qquad -\frac{1}{2} \quad (2) \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$a_3 = aq^2 \Rightarrow 2 = 4q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ q = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

چون گفته دنباله غیر نزولی است $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ قبول نیست

$$a_6 = aq^5 = 4 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 = 4 \times -\frac{1}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۳۵ در یک دنباله ی هندسی یکنوا با قدر نسبت q جملات اول و سوم و چهارم تشکیل یک دنباله ی عددی

می دهند. مقدار q کدام می تواند باشد؟ (آزمون های گزینه ۲)

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (4) \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (3) \qquad \frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad (2) \qquad \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$a, aq^2, aq^3 \xrightarrow[\text{دنباله ی حسابی}]{\text{شرط تشکیل}} aq^2 = \frac{a + aq^3}{2} \Rightarrow 2q^2 = 1 + q^3$$

$$\Rightarrow q^3 - 2q^2 + 1 = 0$$

اگر در یک معادله درجه ی سوم مجموع ضرایب صفر باشد حتما یک ریشه ۱ است. یعنی عبارت بر $q - 1$ بخش پذیر است که با تقسیم $q^3 - 2q^2 + 1$ بر $q - 1$ به صورت روبرو می آید.

$$q^3 - 2q^2 + 1 = (q - 1)(q^2 - q - 1) = 0$$

$$\Rightarrow q = 1 \quad q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{چون گفته یکنوا پس } \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ قابل قبول نیست.}$$

مثال ۳۶ سه عدد $a, 2, 3 - a$ جملات متوالی از دنباله ی هندسی غیر صعودی اند. جمله چهارم چند برابر

جمله ی دهم است؟

$$128 \quad (4) \qquad 48 \quad (3) \qquad 64 \quad (2) \qquad 32 \quad (1)$$

$$(a - 3) \times a = 2^2 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow a = -1, 4$$

$$a = 4 \Rightarrow 1, 2, 4 \quad \text{دنباله صعودی است (غ ق ق)}$$

$$a = -1 \Rightarrow -4, +2, -1 \quad \text{غیر صعودی است}$$

$$\frac{a_4}{a_1} = \frac{aq^3}{aq^0} = \frac{1}{q^6} \Rightarrow \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^6} = 64$$

مثال ۳۷ در یک دنباله ی هندسی یک جمله $(\sqrt{3}\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ و جمله ی بعدی آن

$$\text{است. جمله ی بعدی چه عددی است؟ (آزمون های گزینه ۲)}$$

$$\sqrt{3} \quad (4) \qquad \frac{1}{3} \quad (3) \qquad 1 \quad (2) \qquad 3 \quad (1)$$

$$\left(\sqrt{3}\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{3}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{3}^{\sqrt{4}} = \sqrt{3}^2 = 3$$

$$\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}+1} \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}+1} = \left(\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\right)^{\sqrt{2}+1} = 1^{\sqrt{2}+1} = 1$$

$$\text{می دانیم } \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow 3, 1, \frac{1}{3} \quad \text{پس جمله ی اول برابر ۳ و جمله ی بعدی ۱ است.}$$

$$(\sqrt{2^y})^2 = 4^x \times \sqrt[3]{8^z} \Rightarrow 2^y = 2^{2x} \times 2^z \Rightarrow y = 2x + z$$

مثال ۴۲ در یک دنباله ی هندسی حاصل ضرب جملات هشتم و بیستم برابر ۱۰۸ است. اگر جمله ی سیزدهم

برابر ۹ باشد جمله ی پانزدهم کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۵ (۴) ۱۲

$$\begin{cases} a_8 a_{20} = 108 \\ a_{13} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq^7 aq^{19} = 108 \\ aq^{13} = 9 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم کنید}} aq^{14} = 12 \Rightarrow a_{15} = 12$$

مثال ۴۳ جمعیت یک روستا ۱۰۰۰ نفر است. اگر جمعیت این روستا هر سال به اندازه ی $\frac{1}{10}$ جمعیت سال قبل

کاهش یابد پس از ۴ سال چند نفر این روستا را ترک کرده اند؟ (آزمون های گزینه ۲)

- (۱) ۷۲۹ (۲) ۴۰۰ (۳) ۶۰۰ (۴) ۲۷۱

$$a = 1000 \quad a_4 = 1000 - 100 = 900 \Rightarrow q = \frac{9}{10}$$

$$a_4 = aq^3 = 1000 \times \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 729 \quad \text{تعداد ساکنین روستا}$$

$$\Rightarrow 1000 - 729 = 271$$

مثال ۴۴ قدر نسبت یک دنباله ی هندسی برابر ۸ است. قدر نسبت دنباله ی حاصل از لگاریتم اعضا این دنباله

در مبنای $\sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

وقتی اعضا دنباله هندسی می سازند، لگاریتم ها دنباله ی حسابی می سازند

$$\Rightarrow \text{قدر نسبت} = \log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2^3 = 6$$

مثال ۴۵ جمله ی دوم یک دنباله ی هندسی ۱ بوده، جملات اول و سوم نسبت به هم چه نوع اعدادی هستند؟

- (۱) اول (۲) متوالی (۳) معکوس (۴) متناوب

$$a_1, a_2, a_3 \Rightarrow a_2^2 = a_1 a_3 \Rightarrow 1 = a_1 a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{a_1}$$

پس معکوس هستند.

