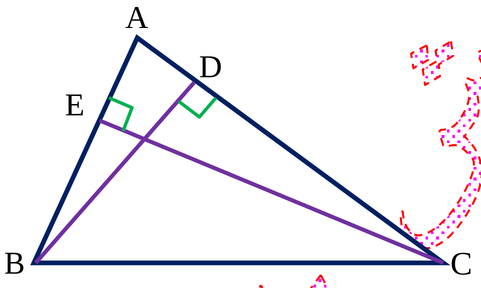
نسبت و تناسب در هندسه

خواص نسبت وتناسب :

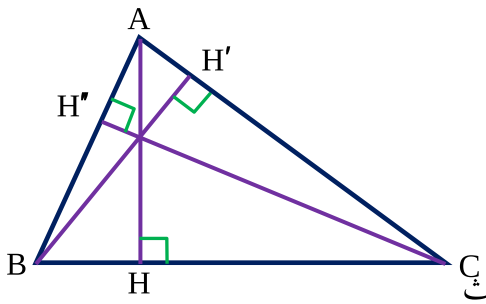
طرفین وسطین	$b\neq ۰ \quad , \quad d\neq ۰$	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰}\Leftrightarrow ۳\times ۱۰=۶\times ۵$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$
معکوس کردن طرفین تناسب	a و b و c و $d\neq ۰$	$\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}\Leftrightarrow \frac{۵}{۲}=\frac{۱۰}{۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$
تعویض جای طرفین با وسطین	a و b و c و $d\neq ۰$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۹}\Leftrightarrow \frac{۹}{۳}=\frac{۶}{۲}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$
ترکیب نسبت در صورت	$b\neq ۰ \quad , \quad d\neq ۰$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}\Leftrightarrow \frac{۵}{۳}=\frac{۱۰}{۶}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$
ترکیب نسبت در مخرج	$b\neq ۰ \quad , \quad d\neq ۰$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}\Leftrightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$
تفضیل نسبت در صورت	$b\neq ۰ \quad , \quad d\neq ۰$	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴}\Leftrightarrow \frac{۹}{۲۱}=\frac{۶}{۱۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$
تفضیل نسبت در مخرج	$b\neq ۰ \quad , \quad d\neq ۰$	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴}\Leftrightarrow \frac{۳۰}{۹}=\frac{۲۰}{۶}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$
	$b\neq ۰ \quad , \quad d\neq ۰$	$\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲}\Leftrightarrow \frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
	$b_۱$ و $b_۲$ و... و $b_n\neq ۰$	$\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=.....=\frac{a_n}{b_n}\Leftrightarrow \frac{a_۱+a_۲+....+a_n}{b_۱+b_۲+....+b_n}=\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=....=\frac{a_n}{b_n}$	
		$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}\Leftrightarrow \frac{۲+۴+۶+۸}{۳+۶+۹+۱۲}=\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}$	



نکته : در مثلث ABC داریم :

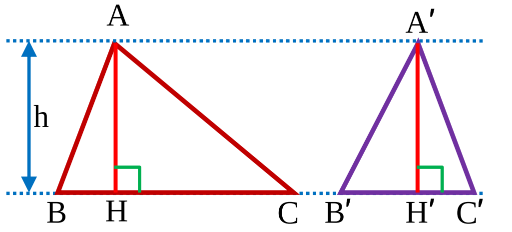
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times CE \quad , \quad S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC\times BD \quad , \quad S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AF\times BC$$

$$S_{ABC}=S_{ABC}\Rightarrow \frac{۱}{۲}AB\times CE=\frac{۱}{۲}AC\times BD \Rightarrow \begin{cases} \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CE} \\ \frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE} \end{cases}$$



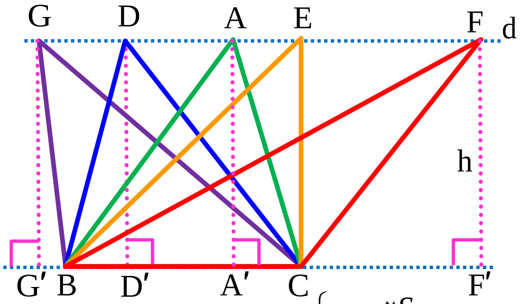
نکته : در هر مثلث نسبت اندازه های هر دو ضلع با نسبت ارتفاع وارد بر آنها رابطه معکوس دارد به عبارتی می توان نوشت :

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BH'}{CH''} \quad و \quad \frac{AB}{BC}=\frac{AH}{CH''} \quad و \quad \frac{AC}{BC}=\frac{AH}{BH'}$$



نکته:اگر اندازه های ارتفاع های دو مثلث برابر باشند ، نسبت مساحت های این دو مثلث برابر نسبت اندازه های قاعده هایی است که این ارتفاع ها برآنها وارد می شود .

$$AH=A'H'=h \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}AH\times BC}{\frac{1}{2}A'H'\times B'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

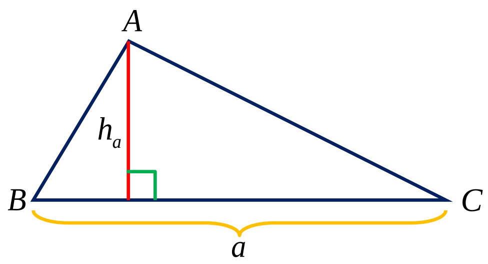


مثال : در شکل مقابل خط d با BC موازی است .

$$S_{GBC}=S_{DBC}=S_{ABC}=S_{EBC}=S_{FBC}=\frac{1}{2}AH\times BC=\frac{1}{2}ha$$

نکته : مساحت هر مثلث را به یکی از سه حالت زیر می توان به دست آورد :

الف) $S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{1}{2}a\times h_a \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2S}{h_a} \\ h_a=\frac{2S}{a}\end{cases}$ یا $S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{1}{2}b\times h_b \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{2S}{h_b} \\ h_b=\frac{2S}{b}\end{cases}$ یا $S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{1}{2}c\times h_c \Rightarrow \begin{cases} c=\frac{2S}{h_c} \\ h_c=\frac{2S}{c}\end{cases}$

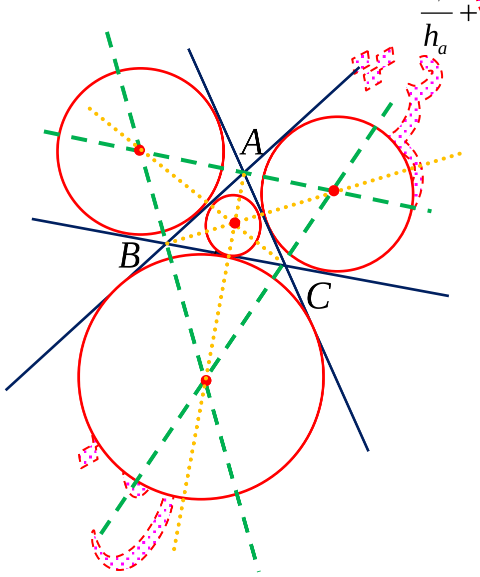


ب) $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\times \sin A=\frac{1}{2}AB\times BC\times \sin B=\frac{1}{2}AC\times BC\times \sin C$

۳ – قضیه هرون : در هر مثلث با طول اضلاع a و b و c اگر $p=\frac{a+b+c}{2}$ آنگاه مساحت مثلث برابر است با : $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

تذکر : با توجه به نکات فوق می توان گفت رابطه زیر همواره بر قرار است .

