



ریاضی دهم فصل اول – مجموعه، الگو و دنباله

ریاضی و تجربی

email : adel۳۱۱۵@gmail.com

channel : telegram.me/math_akh

phone : ۰۹۱۹۰۶۹۰۰۶۳ – ۰۹۳۵۶۷۸۳۳۷۲

id : @al_5867

جزوه شامل موارد زیر است :

- (۱) درسنامه جامع
- (۲) بررسی تمام مطالب کتاب درسی
- (۳) تست های آموزشی
- (۴) آزمون جامع پایان فصل با کلید
- (۵) جمع بندی پایان فصل
- (۶) به تعداد لازم تست برای کل دبیرستان

مؤلف: عادل آخکندی

به نام خالق زیبایی‌ها

منحنی قائم‌تبع ابروی توست خط‌مجانب بر آن، طره‌ی کیسوی توست، حد رسیدن به تو، مبهم و بی‌انتهاست، بازه تعریف دل، در حرم کوی توست، بی‌تو وجودم بود یک سری واکرا، نایجه، مکرش دایره روی توست، مهر تو چون می‌دهد سمت به بردار دل، هر طرفی رو کنی، هم‌جهت و سوی توست، پرتو خورشید شد مشتق از آن چشم تو، گرمی و جان بخشی‌اش جزئی از آن خوی توست، چون به عدد، یک تویی، من همه صفرها، آن چه که معنا دهد قامت و بجوی توست، گر شود آن دم که مازوج مرتب شویم، سر بر رهت می‌نهم، چون که سرم کوی توست، بهجرو فراق شکست قائمه قائمی، نقطه پرکار عشق واله و پی جوی توست

میچگاه دلی رامسکن چون ممکن است خانه خدا باشد. میچگاه انسانی را تحقیر نکن چون ممکن است حمیب خدا باشد، میچگاه کناهانیت را کوچک شمار

چون ممکن است آن نقطه، نقطه مرکب تو باشد.

این نوشته می‌تواند برای هردانش آموزی مورد استفاده قرار گیرد و خواننده می‌تواند از مباحث شتوع آن بهره‌ی کافی را ببرد توصیه می‌کنم که تمام بخش‌ها را کامل مطالعه نمایید

در خاتمه تاکید می‌کنم از آنجا که هیچ کلامی جز کلام خداوند خالی از اشتباه نیست، از خوانندگان عزیز تقاضا می‌کنیم ما را از نظرات، انتقادات و پیشنهادات خویش بهره‌مند ساخته تا در تالیفات بعدی از آنها استفاده شود.



عنوان

جزوه آموزشی ریاضی پایه دهم
فصل اول : مجموعه، الگو و دنباله

نگارش

عادل آخندی

دبیر ریاضی : عادل آخندی



صفحه

فهرست

۱	مجموعه.....	۱
۱.۱	مجموعه های اعداد.....	۱
۲.۱	بازه های اعداد حقیقی.....	۵
۱.۲.۱	مجموعه های منتهای و نامتناهی.....	۱۰
۳.۱	مجموعه مرجع.....	۱۴
۱.۳.۱	مجموعه های جدا از هم (مجزا).....	۱۷
۲.۳.۱	تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه منتهای.....	۱۸
۱.۴	تست های تکمیلی درس اول و دوم (سوالات از سطح ساده به متوسط چیده شده‌اند).....	۲۲
۲	الگو.....	۳۱
۱.۲	الگوهای خطی.....	۳۴
۲.۲	الگوهای غیر خطی.....	۳۶
۳	دنباله.....	۳۸
۱.۳	بررسی جملات دنباله هایی از نوع درجه دوم.....	۴۰
۱.۱.۳	دنباله مربعی.....	۴۱
۲.۱.۳	دنباله مثلثی.....	۴۲
۲.۳	دنباله ی حسابی.....	۴۵
۳.۲.۱	جمله عمومی دنباله حسابی.....	۴۶
۲.۲.۳	فاصله ی بین هر دو جمله ی دلخواه در دنباله ی حسابی.....	۴۸
۳.۲.۳	واسطه ی حسابی.....	۵۰
۴.۲.۳	درج m واسطه ی حسابی بین دو عدد a و b	۵۳
۳.۳	دنباله هندسی.....	۶۲
۱.۳.۳	جمله عمومی دنباله هندسی.....	۶۳
۲.۳.۳	فاصله ی بین دو جمله ی دلخواه در دنباله ی هندسی.....	۶۴
۳.۳.۳	واسطه هندسی.....	۶۶
۴.۳.۳	حاصل ضرب جملات اولیه در دنباله ی هندسی.....	۶۸
۵.۳.۳	درج m واسطه ی هندسی بین دو عدد a و b	۶۸
۴.۳	دنباله بازگشتی.....	۷۷
۱.۴.۳	دنباله فیبوناتچی.....	۷۸



معذرت

معذرت میخواهم فیثاغورس ... چرا که مادر من سخت ترین معادلات است!

معذرت میخواهم نیوتن ... چرا که مادر من راز جاذبه است!

معذرت میخواهم ارسون ... چرا که مادر من اولین چراغ زندگی من است!

معذرت میخواهم افلاطون ... چرا که این مادر من است که شهر فاضله قلب من است!

معذرت میخواهم رومیو ... چرا که همه راه ها به عشق مادر من ختم میشود!

معذرت میخواهم ژولیت ... چرا که مادر من عشق من است!

در این فصل ابتدا با مجموعه ها و انواع آن آشنا می شویم ، مجموعه ی مرجع و متمم یک مجموعه و شمارش تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه از سایر مباحث پیش روست. پس از آن سراغ الگو ها و دنباله های حسابی و هندسی می رویم و با آنها آشنا می شویم.

در نهایت با دنباله هایی همچون مربعی و مثلثی و بازگشتی و نحوه ی شکل گیری آنها بیشتر آشنا خواهیم شد. در پایان فصل نیز دو آزمون جامع برای جمع بندی در نظر گرفته شده است.





مجموعه های منتهی و نامتناهی

درس اول

قبل از ورود به کلاس در تمام جلسات پیش مطالعه درس جدید ، مرور و حل سوالات تعیین شده درس قبلی انجام شود!!!



۱ مجموعه

۱.۱ مجموعه های اعداد

مجموعه : ما از مجموعه در ریاضی برای بیان و نمایش دسته ای از اشیای مشخص (عضویت این اشیا در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیر تکراری) استفاده می کنیم .

تذکر : مفهوم مجموعه آن قدر پایه ای است که ارائه تعریف دقیقی برای آن بسیار دشوار است .

تست ۱ : کدام عبارت زیر یک مجموعه را مشخص می کند ؟

الف (چهار عدد فرد متوالی ب) پنج عدد بزرگتر از ۱۰۰ ج) سه شهر ایران د) عددهای طبیعی بین ۳ و ۴

بیشتر بدانیم : تاریخچه ی دقیقی از نحوه شکل گیری و تکامل اعداد در دسترس نیست . از آثار بجای مانده از گذشتگان

تنها می توان حدس زد که چگونه از شمارش در کارهای روزمره ی خود استفاده می کرده اند . خطوط موازی کوچک بر استخوان ران یک گاو که در کنگو در قاره ی آفریقا یافت شده است متعلق به حدود ۸۰۰۰ سال پیش است . آنها برای شمارش به ازای هر واحد شمارش (مثلاً شمارش فرزندان یا گوسفندان یا افراد قبیله و) یک خط بر استخوان یا چوب حک می کرده اند . گاهی نیز از سنگریزه برای شمارش استفاده کرده اند . شاید ابتدایی ترین راه شمارش استفاده از انگشتان دست باشد . در دسترس بودن انگشتان و خم کردن یک انگشت به ازای شمارش یک چیز کار ساده ایست و دلیل استفاده بشر از مبناهای ۵ و ۱۰ به همین علت است . حتی مبنای ۲۰ هم در میان قوم مایاها در آمریکای جنوبی رواج داشته و یادآور دورانی است که بشر پاره نه بوده است . در این دستگاه هر مرد معادل عدد ۲۰ بوده است . (چرا ؟) ابتدایی ترین مجموعه مورد استفاده بشر همانطور که می دانید **مجموعه اعداد طبیعی** بوده است .

برخی از مجموعه های پر کاربرد عبارتند از :

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

(Natural numbers set) مجموعه اعداد طبیعی

$$\mathbb{W} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

(Whole numbers set) مجموعه اعداد حسابی

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

(Zahl numbers set) مجموعه اعداد صحیح

دبیر ریاضی : عادل آخکندی



$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

(Quotient numbers set) مجموعه اعداد گویا

تذکر: اعداد گویا به دو صورت کسر متعارفی و نماد بسط اعشاری ، نمایش داده می شوند به عنوان مثال داریم : $0/8 = \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ که در آن $\frac{4}{5}$ کسر متعارفی و $0/8$ نمایش اعشاری این عدد گویاست.

نکته: عدد گنگ یا اصم در دستگاه اعداد به صورت عددی حقیقی تعریف می شود که گویا نباشد.

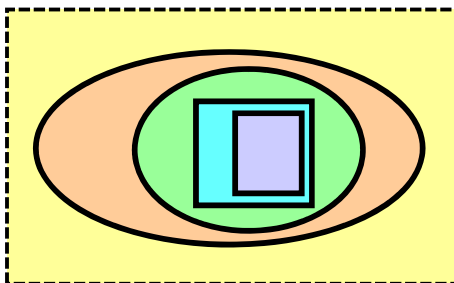
\mathbb{Q}' یا \mathbb{Q}^c مجموعه اعداد گنگ (Irrational numbers set)

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ مجموعه اعداد حقیقی (Real numbers set)

سوال: به نظر شما چرا عدد $\sqrt{2}$ گنگ است؟

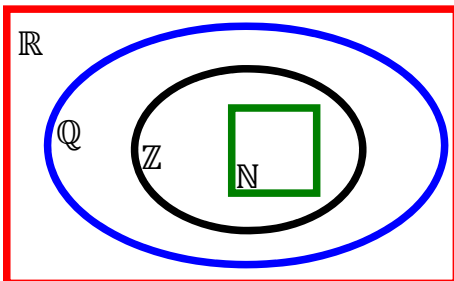
مجموعه یکی از اساسی ترین مفاهیم ریاضی است که بسیاری از نظریه های دیگر ریاضی در یک قرن اخیر بر مبنای آن پایه گذاری یا سازماندهی شده اند .مطالعات جدی درباره مجموعه ها با کار جورج کانتور در سال ۱۸۷۰ آغاز شده است.

همان طور که ملاحظه می شود رابطه ی زیر مجموعه بودن ، بین این مجموعه ها به شکل $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ برقرار است. به عبارت دیگر تمام مجموعه های اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده ایم، زیرمجموعه هایی از اعداد حقیقی اند . در نتیجه، هر عدد دلخواهی را که در نظر بگیریم، باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و همچنین هر نقطه روی این محور نشان دهنده یک عدد حقیقی مشخص است.



بررسی یک فعالیت :

- الف) روی شکل مقابل هر یک از مجموعه های \mathbb{R} و \mathbb{Q} و \mathbb{Z} و \mathbb{W} و \mathbb{N} را مشخص نموده ، سپس مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ را هاشور بزینید. به نظر شما این مجموعه با کدام مجموعه اعداد برابر است؟
- ب) دو عدد گویا مثال بزینید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید.
- ج) عددی گویا مثال بزینید که حقیقی نباشد.
- د) مجموعه ی $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ را با اعضایش نشان دهید.

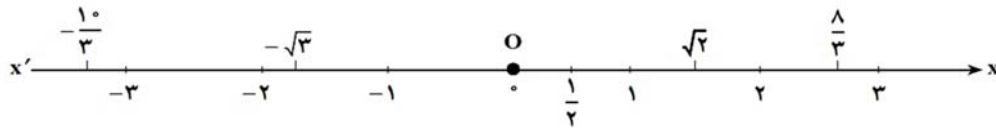


سوال: اعداد $96/2, -13, \frac{\pi}{3}, 30^\circ, 2^{-3}, 3\sqrt{7}, \sqrt{3}$ را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

تست ۲: کدامیک از مجموعه های زیر تنها یک عضو دارد؟

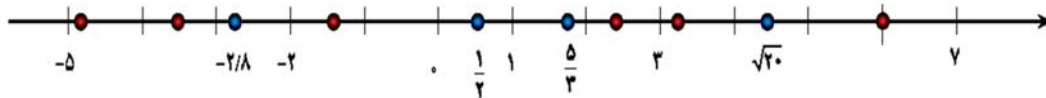
الف ($\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$) ب ($\mathbb{Z} - \mathbb{W}$) ج ($\mathbb{Q}' - \mathbb{N}$) د ($\mathbb{W} - \mathbb{N}$)

با توجه به تعریف، محور مختصات خطی است با مرکز مبدا مختصات و جهت های تعیین شده و واحد مربوطه که در شکل زیر اعداد مختلف را روی آن به نمایش گذاشته ایم ، همان طور که می دانیم هر عدد حقیقی متناظر با یک نقطه از محور مختصات و هر نقطه از محور مختصات ، نظیر یک عدد حقیقی است.

