

فصل دوم

مجموعه اعداد طبیعی و خواص آن

(نظریه اعداد)

رابطه پشتکار با شخصیت انسان مثل : رابطه ی کربن است با فولاد

«هوالحق»

سینه ای که خالی از ذکر خداست، چون محکمه ای است که قاضی در آن ندارد ...

حساب و مجموعه های اعداد

نظریه ی اعداد

شاخه ای از ریاضیات است که درباره ی مجموعه ی

اعداد طبیعی و خواص آنها بحث می کند

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{N} = \{1\} \cup \{\text{اعداد اول}\} \cup \{\text{اعداد مرکب}\}$$

		N		
1		17	13	
	1	11	14	16
2		3	6	12
		5	8	10
		7		

عدد اول

هر عدد طبیعی که فقط ۲ مقسوم علیه داشته باشد را عدد اول می گویند. به عبارتی هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که

$$P = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$$
 فقط بر خودش و یک بخش پذیر باشد را اول گویند.

عدد مرکب

هر عدد طبیعی که بیشتر از ۲ مقسوم علیه داشته باشد را عدد مرکب گویند. $M = \{4, 6, 8, 9, 10, \dots\}$

توجه کنید که :

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$									
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
نه اول نه مرکب	اول	اول	2^2	اول	3×3	اول	2^3	3×3	2×5

قضیه ی بنیادی حساب

هر عدد طبیعی بزرگتر از یک یا اول است و یا اینکه به عوامل اول تجزیه می شود و شکلی منحصر به فرد دارد.

📖 مثال : عدد ۳۵۰۰۰ و ۴۲۰ و ۳۷۰ و ۱۰۰۰۰ را تجزیه کنید.

تمرین

(۱) اول یا مرکب بودن هر عدد زیر را مشخص کنید.

۱۰۳ و ۱۲۳۲۱ و ۹۱ و ۹۷ و ۵۳ و ۱۱۰۱ و ۸۱ و ۲۶

(۲) شمارنده های ۴۲ را بنویسید.

(۳) شمارنده های صحیح ۵۱ را بنویسید.

(۴) مضارب طبیعی ۷ را بنویسید.

(۵) مضارب صحیح دو رقمی ۶ را بنویسید.

(۶) حاصل عبارات زیر را بنویسید.

$$(۱۲ \text{ و } ۱۳) = \quad (۷ \text{ و } ۸) = \quad (۱ \text{ و } ۲۰) = \quad (۴۲ \text{ و } ۲۴) =$$

$$(۱۳ \text{ و } ۱۷) = \quad (۳ \text{ و } ۷) = \quad (۳۶ \text{ و } ۱۸) =$$

(۷) جملات زیر را کامل کنید.

تنها مضرب اول ۷ عدد است.

شمارنده های اول عدد ۳۰ برابر است.

شمارنده های اول 9^6 برابر عدد

شمارنده های اول عدد $A = 25^4 \times 8^7$ برابر می باشد.

اگر مجموع دو عدد اول عددی فرد شود حتماً یکی از آن ها عدد می باشد.

دو عدد متوالی طبیعی نسبت به هم هستند.

دو عدد اول نسبت به هم هستند.

۸) کوچکترین عدد طبیعی را بنویسید که فقط ۴ عامل اول داشته باشد.

کوچکترین عدد طبیعی فرد را بنویسید که فقط ۳ عامل اول داشته باشد.

کوچکترین عدد طبیعی فرد را بنویسید که ۳ عامل اول داشته باشد و مضرب ۱۱ باشد.

۹) سه عدد مرکب بنویسید که نسبت به هم اول باشند.

دو عدد مرکب بنویسید که ب.م.م آن ها بزرگترین عدد اول یک رقمی باشد.

ویژگی های اعداد مرکب :

- ۱ - تجزیه پذیرند.
- ۲ - نامتناهی اند.

ویژگی های اعداد اول :

- ۱ - تجزیه ناپذیرند.
- ۲ - نامتناهی اند.
- ۳ - الگوی ساخت ندارند.