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{\frac{2S}{a}}+\frac{1}{\frac{2S}{b}}+\frac{1}{\frac{2S}{c}}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{P}{2S}$$



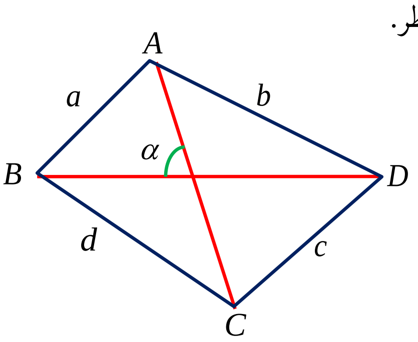
نکته: اگر r_a، r_b و r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، داریم:

$$r_a=\frac{S}{P-a} \quad و \quad r_b=\frac{S}{P-b} \quad و \quad r_c=\frac{S}{P-c}$$

و از این رابطه نتیجه می شود:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

تذکر : مساحت هرچهارضلعی برابراست بانصف حاصلضرب دوقطر درسینوس زاویه بین دوقطر.

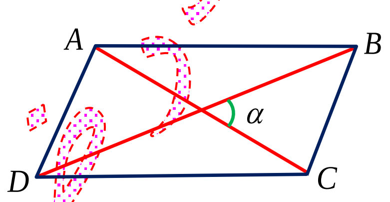


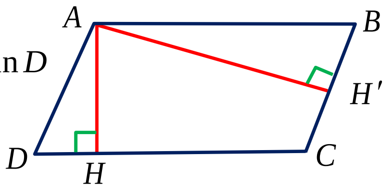
$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AC\times BD\times\sin\alpha$$

قضیه هرون در چهار ضلعی: مساحت چهار ضلعی $ABCD$ با محیط $۲P$، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{ABCD}=\sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d)-abcd\times\cos\left(\frac{A+C}{۲}\right)}$$

مساحت یک متوازی الاضلاع رامی‌توان به یکی از سه حالت زیر تعیین کرد:



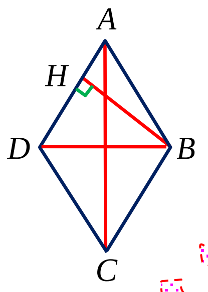


الف) $S_{ABCD}=AH\times DC=AH'\times BC$

ب) $S_{ABCD}=AB\times AD\times\sin A=AD\times DC\times\sin D$

ج) $S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AC\times BD\times\sin\alpha$

مساحت یک لوزی را می‌توان به یکی از سه حالت زیر تعیین کرد.

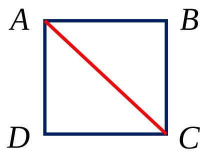


الف) $S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AC\times BD$

ب) $S_{ABCD}=AB^{۲}\times\sin A=AB^{۲}\times\sin B$

ج) $S_{ABCD}=BH\times AD$

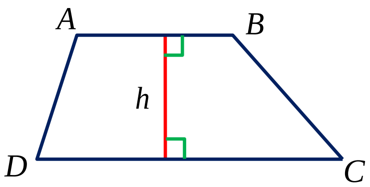
مساحت یک مربع را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد:



الف) $S_{ABCD}=AB^{۲}$

ب) $S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AC^{۲}$

مساحت یک ذوزنقه به صورت زیر تعیین می‌شود:



$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}h(AB+DC)$$

تذکر : درهر مثلث قائم الزاویه $\overset{\Delta}{ABC}$ $(\hat{A}=۹۰)$ روابط زیر برقرار است

۱– قضیه‌ی فیثاغورث: $BC^{۲}=AC^{۲}+AB^{۲}$

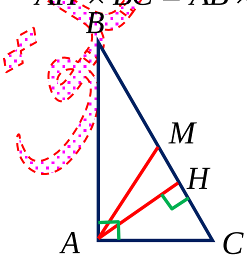
۲–بارسم ارتفاع وارد بروتر دومثلث قائم الزاویه ایجاد شده با مثلث اولیه مشابه می‌شود. $\overset{\Delta}{ABC}\approx\overset{\Delta}{AHB}\approx\overset{\Delta}{AHC}\Leftarrow AH$ ارتفاع

۳– ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین دوقطعه‌ی ایجاد شده روی وتر است. $AH^{۲}=BH\times CH$

۴– هر ضلع زاویه قائمه واسطه هندسی بین تصویر آن ضلع روی وتر و وتر می‌باشد. $AC^{۲}=CH\times BC$

۵– هر ضلع زاویه قائمه واسطه هندسی بین تصویر آن ضلع روی وتر و وتر می‌باشد. $AB^{۲}=BH\times BC$

۶– حاصل‌ضرب ارتفاع وارد بر وتر در وتر با حاصل ضرب دو ضلع قائمه آن برابر است. $AH\times BC=AB\times AC=۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}$



۷– ضلع مقابل به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است. $\hat{B}=۳۰\Rightarrow AC=\frac{۱}{۲}BC$

۸– ضلع مقابل به زاویه ۴۵ درجه $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ وتراست. $\hat{B}=۴۵\Rightarrow AC=\frac{\sqrt{۲}}{۲}BC$

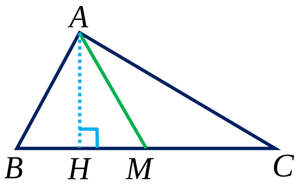
۹- ضلع مقابل به زاویه ۶۰ درجه $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتراست. $\hat{B}=60 \Rightarrow AC=\frac{\sqrt{3}}{2}BC$

۱۰- میانه وارد بر وتر نصف وتراست. میانه $AM \Rightarrow AM=\frac{1}{2}BC$

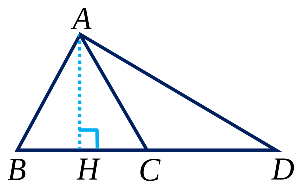
۱۱- مجموع مربعات سه میانه مثلث برابر $\frac{3}{2}$مربع وتر است. $\frac{3}{2}BC^2$=مجموع مربعات سه میانه

۱۲- اگر یک زاویه مثلث ۱۵ درجه باشد آن گاه ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است. $\hat{B}=75^\circ$ یا $15^\circ \Rightarrow AH=\frac{1}{4}BC$

نکته : میانه هر مثلث آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند.

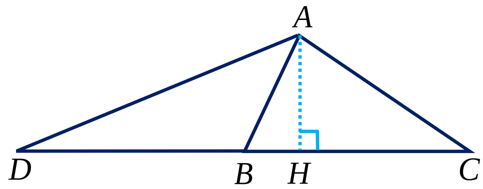


$$S_{ABM}=S_{ACM}=\frac{1}{2}S_{ABC}$$



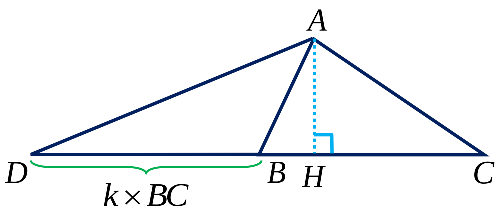
اگر در مثلث ABC ضلع BC را از طرف رأس C به اندازه خودش تا نقطهٔ D امتداد دهیم، مساحت مثلث ACD برابر مساحت مثلث ABC بوده و مساحت مثلث ABD دو برابر مساحت مثلث ABC است.

$$S_{ACD}=S_{ABC} \quad , \quad S_{ABD}=2S_{ABC}$$



اگر در مثلث ABC ضلع BC را از طرف رأس B به اندازه خودش تا نقطهٔ D امتداد دهیم، مساحت مثلث ABD برابر مساحت مثلث ABC بوده و مساحت مثلث ADC دو برابر مساحت مثلث ABC است.