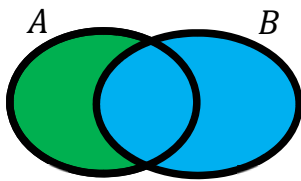


سوال : هریک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ اند؟

زیر آنها خط بکشید. $-\sqrt{2}, -4/9, 6, 2/45, -7/2$

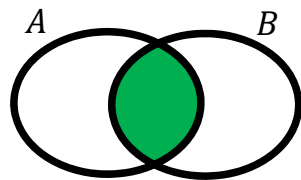


یادآوری برخی از قوانین مجموعه ها



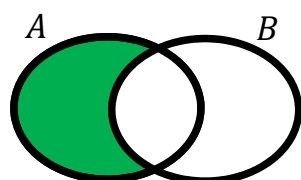
اجتماع دو مجموعه A و B : مجموعه ای است که اعضایش متعلق به A یا B یا هر دو مجموعه

A و B است و آن را به صورت $A \cup B$ نشان می دهیم. نمودار ون آن به صورت مقابل است :



اشتراک دو مجموعه A و B : مجموعه ای است که هر عضو آن هم به A و هم به B تعلق

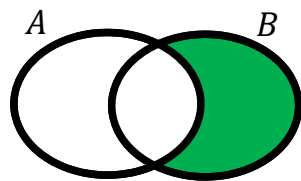
داشته و آن را به صورت $A \cap B$ نشان می دهیم. نمودار ون آن به صورت مقابل است :



تفاضل دو مجموعه A و B : $(A - B)$ مجموعه ای است که عضوهای آن به A تعلق داشته

ولی به B تعلق نداشته باشد. به عبارتی دیگر اعضای A می باشد که متعلق به

مجموعه B نیست. نمودار ون آن به صورت مقابل است :



تفاضل دو مجموعه A و B : $(B - A)$ مجموعه ای است که عضوهای آن به B تعلق داشته

ولی به A تعلق نداشته باشد. نمودار ون آن به صورت مقابل است :

سوال: در هر کدام از حالت‌های زیر اجتماع و اشتراک و تفاضل دو مجموعه A و B را بیابید.

الف) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 10\}$ و $B = \{3, 5, 8, 9, 10, 15, 21\}$

ب) $A = \{x \in \mathbb{Z} | -2 \leq 2x < 8\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} | 2x - 1 \leq 5\}$

تست ۳: کدام نتیجه زیر نادرست است؟

الف) $N \cup W \subseteq W$ (ب) $N \cap W \subseteq W$ (ج) $W \cup Z \subseteq W$ (د) $W \cap Z \subseteq W$

تست ۴: اگر $A = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ و $B = \{2, 4, 5, 6\}$ باشند، مجموعه $(A \cup B) - [A - (A \cap B)]$ چند عضو دارد؟

الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵

تست ۵: اگر $A = \{x \in \mathbb{N} | \frac{12}{x} \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} | \frac{18}{x} \in \mathbb{N}\}$ باشند، مجموعه $A \cap B$ چند عضو دارد؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴

تذکر: با برخی از قوانین زیر در دوره متوسطه ۱ آشنا شده‌اید که جهت یادآوری ذکر می‌شود:

۱) $(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$, $(A \cap B) \subseteq B \subseteq (A \cup B)$, $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$

۲) $A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases} \xrightarrow{\text{نتیجه}} A \cup \emptyset = A , A \cap \emptyset = \emptyset$

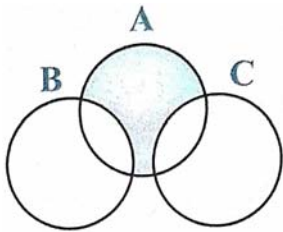
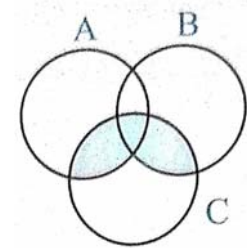


۳) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ پخش پذیری اجتماع نسبت به اشتراک

۴) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ پخش پذیری اشتراک نسبت به اجتماع

برای موفقیت باید از مرحله گذشت: ابتدا مورد تمسخر واقع می‌شوی سپس با خشونت به مخالفت با تو می‌پردازند. سرانجام به تو ایمان می‌آورند

قوانین جذب $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ ۵)



تست ۶: کدام مجموعه، قسمت سایه خورده را نشان می دهد؟

الف) $A \cap (B \cup C)$ ب) $A \cup (B \cap C)$

ج) $C \cup (A \cap B)$ د) $C \cap (A \cup B)$

تست ۷: کدام مجموعه، قسمت سایه خورده را نشان می دهد؟

الف) $A - (B \cap C)$ ب) $(A - C) \cap (A - B)$

ج) $A \cap (B \cup C)$ د) $(A \cup B) - (A \cup C)$

۲.۱ بازه های اعداد حقیقی

یادآوری: اگر A یک مجموعه و a عضوی از آن باشد می نویسیم $a \in A$ و اگر b عضوی از مجموعه A نباشد می نویسیم

$b \notin A$ ، به عنوان مثال اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ آنگاه $2 \in A$ و $6 \notin A$

حال با دسته ای دیگر از مجموعه ها سر و کار داریم که **برشی از محور اعداد حقیقی هستند**.

در اینجا گونه دیگری از زیرمجموعه های \mathbb{R} را در نظر می گیریم، فرض کنید A مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین -2 و 1 به همراه خود این دو عدد باشد. یعنی: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$ اعضای A را روی محور، با رنگ کردن مشخص کنید. آیا می توان تمام اعضای A را فهرست کرد؟ آیا می توان اولین عدد حقیقی بعد از -2 را مشخص کرد؟ چنین زیر مجموعه هایی از \mathbb{R} که مشخص کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد را **بازه** یا **فاصله** می نامیم. بازه ها در ریاضیات از اهمیت نسبتاً زیادی برخوردارند و ما هم در برخی از فصل های بعدی این کتاب به دفعات با آنها سر و کار خواهیم داشت. از این رو شایسته است که برای نشان دادن آنها از نماد ساده تری استفاده شود.

$A = [-2, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$: بازه بسته بین -2 و 1



فاصله (بازه): هر قطعه از اعداد حقیقی

$B = (-2, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$: بازه باز بین -2 و 1



را یک فاصله (بازه) می نامند.

فرض کنید که a و b دو عدد حقیقی باشند طوری که $a < b$ باشد :

الف) بازه های محدود :

۱- **بازه بسته** : در این بازه ها ابتدا و انتهای بازه جزئی از خود بازه هستند .



۲- **بازه باز** : در این بازه ها ابتدا و انتهای بازه جزئی از خود بازه نیستند .



۳- **بازه نیم باز** : بازه ای که از یک طرف بسته و از یک طرف باز است. (تنها یکی از نقاط انتهایی عضو بازه است)



۴- **بازه نیم باز** : بازه ای که از یک طرف بسته و از یک طرف باز است. (تنها یکی از نقاط انتهایی عضو بازه است)



بحث های گفته شده در بالا را می توان در جدول زیر خلاصه نمود :

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه ای	نمایش هندسی
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم باز (نیم بسته)			
نیم باز (نیم بسته)	$[a, b)$		
		$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\}$	
	$[\sqrt{2}, 4)$		

اشاره (تمرین در منزل) : مطالعه کتاب درسی فراموش نشود!

سوال: نمایش هندسی و مجموعه‌ای دو بازه ی $A = (-4, 2]$ و $B = (-1, 3)$ را نوشته، سپس هر کدام از مجموعه‌های $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ را به صورت بازه بنویسید و روی محور اعداد نمایش دهید.

سوال: اگر $A = [-4, 3]$ و $B = [-3, 4)$ ، مجموعه‌های $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$ را به صورت بازه بنویسید.

سوال: حاصل هر کدام از عبارات زیر را بیابید.

$$\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \dots \quad \mathbb{R} \cup \mathbb{Q} = \dots \quad \mathbb{N} - \mathbb{W} = \dots \quad \mathbb{W} - \mathbb{Z} = \dots$$

تذکر: اگر a یک عدد حقیقی باشد آنگاه: $(a, a) = \emptyset$ $[a, a] = a$

(ب) بازه‌های نامحدود (بی کران):

معرفی یک نماد به نام ∞ : بی نهایت یک مفهوم انتزاعی (ذهنی) است، که در مجموعه اعداد حقیقی یک نماد است، عدد نیست. به عبارتی دیگر $+\infty$ را به عنوان بزرگتر از هر عدد حقیقی و $-\infty$ را به عنوان کوچکتر از هر عدد حقیقی تعریف می‌کنیم.

۱- **بازه باز:** در این بازه‌ها ابتدا و انتهای بازه جزئی از خود بازه نیستند.



۲- **بازه نیم باز:** بازه‌ای که از یک طرف بسته و از یک طرف باز است.



۳- **بازه باز:** در این بازه‌ها ابتدا و انتهای بازه جزئی از خود بازه نیستند.




۴- **بازه نیم باز:** بازه‌ای که از یک طرف بسته و از یک طرف باز است.



(ج) بازه‌هایی که از هر دو طرف نامحدود باشد:



سوال : جدول زیر را کامل کنید.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه ای	نمایش هندسی
		$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم باز (نیم بسته)	$[a, +\infty)$		
			
	$(-\infty, a)$		
		\mathbb{R}	
	$[\sqrt{2}, +\infty)$		
		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$	
	$(-\infty, 2)$		
		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$	

سوال : اجتماع و اشتراک دو بازه $(3, \infty)$ و $[-4, 2]$ را بدست آورید سپس روی محور اعداد نمایش دهید.

نکته : در یک بازه علامت ∞ هیچگاه کنار علامت [قرار نمی گیرد ، به عبارتی $+\infty$ یا $+\infty$ نمایشی نادرست هستند.

نکته : در یک بازه علامت $+\infty$ همواره در سمت راست بازه قرار میگیرد یعنی $(10, +\infty)$ درست و $(+\infty, 10)$ نادرست است . علامت $-\infty$ نیز همواره در سمت چپ بازه قرار می گیرد یعنی $(-\infty, 10)$ درست و $(10, -\infty)$ نادرست است.

سوال : با فرض اینکه $A = [2, +\infty)$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \leq 3\}$ در این صورت حاصل $A \cap B$ را بیابید.

سوال: در هر کدام از حالت‌های زیر دو مجموعه مثال بنویسید.

الف) دو مجموعه که اشتراکشان تهی باشد.

ب) دو مجموعه که تنها یک عضو مشترک داشته باشند.

ج) دو مجموعه که بی‌شمار عضو مشترک داشته باشند.

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{3}, 2)$ ب) $-2 \in (-2, 0]$ پ) $0 \in (-2, 0]$ ت) $-2 \in \{-2, 0\}$ ث) $-1 \in \{-2, 0\}$

ج) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$ ح) $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2)$ خ) $\emptyset \subseteq (-17, 0]$ د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$ ذ) $[2, 5) = (2, 5]$

هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.

-2	$\sqrt{3}$	-500	$\frac{-5}{4}$	$6/0.22 \times 10^{23}$	0/2
[1, 4]	$(-\infty, -4)$	$[-2, 0)$	$[3, +\infty)$	$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(-2, 3)$

↙

سوال: حاصل مجموعه $(3, +\infty) - [2, 4)$ را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور بدست آورید.