الگوی ساخت اعداد اول به روش اولر

$$n \in w \rightarrow A = n^2 + n + 41$$

$$n = 0 \rightarrow$$

$$n = 1 \rightarrow$$

$$n = 2 \rightarrow$$

$$\vdots$$

$$n = 41 \rightarrow$$

دلیل رد فرمول اولر

«تعیین اعداد اول در یک سری از اعداد متوالی به روش غربال ابوعلی سینا»

می خواهیم اعداد اول ۱ تا ۶۰ را پیدا کنیم:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰

مراحل کار:

۱ - عدد یک را حذف می کنیم.

۲ - مضارب عدد ۲ را به غیر از خودش خط می زنیم ← اولین مضرب خط خورده ی ۲ عدد.....

۳ - مضارب عدد ۳ را به غیر از خودش خط می زنیم ← اولین مضرب خط خورده ی ۳ عدد.....

۴ - مضارب عدد ۵ را به غیر از خودش خط می زنیم ← اولین مضرب خط خورده ی ۵ عدد.....

۵ - مضارب عدد ۷ را به غیر از خودش خط می زنیم ← اولین مضرب خط خورده ی ۷ عدد.....

← نتیجه اینکه :

۱ - اولین مضرب خط خورده ی هر عدد اول

۲ - عمل خط زدن را تا جایی ادامه می دهیم که

📖 مثال : به روش غربال اعداد اول ۱۰۰ تا ۱۲۵ را بیابید.

← نتیجه مهم : اگر عدد x بر هیچکدام از اعداد اول کوچکتر یا مساوی \sqrt{x} بخش پذیر نباشد، آن عدد اول است.

📖 مثال : مرکب یا اول بودن اعداد زیر را مشخص کنید.

→ ۳۱۷ (الف)

→ ۳۱۱ (ب)

→ ۲۰۳ (ج)

چند رابطه ی کاربردی برای تشخیص اعداد اول :

$$12 = 5 + 7 \rightarrow \text{فرد} = \text{فرد} + \text{فرد} \quad n = (\text{فرد})$$

$$12 = 8 + 4 \rightarrow \text{زوج} = \text{زوج} + \text{زوج} \quad n = (\text{زوج})$$

$$19 = 9 + 10 \rightarrow \text{فرد} = \text{فرد} + \text{زوج}$$

فاکتوریل

نوعی خلاصه نویسی در ضرب اعداد متوالی به شرط شروع از ۱ می باشد.

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5! \rightarrow \text{می خوانیم پنج فاکتوریل} \rightarrow$$

$$7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$2! = 2 \times 1$$

$$1! = 1 \quad 0! = 1$$

* هر $n!$ ($n > 1$) زوج می باشد. $3!$ و $5!$ و $4!$ و ... زوج می باشند.

* هر $n!$ ($n > 2$) مرکب می باشد.

📖 **مثال** عدد $3!$ مرکب است چون برابر ۶ می باشد.

📖 **مثال** عدد $17!$ مرکب است زیرا بر ۱۷ و ۱۶ و ... بخش پذیر است.

📖 **مثال** حاصل عبارت $18! + 19!$ مرکب است زیرا هر دو بر ۱۸ بخش پذیرند و می توان از ۱۸ فاکتور گرفت.

$$\text{مضرب } 18 \leftarrow 18! + 19! = 18k$$

📖 **مثال** حاصل عبارات زیر را بنویسید.

$$\frac{18!}{17!} =$$

$$\frac{25! \times 5!}{20! \times 10!} =$$

$$\frac{13! + 12!}{11! + 10!} =$$

$$\frac{20!}{16! \times 6! \times 17} =$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} =$$

📖 **مثال** : مرکب یا اول بودن هر عبارت را مشخص کنید.

$$35! \rightarrow$$

$$1391^{1392} + 1393^{1390} \rightarrow$$

$$37! + 37^{10} + 37^{100} \rightarrow$$

$$37! + 57 \rightarrow$$

$$(7^{11} + 7^{15} + 7^{19} + \dots + 7^{91})^{1500} + 47 \rightarrow$$

تعیین یکان اعداد تواندار بزرگ و کاربرد آن در تشخیص اول یا مرکب بودن اعداد

۱ - اعدادی که یکان آنها ۰ ، ۱ ، ۵ ، ۶ باشد به هر توانی برسند یکان آنها تغییر نمی کند. \rightarrow یکان 75^{10}

$$305^{76} + 1006^{76} + 421^{176} = \quad \text{آیا حاصل عبارت مقابل اول است؟}$$

