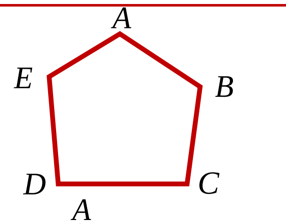
# چند ضلعی ها و ویژگی هایی از آنها

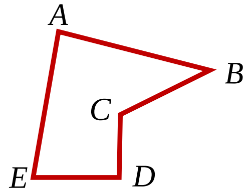
تعریف : چند ضلعی شکلی است شامل $n\ (n\geq ۳)$ پاره خط متوالی که :

۱ – هر پاره خط دقیقاً دو پاره خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند .

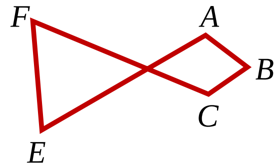
۲ – هر دو پاره خط که در یک انتها مشترکند ، روی یک خط نباشند .




(۱)




(۲)



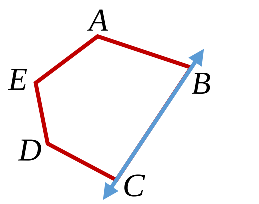

(۳)

با توجه به شکل های مقابل می توان گفت :

اشکال (۱) و (۲) چند ضلعی هستند ولی شکل ۳ چند ضلعی نیست.

## قطر در چند ضلعی ها

در هر $n$ ضلعی ، از هر رأس تعداد $n-۳$ قطر خارج شده بنابراین تعداد قطر ها برابر $\frac{n(n-۳)}{۲}$ می باشد .

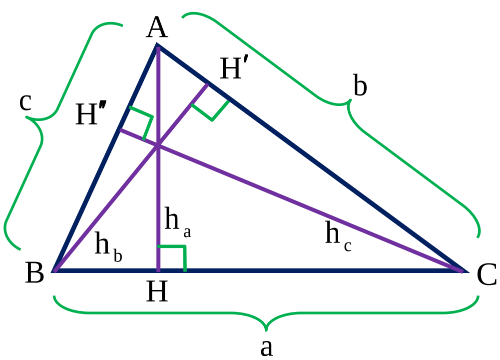



چند ضلعي محدب

تعریف : $n$ضلعی را محدب گوییم هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن ، بقیهٔ نقاط چند ضلعی در یک طرف آن خط واقع شوند.

هر (( چند ضلعی )) را که محدب نباشد مقعر می نامند.

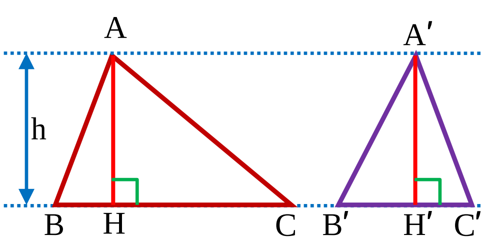
نکته : در مثلث ABC داریم:




$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}a\times h_a \quad , \quad S_{ABC}=\frac{۱}{۲}b\times h_b \quad , \quad S_{ABC}=\frac{۱}{۲}c\times h_c$$

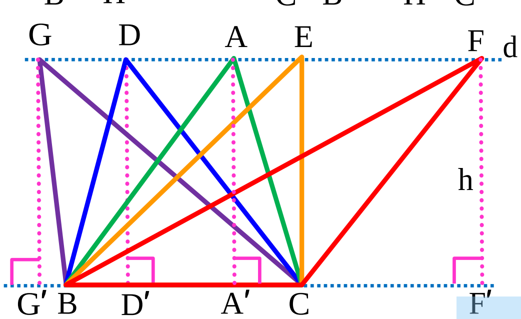
نکته : در هر مثلث نسبت اندازه های هر دو ضلع با نسبت ارتفاع وارد بر آنها رابطه معکوس دارد به عبارتی می توان نوشت :

$$\frac{b}{a}=\frac{h_a}{h_b} \quad \text{و} \quad \frac{c}{a}=\frac{h_a}{h_c} \quad \text{و} \quad \frac{c}{b}=\frac{h_b}{h_c}$$




نکته:اگر اندازه‌های ارتفاع های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت های این دو مثلث برابر نسبت اندازه های قاعده هایی است که این ارتفاع ها برآنها وارد می شود .

$$AH=A'H'=h \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BC}{\frac{۱}{۲}A'H'\times B'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$



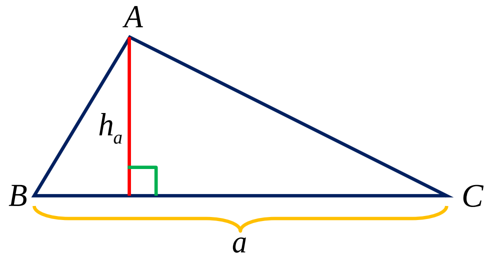

مثال : در شکل مقابل خط d با BC موازی است .

$$S_{GBC}=S_{DBC}=S_{ABC}=S_{EBC}=S_{FBC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}ha$$

نکته : مساحت هر مثلث را به یکی از سه حالت زیر می توان به دست آورد :

الف)

$S_{\triangle} = \frac{۱}{}a \times h_{} \Rightarrow \left\{ a = \frac{۲S}{h_a} \right.$ یا $S_{\triangle} = \frac{۱}{}b \times h_{} \Rightarrow \left\{ b = \frac{۲S}{h_b} \right.$ یا $S_{\triangle} = \frac{۱}{}c \times h_{} \Rightarrow \left\{ c = \frac{۲S}{h_c} \right.$