سوال: اگر $A = (-\infty, 2]$, $B = [-3, 1)$, $C = (-1, +\infty)$ باشد حاصل $B \cap (A \cup C)$ کدام است؟

سوال: حاصل $(-2, 1) \cap [-1, 2)$ کدام است؟

تست 8: اگر $A = [-2, 1)$, $B = (-1, 1)$, $C = [0, 4)$ باشند مجموعه $A - (B \cap C)$ کدام است؟

الف) $[-2, -1)$ ب) $(-2, -1)$ ج) $[-2, 0]$ د) $(-2, 0)$

تست ۹: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 6\}$, $B = (1, 7)$, $C = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ باشند مجموعه $(A \cup B) \cap C$ کدام است؟

الف) $(-\infty, 6)$ ب) $(-\infty, 7]$ ج) $[0, 7]$ د) $(0, 7)$

۱.۲.۱ مجموعه های متناهی و نامتناهی

سوال : فرض کنید بخواهیم مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۲۰ را با مجموعه A نشان دهیم ، سپس مجموعه B را با مجموعه صحیح کوچکتر از ۲۰ را با مجموعه B نمایش دهیم. به نظر شما اعضای کدام مجموعه قابل شمارش است؟

تعریف : مجموعه ای چون A را متناهی (با پایان) گویند هرگاه تعداد اعضای آن را بتوان با یک عدد حسابی نمایش داد. اگر تعداد اعضای مجموعه A را با $n(A)$ یا $|A|$ نشان دهیم آنگاه $n(A) = k$ بطوریکه $k \in W$ ، در غیر این صورت مجموعه را نامتناهی (بی پایان) گویند. در واقع در مجموعه های نامتناهی تعداد اعضای آن ، از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگتر خواهد بود.

سوال : دو مجموعه معرفی کنید که نامتناهی باشد.

سوال : دو مجموعه متناهی بیان کنید.

تذکر : تعداد اعضای برخی از مجموعه های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به دست آورد. برای این حالت مثال ذکر کنید.

جنگل های آمازون

آمازون که به ریه های زمین مشهور است، جنگل بسیار بزرگی در شمال آمریکای جنوبی است و به دلیل همین وسعت، به آن جنگل های آمازون گفته می شود . حدود ۶۰ درصد این جنگل در خاک برزیل قرار دارد، همچنین بخش هایی از آن هم در کشورهای پرو، اکوادور، گویان، کلمبیا ونزوئلا، بولیوی و سورینام واقع شده است. در واقع این جنگل بیش از سه برابر خاک کشور ما وسعت دارد . رودخانه ی آمازون با طول حدود ۶۵۰۰ کیلومتر به عنوان پرآب ترین رودخانه ی دنیا که ۵ درصد آب شیرین جهان را در خود جای می دهد، نیز از دل این جنگل عبور می کند . نتیجه ی یک مطالعه بزرگ که مدت ۱۰ سال به طول انجامید، نشان می دهد ۳۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ که اصله درخت که ۱۶۰۰۰ گونه مختلف در جنگل های آمازون وجود دارد . با این حساب سهم هر فرد دنیا از این جنگل چند درخت می شود؟! با وجود این، مجموعه درخت های جنگل های آمازون یک مجموعه متناهی محسوب می شود یا نامتناهی؟



سوال : متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه های زیر را مشخص کنید .درباره ی مجموعه های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید .

تعداد (مجموعه متناهی)	نامتناهی	متناهی	مجموعه
			مجموعه اعداد اول یک رقمی
			مجموعه انسان های روی ماه
			مجموعه شمارنده های طبیعی عدد ۲۴
			مجموعه سلول های عصبی مغز یک انسان بالغ
			مجموعه تمام دایره های به مرکز مبدأ مختصات
			$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 6\}$
			مجموعه اعداد طبیعی ۱۲ رقمی
			مجموعه تمام موبایل های تولید شده در ۲۰ سال گذشته .
			مجموعه کسرهای منفی با صورت یک
			مجموعه مضرب های طبیعی عدد ۹
			بازه $(2, 3)$
			مجموعه مولکول های موجود در یک مول مشخص از آب .
			مجموعه کلمات بکار رفته در کتاب ریاضی دهم .

سوال: در هر کدام از حالت های زیر دو مجموعه ی A و B را مثال بزنید.

الف) هر دو نامتناهی باشند طوری که $B \subseteq A$ و $A - B$ تک عضوی باشد.

ب) هر دو نامتناهی باشند طوری که $A \cap B \neq \emptyset$ باشد.

ج) یکی متناهی و دیگری نامتناهی طوری که $B \subseteq A$ باشد.

د) هر دو نامتناهی باشند طوری که $A \cap B = \emptyset$ باشد.

جمع بندی:

اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه:

الف) اگر مجموعه ی B ، باشد، آنگاه A حتما متناهی است.

ب) اگر مجموعه ی B ، نامتناهی باشد، آنگاه A است.

ج) اگر مجموعه ی A ، نامتناهی باشد، آنگاه B است.

د) اگر مجموعه ی A ، متناهی باشد، آنگاه B است.

بیندیشیم: در صورتی که مجموعه ی A متناهی و مجموعه ی B نامتناهی باشد. در مورد متناهی یا نامتناهی بودن

مجموعه های $A - B$ ، $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $B - A$ بحث کنید.

سوال: به نظر شما مجموعه ی تهی، متناهی است؟ چرا؟

نکته: اشتراک مجموعه متناهی با هر مجموعه ای، **متناهی** است.

سوال: مجموعه ی $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور اعداد مشخص نموده و آن را به صورت مجموع دو بازه نوشته و در مورد متناهی

یا نامتناهی بودن آن بحث کنید.

تست ۱۰: کدام گزینه نادرست است؟

(ب) $\left\{\frac{5b}{3}, 2b\right\} \subseteq [b, 3b]$

(الف) $\sqrt{3} \notin (-1, 4) \cap (2, +\infty)$

(د) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$

(ج) $6/0.23 \times 10^{23} \in (-2, 5) \cup (-3, +\infty)$

تست ۱۱: حاصل کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

(ب) $(-\infty, 6] \cap (2, 9) = (-\infty, 9)$

(الف) $(-3, 0) \cup (-2, 5) = (-2, 0)$

(د) $(-\infty, 1) \cap [1, +\infty) = \mathbb{R}$

(ج) $(3, +\infty) \cup (6, 10) = (3, +\infty)$

تست ۱۲: اگر $A = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ و $B = (-\infty, 5) \cap [-4, +\infty)$ باشد، کدام گزینه زیرمجموعه $A \cap B$ است؟

(د) $[-4, 5)$

(ج) $[-4, -2)$

(ب) $[4, 5)$

(الف) $(-1, 4)$

تست ۱۳: اگر $[-1, b] \cup [a, 7] = [-2, 9]$ باشد، آن گاه $b - a$ کدام است؟

(د) ۱۲

(ج) ۱۱

(ب) ۱۰

(الف) ۹

تست ۱۴: کدام مجموعه دارای بزرگترین عضو است؟

(د) $\{x \in \mathbb{Q} | x < 3\}$

(ج) $\{x \in \mathbb{Q} | x \leq 4\}$

(ب) $(2, +\infty)$

(الف) \mathbb{Z}

تست ۱۵: اگر n عدد طبیعی و A_n بازه $((-1)^n, 2n)$ باشد. چند عدد صحیح به مجموعه $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ تعلق دارد؟

(د) ۱۱

(ج) ۱۰

(ب) ۹

(الف) ۸

اشاره (تمرین در منزل): تمرینات صفحه ۷ کتاب درسی تکمیل گردد.

فراموش نکنیم که منابع آبی ما محدود است پس درست مصرف کنیم



متمم یک مجموعه

درس دوم

قبل از ورود به کلاس در تمام جلسات پیش مطالعه درس جدید ، مرور و حل سوالات تعیین شده درس قبلی انجام شود!!!

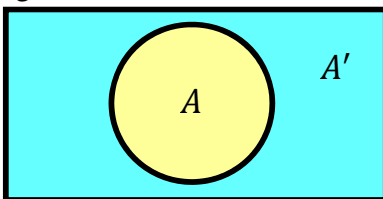
۳.۱ مجموعه مرجع

جهت روشن شدن لزوم در نظر گرفتن یک مجموعه بعنوان مجموعه مرجع ، مجموعه $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$ را در نظر بگیرید. اگر از شما بخواهند که اعضای مجموعه را بنویسید چه اعدادی را خواهید نوشت؟ جوابهای احتمالی خود را با در نظر گرفتن مجموعه های اعداد طبیعی و صحیح و حقیقی بررسی کنید.

پس همانطور که مشاهده می کنید برای مجموعه می توان حالت های مختلف را در نظر گرفت و جواب یکتایی بدست نمی آید و این ابهام در تعریف مجموعه A چندان خوشایند نیست . چنانچه مجموعه را بصورت $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 2\}$ تعریف کنیم دیگر تکلیف روشن است و می دانیم جواب چیست . در اینجا نبود یک مجموعه مرجع باعث بروز چنین مشکلی شد.

تعریف : در هر مبحث مجموعه ای که همه مجموعه های مورد بحث زیر مجموعه آن باشند را **مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی** می نامند و با حرف U نشان می دهیم. در این حالت اگر $A \subseteq U$ مجموعه ای دلخواه باشد آنگاه $U - A$ را با نماد A' نمایش می دهیم و آن را **متمم** A می نامیم. به عبارت بهتر A' شامل اعضای از U است که در A نیست.

U



$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\} \Rightarrow A' = U - A$$

تذکر : بطور معمول در هر بحثی مجموعه مرجع را معرفی می کنند . چنانچه در بحثی مجموعه مرجع را معرفی نکردیم ، شما می توانید بزرگترین مجموعه موجود را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید . وقتی صحبت از اعداد باشد بزرگترین مجموعه ممکن همان \mathbb{R} است. در حالت کلی برای نوشتن یک مجموعه به صورت استاندارد می نویسیم $\{x \mid x \text{ دارای خاصیت } p(x) \text{ است} \mid x \in U\}$. در اینجا U همان **مجموعه مرجع** است و $p(x)$ خاصیتی است که x دارای آن است.



اطلاعات عمومی : آیا مجموعه مرجع به معنای مطلق وجود دارد؟ یعنی مجموعه ای چون U شامل هر مجموعه ای که شما تصور کنید باشد . تا ابتدای قرن بیستم وجود چنین مجموعه ای فرضی مسلم بود . برتراند راسل ریاضی دان و فیلسوف نامدار انگلیسی در ابتدای قرن بیستم ثابت کرد چنین مجموعه ای وجود ندارد . پارادوکس راسل در همین ارتباط است و برای مطالعه بیشتر می توانید در گوگل عبارت پارادوکس راسل را جستجو کنید .
سوال : متمم هر کدام از مجموعه های زیر را بنویسید .

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$$

$$C = \mathbb{N} , U = \mathbb{W}$$

$$D = \mathbb{N} , U = \mathbb{Z}$$

$$E = \mathbb{N} , U = \mathbb{R}$$

$$F = \mathbb{Q} , U = \mathbb{R}$$

$$G = (-\infty, 1] , U = \mathbb{R}$$

$$H = (-3, 1] , U = \mathbb{R}$$

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$$

سوال : با فرض آنکه \mathbb{N} مجموعه مرجع باشد ، هر مجموعه را به متمم خود وصل کنید .

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

$$\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \dots\}$$

$$\{3, 6, 9, 12, \dots\}$$

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

$$\{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

$$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$$

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

$$\{10, 11, 12, 13, 14, \dots\}$$

سوال : اگر U مجموعه مرجع و $A \subseteq U$ باشد ، طرف دوم هر کدام از تساوی های زیر را بنویسید .

$$A \cup A' =$$

$$A \cap A' =$$

$$\emptyset' =$$

$$U' =$$

$$(A')' =$$

سوال : مجموعه ی اعداد طبیعی را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید :
 الف) مجموعه ی نامتناهی مانند A مثال بزیند که A' نیز نامتناهی باشد.
 ب) مجموعه ی نامتناهی مانند B مثال بزیند که B' متناهی باشد.
 ج) مجموعه ای متناهی مانند C مثال بزیند ، آیا متمم آن نیز متناهی است؟
 سوال : اگر مجموعه متناهی باشد متمم آن چگونه است؟

سوال : اگر مجموعه نامتناهی باشد متمم آن چگونه است؟

سوال : فرض کنید که $U = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ و $A = \{1, 2, 7, 8, 10\}$ و $B = \{2, 5, 6, 8, 10\}$ در این صورت جدول زیر را کامل کنید.