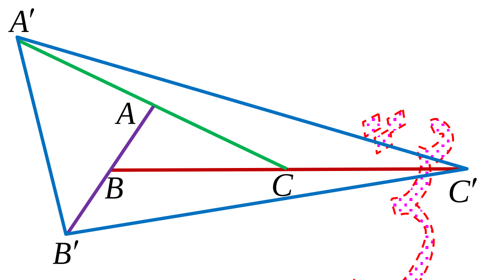
$$S_{ABD}=S_{ABC} \quad , \quad S_{ADC}=2S_{ABC}$$



اگر در مثلث ABC ضلع BC را از طرف رأس B به اندازه k برابر خودش تا نقطهٔ D امتداد دهیم، مساحت مثلث ABD ، kبرابر مساحت مثلث ABC بوده و مساحت مثلث ADC ، $(k+1)$برابر مساحت مثلث ABC است.

$$S_{ABD}=k\times S_{ABC} \quad , \quad S_{ADC}=(k+1)\times S_{ABC}$$

مثال: اگر در مثلث ABC ضلع BC را از طرف رأس C به اندازه خودش تا نقطهٔ C' و ضلع AC را از طرف رأس A به اندازه خودش تا نقطهٔ A' و ضلع AB را از طرف رأس B به اندازه خودش تا نقطهٔ B' امتداد دهیم، مساحت مثلث $A'B'C'$ چند برابر مساحت مثلث ABC است.



حل : مساحت مثلث ABC را برابر S در نظر می گیریم.در مثلث $A'CC'$ ، داریم $A'C=2AC$ و $CC'=BC$ و زاویه $A'\hat{C}C'$ مکمل زاویه $A\hat{C}B$ است، پس داریم :

$$S_{ACC'}=2S_{ABC}=2S$$

و به همین ترتیب داریم:

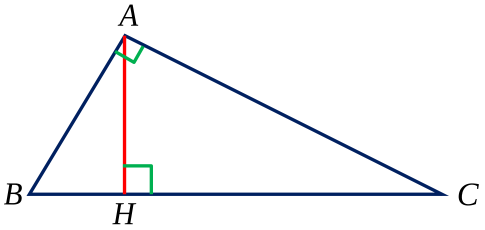
$$S_{B'BC'}=2S_{ABC}=2S \quad \text{و} \quad S_{A'AB'}=2S_{ABC}=2S$$

درنتیجه می توان نوشت:

$$S_{A'B'C'}=S_{ACC'}+S_{B'BC'}+S_{A'AB'}+S_{ABC}=2S+2S+2S+S=7S$$

تعریف واسطه (میانگین) هندسی : اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد ، یعنی داشته باشیم: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ با طرفین وسطین کردن تناسب نتیجه می شود : $b^2=ac$ در این صورت b را واسطه هندسی a و c می نامیم .مثلاً اگر دو پاره خط به طول های ۴ و ۹ واحد داشته باشیم ، پاره خطی که ۶ واحد طول دارد واسطه هندسی بین آنهاست زیرا داریم : $6^2=4\times 9$

نکته : در یک مثلث قائم الزاویه:



الف) ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی بین قطعاتی است که روی وتر ایجاد می کند.

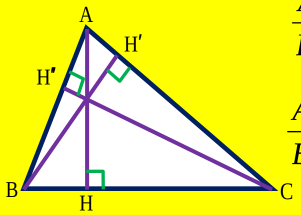
$$AH^2=BH\times CH$$

ب)هر ضلع زاویهٔ قائمه واسطهٔ هندسی بین تصویرش بر روی وتر و وتر می‌باشد.

$$AB^2=BH\times BC \quad , \quad AC^2=CH\times BC$$

مثال :طول اضلاع مثلثی ۴ و۶ و ۸ سانتی متر هستند و بلند ترین ارتفاع آن ۱۰ سانتی متر است . طول دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید .

می دانیم در هر مثلث نسبت اندازه های هر دو ضلع با نسبت ارتفاع وارد بر آنها رابطه معکوس دارد به عبارتی می توان نوشت :



$$\frac{AB}{BC}=\frac{AH}{CH''}$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AH}{BH'}$$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BH'}{CH''}$$

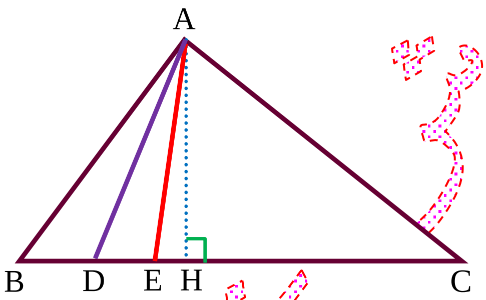
حل : **نسبت طول اضلاع مثلث ، عکس نسبت ارتفاع های نظیر آنها است** ، به عبارتی می توان گفت : ارتفاع نظیر بزرگترین ضلع مثلث ، برابر کوچکترین ارتفاع مثلث است و ارتفاع نظیر کوچکترین ضلع مثلث ، برابر بزرگترین ارتفاع مثلث است .

بنابراین اگرطول اضلاع مثلث $a=4$ و $b=6$ و $c=8$ باشند آنگاه $h_a=10$ و داریم :

$$\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a} \Rightarrow \frac{4}{6}=\frac{h_b}{10} \Rightarrow h_b=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{a}{c}=\frac{h_c}{h_a} \Rightarrow \frac{4}{8}=\frac{h_c}{10} \Rightarrow h_c=\frac{40}{8}=5$$

مثال: در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE است و دو برابر مساحت مثلث ABD است . نسبت های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{CE}{BE}$ را به دست آورید .

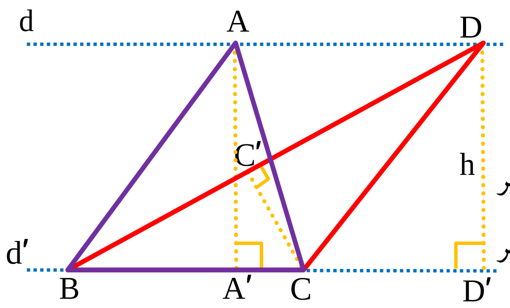


حل :

$$S_{ACE}=S \Rightarrow \begin{cases} \frac{S_{ACE}}{S_{ADE}}=3 \Rightarrow \frac{S}{S_{ADE}}=3 \Rightarrow S_{ADE}=\frac{1}{3}S \\ \frac{S_{ACE}}{S_{ABD}}=2 \Rightarrow \frac{S}{S_{ABD}}=2 \Rightarrow S_{ABD}=\frac{1}{2}S \end{cases}$$

$$\frac{DE}{BD}=\frac{\frac{1}{2}AH\times DE}{\frac{1}{2}AH\times BD}=\frac{S_{ADE}}{S_{ABD}}=\frac{\frac{1}{3}S}{\frac{1}{2}S}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{CE}{BE}=\frac{\frac{1}{2}AH\times CE}{\frac{1}{2}AH\times BE}=\frac{S_{ACE}}{S_{ABE}}=\frac{S}{S_{ABD}+S_{ADE}}=\frac{S}{\frac{1}{3}S+\frac{1}{2}S}=\frac{S}{\frac{5}{6}S}=\frac{6}{5}$$

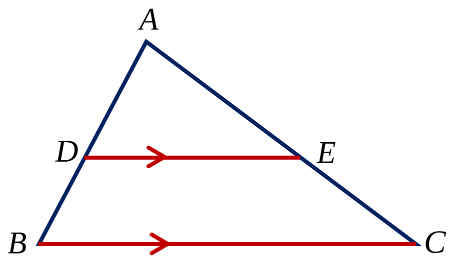


مثال: در شکل مقابل $d \| d'$ و مساحت مثلث ABC ، $8cm^2$ است . اگر $BD=6cm$ باشد ، فاصله نقطه C از BD را به دست آورید .