۲ - اعدادی که یکان آنها ۴ یا ۹ باشد به صورت زیر یکان حاصل را پیدا می کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{یکان} \rightarrow 4^{18} \rightarrow 6 = \text{یکان} \rightarrow 4^n \rightarrow (n \text{ زوج}) \\ \text{یکان} \rightarrow 4^{19} \rightarrow 4 = \text{یکان} \rightarrow 4^n \rightarrow (n \text{ فرد}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 19^{10} \rightarrow (n \text{ زوج}) = 1 = \text{یکان} \rightarrow 9^n \\ 9 \rightarrow 39^{17} \rightarrow (n \text{ فرد}) = 9 = \text{یکان} \rightarrow 9^n \end{array} \right.$$

۳ - اگر یکان عددی یکی از اعداد ۲ ، ۳ ، ۷ ، ۸ باشد توان آن عدد را بر ۴ تقسیم کرده و باقی مانده را توان یکان

$$173^{18} \xrightarrow[r=2]{\begin{array}{r} 18 \quad 4 \\ 16 \quad 4 \\ \hline \end{array}} 3^2 = 9 \rightarrow \text{یکان حاصل} = 9 \quad \text{قرار می دهیم.}$$

👉 **توجه** : اگر باقی مانده ۰ شد توان یکان را ۴ قرار می دهیم.

$$54224 \xrightarrow{\substack{24 \quad | \quad 4 \\ \hline 24 \quad 6 \\ \hline 2=0}} 2^4 = 16 \rightarrow \text{یکان حاصل} = 6$$

$$1357^{1985} + 121^{121} + 1354^{720} + 1! = \quad \text{۴- مرکب یا اول بودن عبارت مقابل را نشان دهید.}$$

روش یافتن تعداد شمارنده های یک عدد

۱) عدد 3^4 بر اعداد 3^0 و 3^1 و 3^2 و 3^3 و 3^4 بخش پذیر است که ۵ تا می باشند.

$$3^4 \rightarrow \text{تعداد شمارنده های طبیعی} = 5 = (4 + 1)$$

۲) تعداد شمارنده های طبیعی a^n (a عدد اول) برابر است با $(n+1)$

۳) تعداد شمارنده های هر عدد مثل A را به صورت $T(A)$ نشان می دهند.

$$A = 25^7 \rightarrow A = 5^{14} \rightarrow T(A) = 15$$

۴) برای یافتن تعداد شمارنده های طبیعی یک عدد ابتدا عدد را تجزیه می کنیم.

$$A = 36000 = 2^5 \times 3^2 \times 5^3 \rightarrow \text{سه شمارنده ی اول دارد: ۲ و ۳ و ۵}$$

تمرین) عدد $A = 35^3 \times 49^4$

الف) چند شمارنده ی اول دارد؟

ب) چند شمارنده ی طبیعی دارد؟

ج) چند شمارنده ی مرکب دارد؟

هـ) چند شمارنده ی صحیح دارد؟

ز) چند شمارنده ی فرد دارد؟

ر) چند شمارنده ی زوج دارد؟

تمرین های فصل دهم

(۱) کامل کنید.

تعداد اعداد مرکب ۸۵ تا ۹۹ برابر است.

بزرگترین عدد اول دو رقمی و کوچکترین عدد اول سه رقمی

مجموع دو عدد اول ۳۹ شده است آن دو عدد و هستند.

مربع مجموع دو عدد اول ۱۶۹ شده است. تفاضل مربع آن دو عدد می باشد.

در غربال ۱ تا ۱۰۰ آخرین عددی که خط می خورد است.

در غربال ۵۰ تا ۱۵۰، اولین گروه اخراجی مضارب و آخرین گروه اخراجی مضارب می باشند.