$A' =$	$B' =$
$(A \cup B)' =$	$A' \cap B' =$
$(A \cap B)' =$	$A' \cup B' =$
$A - B =$	$A \cap B' =$
$A - B =$	$A - (A \cap B) =$

نتیجه : (قوانین جبر مجموعه ها)

اگر A و B دو مجموعه با مجموعه ی مرجع U باشند ، آنگاه قوانین زیر همواره برقرار است :

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| ۱) $U' = \emptyset$ | ۲) $\emptyset' = U$ | ۳) $(A')' = A$ |
| ۴) $A \cap A' = \emptyset$ | ۵) $A \cup A' = U$ | ۶) $A - B = A \cap B'$ |
| ۷) $A - B = A - (A \cap B)$ | ۸) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ | ۹) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ |

دقت کنید که شماره های ۸ و ۹ به قوانین دمورگان معروف هستند.

$$۱۰) (A \cup B')' = A' \cap B = B \cap A' = B - A \quad ۱۱) (A' \cup B)' = B' \cap A = A \cap B' = A - B$$

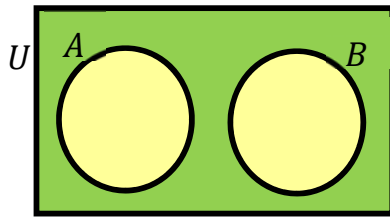
سوال : فرض کنید که $U = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ و $A = \{1, 2, 7, 8, 10\}$ و $B = \{2, 8, 10\}$ در این صورت نشان دهید

$$B \subseteq A \Rightarrow A' \subseteq B' \quad \text{که}$$

سوال : اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 4\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ باشد ، آنگاه مقادیر $B - A$ و $(A \cap B)'$ را بیابید.

۱.۳.۱ مجموعه های جدا از هم (مجزا)

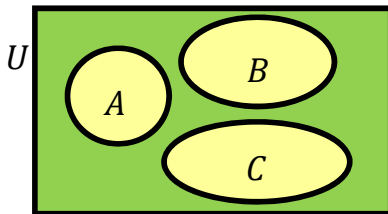
تعریف : به هر دو مجموعه چون A و B که فاقد عضو مشترک باشند ، دو مجموعه ی **جدا از هم** یا **مجزا** گویند.



$$A \cap B = \emptyset$$

سوال : دو مجموعه ی مجزا مثال بزنید.

نکته : اگر سه مجموعه ی A و B و C به گونه ای باشند که $A \cap B \cap C = \emptyset$ آنگاه لزومی ندارد که دو به دو مجزا از هم باشند. چرا؟



نتیجه : سه مجموعه ی A و B و C را دو به دو مجزا از هم گویند هرگاه اشتراک دو به دوی آنها تهی باشد.

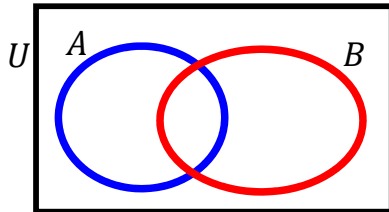
$$A \cap B = \emptyset \text{ و } A \cap C = \emptyset \text{ و } B \cap C = \emptyset$$

سوال : سه مجموعه ی دو به دو مجزا از اعداد طبیعی ارائه دهید که اجتماع آنها برابر اعداد طبیعی باشد.

۲.۳.۱ تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه متناهی

یادآوری: در سال گذشته آموختید که اگر A یک مجموعه متناهی باشد تعداد اعضای آن را با $n(A)$ نشان می دادیم به عنوان مثال اگر $A = \{1, 2, 3\}$ آنگاه $n(A) = 3$ خواهد بود.

سوال: فرض کنید که $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 3, 4\}$ در این صورت جدول داده شده و نمودار مربوطه را کامل کنید.



$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$

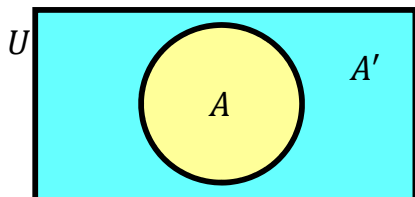
نتیجه:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

سوال: در یک مدرسه، ۲۳ نفر در تیم فوتبال و ۱۲ نفر در تیم والیبال عضو هستند. ۴ نفر نیز در هر دو تیم عضو هستند. چند نفر از دانش آموزان مدرسه، در دست کم یکی از ۲ تیم ورزشی مدرسه هستند؟ (مساله را به کمک فرمول و نمودار ون حل کنید)

سوال: در یک کلاس مدرسه ۳۰ دانش آموز وجود دارد، که ۲۷ نفر از آنها عضو حداقل یکی از تیم های فوتبال یا والیبال هستند. ۲۰ نفر از آنها فوتبال بازی می کنند و ۱۸ نفر هم والیبال بازی می کنند. چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند؟

سوال: در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.



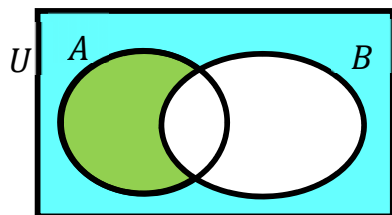
نکته: اگر A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع و متناهی U باشند آنگاه:

(۱) تعداد اعضای که به مجموعه A تعلق ندارند برابر است با:

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

سوال : در یک کلاس ۳۰ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۸ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو تیم فوتبال نیستند.

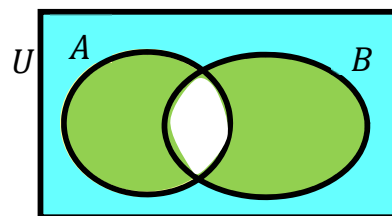
(۲) تعداد اعضای که به مجموعه ی A تعلق دارند و به مجموعه B تعلق ندارد. (فقط به مجموعه A تعلق دارند) برابر است با :



$$n(A - B) = n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B)$$

$$* n(B - A) = n(B \cap A') = n(B) - n(A \cap B)$$

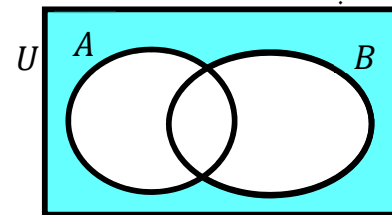
سوال : در یک کلاس ۳۰ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۸ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها فقط عضو تیم فوتبال هستند.



(۳) تعداد اعضای که فقط به یکی از مجموعه های A یا B تعلق دارند برابر است با :

$$n((A - B) \cup (B - A)) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

(۴) تعداد اعضای که **نه** به مجموعه A تعلق دارند و **نه** به مجموعه B تعلق دارند برابر است با :



$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

سوال : در یک کلاس ۴۰ نفری، هر دانش آموز حداقل عضو یکی از تیم های بسکتبال یا والیبال است. تعداد ۱۵ نفر عضو تیم والیبال و ۱۸ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هیچ تیمی نیستند.

تذکر : در صورتی که A و B دو مجموعه ی مجزا باشند آنگاه : (برای درک بهتر، سعی کنید نمودار ون رسم کنید).

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad , \quad n(A - B) = n(A)$$

تذکر : اشتباه نکنید که : $n(A - B) \neq n(A) - n(B)$

سوال : در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره ای مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید داشته اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید داشته اند.
 ب) فقط از شرکت A خرید داشته اند.
 پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید داشته اند.
 ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نداشته اند.

سوال : یک دوره جشنواره ی فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم های پویانمایی با مضمون طنز می باشند .
 مطلوب است تعداد کل فیلم هایی که:

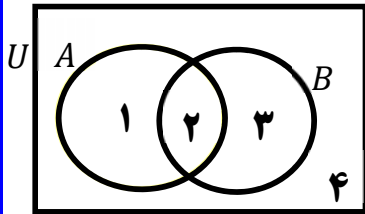
الف) پویانمایی یا طنزند.
 ب) غیرپویانمایی و غیر طنزند.

سوال : فرض کنید A و B زیر مجموعه هایی از مجموعه مرجع باشند طوری که $n(U) = ۱۰۰$ و $n(A) = ۶۰$ و $n(B) = ۴۰$ و $n(A \cap B) = ۲۰$ مطلوب است محاسبه ی :

الف) $n(A \cup B)$ ب) $n(A \cap B')$ ج) $n(A' \cap B)$ د) $n(A' \cap B')$

تست ۱۶: ۱۰۰ نفر در یک مراسم یادبود حضور دارند که ۷۰ نفر آنها بازیگر و ۲۸ نفر آنها خواننده هستند. اگر ۱۵ آن‌ها نه بازیگر و نه خواننده باشند. آنگاه چند نفر از آنها فقط بازیگر یا فقط خواننده هستند؟

الف (۶۰) ب (۷۲) ج (۷۵) د (۸۵)



روش شماره گذاری برای حل تست ها: فرض A و B دو مجموعه دلخواه باشند. در این روش ابتدا با استفاده از نمودار ون A و B را نمایش داده و به هر کدام از نواحی مجزا یک شماره نسبت می دهیم. سپس نواحی مختلف را با بیان شماره آنها نشان می دهیم.

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, A \cap B = \{2\}, A \cup B = \{1, 2, 3\}, (A \cup B)' = \{4\}, A - B = \{1\}, B - A = \{3\}$$

تست ۱۷: مجموعه $(A - B) \cup B$ برابر کدام است؟

الف ($A \cup B$) ب (B) ج (A) د ($A \cap B$)

تست ۱۸: اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند. $(A \cap B') - (B - A)$ برابر کدام مجموعه است؟

الف (B') ب (\emptyset) ج ($A - B$) د ($A \cap B$)

*تست ۱۹: اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند. $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$ برابر کدام است؟

الف (A') ب (\emptyset) ج ($B - A$) د (B)

۴.۱ تست های تکمیلی درس اول و دوم (سوالات از سطح ساده به متوسط چیده شده اند)

تست ۲۰: کدام مجموعه زیر متناهی است؟

- الف (مجموعه خطوطی که از یک نقطه می گذرد)
 ب (اعداد حقیقی در فاصله ی بین ۱ و ۲)
 ج ($\mathbb{Z} - \mathbb{W}$)
 د (اعداد اول بین ۱۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰۰)

تست ۲۱: حاصل $(-۲, ۱) \cap [-۱, ۲)$ کدام است؟

- الف ($[-۱, ۱)$)
 ب ($[-۱, ۲)$)
 ج ($[-۲, -۱)$)
 د ($[-۲, ۲)$)

تست ۲۲: اگر مجموعه ی A متناهی و مجموعه ی B نامتناهی باشند، مجموعه ی $A - B$ چگونه است؟

- الف (با پایان)
 ب (تهی)
 ج (بی پایان)
 د (غیر قابل تعریف)

تست ۲۳: اگر $n(A \cup B) = ۵$ و $n(A \cap B) = ۲$ و $n(A - B) = ۲$ باشد حاصل $n(B - A)$ کدام است؟

- الف (۴)
 ب (۳)
 ج (۲)
 د (۱)

تست ۲۴: کدام گزینه زیر درست است؟

- الف ($\mathbb{Q} \subset (\mathbb{R} \cap \mathbb{Z})$)
 ب ($(\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z}) \subset \mathbb{W}$)
 ج ($(\mathbb{Q} \cap \mathbb{W}) \subset \mathbb{Z}$)
 د ($(\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}'$)

تست ۲۵: اگر $A \subset B \subset U$ و U مجموعه ی مرجع باشد ، کدام رابطه همواره برقرار است؟

- الف ($B' \subset A'$)
 ب ($A' \subset B'$)
 ج ($A' \subset B$)
 د ($B \subset A'$)

تست ۲۶: اگر مجموعه ی مرجع ، مجموعه ی اعداد صحیح باشد ، $A' = \{۵, ۶, ۷, ۸\}$ و $B' = \{۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ آنگاه مجموعه

$(A \cup B)'$ چند عضوی است؟

- الف (۲)
 ب (۵)
 ج (۷)
 د (۸)

تست ۲۷: اگر $-2m + 1 \in (-1, +\infty)$ حدود m کدام است؟

الف) $m < 2$ (ب) $m < 1$ (ج) $m < 0$ (د) $m < 4$

تست ۲۸: اگر \mathbb{N} به عنوان مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $A = \{x \in \mathbb{N} | x^2 < 100\}$ کدام است؟

الف) $(100, +\infty)$ (ب) $\{x \in \mathbb{N} | x > 11\}$ (ج) $\{x \in \mathbb{N} | x > 9\}$ (د) $\{11, 12, 13, 14, \dots\}$

تست ۲۹: کدامیک از مجموعه های زیر با سایر مجموعه ها متفاوت است؟

الف) $Z - R$ (ب) $W - N$ (ج) $Q' \cap Q$ (د) $Q' - R$

تست ۳۰: کدامیک از اعداد زیر به مجموعه $A = \{2^x \times 3^y | x, y \in \mathbb{N}, x + y = 5\}$ متعلق است؟

الف) ۸۱ (ب) ۴۸ (ج) ۱۶۴ (د) ۱۴۴

تست ۳۱: اگر $U = \{-2, -1, 1, 2, 4, 7\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{-2, 1, 7\}$ و $B = \{-1, 1, 2, 4, 7\}$ و