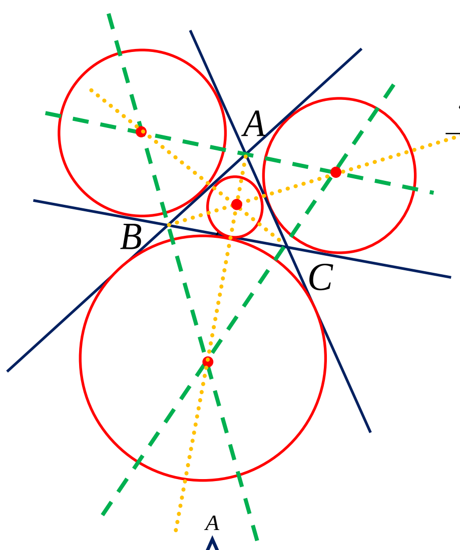



ب) $S_{ABC} = \frac{۱}{}AB \times AC \times \sin A = \frac{۱}{}AB \times BC \times \sin B = \frac{۱}{}AC \times BC \times \sin C$

۳ – قضــیه هرون : در هر مثلث با طول اضـــلاع $a$ و $b$ و $c$ اگر $p = \frac{a+b+c}{۲}$ آنگاه

مساحت مثلث برابر است با : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

**تذکر :** با توجه به نکات فوق می توان گفت رابطه زیر همواره بر قرار است .



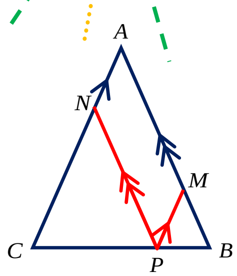

$$\frac{۱}{} + \frac{۱}{} + \frac{۱}{} = \frac{۱}{} + \frac{۱}{} + \frac{۱}{} = \frac{a+b+c}{} = \frac{P}{}$$

نکته: اگر $r_a$، $r_b$ و $r_c$ شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و $r$ شعاع دایره محاطی داخلی باشد، داریم:

$$r_c = \frac{S}{P-c} \text{ و } r_b = \frac{S}{P-b} \text{ و } r_a = \frac{S}{P-a}$$

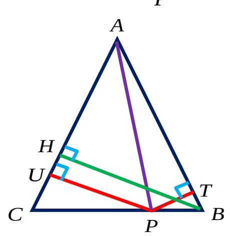
و از این رابطه نتیجه می شود:

$$\frac{۱}{} + \frac{۱}{} + \frac{۱}{} = \frac{۱}{}$$



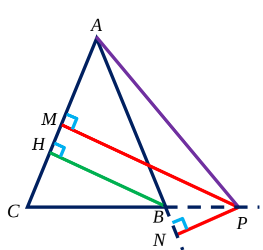

نکته: اگر از یک نقطه دلخواه روی قاعده یک مثلث متساوی الساقین به موازات دو ساق مثلث خطوطی رسم کنیم، مطابق شکل مجموع طول دوپاره خط ایجاد شده، برابر طول ساق مثلث می باشد .

$$PM + PN = AB$$



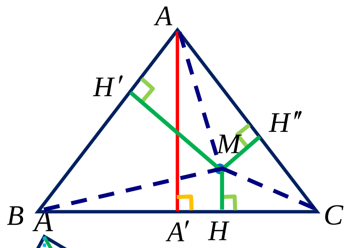

نکته: اگر از یک نقطه دلخواه روی قاعده یک مثلث متساوی الساقین، به دو ساق مثلث عمودهایی رسم کنیم، مجموع طول دوپاره خط برابر طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث می باشد .

$$PT + PU = BH$$



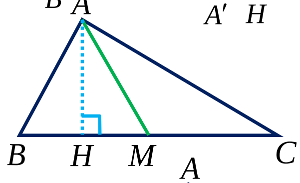

نکته: اگر از یک نقطه دلخواه روی امتداد قاعده یک مثلث متساوی الساقین، به دو ساق مثلث عمودهایی ر سم کنیم، قدرمطلق تفا ضل طول دوپاره خط برابر طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث می باشد.

$$|PM - PN| = BH$$



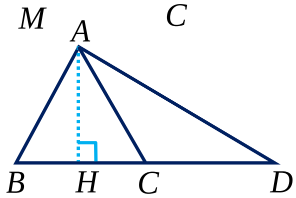
نکته: مجموع فواصل نقطه دلخواه $M$ داخل مثلث متساوی الاضلاع $ABC$، از اضلاع آن برابر طول ارتفاع این مثلث است .

$$MH + MH' + MH'' = AA'$$



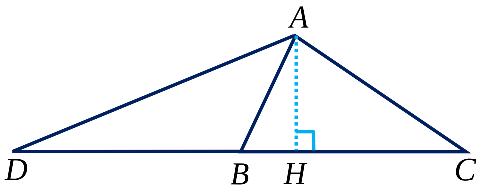
نکته : میانه هر مثلث آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند.

$$S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{۱}{۲} S_{ABC}$$



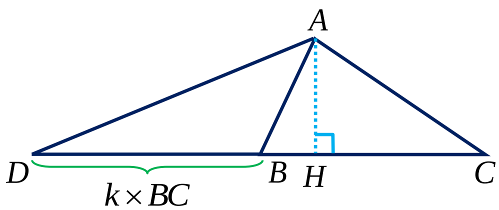
اگر در مثلث $ABC$ ضلع $BC$ را از طرف رأس $C$ به اندازه خودش تا نقطهٔ $D$ امتداد دهیم، مساحت مثلث $ACD$ برابر مساحت مثلث $ABC$ بوده و مساحت مثلث $ABD$ دو برابر مساحت مثلث $ABC$ است.