حل : از آنجاییکه هر دو مثلث ABC و DBC در قاعده BC مشترکند و ارتفاع نظیر این قاعده در هر دو مثلث برابر است ، بنابراین مساحت های آنها نیز با یکدیگر برابر است و در نتیجه می توان نوشت :

$$S_{DBC}=S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2}BD\times CC'=8 \Rightarrow \frac{1}{2}\times 6\times CC'=8 \Rightarrow CC'=\frac{8}{3}$$

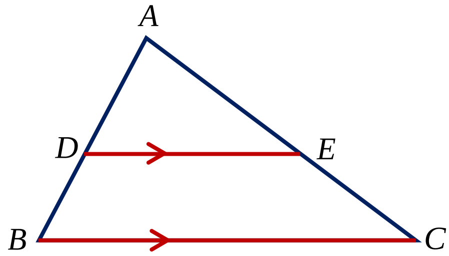
قضیه تالس



قضیه تالس : هرگاه در یک مثلث ، خط راستی موازی یکی از اضلاع ، دوضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند ، روی آن دو ضلع چهار پاره خط جدا می کند که اندازه های آنها تشکیل یک تناسب می دهند . مثلاً در شکل مقابل داریم :

$$DE \| BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

تعمیم قضیه تالس (قضیه تالس جز به کل)



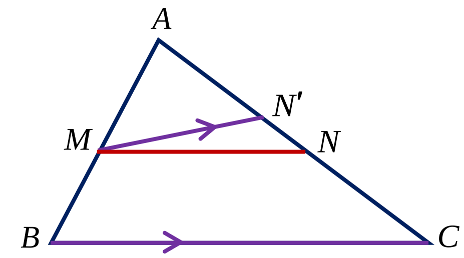
اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند ، و با ضلع سوم آن موازی باشد ، مثلثی به وجود می آید که اندازه ضلع های آن با اندازه های ضلع های مثلث اصلی متناسبند .

مثلاً در شکل مقابل داریم : $DE \| BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

نکته : نتیجه دوم (تاس جز به کل از پایین به بالا)

$$\frac{BD}{BA}=\frac{AC}{CE}$$

عکس قضیه تالس :

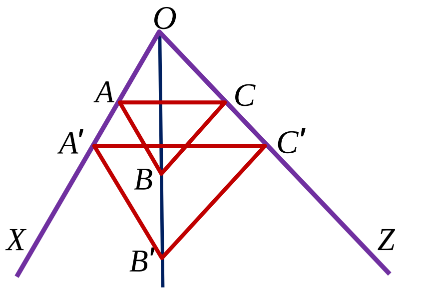


اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها چهار پاره خط با اندازه های متناظراً متناسب جدا کند ، آنگاه آن خط با ضلع سوم مثلث موازی است .

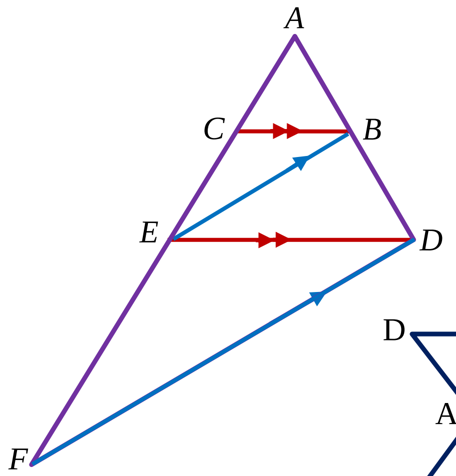
$$\overset{\Delta}{ABC} \;:\; \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \| BC$$

و　　یا　　:

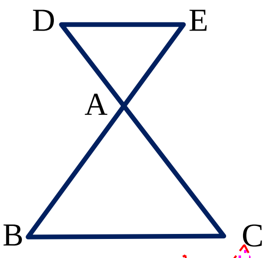
$$\overset{\Delta}{ABC} \;:\; \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \| BC$$



نکته : در شکل مقابل می دانیم $AB \| A'B'$ و $BC \| B'C'$ با استفاده از قضیه تالس و عکس آن ثابت می‌شود : $AC \| A'C'$

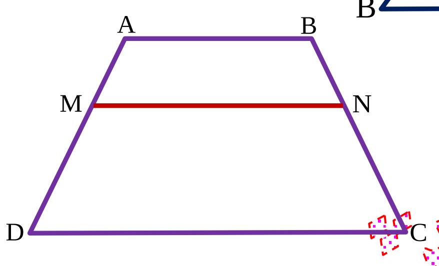


نکته: در شکل مقابل اگر $BC \| DE$ و $BE \| DF$ به کمک قضیه تالس در مثلث های ADE و ADF ومقایسه تناسب ها با یکدیگر ثابت می شود $AE^2 = AC \times AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است).



نکته: در شکل مقابل می دانیم $DE \| BC$ در این صورت داریم:

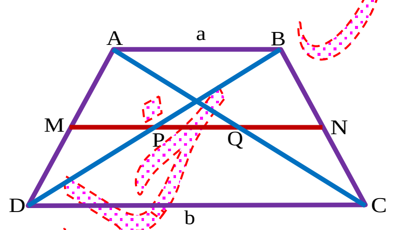
$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$$



نکته: در ذوزنقه مقابل $MN \| AB \| CD$ داریم :

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

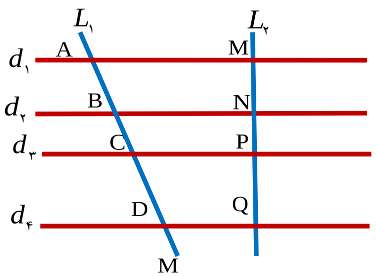
عکس رابطه فوق نیز برقرار است یعنی اگر $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ آنگاه نتیجه می گیریم MN موازی AB است .