$C = \{-2, 1, 4\}$ حاصل $(A \cup B)' \cap C$ کدام است؟

الف) $\{-2, 1, 4\}$ (ب) \emptyset (ج) U (د) $\{-2, 1, 0, 4\}$

تست ۳۲: اگر $n(A) = 20$ و $n(B) = 10$ باشد حاصل $n(A \cap B)$ کدام است؟

الف) ۸ (ب) ۱۲ (ج) ۵ (د) ۳۰

تست ۳۳: اگر $A = (-\infty, 2]$, $B = [-3, 1)$, $C = (-1, +\infty)$ باشد حاصل $B \cup (A \cap C)$ کدام است؟

- الف) $[-3, 2]$ (ب) $(-3, 2)$ (ج) $(-1, 1)$ (د) $[-3, 1)$

تست ۳۴: اگر مجموعه C به صورت $\{x + 2 | x \in P, 4 \leq x - 1 < 30\}$ تعریف شده باشد که در آن منظور از P مجموعه اعداد اول می باشد، کدام گزینه درست است؟

- الف) $31 \in C$ (ب) $5 \in C$ (ج) $13 \notin C$ (د) $29 \in C$

تست ۳۵: اگر $\{a\} = (-\infty, m - 2] \cap [2m + 1, +\infty)$ مقدار $a + m$ کدام است؟

- الف) -4 (ب) -3 (ج) -5 (د) -8

تست ۳۶: اگر مجموعه A متناهی و مجموعه های B و C نامتناهی باشند، در مورد هر یک از مجموعه های $A \cap (B \cup C)$ و $B - (A \cap C)$ به ترتیب از راست به چپ از نظر متناهی بودن یا نبودن چه می توان گفت؟

- الف) متناهی - متناهی (ب) متناهی - نامتناهی
ج) نامتناهی - نامتناهی (د) نامتناهی - متناهی

تست ۳۷: کدام مجموعه متناهی است؟

- الف) مثلث ها با مساحت ۶ (ب) مربع ها با مساحت ۶ و یک راس روی مبدا مختصات
ج) خط ها با شیب ۲ و گذرنده از مبدا (د) خط های گذرنده از مبدا

تست ۳۸: اگر $2m + 1 \in [-1, 5]$ حدود m کدام است؟

- الف) $0 \leq m \leq 3$ (ب) $-1 \leq m \leq 2$ (ج) $-3 \leq m \leq 0$ (د) $1 \leq m \leq 4$

تست ۳۹: اگر مجموعه اعداد حسابی ، مجموعه ی مرجع باشد و $B = \{2x | x \in W\}$ آنگاه B' برابر کدام است؟
 الف) $\{2x | x \in W'\}$ ب) $\{2x + 1 | x \in W\}$ ج) $\{x - 1 | x \in W\}$ د) $\{2x - 1 | x \in W\}$

تست ۴۰: چه تعداد از عبارت های زیر صحیح است؟

الف) اجتماع دو مجموعه ی متناهی ، مجموعه ای متناهی است.

ب) اشتراک یک مجموعه ی متناهی ، با یک مجموعه ی نامتناهی ، مجموعه ای نامتناهی است.

ج) اشتراک مجموعه مضارب ۵ با مجموعه مضارب ۷ ، مجموعه ای متناهی است.

د) اگر A مجموعه ای متناهی و B مجموعه ای نامتناهی باشد. مجموعه ی $A - B$ مجموعه ای نامتناهی است.

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

تست ۴۱: کدام مجموعه زیر متناهی است؟

الف) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x^2 > 25\}$ ب) $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x > 9, x < 100\}$

ج) $C = \{x | x \text{ عدد اول بزرگتر از } 1000\}$ د) $D = \{x | x \text{ عدد حقیقی کوچکتر از } 100\}$

تست ۴۲: اگر ۶۰ درصد دانش آموزان کلاسی عضو تیم فوتبال و ۵۰ درصد دانش آموزان کلاس عضو تیم والیبال باشند، و ۵ درصد آنها عضو هیچ تیمی نباشند. در این صورت چند درصد دانش آموزان عضو هر دو تیم هستند؟

الف) ۵ ب) ۱۰ ج) ۱۵ د) ۲۰

تست ۴۳: اگر $(-\infty, \frac{3m+5}{7}] \cup (\frac{m-1}{2}, +\infty) = \mathbb{R}$ باشد، محدوده m کدام است؟

الف) $m = 18$ ب) $m \geq 17$ ج) $m > 17$ د) $m \leq 17$

تست ۴۴: اگر $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$, $A = (-2, 5]$ در این صورت مجموعه $A - B$ برابر کدام است؟
الف) $(2, 5]$ (ب) $[2, 5]$ (ج) \emptyset (د) $(-2, 2)$

تست ۴۵: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند حاصل $(A \cap B') - A$ کدام است؟
الف) B' (ب) B (ج) A (د) \emptyset

تست ۴۶: متمم مجموعه $(B - A)' - A$ نسبت به مجموعه مرجع کدام است؟ (ریاضی خارج کشور ۸۸)
الف) $A \cup B$ (ب) B (ج) A (د) $A \cap B$

تست ۴۷: اگر $A \subseteq B$ باشد ، آنگاه کدام گزاره نادرست است؟
الف) $B' \subseteq A'$ (ب) $A' \cup B = U$ (ج) $A' \cap B = \emptyset$ (د) $B' \cap A = \emptyset$

تست ۴۸: از ۵۱ دانش آموز یک دبیرستان ، ۳۵ نفر در کلاس ادبیات ، ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده اند . چند نفر در هیچ یک از دو کلاس شرکت ننموده اند؟ (سراسری ریاضی ۸۲)
الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۷ (د) ۸

تست ۴۹: $\frac{1}{3}$ از تعداد اعضای مجموعه A با مجموعه B و $\frac{2}{5}$ از تعداد اعضای B با A مشترک هستند . اگر $n(A \cup B) = ۴۵$ در این صورت $n(A \cap B)$ کدام است؟
الف) ۵ (ب) ۱۰ (ج) ۱۵ (د) ۲۰

تست ۵۰: از یک کلاس ۲۳ نفری ، ۱۵ نفر کرد زبان و ۱۳ نفر ترک زبان حضور دارند ، با فرض اینکه هر دانش آموز حداقل با یکی از زبان های کردی یا ترکی صحبت می کند، چند نفر دقیقا تنها با یکی از این دو زبان صحبت می کنند؟

الف (۱۳) ب (۱۶) ج (۱۸) د (۲۰)

تست ۵۱: اگر $A = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 2\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R}, x > -1\}$ باشد، آنگاه مجموعه ی $A \cap B$ شامل چند عدد صحیح است؟

الف (صفر) ب (۱) ج (۲) د (۳)

تست ۵۲: اگر $A = [-1, 2]$, $B = (0, 3]$ آنگاه کدام مجموعه زیر، بازه ی $(2, 3)$ است؟

الف ($B - A$) ب ($A \cup B$) ج ($A \cap B$) د ($A - B$)

تست ۵۳: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند ، مجموعه ی $A' - B$ برابر کدام مجموعه زیر است؟

الف ($A - B'$) ب ($A \cap B'$) ج ($A' \cap B$) د ($B' - A$)

تست ۵۴: مجموعه ی A دارای ۳۶ عضو و مجموعه ی B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آنها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه ی A حذف شود، از اشتراک آنها ۹ عضو حذف می شود. تعداد عضوهای اجتماع مجموعه ی جدید با مجموعه ی B کدام است؟

الف (۴۰) ب (۴۱) ج (۴۲) د (۴۵)

تست ۵۵: اجتماع دو مجموعه ی A و B ، ۲۵ عضو دارد. به مجموعه ی A ، ۱۰ عضو جدید اضافه کرده ایم، به اشتراک آنها ۹ عضو اضافه شده است. اجتماع مجموعه ی B و مجموعه ی جدید حاصل از A چند عضو دارد؟

الف (۲۵) ب (۲۶) ج (۳۴) د (۳۵)

تست ۵۶: کدام گزینه نادرست است؟

الف (هر مجموعه و متمم آن دو مجموعه جدا از هم هستند.

ب (در صورتی که A و B دو مجموعه ی مجزا باشند آنگاه $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

ج (اگر A مجموعه ای متناهی و B مجموعه ای نامتناهی باشد آنگاه $A \cup B$ متناهی است.

د (مجموعه ی اعداد گویا و متمم آن ، هر دو مجموعه هایی نامتناهی هستند.

تست ۵۷: اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ و $B = \{a, b\}$ باشد مجموعه $A - \{B\}$ چند زیرمجموعه غیر تهی دارد؟

الف (۲) ب (۷) ج (۳۱) د (۱۵)

تست ۵۸: در یک هتل ۷۲ مسافر اقامت دارند، از این تعداد مسافر ۲۳ نفر تاجر می باشند، ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده اند و ۸ نفر تاجرانی می باشند که برای اولین بار سفر کرده اند. چند نفر در این هتل اقامت دارند که نه تاجر هستند و نه برای اولین بار سفر کرده اند؟

الف (۲۷) ب (۴۵) ج (۳۵) د (۱۶)

تست ۵۹: اگر $A = \{x | x \in \mathbb{R}, -4 \leq x < 6\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{R}, x < 3\}$ نمایش $(B - A) \cap (A \cup B)$ کدام است؟

- الف) $(-\infty, 2)$ ب) $(-\infty, -4)$ ج) $(-\infty, -4]$ د) $(-4, 6)$

تست ۶۰: اگر مجموعه های A و B هر دو زیر مجموعه ی اعداد صحیح باشند به طوری که A مجموعه ی نامتناهی B ، مجموعه ای متناهی و $C \subseteq A$ باشد در این صورت کدام مجموعه قطعا نامتناهی است؟

- الف) $A \cap B'$ ب) $B - A$ ج) $B \cup C$ د) $A \cap C'$

تست ۶۱: اگر M مجموعه ی مرجع $M = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 50\}$ و $A = \{x | x \in M, x \leq 15\}$ و $B' = \{x | x \in M, \sqrt{x} < 5\}$ باشد $A' - B$ کدام است؟

- الف) $E = \{x | x \in M, x^2 \geq 10\}$ ب) $F = \{x | x \in M, 2 < \sqrt{x} \leq 10\}$
ج) $C = \{x | x \in M, 4 \leq \sqrt{x} < 5\}$ د) $D = \{x | x \in M, 4 \leq x\}$

تست ۶۲: اگر A و B دو مجموعه ی جدا از هم از مجموعه ی جهانی U باشند، مجموعه ی $[(A - B) \cup (B - A)]'$ برابر کدام مجموعه است؟

- الف) $A' \cap B$ ب) $A' \cap B'$ ج) $A \cup B$ د) $A' \cup B'$

تست ۶۳: اگر $A = \mathbb{R} - [-2, 3]$ و $B = (-4, 6)$ باشد کدام گزینه صحیح است؟

- الف) $A - B = \mathbb{R} - [-2, 3]$ ب) $A \cap B = (-4, 6) - [-2, 3]$
ج) $B - A = (-2, 3)$ د) $A \cup B = (-9, 6)$

تست ۶۴: اشتراک بازه های $[-2, a]$ و $(b, 4]$ برابر $(\frac{-2}{3}, 1)$ است، اجتماع بازه های $(-2a - 1, b)$ و (b, a) کدام است؟

الف) $(-1, \frac{2}{3})$ ب) $(-3, 1) - \{\frac{-2}{3}\}$ ج) $(-3, 1)$ د) $(1, 4)$

تست ۶۵: جمعیت شهری برابر با ۲ میلیون نفر است که از این جمعیت ۷۰ درصد در

سن کار هستند. اگر این شهر ۱۵۰ هزار نفر بیکار داشته باشد، نرخ بیکاری این شهر تقریباً برابر کدام گزینه است؟

الف) $0/3$ ب) $0/2$ ج) $0/1$ د) $0/05$

جمعیت در سن کار در یک کشور را به عنوان مجموعه مرجع یعنی U در نظر می گیریم و فرض می کنیم A نشان دهنده مجموعه افراد شاغل این کشور باشد. در این صورت A' برابر مجموعه افراد بیکار و $\frac{n(A')}{n(U)}$ بیانگر نرخ بیکاری آن کشور خواهد بود.

زندگی مثل دوچرخه سواری می مونه
واسه حفظ تعادلت همیشه باید در
حرکت باشی





الگو و دنباله

درس سوم

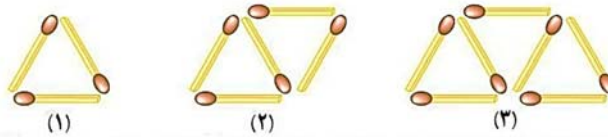
قبل از ورود به کلاس در تمام جلسات پیش مطالعه درس جدید، مرور و حل سوالات تعیین شده درس قبلی انجام شود!!!

دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است.

چه بسا ممکن است طرح های روی یک گل آفتابگردان، شکل های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده یا مارپیچ های روی میوه آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شوند یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد. از طرف دیگر یکی از رسالت های مهم ریاضیات مدل سازی کردن پدیده های طبیعی و پی بردن به الگوهای نهفته در آنهاست. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارت است از علم مطالعه ی الگوها.

۲ الگو

سوال: به شکل های زیر و تعداد چوب کبریت های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n	...
t_n : تعداد چوب کبریت ها	۳	۵	۷
رابطه بین n و t_n	$t_1 = 3$	$t_2 = 5$	$t_3 = 7$	$t_n =$...

به عنوان مثال ملاحظه می شود که تعداد چوب کبریت های شکل اول برابر ۳ است که این مطلب را به طور خلاصه به صورت $t_1 = 3$ نشان داده ایم (می خوانیم t اندیس ۱ برابر ۳، شماره جمله که به شکل کوچک پایین حرف انگلیسی نوشته شده است را اندیس می گوئیم). عبارت های t_1, t_2, \dots متغیرهای اندیس دار نامیده می شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۳ و ۵ و ... است. به این اعداد، جملات الگو هم گفته می شود. پس در واقع، عدد ۳ جمله ی اول الگوست؛ ۵ جمله ی دوم آن و به همین ترتیب الی آخر.

سوال: آیا می توانید جمله چهارم را حدس بزنید؟

سوال: آیا می توانید بگویید که t_n به چه معناست؟

سوال: آیا می توانید به کمک روش زیر حاصل t_n را بر حسب n بدست آورید؟

$t_1 = 3 \rightarrow t_1 = 1 + 1(2)$

$t_2 = 5 \rightarrow t_2 = 1 + 2(2)$

$t_3 = 7 \rightarrow t_3 = 1 + 3(2)$

$t_4 = \rightarrow t_4 =$

$t_n =$



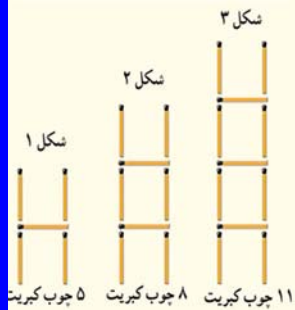
تعریف : به طور کلی می توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

نتیجه : در هر الگو از اعداد، جمله اول را با t_1 ، جمله دوم را با t_2 و جمله سوم را با t_3 و به همین ترتیب جمله n ام را با t_n نشان می دهیم.

$$t_1 \text{ و } t_2 \text{ و } t_3 \text{ و } \dots \dots \text{ و } t_n \text{ و } \dots$$

جمله ی عمومی : در هر الگو ، جمله ی n ام را با t_n نشان می دهیم و آن را جمله ی عمومی الگو می گوییم .

سوال : با توجه به شکل زیر جدول داده شده را تکمیل نمایید ، سپس به سوالات داده شده پاسخ دهید.



شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	...	n	...
تعداد چوب کبریت ها : t_n							
رابطه بین t_n و n	$t_1 =$	$t_2 =$	$t_3 =$			$t_n =$	

الف (آیا می توانید حاصل t_n را بر حسب n بدست آورید؟

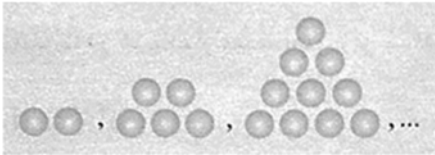
ب (آیا می توانید تعداد چوب کبریت های شکل بیستم را به کمک جمله ی عمومی t_n بدست آورید؟

پ (آیا می توانید به کمک جمله ی عمومی t_n مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است ؟

سوال: اگر جمله عمومی یک الگو به صورت $c_n = 3n + 6$ باشد، چهار جمله اول این الگو را بنویسید.

سوال: در یک الگو از شکل‌ها جمله ی عمومی به صورت $t_n = 2n - 81$ است، به نظر شما جمله ی چندم این الگو برابر ۲۱۷ است؟

تست ۶۶: با توجه به الگوی مقابل جمله ی عمومی آن کدام است؟



الف) $a_n = 3n - 1$

ب) $a_n = n + 1$

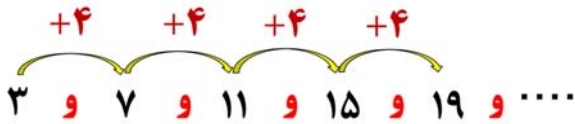
ج) $a_n = n^3 + 1$

د) $a_n = n^2 + 1$

اشاره: در منزل صفحات ۱۴ و ۱۵ کتاب درسی بررسی شود.

۱.۲ الگوهای خطی

به الگوی مقابل از اعداد توجه کنید:



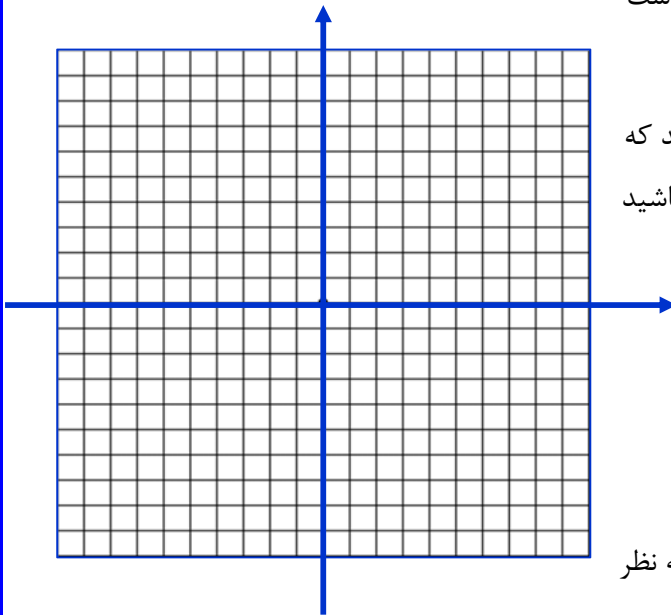
هر جمله دقیقاً ۴ واحد از جمله ی قبلی خود بیشتر است. چنین الگوهایی را که در آنها **اختلاف هر دو جمله ی متوالی، عددی ثابت** است را **الگوی خطی** می نامیم. در این الگو اگر شماره جمله و مقدار جمله را مانند زیر در یک جدول مشخص کنیم

n	۱	۲	۳	۴	۵
t_n	۳	۷	۱۱	۱۵	۱۹
(n, t_n)	(۱,۳)	(۲,۷)	(۳,۱۱)	(۴,۱۵)	(۵,۱۹)

و هر کدام از آنها را یک دوتایی تصور نماییم. و بخواهیم این نقاط را روی صفحه مختصات مشخص کنیم بطوریکه محور طولها شماره جمله و محور عرضها مقدار جمله باشد، سپس

آنها را به هم وصل کنیم خواهیم دید که همگی روی یک خط راست قرار خواهند گرفت. پس به آنها، الگوی خطی می گوییم.

جمله ی عمومی این دنباله به صورت $t_n = 4n - 1$ می باشد که مشابه خط به معادله ی $y = 4x - 1$ است. اگر دقت کرده باشید اختلاف دو جمله ی متوالی در دنباله همان **شیب خط** است! که این مطلب همواره درست است.



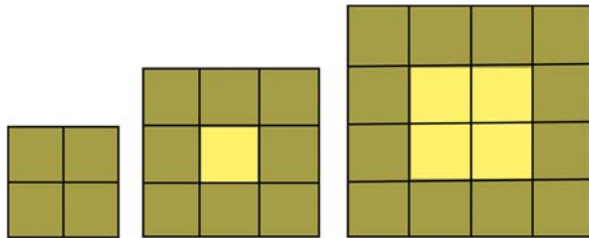
سوال: الگوی $...., -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15$ را در نظر بگیرید. به نظر شما آیا این الگو خطی است؟ چرا؟

جمله عمومی الگوی بالا $t_n = -4n + 15$ است که ضریب n ، همان است.

نتیجه: به طور کلی الگوهایی را که جمله ی عمومی آنها به صورت $t_n = an + b$ است، **الگوهای خطی** نام دارند و در آنها a, b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند. در پایه نهم آنها را به نام **معادله خط** مورد بررسی قرار داده بودید.

سوال : در یک الگوی خطی ، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می باشند . جمله ی عمومی الگو را بیابید.

سوال : شکل بعدی در الگوی زیر را رسم کنید و جدول مربوطه را تکمیل نمایید . (کار در کلاس صفحه ۱۷ کتاب درسی)



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
b_n : تعداد مربع های رنگی	۴	۸			
رابطه بین b_n و n	$b_1 = 4$	$b_2 =$	$b_3 =$		

الف (توضیح دهید که چرا این الگو خطی است؟

ب (با توجه به میزان افزایش جملات الگو مقدار a را در رابطه ی $b_n = an + h$ بیابید و پس از حدس زدن مقدار h حاصل b_n را بدست آورید. آیا می توانید به کمک جمله اول و میزان افزایش جملات مقدار h را بیابید؟

ج (شکل شماره ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

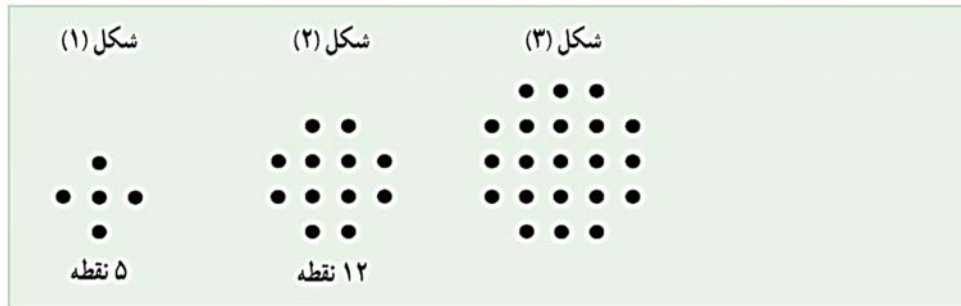
د (در چه مرحله ای از الگوی بالا ، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است؟

تست ۶۷ : در یک الگوی خطی ، جملات سوم و یازدهم به ترتیب ۲۰ و ۷۶ می باشند . جمله ی چندم الگو برابر ۱۱۱ می باشد؟

الف (شانزدهم ب (هفدهم ج (هجدهم د (نوزدهم

۲.۲ الگوهای غیر خطی

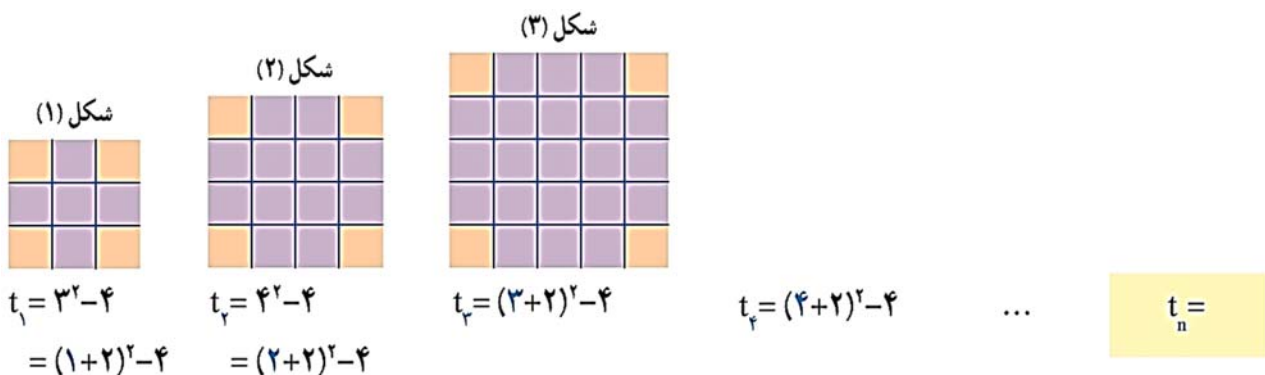
سوال : در الگوی زیر شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید. (فعالیت صفحه ۱۷ کتاب درسی)
این فعالیت را می توانید به کمک جزوه یا در کتاب درسی تکمیل نمایید.