$$S_{ACD} = S_{ABC} \quad , \quad S_{ABD} = ۲S_{ABC}$$



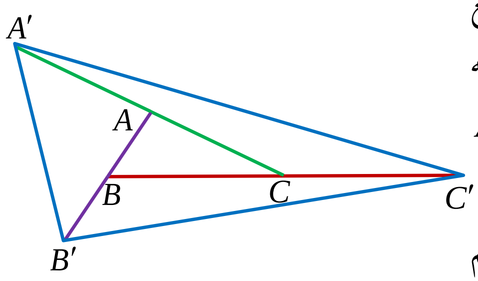
اگر در مثلث $ABC$ ضلع $BC$ را از طرف رأس $B$ به اندازه خودش تا نقطهٔ $D$ امتداد دهیم، مساحت مثلث $ABD$ برابر مساحت مثلث $ABC$ بوده و مساحت مثلث $ADC$ دو برابر مساحت مثلث $ABC$ است.

$$S_{ABD} = S_{ABC} \quad , \quad S_{ADC} = ۲S_{ABC}$$



اگر در مثلث $ABC$ ضلع $BC$ را از طرف رأس $B$ به اندازه $k$ برابرخودش تا نقطهٔ $D$ امتداد دهیم، مساحت مثلث $ABD$ ، $k$برابر مساحت مثلث $ABC$ بوده و مساحت مثلث $ADC$، $(k+۱)$برابر مساحت مثلث $ABC$ است.

$$S_{ABD} = k \times S_{ABC} \quad , \quad S_{ADC} = (k+۱) \times S_{ABC}$$



مثال: اگر در مثلث $ABC$ ضلع $BC$ را از طرف رأس $C$ به اندازه خودش تا نقطهٔ $C'$ و ضلع $AC$ را از طرف رأس $A$ به اندازه خودش تا نقطهٔ $A'$ و ضلع $AB$ را از طرف رأس $B$ به اندازه خودش تا نقطهٔ $B'$ امتداد دهیم، مساحت مثلث $A'B'C'$ چند برابر مساحت مثلث $ABC$ است.

حل : مساحت مثلث $ABC$ را برابر $S$ در نظر می گیریم. در مثلث $A'CC'$ ، داریم $A'C = ۲AC$ و $CC' = BC$ و زاویه $A'\hat{C}C'$ مکمل زاویه $A\hat{C}B$ است، پس داریم :

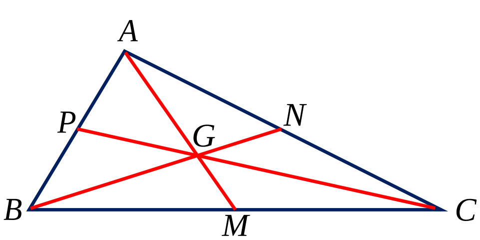
$$S_{A'CC'} = ۲S_{ABC} = ۲S$$

و به همین ترتیب داریم:

$$S_{B'BC'} = ۲S_{ABC} = ۲S \quad \text{و} \quad S_{A'AB'} = ۲S_{ABC} = ۲S$$

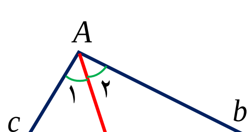
درنتیجه می توان نوشت:

$$S_{A'B'C'} = S_{ACC'} + S_{B'BC'} + S_{A'AB'} + S_{ABC} = ۲S + ۲S + ۲S + S = ۷S$$



نکته: با رسم سه میانه یک مثلث، تعداد ۶ مثلث هم مساحت به وجود می‌آید که مساحت هر کدام از آنها $\frac{۱}{۶}$ مثلث اولیه است.

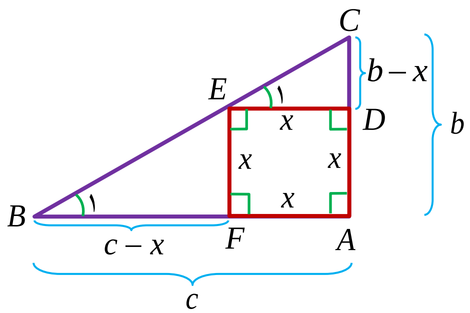
$$S_{\overset{\Delta}{AGP}} = S_{\overset{\Delta}{BGP}} = S_{\overset{\Delta}{BGM}} = S_{\overset{\Delta}{CMG}} = S_{\overset{\Delta}{CNG}} = S_{\overset{\Delta}{ANG}} = \frac{۱}{۶} S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$



نکته: در مثلث $ABC$، نیمساز یک زاویه، مثلث را به دو مثلث تقسیم می‌کند به طوری که نسبت مساحت‌های آنها متناسب با دو ضلع آن زاویه است.

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}}=\frac{\frac{1}{2}AB\times AD\times\sin\hat{A}_1}{\frac{1}{2}AC\times AD\times\sin\hat{A}_2}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

## نکات مربوط به مربع محاط در مثلث قائم الزاویه

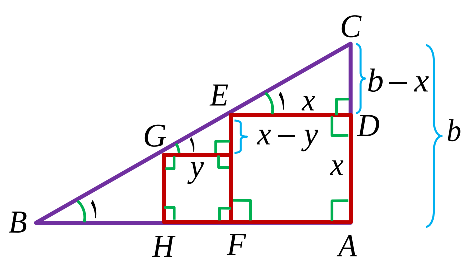



نکته: اگر در مثلث قائم الزاویه $ABC$، $\hat{A}=90^\circ$ مربعی به ضلع $x$ را طوری محاط کنیم که یک زاویه مربع، همان زاویه قائمه مثلث باشد، در این صورت داریم: $x=\frac{bc}{b+c}$.

$$ED\parallel AB \quad \text{مورب} \quad BC \Rightarrow \hat{E}_1=\hat{B}_1 \Rightarrow \tan\hat{E}_1=\tan\hat{B}_1$$

$$\Rightarrow \frac{b-x}{x}=\frac{x}{c-x} \Rightarrow bc-bx-cx+x^2=x^2 \Rightarrow x=\frac{bc}{b+c}$$

( $AE$ نیمساز زاویه $A$ است و تمام روابط طولی نیمساز برقرار است.)