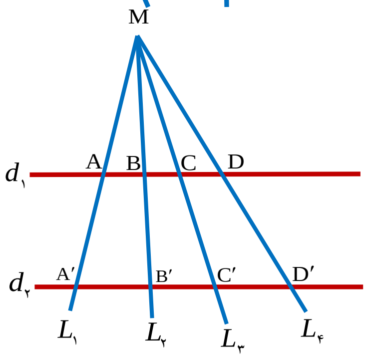
نکته :اگر $AB = a$ و $DC = b$ و $MN \| AB \| CD$ و $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \frac{m}{n}$ در این صورت طول $MN = \frac{na + mb}{m + n}$

نکته : در شکل مقابل M وسط AD و N وسط BC است. در این حالت داریم:

$$MN \| AB \| DC \quad MN = \frac{a+b}{2} \quad , \quad PQ = \frac{|b-a|}{2}$$



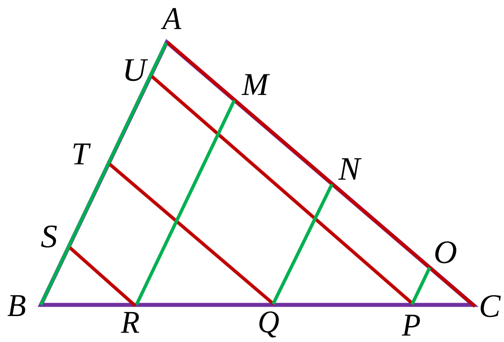
نکته اگر چند خط موازی توسط دو خط مورب قطع شوند ، بر روی این دو خط مورب پاره خط‌های متناظر متناسب ایجاد می شودیعنی داریم: $\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NP}=\frac{CD}{PQ}$



نکته اگر چند خط مورب همرس، دو خط موازی را قطع کنند، بر روی این دو خط موازی، پاره خط‌های متناظر متناسب ایجاد می شودیعنی داریم:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$$

عکس این نکته نیز برقرار است به این معنی که اگر چند خط غیر موازی، دو خط موازی را قطع کرده بر روی آنها پاره خط‌های متناظر متناسب ایجاد کنند، آنگاه خطوط غیر موازی حتماً همرسند.



نکته : در شکل مقابل $OP\|NQ\|MR\|AB$ ، $SR\|TQ\|UP\|AC$

$$\frac{OC}{AC}=\frac{CP}{BC}=\frac{AU}{AB}=K_1$$

$$\frac{ON}{AC}=\frac{PQ}{BC}=\frac{UT}{AB}=K_2$$

$$\frac{NM}{AC}=\frac{QR}{BC}=\frac{ST}{AB}=K_3$$

$$\frac{AM}{AC}=\frac{BR}{BC}=\frac{BS}{AB}=K_4$$

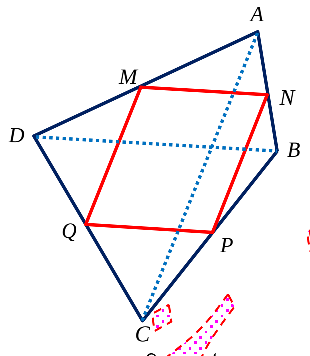
با طرفین وسطین کردن در رابطهٔ اول، دوابط زیر به دست می آیند:

$$\frac{OC}{AC}=\frac{CP}{BC}\Rightarrow\frac{OC}{CP}=\frac{AC}{BC}$$

$$\frac{CP}{BC}=\frac{AU}{AB}\Rightarrow\frac{CP}{AU}=\frac{BC}{AB}$$

$$\frac{OC}{AC}=\frac{AU}{AB}\Rightarrow\frac{OC}{AU}=\frac{AC}{AB}$$

با طرفین وسطین روابط دیگر نیز، نتایج متشابه به دست می آید.



نکته :از به هم وصل کردن وسط های اضلاع هر چهار ضلعی محدب ، یک متوازی الاضلاع بوجود می آید که محیط آن برابر با جمع طول قطر های چهار ضلعی اولیه می باشد و زاویه بین اضلاع آن با زاویه بین قطر های چهار ضلعی اولیه برابر است.

تست : از به هم وصل کردن وسطهای اضلاع یک چهار ضلعی ، لوزی ایجاد شده است . کدام عبارت صحیح است؟

الف) چهارضلعی لزوماً مستطیل است .　　ب) چهارضلعی ذوذنقه متساوی الساقین است .

ج) قطر های چهارضلعی بر هم عمودند است .　　د) قطر های چهارضلعی با هم برابرند است .

پاسخ : گزینه (د)

تست : از به هم وصل کردن وسطهای اضلاع یک چهار ضلعی ، مستطیل ایجاد شده است . کدام عبارت صحیح است ؟

الف) چهارضلعی مربع است .   ب) چهارضلعی لزوماً لوزی است .

ج) قطر های چهارضلعی بر هم عمودند است .   د) قطر های چهارضلعی با هم برابرند است .

پاسخ : گزینه (ج)

تذکر: از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک چهار ضلعی یک چهار ضلعی به وجود می آید که محیط آن برابر مجموع طول قطر های چهار ضلعی اولیه می باشد .

تذکر: شرط آنکه از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک چهار ضلعی یک مستطیل به وجود می آیدآن است که قطر های چهار ضلعی اولیه بر هم عمود باشند .

تذکر: شرط آنکه از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک چهار ضلعی یک لوزی به وجود می آیدآن است که قطر های چهار ضلعی اولیه با هم برابر باشند.

تشابه مثلث ها

در چند ضلعی های متشابه زوایای نظیر به نظیر برابر بوده و اضلاع نظیر به نظیر متناسبند.

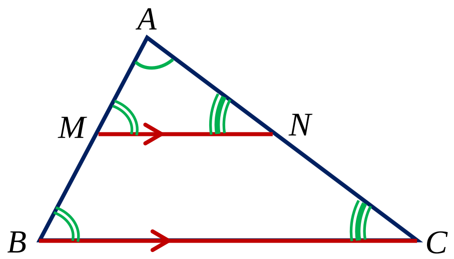
مثلاً دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند اگر و فقط اگر زوایای نظیر به نظیر برابر بوده و اضلاع نظیر به نظیر متناسب باشند یعنی داشته باشیم :

وقتی می گوییم اضلاع متناسبند به این معنی است که اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند ، و ضلع AB ، ۳ برابر $A'B'$ باشد آنگاه ضلع AC هم ۳ برابر $A'C'$ بوده و ضلع BC نیز ۳ برابر $B'C'$ خواهد بود

$$\overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A'} \quad , \quad \hat{B} = \hat{B'} \quad , \quad \hat{C} = \hat{C'} \quad , \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

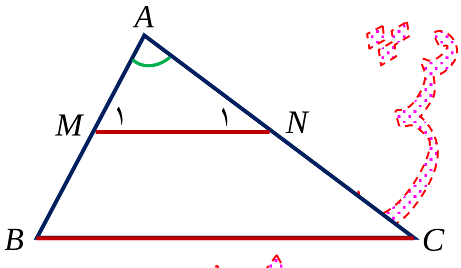
قضیه اساسی تشابه مثلث ها :

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی ، دو ضلع دیگر (و یا امتداد آنها)را در دو نقطه قطع کند ، مثلثی با آنها تشکیل می دهد که با مثلث اصلی متشابه است.



$$\underbrace{\overset{\Delta}{ABC} : \quad MN \parallel BC}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{\overset{\Delta}{AMN} \approx \overset{\Delta}{ABC}}_{\text{حکم}}$$

قضیه اول : هر گاه دو زاویه از مثلثی ، با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند ، دو مثلث متشابه اند .