(۲) سوالات گزینه ای

(A) کدام عدد زیر اول است؟

- ۹۳ ۱۱۰۱۱۰۱۱ ۱۳^{۱۳} ۱۰۷

(B) در غربال ۱ تا ۱۸۰، آخرین عدد اولی که مضاربش را خط می زنیم کدام است.

- ۷ ۱۱ ۱۳ ۱۷

(C) عدد ۱۰۵ با مضارب کدام عدد اول برای اولین بار خط می خورد و از جدول غربال اخراج می شود.

- ۲ ۳ ۵ ۷

(D) در غربال ۱ تا ۱۰۰، عدد ۹ چندین عدد اخراجی است؟

- ۵۰ مین ○ ۴۹ مین ○ ۵۱ مین ○ ۵۲ مین

(E) در غربال ۱ تا ۳۰۰ کدام عدد دیرتر اخراج می شود؟

- ۳۰۰ ○ ۲۵۵ ○ ۲۹۱ ○ ۹۱

(F) در سوال E کدام عدد زودتر از بقیه خط می خورد؟

(G) در غربال اعداد کمتر از ۱۰۰۰ دومین مضرب خط خورنده ۱۹ کدام عدد زیر است؟

- 19×20 ○ 19×19 ○ 19×21 ○ 19×23

(H) اگر p اول باشد کدام گزینه ممکن است اول شود.

- P^P ○ $P^2 - 4$ ○ $P^2 + 2P$ ○ $4P^2 - 3P^2$

(۳) در مجموعه مقابل چند عدد اول وجود دارد. $\{501, 203, 2 + 5, 53 \times 37, 19^{17}, 7^{13}\}$

(۴) در غربال ۱ تا ۱۰۰

(الف) تعداد کل اخراجی ها (خط خورده ها) را بدست آورید.

(ب) عدد ۲۱ چندمین اخراجی است؟

(ج) ۴۷ مین اخراجی چه عددی است؟

(د) عدد ۲۵، چندمین اخراجی است؟

(ه) آخرین عدد اخراجی کدام است؟

(۵) بزرگترین عدد مرکب دو رقمی را بنویسید که نسبت به ۳ و ۵ اول باشد.

(۶) عدد ۱۲۰۰ را در نظر بگیرید.

(الف) ۱۲۰۰ چند شمارنده ای اول دارد؟

(ب) چند شمارنده ی طبیعی دارد؟

(ج) چند شمارنده ی صحیح دارد؟

(د) چند شمارنده ی مرکب دارد؟

(ه) چند شمارنده ی فرد دارد؟ و چند شمارنده زوج دارد؟

(۷) سه عدد متوالی مرکب بنویسید.

(۸) ۵ عدد طبیعی متوالی مرکب بنویسید؟

(۹) ۳۰ عدد طبیعی متوالی مرکب بنویسید.

(۱۰) اول یا مرکب بودن هر عبارت را با دلیل مشخص کنید.

$$203 \rightarrow$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 301 \rightarrow$$

$$200103 \rightarrow$$

$$(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 130) + 17 =$$

$$2^{50} + 1 \rightarrow$$

$$53! + 57 \rightarrow$$

$$14^{8k+6} + 17^{4k+2} \rightarrow$$

$$111 \text{ و } 1111 \text{ و } 111111 \rightarrow$$

$$121 \text{ و } 12321 \text{ و } 1234321 \rightarrow$$

(۱۱) اگر A زوج باشد آیا $3A$ بر ۶ بخش پذیر است؟ اگر A بر ۳ و ۶ و ۱۰ بخش پذیر باشد آنگاه بزرگترین شمارنده مطمئن A چه عددی است؟

(۱۲) اگر عددی بر ۴ و ۶ بخش پذیر باشد آیا بر ۲۴ نیز بخش پذیر است چرا؟

(۱۳) مجموع ۵ عدد متوالی اول است یا مرکب؟ چرا؟

(۱۴) مقلوب عدد \overline{ab} به صورت \overline{ba} است. ثابت کنید که تفاضل هر عدد از مقلوبش برابر مضربی از ۹ است.