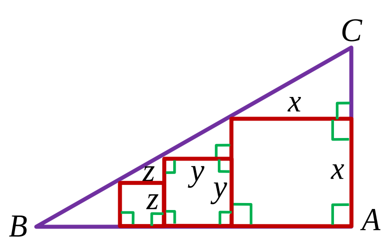



نکته: اگر در مثلث قائم الزاویه $ABC$، $(\hat{A}=90^\circ)$ دو مربع به اضلاع $x$ و $y$ مطابق شکل رسم کنیم در این صورت داریم: $x^2=by$.

اثبات:

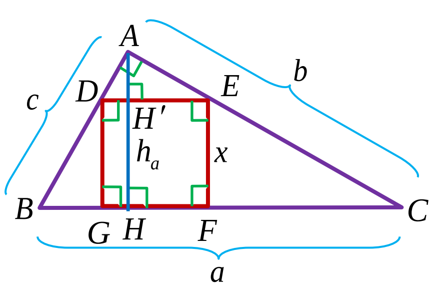
$$AB\parallel GI\parallel ED \quad \text{مورب} \quad BC \Rightarrow \hat{B}_1=\hat{G}_1=\hat{E}_1 \Rightarrow \tan\hat{G}_1=\tan\hat{E}_1$$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{y}=\frac{b-x}{x} \Rightarrow x^2-xy=by-xy \Rightarrow x^2=by$$




نکته: اگر در مثلث قائم الزاویه $ABC$، $(\hat{A}=90^\circ)$ سه مربع به اضلاع $x$ و $y$ و $z$ مطابق شکل رسم کنیم در این صورت داریم: $y^2=xz$.

اثبات مشابه مسئله قبل است.



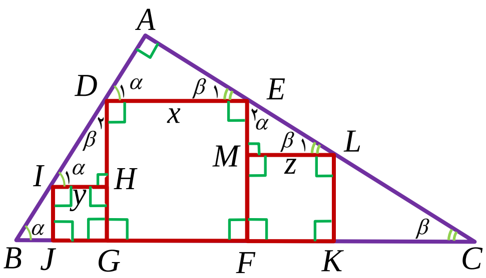

نکته: اگر در مثلث قائم الزاویه $ABC$، $\hat{A}=90^\circ$ مربعی به ضلع $x$ را طوری محاط کنیم که یک ضلع مربع، موازی وتر مثلث باشد، در این صورت داریم: $x=\frac{abc}{a^2+bc}$.

اثبات:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{ABC}} \Rightarrow \frac{1}{2}a\times h_a=\frac{1}{2}bc \Rightarrow h_a=\frac{bc}{a}$$

$$ED \parallel AB \Rightarrow \overset{\Delta}{ADE} = \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{h_a - x}{h_a} = \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{bc}{a} - x}{\frac{bc}{a}} = \frac{x}{a} \Rightarrow bc - ax = \frac{bcx}{a} \Rightarrow abc - a^2 x = bcx \Rightarrow x = \frac{abc}{a^2 + bc}$$




نکته: اگر در مثلث $ABC$ سه مربع به اضلاع $x$ و $y$ و $z$ را مانند شکل مقابل رسم کنیم داریم: $x = y + z$

اگر $\hat{B} = \alpha$ و $\hat{C} = \beta$ با استفاده از خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود:

$$\hat{I}_1 = \hat{D}_1 = \alpha \text{ و } \hat{L}_1 = \hat{E}_1 = \beta$$

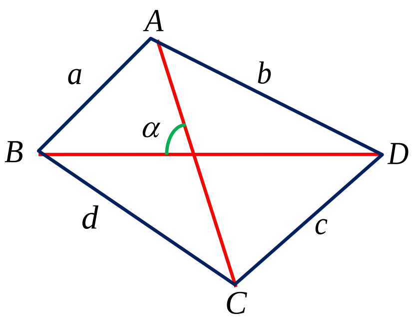
و از آنجاییکه مجموع زوایای داخلی مثلث برابر $180^\circ$ است نتیجه می‌شود:

$\hat{E}_2 = \alpha \quad , \quad \hat{D}_2 = \beta$ و در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{I}_1 = \hat{E}_2 = \alpha \\ \hat{D}_2 = \hat{L}_1 = \beta \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{DIH} \approx \overset{\Delta}{EML} \Rightarrow \frac{IH}{EM} = \frac{DH}{ML} \Rightarrow \frac{y}{x - z} = \frac{x - y}{z}$$

$$\Rightarrow yz = x^2 - xy - xz + yz \Rightarrow x(x - y - z) = 0 \xrightarrow{\div x} x = y + z$$

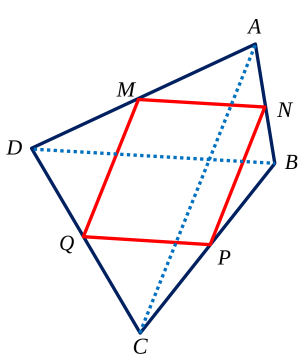
نکته: مساحت هرچهارضلعی برابراست بانصف حاصلضرب دوقطر درسینوس زاویه بین دوقطر.




$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin\alpha$$

قضیه هرون در چهار ضلعی: مساحت چهار ضلعی $ABCD$ با محیط $2P$، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d) - abcd \times \cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$




نکته :از به هم وصل کردن وسط های اضلاع هر چهار ضلعی محدب، یک متوازی الاضلاع بوجود می آید که محیط آن برابر با جمع طول قطر های چهار ضلعی اولیه می باشد و زاویه بین اضلاع آن با زاویه بین قطر های چهار ضلعی اولیه برابر است.