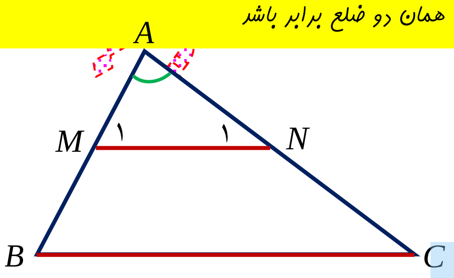


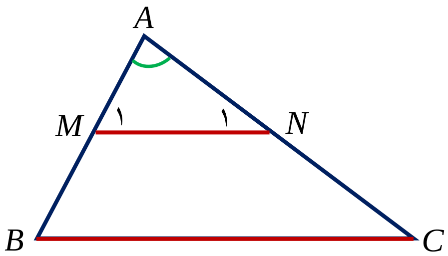
$$\underbrace{\hat{B} = \hat{B'} \quad , \quad \hat{C} = \hat{C'}}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{\overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{A'B'C'}}_{\text{حکم}}$$

قضیه دوم : هر گاه اندازه های دو ضلع از مثلثی با اندازه های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها هم اندازه باشند ، دو مثلث متشابهند .

اگر دو ضلع متناسب باشند حتماً باید زاویه بین همان دو ضلع برابر باشد

$$\underbrace{\hat{A} = \hat{A'} \quad , \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{\overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{A'B'C'}}_{\text{حکم}}$$

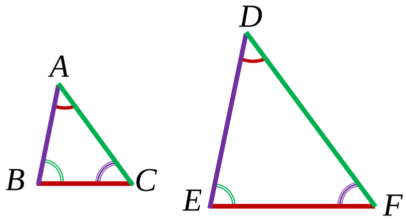




قضیه سوم : هر گاه اندازه سه ضلع از مثلثی ، با اندازه های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند ، دو مثلث متشابهند .

$$\underbrace{\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{\overset{\triangle}{ABC}\approx \overset{\triangle}{A'B'C'}}_{\text{حکم}}$$

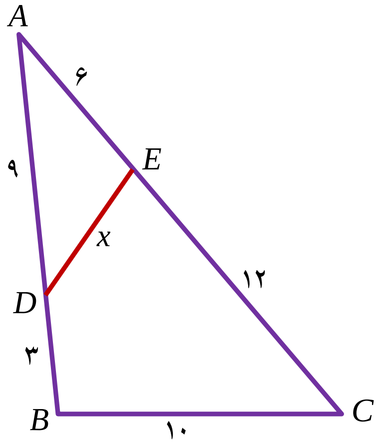
نکته بسیار مهم: در دو مثلث متشابه ، اضلاع مقابل به زوایای برابر ، متناسبند.



این عبارت به این معنی است که اگر دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ با یکدیگر متشابه بوده و زوایای $\hat{A}$ و $\hat{D}$ با یکدیگر برابر باشند ، آنگاه اضلاع مقابل به این زوایا متناسبند و در صورت و مخرج یک کسر قرار می گیرند . در این صورت داریم :

$$\hat{A}=\hat{D} \quad , \quad \hat{B}=\hat{E} \quad , \quad \hat{C}=\hat{F} \Rightarrow \frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=\frac{AB}{DE}$$

مثال : در شکل مقابل اندازه هر پاره خط روی آن نوشته شده است . اندازه x را به دست آورید .



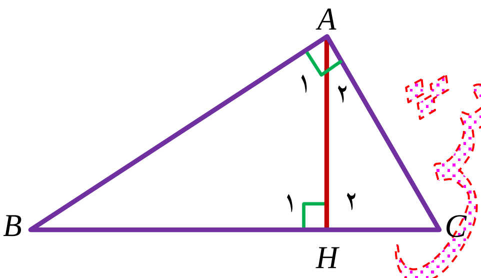
حل :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AE}{AB}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\\ \frac{AD}{AC}=\frac{۹}{۱۸}=\frac{۱}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC} \xrightarrow{\hat{A}=\hat{A}} \overset{\triangle}{ADE}\approx \overset{\triangle}{ABC}$$

$$\overset{\triangle}{ADE}\approx \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x}{۱۰}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=۵$$

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه ، ارتفاع وارد بر وتر ، آن را به دو مثلث قائم الزاویه تفکیک می کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه اند .

روابط طولی در مثلث قائم الزاویه :

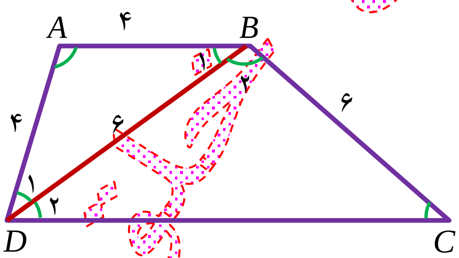


اگر در مثلث قائم الزاویه ABC $(A=۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کنیم ، با استفاده از تشابه مثلث ها نتایج زیر به دست می آید .

۱) $AB^۲=BC\times BH$　　۲) $AC^۲=BC\times CH$　　۳) $AH^۲=BH\times CH$

۴) $BC^۲=AB^۲+AC^۲$　　۵) $AH\times BC=AB\times AC$

مثال: در شکل رو به رو $ABCD$ ذوزنقه است . طول قاعده CD را به دست آورید .



حل :

$\overset{\triangle}{ABD}: \quad AB=AD \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{D}_۱$

$\overset{\triangle}{BCD}: \quad BD=BC \Rightarrow \hat{D}_۲=\hat{C}$

$AB \| DC$, مورب $BD \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{D}_۲$

$$\begin{matrix}\hat{B}_۱ = \hat{D}_۲ \\ \hat{D}_۱ = \hat{C}\end{matrix} \xrightarrow{زز} \overset{\Delta}{ABD} \approx \overset{\Delta}{BDC} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AD}{BC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۶} = \frac{۴}{۶} = \frac{۶}{DC} \Rightarrow DC = ۹$$

نکته: برای هر دو عدد مثبت a و b می توان گفت : $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$.

اثبات به روش بازگشتی :

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq ۲\sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^۲ \geq ۴ab \Leftrightarrow a^۲ + b^۲ - ۲ab \geq ۰$$

$$(a-b)^۲ \geq ۰$$

نکته : اگر دو مثلث متشابه بوده و نسبت تناسب آنها برابر k باشد ، آنگاه :

۱) ارتفاع های نظیر به نظیر نیز متناسب بوده و نسبت تناسب آنها نیز برابر k است .

۲) میانه های نظیر به نظیر نیز متناسب بوده و نسبت تناسب آنها نیز برابر k است .

۳) نیمساز های نظیر به نظیر نیز متناسب بوده و نسبت تناسب آنها نیز برابر k است .

۴) نسبت تناسب محیط های آنها نیز برابر k است

۵) نسبت تناسب مساحت های آنها برابر $k^۲$ است .

نکته : هر دو n ضلعی های منتظم با یکدیگر متشابهند . مانند دو مثلث متساوی الاضلاع و یا دو مربع ویا ...

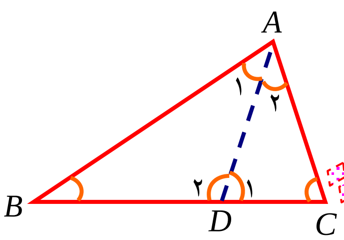
نکته : هر دو مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین با یکدیگر متشابهند .

نکته : هر دومستطیل که زاویه بین دو قطر آن ها بایکدیگر برابر باشند ، متشابهند .