مثال ۴۶ اعداد $c, b, 3$ دنباله ی حسابی و اعداد $c - 1, b - 1, 3$ دنباله ی هندسی ساخته اند. قدر نسبت دنباله

ی حسابی چند برابر دنباله ی هندسی است؟

۱) ۳ ۲) $2/5$ ۳) ۲ ۴) $1/5$

$$c, b, 3 \Rightarrow \frac{c+3}{2} = b \Rightarrow c = 2b - 3 \quad (1)$$

$$c + 1, b - 1, 3 \Rightarrow (b - 1)^2 = 3(c + 1) \quad (2)$$

$$(b - 1)^2 = 3(2b - 3 + 1) \Rightarrow b^2 - 2b + 1 = 6b - 6$$

در دنباله ی هندسی جمله ی دوم صفر می شود \times $b=1$ \checkmark
 $(1) \text{ و } (2) \Rightarrow b^2 - 8b + 7 = 0 \Rightarrow b=7 \quad \checkmark$

$$\begin{aligned} \text{قدر نسبت حسابی} &= b - 3 \Rightarrow 7 - 3 = 4 \\ \text{قدر نسبت هندسی} &= \frac{b-1}{3} = \frac{7-1}{3} = 2 \end{aligned} \Rightarrow \frac{\text{قدر نسبت حسابی}}{\text{قدر نسبت هندسی}} = 2$$

مثال ۴۷ در یک دنباله ی هندسی حاصل ضرب ۹ جمله ی اول برابر ۸ است. حاصل ضرب $a_1 a_3 a_5 a_7 a_9$ چقدر

است؟

۱) $2\sqrt[3]{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt[4]{2}$ ۴) ۴

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_9 = 8 \Rightarrow a \cdot aq \cdot aq^2 \dots aq^8 = 8$$

$$\Rightarrow a^9 q^{1+2+\dots+8} = 8 \Rightarrow a^9 q^{36} = 8 \Rightarrow (aq^4)^9 = 8$$

$$\Rightarrow aq^4 = \sqrt[9]{8} = \sqrt[9]{2^3} = \sqrt[3]{2}$$

$$a_1 a_3 a_5 a_7 a_9 = aq aq^3 aq^5 aq^7 aq^9 = a^5 q^{16} = (aq^4)^4$$

$$(\sqrt[3]{2})^4 = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \times 2} = 2\sqrt[3]{2}$$

مثال ۴۸ اگر a_1, a_2, a_3 سه جمله ی اول یک دنباله ی هندسی با قدر نسبت ۲ باشند کدام گزینه ۳ جمله ی

اول یک دنباله ی هندسی هستند؟

۱) $a_1 + 1, a_2 + a_1, a_2 + a_3$ ۲) $a_1 + 1, a_2 + 4, a_3 + 16$

۳) $a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 3$ ۴) $a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 4$

دنباله ی هندسی با
 $a_1, a_2, a_3 \xrightarrow{q=2} a_1, 2a_1, 4a_1$

$$\{a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 4\} \Rightarrow \{a_1 + 1, 2(a_1 + 1), 4(a_1 + 1)\}$$

گزینه ۴ با جمله ی اول $a_1 + 1$ و قدر نسبت ۲ یک دنباله ی هندسی جدید است.

مثال ۴۹ واسطه ی هندسی بین ۲ عدد 49×40 و 121×250 کدام است؟

- (۱) ۷۷۰۰ (۲) ۷۸۰۰ (۳) ۸۴۰۰ (۴) ۷۸۰۰

واسطه ی هندسی بین دو عدد a, b برابر است با: \sqrt{ab}

$$\sqrt{250 \times 121 \times 40 \times 49} = \sqrt{49 \times 121 \times 10000} = 7 \times 11 \times 100 = 7800$$

مثال ۵۰ پنج عدد $\frac{5}{3}, c, b, a, \frac{5}{12}$ به ترتیب جمله های متوالی یک دنباله ی هندسی هستند. b کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{5}$

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{5}{3} \\ a_5 = \frac{5}{12} \Rightarrow aq^4 = \frac{5}{12} \end{array} \right\} \frac{5}{12} = \frac{5}{3} \times q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2}$$

$$b = a_3 = aq^2 = \frac{5}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

مثال ۵۱ در دنباله ی هندسی غیر صعودی $y, 4, x, 2$ مقدار y کدام است؟

- (۱) $-4\sqrt{2}$ (۲) $-2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

$$x^2 = 2 \times 4 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x = 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{قبول نیست زیرا دنباله صعودی می شود} \leftarrow x = -2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow q = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \Rightarrow y = -4\sqrt{2}$$

مثال ۵۲ بین دو عدد ۲ و ۱۶۲ چنان ۳ عدد درج کرده ایم که ۵ عدد حاصل دنباله ی هندسی می سازند. جمع

این ۳ عدد کدام است؟

- (۱) ۸۴ (۲) ۶۸ (۳) ۷۸ (۴) ۷۲

مثال ۵۵ اگر در معادله ی $x^2 - (b - a)(b + c)x + (a + b)(c - b) = 0$ حاصل ضرب ریشه

های معادله مساوی با مجموع ریشه های آن باشد، آنگاه:

$$(۱) \quad b \text{ واسطه ی عددی است بین } a \text{ و } b \quad (۳) \quad c \text{ واسطه ی عددی است بین } a \text{ و } b$$

$$(۲) \quad b \text{ واسطه ی هندسی است بین } a \text{ و } b \quad (۴) \quad b \text{ واسطه ی هندسی است بین } a \text{ و } c$$

$$\text{جمع ریشه ها} = -\left(\frac{b}{a}\right) = (b - a)(b + c)$$

$$\text{ضرب ریشه ها} = \frac{c}{a} = (a + b)(c - b)$$

$$\Rightarrow (b - a)(b + c) = (a + b)(c - b)$$

$$b^2 + bc - ab - ac = ac - ab + bc - b^2$$

$$\Rightarrow 2b^2 = 2ac \Rightarrow b^2 = ac$$

پس b واسطه ی هندسی بین a و c است.