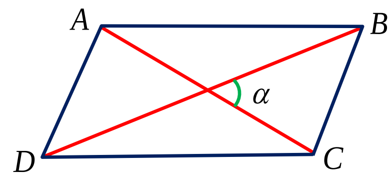
**تذکر:** از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک چهار ضلعی یک چهار ضلعی به وجود می آید که محیط آن برابر مجموع طول قطر های چهار ضلعی اولیه می باشد .

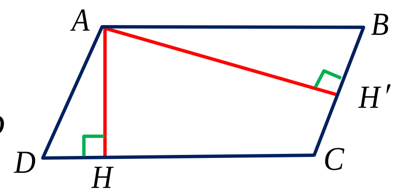
**تذکر:** شرط آنکه از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک چهار ضلعی یک مستطیل به وجود می آیدآن است که قطر های چهار ضلعی اولیه بر هم عمود باشند .

**تذکر:** شرط آنکه از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک چهار ضلعی یک لوزی به وجود می آیدآن است که قطر های چهار ضلعی اولیه با هم برابر باشند .

## نکات مربوط به متوازی الاضلاع

نکته: مساحت یک متوازی الاضلاع رامی‌توان به یکی از سه حالت زیر تعیین کرد:

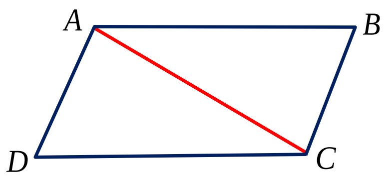



الف) $S_{ABCD} = AH \times DC = AH' \times BC$

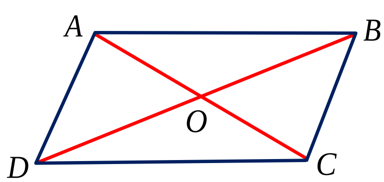
ب) $S_{ABCD} = AB \times AD \times \sin A = AD \times DC \times \sin D$

ج) $S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} AC \times BD \times \sin \alpha$




نکته: هر قطر متوازی الاضلاع، آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند که مساحت هر یک از آنها نصف مساحت متوازی الاضلاع است.

$$S_{\overset{\triangle}{ADC}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$

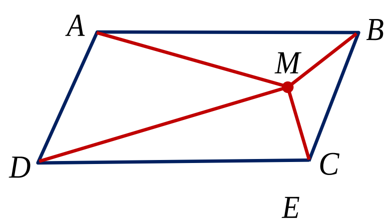



نکته: با رسم دو قطر متوازی الاضلاع، چهار مثلث هم مساحت به وجود می‌آید که مساحت هر یک از آنها $\frac{۱}{۴}$ مساحت متوازی الاضلاع است.

$$S_{\overset{\triangle}{AOD}} = S_{\overset{\triangle}{DOC}} = S_{\overset{\triangle}{BOC}} = S_{\overset{\triangle}{AOB}} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$

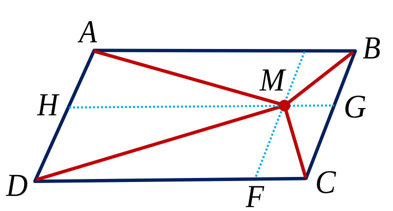
نکته: مجموع مربعات قطرها برابر است با مجموع مربعات اضلاع:

$$AC^۲ + BD^۲ = AB^۲ + BC^۲ + CD^۲ + AD^۲$$




نکته: اگر از نقطه دلخواه $M$ درون متوازی الاضلاع به چهار رأس آن وصل کنیم آنگاه چهار مثلث به وجود می‌آید که مجموع مساحت‌های دو مثلث مقابل با مجموع مساحت‌های دو مثلث مقابل دیگر با یکدیگر برابرند.

$$S_{\overset{\triangle}{AMD}} + S_{\overset{\triangle}{BMC}} = S_{\overset{\triangle}{AMB}} + S_{\overset{\triangle}{DMC}}$$




اثبات:

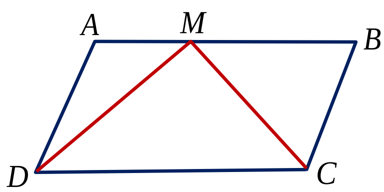
از نقطه $M$ پاره خط‌های $EF$ و $GH$ را موازی اضلاع مثلث رسم می‌کنیم.

می دانیم قطر متوازی الاضلاع آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$S_{\overset{\triangle}{DMF}} = S_{\overset{\triangle}{DMH}} \text{ و } S_{\overset{\triangle}{CMG}} = S_{\overset{\triangle}{CMF}} \text{ و } S_{\overset{\triangle}{BME}} = S_{\overset{\triangle}{BMG}} \text{ و } S_{\overset{\triangle}{AME}} = S_{\overset{\triangle}{AMH}}$$

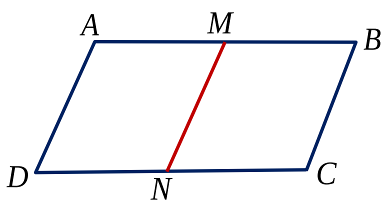
و در نتیجه داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{AMD}} + S_{\overset{\triangle}{BMC}} = S_{\overset{\triangle}{AMH}} + S_{\overset{\triangle}{DMH}} + S_{\overset{\triangle}{BMG}} + S_{\overset{\triangle}{CMG}} = S_{\overset{\triangle}{AME}} + S_{\overset{\triangle}{DMF}} + S_{\overset{\triangle}{BME}} + S_{\overset{\triangle}{CMF}} = S_{\overset{\triangle}{AMB}} + S_{\overset{\triangle}{DMC}}$$