نکته : هر دو لوزی که زوایای مساوی داشته باشند با هم متشابهند .

کاربرد های از قضیه تالس و تشابه

۱ – قضایای نیمساز های داخلی و خارجی

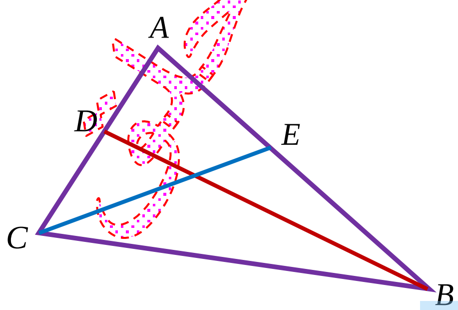


درهرمثلث نیمساز هر زاویهٔ داخلی ، ضلع رو به رو به آن زاویه را به نسبت اندازه های ضلع های آن زاویه تقسیم می کند .

فرض : $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$

حکم : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

نتیجه : در هر مثلث می توان طول های قطعاتی که هر نیمساز ایجاد می کند ، با داشتن طول های اضلاع مثلث ، محاسبه کرد .



مثال : در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ $AB = ۷$ و $AC = ۵$ و $BC = ۸$

الف)طول های دو قطعه ای که نیمساز B رو ضلع مقابل ایجاد می کند را به دست آورید .

ب)طول های دو قطعه ای که نیمساز C رو ضلع مقابل ایجاد می کند را به دست آورید .

حل الف :

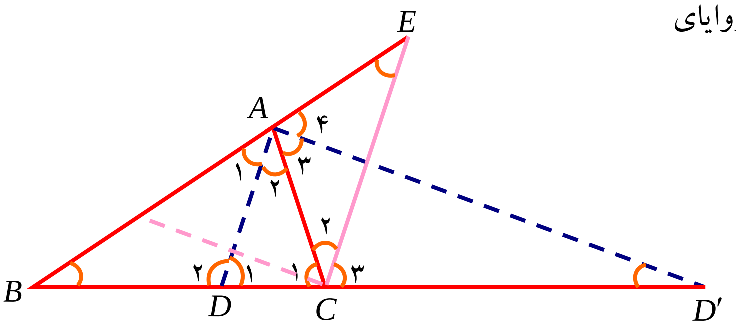
$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}=\frac{۷}{۸} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD}=\frac{۷+۸}{۸} \Rightarrow \frac{AC}{CD}=\frac{۱۵}{۸}$$

$$\xrightarrow{AC=۵} CD=\frac{۸\times ۵}{۱۵}=\frac{۸}{۳} \quad , \quad AD=AC-CD=۵-\frac{۸}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

حل ب :

$$\frac{CA}{CB}=\frac{AE}{BE}=\frac{۵}{۸} \Rightarrow \frac{AE+BE}{BE}=\frac{۵+۸}{۸} \Rightarrow \frac{AB}{BE}=\frac{۱۳}{۸}$$

$$\xrightarrow{AB=۷} BE=\frac{۸\times ۷}{۱۳}=\frac{۵۶}{۱۳} \quad , \quad AE=AB-BE=۷-\frac{۵۶}{۱۳}=\frac{۳۵}{۱۳}$$

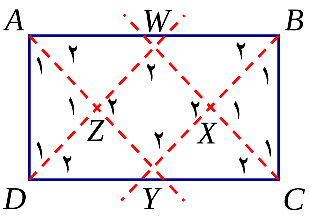


نکته : درمثلث ABC ، اگر AD و AD' به ترتیب نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی رأس A باشند ، آنگاه خواهیم داشت :

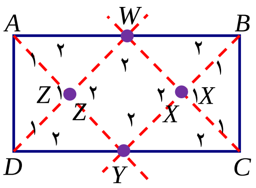
الف) $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{D'B}{D'C}$

ب) $AD^{۲}=AB\times AC-DB\times DC$

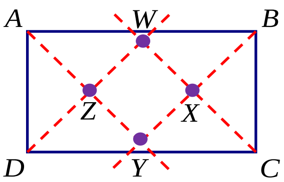
ج) $AD'^{۲}=D'B\times D'C-AB\times AC$



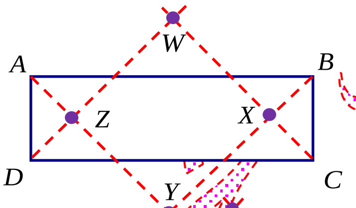
نکته: با رسم نیمساز های داخلی هر مستطیل یک مربع بوجود می آید . در صورتی که طول و عرض مستطیل به ترتیب a و b باشند مساحت مربع از رابطه مقابل به دست می آید : $S=\frac{۱}{۲}(a-b)^{۲}$



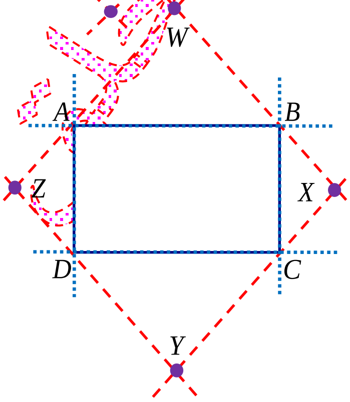
نکته : اگر طول مستطیل دقیقاً دو برابر عرض آن باشد ، آنگاه دو رأس از چهار رأس مربع حاصل از برخورد نیمساز ها ی مستطیل ، در وسط طول مستطیل قرار دارند.



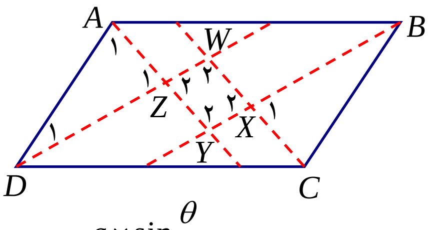
اگر طول مستطیل ازدو برابر عرض آن کمترباشد ، آنگاه هر چهار رأس مربع حاصل از برخورد نیمساز ها ی مستطیل ، در داخل مستطیل قرار دارند .



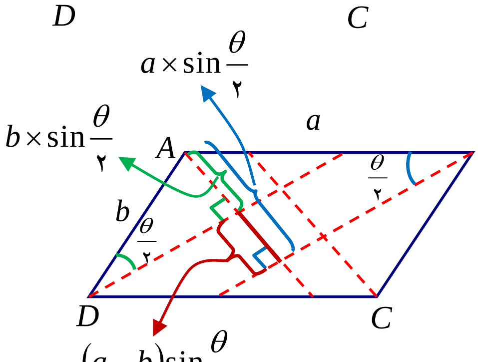
اگر طول مستطیل ازدو برابر عرض آن بیشتر باشد ، آنگاه دو رأس از چهار رأس مربع حاصل از برخورد نیمساز ها ی مستطیل ، در خارج از مستطیل قرار دارند .



با رسم نیمساز های خارجی هر مستطیل یک مربع بوجود می آید . در صورتی که طول و عرض مستطیل به ترتیب a و b باشند مساحت مربع از رابطه مقابل به دست می آید : $S=\frac{1}{2}(a+b)^2$

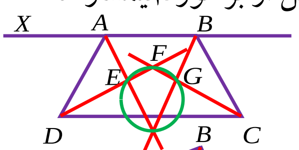


نکته: با رسم نیمساز های داخلی هر متوازی الاضلاع یک مستطیل بوجود می آید .