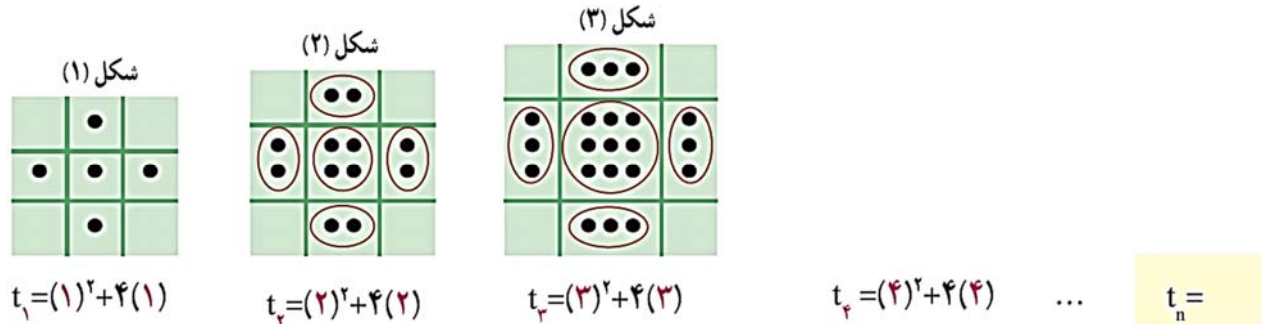
n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
t_n : تعداد مربع های رنگی	۵	۱۲			
رابطه بین n و t_n	$t_1 = 5$	$t_2 =$	$t_3 =$		

سوال : آیا این الگو ، یک الگوی خطی است؟ چرا؟

حال می خواهیم به کمک روش زیر جمله ای عمومی برای آن ارایه دهیم ، البته در آینده روش هایی کلی برای یافتن جمله ی عمومی چنین دنباله هایی ارایه خواهیم داد. رامتین شکل های زیر را به صورت زیر نظیر کرد ، حال شما برای این تصاویر یک جمله ی عمومی ارایه دهید.



آرتین نیز به کمک شکل های زیر ، مجموعه نقاط را دسته بندی نمود حال شما برای این تصاویر یک جمله ی عمومی ارایه دهید.



نتیجه : چنین الگوهایی که اختلاف جملات متوالی آنها **مقدار ثابتی نیست** را **الگوهای غیر خطی** گویند.

گفتنی است که این الگو یک الگوی درجه ۲ نامیده می شود؛ زیرا جمله ی عمومی آن یک چند جمله ای درجه ی دوم است.

تمرین در منزل : در صورتی که روش دیگری برای یافتن t_n دارید ارائه دهید.

سوال : در الگوی $a_n = \frac{2+5n}{3n-5}$ جمله چندم برابر ۲ است؟

سوال : در الگوی $t_n = \frac{n+n^2}{1+n}$ جمله چندم برابر ۱۰ است؟

سوال : جمله عمومی الگویی را بیابید که جملات آن در تقسیم بر ۶ دارای باقیمانده ۲ باشد.

سوال : بین دو عدد ۵ و ۱۰ ، به تعداد ۹ عدد دیگر چنان قرار می دهیم که همگی الگوی خطی تشکیل دهند . مجموع این ۹ جمله اضافه شده را بیابید.

*سوال : در یک مهمانی ۲۰ نفر حضور دارند که همگی با هم دست می دهند ، تعداد کل دست دادن ها را بیابید.

۳ دنباله

در بخش های قبل برای الگوهای هندسی داده شده، اعداد ... ۴۵، ۳۲، ۲۱، ۱۲، ۵ را در نظر گرفتیم که این آرایش از اعداد یک دنباله نام دارد.

تعریف دنباله: به هر تعدادی از اعداد که آنها را پشت سرهم نوشته باشیم، یک **دنباله** از اعداد می گویند. هر عدد دنباله را یک جمله ی دنباله می نامند.

تذکر: لزومی ندارد که جملات یک دنباله طبق یک الگو یا فرمول خاصی ساخته شود. اما بیشتر دنباله های دارای الگو، ارزشمند تر خواهند بود.

تذکر: همان طور که پیشتر گفته شد، در هر دنباله از اعداد، جمله ی اول را با a_1 ، جمله ی دوم را با a_2 و جمله ی سوم را با a_3 و به همین ترتیب جمله ی n ام را با a_n نشان می دهیم.

$$a_1 \text{ و } a_2 \text{ و } a_3 \text{ و } \dots \text{ و } a_n \text{ و } \dots$$

جمله ی عمومی: در هر دنباله، جمله ی n ام را با a_n نشان می دهیم و آن را جمله ی عمومی دنباله می گوئیم.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \xrightarrow{\text{جمله ی عمومی}} a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$2, 4, 8, 16, \dots \xrightarrow{\text{جمله ی عمومی}} a_n = 2^n$$

$$-1, 1, -1, 1, \dots \xrightarrow{\text{جمله ی عمومی}} t_n = (-1)^n$$

تذکر: اگر چند جمله ی یک دنباله داده شده باشد، نمی توانیم به طور قطعی جمله ی عمومی آن را مشخص کنیم. در واقع برای چند عدد بی شمار فرمول برای جمله ی عمومی دنباله قابل یافتن است. اما در کتاب درسی قرارداد چند جمله اول است.

سوال: در هر یک از موارد زیر، جمله ی عمومی یک دنباله داده شده است. چهار جمله ی اول دنباله را بنویسید.

$$a_n = n^2 - n, \quad b_n = \frac{2n}{n+1}, \quad c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

سوال: در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله ی بعدی را بنویسید، همچنین سعی کنید در پنج مورد اول یک جمله ی عمومی برای آنها حدس بزنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_n
-1	-2	-3	-4				
1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$				
1	4	9	16				
0/1	0/01	0/001	0/0001				
-1	8	-27	64				
5	18	31	44				
-2	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$				
1	1	2	3				

سوال: مجموع پنجاه جمله ی اول دنباله ی $a_n = 1 + (-1)^n$ را مشخص کنید.

تست ۶۸: در صورتی که $a_{4n+3} = 2(\sqrt{n+1}) - 3$ باشد، جمله ی سی و پنجم کدام است؟

- الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶

تست ۶۹: حاصل ضرب ۱۰ جمله ی اول دنباله با جمله ی عمومی $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ کدام است؟

- الف) $\frac{1}{10}$ ب) $\frac{-1}{10}$ ج) $\frac{1}{11}$ د) $\frac{-1}{11}$

تست ۷۰: جمله هفتم از دنباله اعداد $\frac{1}{10}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \dots$ کدام است؟

- الف) 0/12 ب) 0/14 ج) 0/15 د) 0/17

۱.۳ بررسی جملات دنباله هایی از نوع درجه دوم

روش اول تعیین جمله ی عمومی دنباله ی درجه دوم $t_n = an^2 + bn + c$

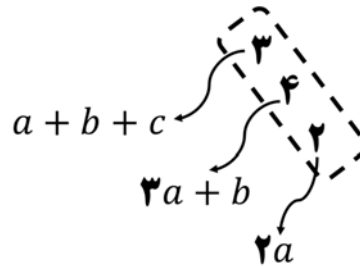
روش را با حل یک مساله توضیح می دهیم: فرض کنید دنباله ی $3, 7, 13, 21, 31, \dots$ موجود باشد در مرحله ی اول اختلاف جملات دنباله را می یابیم، سپس برای تفاضل جملات مرحله ی دوم را نیز بررسی می کنیم و مشاهده می شود که با هم



برابرنند و متوجه می شویم که از نوع درجه ی دوم است. حال کافی است در

فرمول $t_n = an^2 + bn + c$ ، تنها مقادیر a, b, c را به کمک فرمول های

زیر بیابیم:



پس در این مساله $a = 1 \rightarrow 2a = 2$ همچنین $b = 1 \rightarrow 3 + b = 4 \rightarrow 3a + b = 4$ و در نهایت برای محاسبه

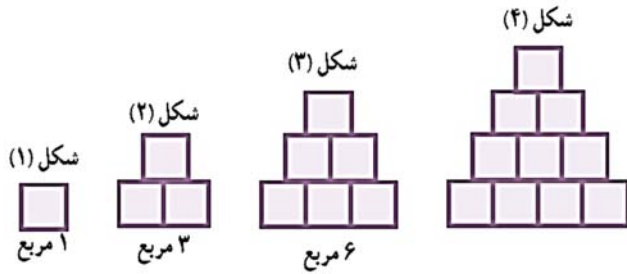
c داریم: $c = 1 \rightarrow 1 + 1 + c = 3 \rightarrow a + b + c = 3$ لذا جمله ی عمومی به صورت $t_n = n^2 + n + 1$ است.

برای تمرین بیشتر جمله ی عمومی دنباله ی درجه دوم $2, 7, 14, 23, \dots$ را بیابید.

سوال: جمله ی عمومی دنباله ی $3, 8, 13, 18, 23, \dots$ را بیابید.

حال بیابید یک دنباله با جمله ی عمومی درجه دوم را به کمک شکل بررسی کنیم.

سوال : الگوی مقابل را در نظر بگیرید.



الف (تعداد مربع ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ی ششم آن بنویسید.

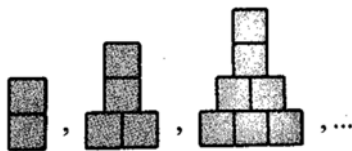
ب (آیا دنباله حاصل یک دنباله ی خطی است؟ چرا؟

پ (جمله ی عمومی این الگو را بیان کنید.

نتیجه : اگر جمله ی عمومی یک دنباله ، یک چند جمله ای از درجه ی دوم باشد . آن دنباله را دنباله ی درجه دوم می نامیم

که جمله ی عمومی در نهایت به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ خواهد بود.

تست ۷۱ : در الگوی مقابل جمله بیستم از چند مربع تشکیل یافته است ؟



الف (۲۰۰

ب (۲۰۱

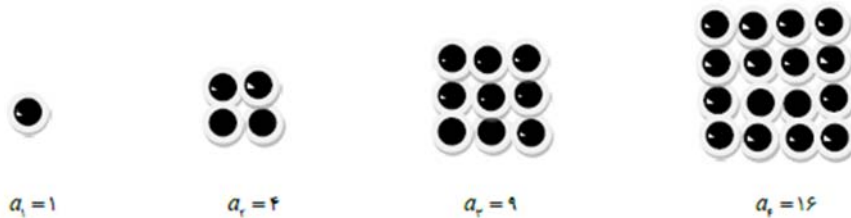
ج (۲۱۰

د (۲۱۱

۱.۱.۳ دنباله مربعی

تعریف : دنباله ای است که جملات آن مجذور اعداد طبیعی هستند و جمله ی عمومی آن $a_n = n^2$ است. در دنباله ی

مربعی هر جمله ی آن مربع شماره آن جمله است.