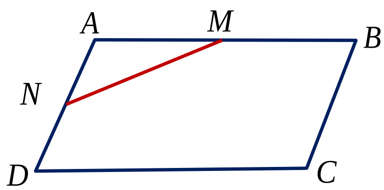

نکته: اگر از یک نقطه دلخواه روی یک ضلع متوازی الاضلاع به دو رأس مقابل وصل کنیم، مثلثی به وجود می‌آید که مساحت آن نصف مساحت متوازی الاضلاع است.

$$S_{\overset{\Delta}{MDC}} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$



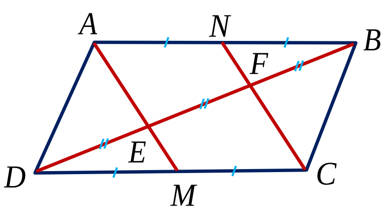

نکته: پاره خطی که وسط یک ضلع متوازی الاضلاع را به وسط ضلع مقابل به آن وصل می‌کند، متوازی الاضلاع را به دو متوازی الاضلاع یکسان تبدیل می‌کند که مساحت هر قسمت، نصف مساحت متوازی الاضلاع است.

$$S_{AMND} = S_{MBCN} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$



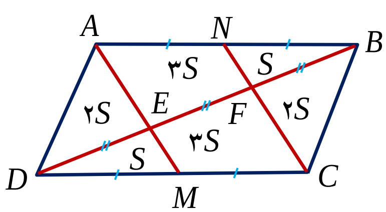

نکته: پاره خطی که وسط یک ضلع متوازی الاضلاع را به وسط ضلع مجاور به آن وصل می‌کند، مثلثی با مساحت $\frac{1}{8}$ مساحت متوازی الاضلاع به وجود می‌آورد.

$$S_{AMND} = S_{MBCN} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$



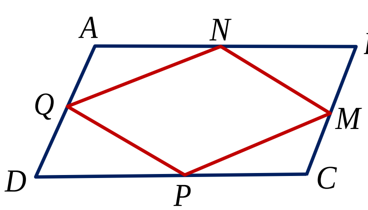

نکته: در هر متوازی الضلاع، پاره خط‌هایی که از دو رأس مقابل به و سط اضلاع مقابلشان وصل می‌شود، قطر مقابل راه به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. یعنی در شکل مقابل داریم:

$$\left.\begin{matrix} AN = BN \\ DM = CM \end{matrix}\right\} \Rightarrow DE = EF = BF$$

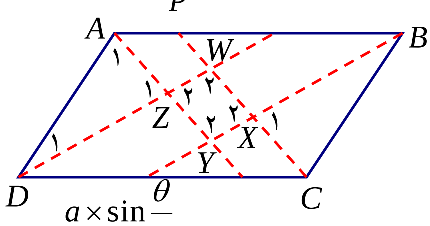



مساحت هر بخش مانند شکل مقابل است.

$$S_{\overset{\Delta}{BMF}} = S_{\overset{\Delta}{DME}} = s \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ADE}} = S_{\overset{\Delta}{BCF}} = 2s \quad , \quad S_{AEFN} = S_{CFEM} = 3s$$

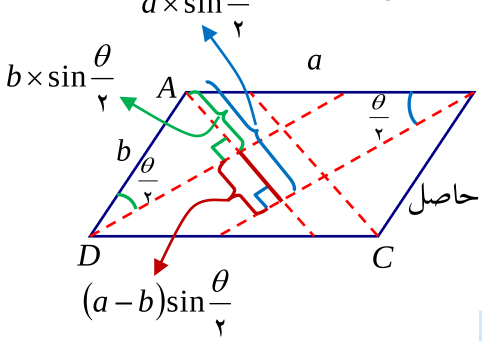



نکته : از به هم وصل کردن وسط‌های اضلاع یک متوازی الاضلاع، یک متوازی الاضلاع به وجود می آید که مساحت آن نصف مساحت متوازی الاضلاع اولیه است.




نکته: با رسم نیمساز های داخلی هر متوازی الاضلاع یک مستطیل بوجود می آید .

**نکته :** شکل حاصل از برخورد نیمسازهای یک متوازی‌الاضلاع به اضلاع $b,a$ وزاویه‌ی حاده‌ی $\theta$ مستطیلی است به اضلاع ، $(a-b)\cos\frac{\theta}{2},(a-b)\sin\frac{\theta}{2}$ ، پس قطر این مستطیل برابر است با : $|a-b|$

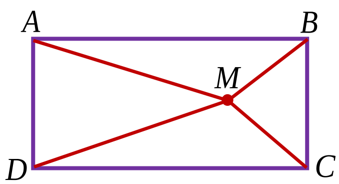



$$\text{قطر مستطیل حاصل} = \sqrt{(a-b)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + (a-b)^2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{(a-b)^2\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right)} = |a-b|$$

نسبت مساحت مستطیل حاصل به مساحت متوازی الاضلاع، به زوایای داخلی متوازی الاضلاع ارتباطی ندارد زیر اگر مساحت مستطیل را $s$ و مساحت متوازی الاضلاع را $s'$ بنامیم داریم:

$$\frac{s}{s'}=\frac{(a-b)\sin\frac{\theta}{2}\times(a-b)\cos\frac{\theta}{2}}{ab\sin\theta}=\frac{(a-b)^2\times\sin\theta}{2ab\sin\theta}=\frac{(a-b)^2}{2ab}$$

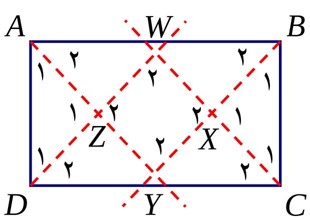
## نکات مربوط به مستطیل




نکته: اگر از نقطه دلخواه $M$ درون مستطیل به چهار رأس آن وصل کنیم آنگاه داریم:

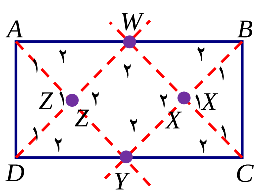
$$AM^2+MC^2=BM^2+DM^2$$

از آنجاییکه مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است تمام نکات متوازی الاضلاع در مورد مستطیل نیز صدق می کند.