(۱۵) مریم و سارا یک بازی ریاضی طراحی کردند. اعداد طبیعی ۱ تا ۶۰ را نوشتند و طبق غربال ابوعلی سینا اعداد غیر اول را به نوبت خط زدند. هر کس عدد ۴۵ را خط بزند برنده است. سارا بازی را شروع می کند و عدد ۱ را خط می زند و مریم عدد ۴ را حذف می کند، سارا ۶ را و مریم ۸ را..... و ادامه می دهند تا آخر....

الف) چه کسی برنده می شوند؟ (حذف کننده ۴۵)

(ب) اگر باز هم سارا شروع کننده باشد چه کسی آخرین عدد مرکب را خط می زند؟

(ج) در این بازی چهلمین عدد چه عددی است و چه کسی آنرا خط می زند؟

(۱۶) عدد $45!$ چند عامل صفر دارد؟

(۱۷) اگر $37!$ بر 2^k بخش پذیر باشد حداکثر مقدار k ؟

(۱۸) چند عدد اول سه رقمی داریم که مجموع ارقام آنها ۹ شود؟

(۱۹) در بین اعداد $170! + 111$ و $170! + 5$ و $170! + 4$ و $170! + 3$ چند عدد اول وجود دارد؟

(۲۰) اگر n, m دو عدد طبیعی باشد و m^n یک عدد اول باشد حاصل n^m چند می شود؟

(۲۱) بزرگترین شمارنده اول عدد $6! - 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ چه عددی است.

(۲۲) اگر اختلاف بزرگترین شمارنده ی عددی و کوچکترین شمارنده اول آن ۹ باشد آن عدد حداکثر چند شمارنده ی اول می تواند داشته باشد؟

(۲۳) حاصل عبارت زیر را بنویسید.

$$\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+10}$$

(۲۴) حاصل ضرب شمارنده های عدد 36 را بنویسید.

(۲۵) حاصل ضرب شمارنده های عدد 49 و عدد 24 را بنویسید.

بسمه تعالی

اداره کل آموزش و پرورش استان	
نام و نام خانوادگی:	دبیرستان فرزنانگان دوره اول
نام کلاس : هشتم	آزمون فصل دوم
ردیف	بارم
۱	در غربال اعداد ۱ تا ۲۵۰ آخرین عددی که خط می خورد کدام است؟ چرا؟ الف- ۱۶۹ ب- ۲۲۱ ج- ۲۴۷ د- ۲۵۰
۲	عددهای ۴ و ۹ دو شمارنده یک عدد هستند. شش عدد دیگر پیدا کنید که به طور حتم شمارنده های این عدد باشند.
۳	عدد ۲۰۱۵ را به چند صورت می توان به صورت جمع دو عدد اول نوشت؟ چرا؟ به طور کلی یک عدد فرد را حداکثر به چند صورت می توان به صورت جمع دو عدد اول نوشت؟ چرا؟
۴	حاصل جمع هفت عدد طبیعی متوالی اول است یا مرکب؟ چرا؟
۵	تعیین کنید که عدد $A = 6^3 \times 15 \times 10^6$: الف- چند مقسوم علیه زوج دارد؟ ب- چند مقسوم علیه فرد دارد؟
۶	تعیین کنید عدد $B = 21^5 \times 20^7$: الف- چند مقسوم علیه اول دارد؟ ب- چند مقسوم علیه مرکب دارد؟

۷	اول یا مرکب بودن اعداد مقابل را مشخص کنید.
۱	الف) $23 = (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10)$ ب) $1 + 89^{96} + 28^{37} + 65^{137} =$
۸	در غربال ابوعلی اعداد ۲۰ تا ۱۲۰ را نوشتیم. الف- عدد ۷۷ چندمین عدد خط خورنده است؟ ب- شصت و ششمین عدد خط خورنده کدام است؟
۹	در یک چاپخانه یک دستگاه چاپ ۳۰۰ کارت ویزیت را در مدت ۶ دقیقه چاپ می کند. اگر بخواهیم دستگاه دیگری همزمان با این دستگاه کار کند به طوری که ۳۰۰ کارت ویزیت در ۲ دقیقه چاپ شوند در این صورت ماشین دوم ۳۰۰ کارت ویزیت را می بایست در چند دقیقه چاپ کند؟