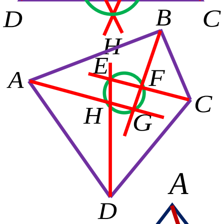


نکته : شکل حاصل از برخورد نیمسازهای یک متوازی‌الاضلاع به اضلاع b,a وزاویه‌ی حاده‌ی θ مستطیلی است به اضلاع ، $(a-b)\cos\frac{\theta}{2},(a-b)\sin\frac{\theta}{2}$، پس قطر این مستطیل برابر است با : $|a-b|$

$$\text{قطر مستطیل حاصل از برخورد نیمساز ها}=\sqrt{(a-b)^2\cos^2\frac{\theta}{2}+(a-b)^2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{(a-b)^2\left(\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}=|a-b|$$

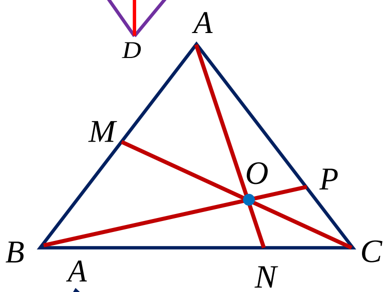


نکته : با رسم نیمساز های داخلی هر ذوزنقه یک چهارضلعی محاطی بوجود می آید.



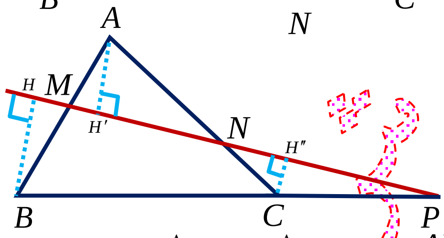
نکته:با رسم نیمساز های داخلی هر چهار ضلعی محدب یک چهارضلعی محاطی بوجود می آید .

قضیه سوا : در مثلث ABC اگر از سه رأس آن سه پاره به گونه ای رسم کنیم همرس باشند داریم : $\frac{AM}{MB}\times\frac{BN}{NC}\times\frac{CP}{PA}=1$



قضیه ژرگون : برای سه خط همرس در شکل مقابل داریم :

$$\frac{OA}{AN}+\frac{OB}{BP}+\frac{OC}{CM}=2 \quad \text{و} \quad \frac{ON}{AN}+\frac{OP}{BP}+\frac{OM}{CM}=1$$



قضیه منلائوس: اگر خط d، خطوط مثلث AB ، AC و BC از مثلث ABC را به ترتیب در M ، N و P قطع کند، آنگاه داریم :

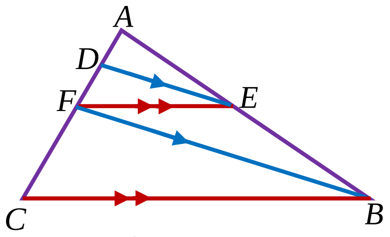
$$\frac{AM}{MB}\times\frac{BP}{PC}\times\frac{CN}{NA}=1$$

اثبات:دو مثلث $\overset{\Delta}{AMH'}$ و $\overset{\Delta}{BMH}$ به حالت برابری دو زاویه متشابهند و داریم: $\overset{\Delta}{AMH'}\approx\overset{\Delta}{BMH} \Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{AH'}{BH}$

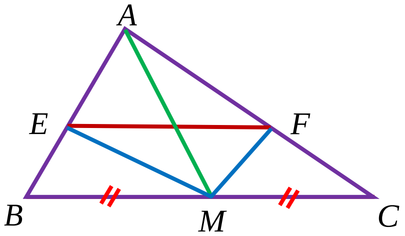
به همین ترتیب می توان نوشت: $\overset{\Delta}{BPH}\approx\overset{\Delta}{CPH} \Rightarrow \frac{BC}{CP}=\frac{BH}{CH'}$ و $\overset{\Delta}{CNH''}\approx\overset{\Delta}{ANH'} \Rightarrow \frac{CN}{NA}=\frac{CH''}{AH'}$

بنابراین می‌توان نوشت : $\frac{AM}{MB}\times\frac{BP}{PC}\times\frac{CN}{NA}=\frac{AH'}{BH}=\frac{BH}{CH''}=\frac{CH''}{AH'}=1$

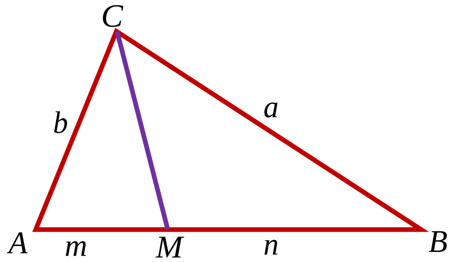
۲ – نسبت اجزای فرعی ، محیط ها ومساحت های دو مثلث متشابه



نکته : اگر درمثلث ABC مانندشکل زیر DE با FB موازی بوده و EF با BC موازی باشد آنگاه داریم : $\frac{AD}{DF}=\frac{AF}{FC}$ و $AF^{2}=AD\times AC$



نکته : در مثلث ABC اگر از پای میانه AM نیمساز های ME و MF را رسم کنیم به طوری که نقاط E و F به ترتیب روی AB و AC باشند ، آنگاه EF موازی BC بوده ودر نتیجه داریم : $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$



نکته: اگر نقطه M ضلع AB از مثلث ABC را به نسبت $\frac{BM}{AM}=\frac{n}{m}$ تقسیم کند آنگاه داریم : $CM=\frac{mb+na}{m+n}$

(برای سهولت کار این مسئله را در حالتی حل کنید که $b>m$ و $a>n$ باشد)

اثبات :

برای اثبات نکته فوق به صورت زیر عمل می کنیم :

$$\frac{BM}{AM}=\frac{n}{m}\Rightarrow m(BM)=n(AM)\Rightarrow nAM+mBM=0$$

از طرفی طبق قضیه نا مساوی مثلثی می دانیم در هر مثلث طول هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر بوده و از قدر مطلق تفاضل دو ضلع دیگر ، بزرگتر است بنابراین می توان نوشت :

$$\begin{array}{l} CM\le CB+BM \xrightarrow{\times m} mCM\le mCB+mBM \xrightarrow{CB=a} mCM\le mb+mBM \\ CM\le CA+AM \xrightarrow{\times n} nCM\le nCA+nAM \xrightarrow{CA=b} nCM\le na+nAM \end{array} \xrightarrow{\text{جمع}}$$

$$nCM+mCM\le na+mb+\underbrace{nAM+mBM}_{\text{صفر}}\Rightarrow CM(n+m)\le na+mb\Rightarrow CM\le\frac{na+mb}{n+m}$$

$$\begin{array}{l} CM\ge CB-BM \xrightarrow{\times m} mCM\ge mCB-mBM \xrightarrow{CB=a} mCM\ge mb-mBM \\ CM\ge CA-AM \xrightarrow{\times n} nCM\ge nCA-nAM \xrightarrow{CA=b} nCM\ge na-nAM \end{array} \xrightarrow{\text{جمع}}$$

$$nCM+mCM\ge na+mb-\underbrace{nAM+mBM}_{\text{صفر}}\Rightarrow CM(n+m)\ge na+mb\Rightarrow CM\ge\frac{na+mb}{n+m}$$