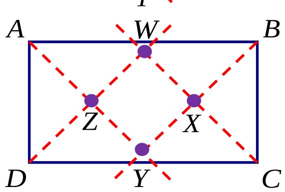



نکته: با رسم نیمساز های داخلی هر مستطیل یک مربع بوجود می آید . در صورتی که طول و عرض مستطیل به ترتیب $a$ و $b$ باشند مساحت مربع از رابطه مقابل به دست می آید:

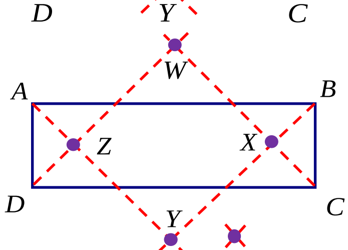
$$S=\frac{1}{2}(a-b)^2$$



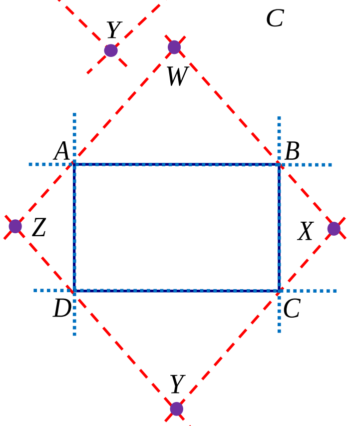

نکته : اگر طول مستطیل دقیقاً دو برابر عرض آن باشد ، آنگاه دو رأس از چهار رأس مربع حاصل از برخورد نیمساز ها ی مستطیل ، در وسط طول مستطیل قرار دارند .




اگر طول مستطیل ازدو برابر عرض آن کمترباشد ، آنگاه هر چهار رأس مربع حاصل از برخورد نیمساز ها ی مستطیل ، در داخل مستطیل قرار دارند .



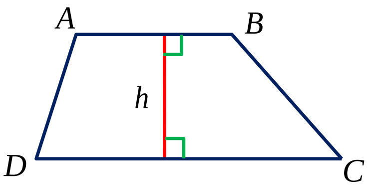

اگر طول مستطیل ازدو برابر عرض آن بیشتر باشد ، آنگاه دو رأس از چهار رأس مربع حاصل از برخورد نیمساز ها ی مستطیل ، در خارج از مستطیل قرار دارند .




با رسم نیمساز های خارجی هر مستطیل یک مربع بوجود می آید . در صورتی که طول و عرض مستطیل به ترتیب $a$ و $b$ باشند مساحت مربع از رابطه مقابل به دست می آید:

$$S=\frac{1}{2}(a+b)^2$$

## نکات مربوط به ذوزنقه



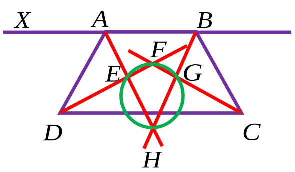

مساحت یک ذوزنقه به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}h(AB+DC)$$

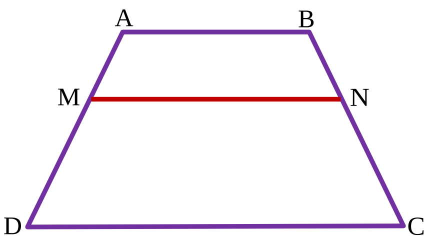
نکته: در ذوزنقه متساوی الساقین زوایای مجاور به هر قاعده با یکدیگر برابرند و بلعکس.

نکته: در ذوزنقه متساوی الساقین قطرها با یکدیگر برابرند و بلعکس.

نکته : با رسم نیمساز های داخلی هر ذوزنقه یک چهارضلعی محاطی بوجود می آید زیرا دو زاویه قائمه دارد.




در شکل مقابل ذوزنقه متساوی الساقین بوده و زوایای $\hat{E}$ و قائمه هستند و چهار ضلعی $EFGH$ یک کایت است و در نتیجه $FH$ عمود منصف $EG$ و همچنین نیمساز زوایای $\hat{F}$ و $\hat{H}$ است.



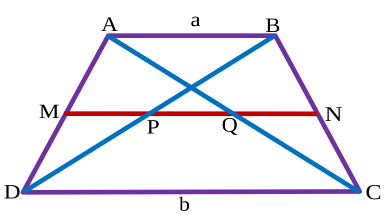

نکته: در ذوزنقه مقابل $MN\|AB\|CD$ داریم :

$$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

عکس رابطه فوق نیز برقرار است یعنی اگر $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$ آنگاه نتیجه می گیریم $MN$ موازی $AB$ است .

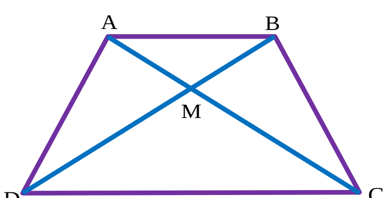
نکته :اگر $AB=a$ و $DC=b$ و $MN\|AB\|CD$ و $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=\frac{m}{n}$ در این صورت طول

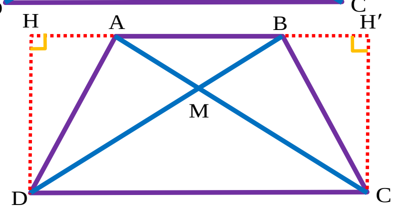
$$MN=\frac{na+mb}{m+n}$$




نکته : در شکل مقابل $M$وسط $AD$ و $N$ وسط $BC$ است. در این حالت داریم:

$$MN\|AB\|DC \quad MN=\frac{a+b}{۲} \qquad , \qquad PQ=\frac{|b-a|}{۲}$$




نکته : در متوازی الاضلاع $ABCD$ اگر نقطه تلاقی قطرها را $M$ بنامیم در این صورت داریم:

الف) $S_{\overset{\Delta}{AMD}}=S_{\overset{\Delta}{BMC}}$

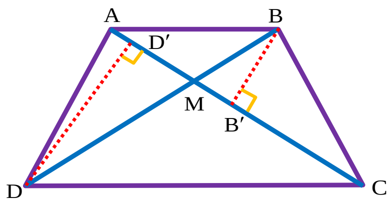
ب) $\left(S_{\overset{\Delta}{AMD}}\right)^۲=S_{\overset{\Delta}{AMB}}\times S_{\overset{\Delta}{DMC}}$ یا $S_{\overset{\Delta}{AMD}}\times S_{\overset{\Delta}{BMC}}=S_{\overset{\Delta}{AMB}}\times S_{\overset{\Delta}{DMC}}$

اثبات الف:

$$\left.\begin{aligned}S_{\overset{\Delta}{DAB}}&=\frac{۱}{۲}DH\times AB\\ S_{\overset{\Delta}{CAB}}&=\frac{۱}{۲}CH'\times AB\end{aligned}\right\}\xrightarrow{DH=CH'}S_{\overset{\Delta}{DAB}}=S_{\overset{\Delta}{CAB}}$$

$$\Rightarrow\ S_{\overset{\Delta}{DAB}}-S_{\overset{\Delta}{MAB}}=S_{\overset{\Delta}{CAB}}-S_{\overset{\Delta}{MAB}}\ \Rightarrow\ S_{\overset{\Delta}{AMD}}=S_{\overset{\Delta}{BMC}}$$

اثبات ب:



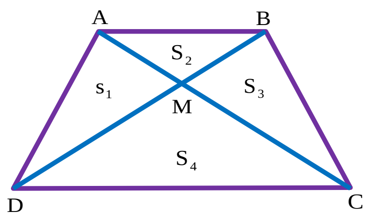

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{MAB}}}{S_{\overset{\triangle}{MBC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}BB'\times AM}{\frac{۱}{۲}BB'\times MC}=\frac{AM}{MC}$$

و به طور مشابه داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{MAD}}}{S_{\overset{\triangle}{MDC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}DD'\times AM}{\frac{۱}{۲}DD'\times MC}=\frac{AM}{MC}$$

ودر نتیجه می توان نوشت:

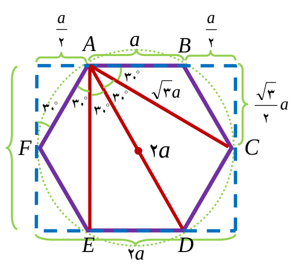
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{MAB}}}{S_{\overset{\triangle}{MBC}}}=\frac{S_{\overset{\triangle}{MAD}}}{S_{\overset{\triangle}{MDC}}}\quad\Rightarrow\quad S_{\overset{\triangle}{MAB}}\times S_{\overset{\triangle}{MDC}}=S_{\overset{\triangle}{MAD}}\times S_{\overset{\triangle}{MBC}}$$




به طور خلاصه در متوازی الاضلاع مقابل داریم:

الف) $S_۱=S_۳$

ب) $S_۱\times S_۳=S_۲\times S_۴$ یا $S_۱^۲=S_۳^۲=S_۲\times S_۴$




نکته: در یک شش ضلعی منتظم به ضلع $a$ :

۱) هرزاویه داخلی $۱۲۰^\circ$ است.

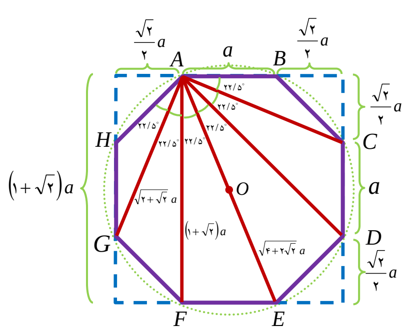
۲) با رسم تمام قطرها از یک رأس (دو قطر کوچک و یک قطر بزرگ) تعداد ۴ زاویه $۳۰^\circ$ به وجود می‌آید.

۳) طول قطر کوچک برابر $\sqrt{۳}a$ و طول قطر بزرگ (نیمساز زاویه) برابر $۲a$ است.

۴) مساحت این شش ضلعی برابر است با: $S=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$ است.

۵) شعاع دایره محیطی برابر $a$ است.

۶) این شش ضلعی منتظم دارای مستطیل محیطی به طول $۲a$ و به عرض $\sqrt{۳}a$است.




نکته: در یک هشت ضلعی منتظم به ضلع $a$ :

۱) هرزاویه داخلی $۱۳۵^\circ$ است.

۲) با رسم تمام قطرها از یک رأس (دو قطر کوچک دو قطر متوسط و یک قطر بزرگ) تعداد ۶ زاویه $۲۲/۵^\circ$ به وجود می‌آید.

۳) طول قطر کوچک برابر $\sqrt{۲+\sqrt{۲}}a$ و طول قطر متوسط برابر $(۱+\sqrt{۲})a$ طول قطربزرگ (نیمساز زاویه) برابر $\sqrt{۴+۲\sqrt{۲}}a$ است.

۴) مساحت این هشت ضلعی برابر است با: $S=\left(۱+۲\sqrt{۲}\right)a^{۲}$ است.

۵) شعاع دایره محیطی برابر $a$ $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۲\sqrt{۲}}$ است.

۶) این هشت ضلعی منتظم دارای مربع محیطی به ضلع $a\left(\sqrt{۲}+۱\right)$ است.