$a_1 = 1$

$a_2 = 4$

$a_3 = 9$

$a_4 = 16$

تست ۷۲ : مجموع جملات هفتم و هشتم دنباله ی مربعی کدام است ؟

الف (۱۰۳

ب (۱۱۳

ج (۱۰۶

د (۱۱۶

۲.۱.۳ دنباله مثلثی

دنباله ای که جمله اول آن یک می باشد و به ترتیب اعداد ۲ و ۳ و ۴ و ... به جملات آن اضافه می شود. جمله عمومی دنباله

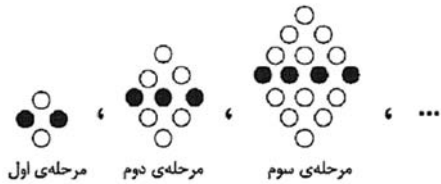
مثلثی: $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$



تست ۷۳: جمله ی n ام یک دنباله ی مربعی و مثلثی را با هم جمع کرده ایم و حاصل ۲۶ شده است ، مقدار n کدام است؟

- الف (۳) ب (۴) ج (۵) د (۶)

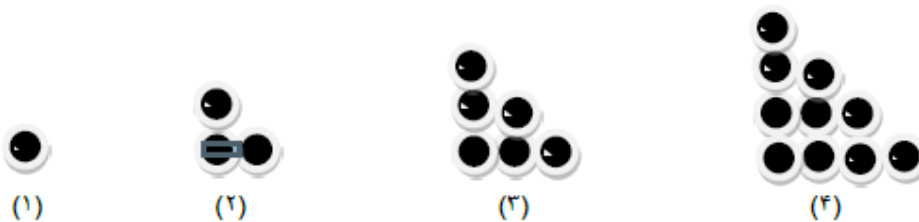
تست ۷۴ : با توجه به الگوی زیر تعداد دایره های سفید در مرحله یازدهم چقدر است ؟



- الف (۱۳۲) ب (۱۳۶) ج (۱۲۲) د (۱۲۶)

تست ۷۵ : در الگوی مقابل تعداد نقاط چندمین شکل برابر ۵۰۵۰ است ؟

- الف (۹۸) ب (۹۹) ج (۱۰۰) د (۱۰۱)



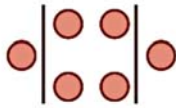
سوال: الگوی زیر را در نظر بگیرید، سپس جمله ی عمومی را یافته و بیان کنید که شکل بیستم از چند نقطه تشکیل شده است؟

شکل (۱)



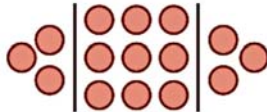
۱ نقطه

شکل (۲)



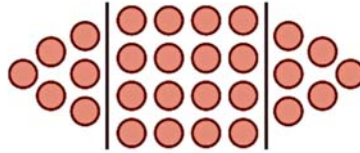
۶ نقطه

شکل (۳)

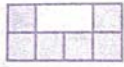


۱۵ نقطه

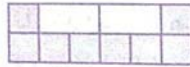
شکل (۴)



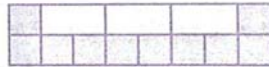
تست ۷۶: با توجه به الگوی زیر، در مرحله ای که ۱۶ کاشی سفید استفاده شده، چند کاشی سیاه داریم؟



(۱)



(۲)



(۳)

ب (۳۴)

الف (۳۲)

د (۳۸)

ج (۳۶)

تست ۷۷: مجموع تمام جملات اول تا نود و نهم دنباله $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ کدام است؟

د (۷)

ج (۸)

ب (۹)

الف (۱۰)

تست ۷۸: با توجه به الگوی زیر، در شکل نهم چند چوب کبریت به کار رفته است؟



(۱)



(۲)



(۳)

د (۴۰۵)

ج (۴۶۵)

ب (۴۶۹)

الف (۴۰۱)

تست ۷۹: اعداد طبیعی زوج را به گونه ای دسته بندی کرده ایم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره آن دسته است. جمله اول دسته ۴۰ ام کدام است؟

د (۱۵۲۶)

ج (۱۵۰۶)

ب (۱۵۶۲)

الف (۱۵۶۰)

تست ۸۰: دنباله $t_n = (3k - 1)n^2 + kn + 2$ خطی است. جمله سوم آن چقدر است؟

۴ (د)

۳ (ج)

۲ (ب)

۱ (الف)



دنباله‌های حسابی و هندسی

درس چهارم

قبل از ورود به کلاس در تمام جلسات پیش مطالعه درس جدید، مرور و حل سوالات تعیین شده درس قبلی انجام شود!!!

۲.۳ دنباله‌ی حسابی

در صفحات قبل، مثال‌هایی از الگوهای عددی خطی ارائه شد. نام دیگر این گونه الگوهای عددی، دنباله‌های حسابی است. به عبارت دیگر:

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک **دنباله حسابی** نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، **قدر نسبت** دنباله می‌گویند. که با علامت d نشان می‌دهند.

به عنوان مثال الگوی مقابل مربوط به یک دنباله حسابی است:

$$1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots$$

سوال: سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیر است که جملات یک دنباله حسابی اند.

$$2000, 2004, 2008, 2012, 2016, 2020, \dots$$

الف) جمله‌ی اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید.

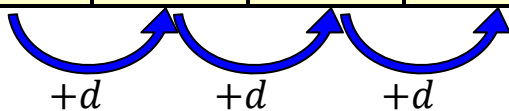
ب) نهمین دوره‌ی مسابقه در چه سالی برگزار می‌شود؟

پ) با تکمیل جدول زیر سعی کنید سال برگزاری بیست و چهارمین مرحله مسابقات ورزشی را بیابید.

t_1	t_2	t_3	t_4	...	t_n
۲۰۰۰	$2000 + 1(4)$	$2000 + 2(4)$	$2000 + 3(4)$...	$2000 + (\dots)(4)$...	$2000 + (\dots \dots \dots)(4)$

ت) با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جمله عمومی یک دنباله‌ی حسابی را به دست آورید.

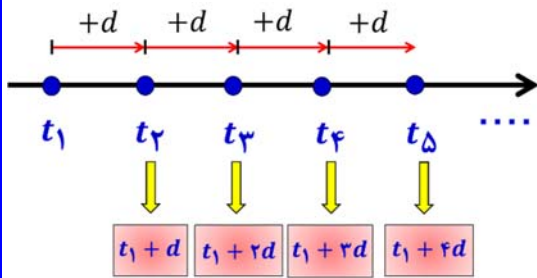
t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	...	t_n	...
t_1	$t_1 + 1(d)$	$t_1 + 2(d)$	$t_1 + 3(d)$...	$t_1 + (\dots \dots \dots)(d)$...



جزوه آموزشی مبحث مجموعه ، الگو و دنباله

آموزشگاه علمی پویندگان جوان

درس چهارم : دنباله های حسابی و هندسی



$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

۱.۲.۳ جمله عمومی دنباله حسابی

نکته: در دنباله حسابی جمله ی عمومی از رابطه ی

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

بدست می آید . که در آن t_1 جمله اول و

d قدر نسبت است . حال به ساختار جملات مقابل دنباله توجه کنید :

نحوه یافتن قدرنسبت بین جملات متوالی : برای این منظور کافی است که هر جمله را منهای جمله قبلی نماییم به عنوان

$$\text{مثال } d = t_2 - t_1 \text{ یا } d = t_3 - t_2 \text{ یا } d = t_4 - t_3 \text{ و...}$$

سوال : در هر کدام از دنباله های حسابی زیر مقدار قدرنسبت را بیابید.

الف) ... و ۲۰ و ۱۱ و ۲ (الف)

ب) ... و ۱۱ و ۴ و ۳ (ب)

پ) ... و ۲ و $\frac{3}{4}$ و ۱ و $\frac{1}{4}$ (پ)

سوال : در هر کدام از دنباله های حسابی زیر جمله عمومی را بیابید.

الف) ... و ۱۹ و ۱۱ و ۳ (الف)

ب) ... و ۱۱ و ۴ و ۳ (ب)

پ) ... و ۵ و ۵ و ۵ (پ)

نتیجه : همان طور که هر ماده ای دارای ساختاری پایه است یک دنباله حسابی نیز دارای دو ساختار به نام های جمله ی اول و قدرنسبت است . که از اهمیت زیادی برخوردارند ، به عنوان مثال در دنباله ی حسابی زیر اگر $d = 4$, $t_1 = 3$ آنگاه خواهیم داشت :



دبیر ریاضی : عادل آخکندی

سوال: از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

الف) $3, 10, 17, 24, \dots$

ب) $1, 2, 4, 8, \dots$

ج) $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \dots$

د) $15, 11, 7, 3, \dots$

نکته: در دنباله حسابی قدرنسبت از تفاضل هر جمله، از جمله ی قبل آن بدست می آید. $d = t_n - t_{n-1}$

سوال: در یک دنباله حسابی اگر $t_1 = 4$ و $t_n = t_{n-1} + 3$ در این صورت جمله عمومی دنباله را بیابید.

تست ۸۱: چه تعداد از دنباله‌های زیر به صورت حسابی می باشد؟

$$b_n = b_{n-1} + 4 \quad \text{و} \quad t_n = n^2 \quad \text{و} \quad a_n = 2n - 1$$

۳ (د)

۲ (ج)

۱ (ب)

۰ (الف)

سوال: در یک دنباله ی حسابی جمله ی هفتم برابر ۱۴ و جمله ی دوازدهم برابر ۴۴ است، در این صورت:

الف) قدرنسبت را بیابید.

ب) جمله اول را بیابید.

پ) جمله عمومی را بیابید.

ت) جمله چهارم و چهارم را بیابید.

نکته: فرمول جمله ی عمومی یک دنباله ی حسابی، عبارتی درجه یک بر حسب n است بطوریکه ضریب n همان قدرنسبت را تشکیل می دهد. یعنی:

نکته: محاسبه سریع جمله عمومی دنباله ی حسابی به کمک جمله اول و قدر نسبت :



نکته: اگر $d > 0$ باشد، دنباله صعودی (در حال افزایش) و اگر $d < 0$ دنباله نزولی (در حال کاهش) است.

برای نکته فوق مثال بیاورید.

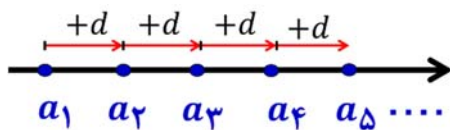
سوال: هر کدام از بخش های زیر را پاسخ دهید .

الف) یک دنباله حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.

ب) یک دنباله حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.

پ) دنباله ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله، مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

۲.۲.۳ فاصله ی بین هر دو جمله ی دلخواه در دنباله ی حسابی



نکته: اگر جملات m ام و n ام یک دنباله ی حسابی معلوم باشد با توجه به

تصویر رو به رو می توانیم فاصله ی بین هر دو جمله ی دلخواه را به کمک

ضرایبی از قدرنسبت d بدست آوریم :

پس از ساده کردن خواهیم داشت :

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = d \\ a_4 - a_2 = 2d \\ a_5 - a_2 = 3d \end{cases}$$

$$a_m - a_n = ?$$

$$a_m - a_n = (m - n)d$$

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

$$\text{تفاضل جملات} \\ \text{تفاضل اندیس ها} = \text{قدرنسبت}$$

سوال: در یک دنباله ی حسابی جمله ی پنجم برابر ۱۳ و جمله ی دهم برابر ۳۸ است، قدرنسبت دنباله را بیابید.

سوال: تعداد جملات منفی دنباله ی ... و ۳۵ - و ۳۸ - و ۴۱ - را بیابید.

سوال: دنباله ... و ۳۵ - ۳۸ - ۴۱ - چند جمله کمتر از ۱۰۰ دارد؟

سوال: در یک دنباله حسابی $a_1 = 5$ و $a_3 = 9$ آنگاه حاصل $a_7 + a_8 + a_9$ را بیابید؟

سوال: در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

تست ۸۲: در یک دنباله حسابی اگر جمله سوم ۸ و قدرنسبت برابر $1/5$ باشد جمله سیزدهم کدام است؟

الف) $24/5$ ب) ۲۳ ج) $22/5$ د) ۲۱

تست ۸۳: جمله های پنجم و پانزدهم یک دنباله حسابی به ترتیب ۱۹ و ۹۹ می باشند. جمله بیست و پنجم آن کدام است؟

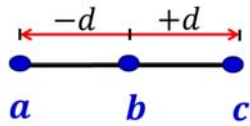
الف) ۱۷۹ ب) ۱۸۹ ج) ۱۶۹ د) ۱۵۹

تست ۸۴: در یک دنباله حسابی جمله اول برابر ۱۰ و مجموع جملات پنجم و ششم برابر ۱۱ است. جمله چهارم کدام است؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۱۳

۳.۲.۳ واسطه‌ی حسابی

نکته: اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، در اینصورت b را واسطه‌ی حسابی بین a و c می‌گوییم و



$$b = \frac{a+c}{2} \rightarrow 2b = a + c$$

داریم:

سوال: واسطه‌ی حسابی بین دو عدد ۵ و ۱۱ را مشخص کنید.

سوال: اگر مقادیر $6 - 3x, x, 2x - 2$ مربوط به سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی حسابی باشند مقدار x را بیابید.

نکته: برای تعیین تعداد جملات یک دنباله‌ی حسابی از رابطه زیر، n را می‌یابیم: $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$

سوال: تعداد جملات دنباله‌ی حسابی $1, 7, 13, 19, \dots, 1001$ را بیابید.

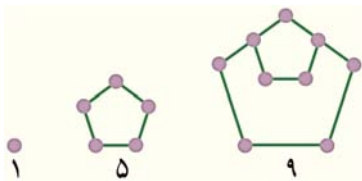
تذکر: اعداد صحیح بخش پذیر بر k تشکیل دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت k می‌دهند، به عنوان مثال اعداد طبیعی دو رقمی

بخش پذیر بر ۳ به صورت مقابل هستند که تشکیل دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۳ می‌دهند. $99, 102, 105, 108, \dots, 999$

سوال: تعداد اعداد سه رقمی بخش پذیر بر ۷ را بیابید.

سوال: به هر یک از بخش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) دو جمله‌ی بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.



ب) جمله‌ی عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جمله‌ی چندم این دنباله ۳۹۷ است؟

سوال: مسئله زیر در پاپیروس رایند آمده است، آن را حل کنید.

۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.

نکته: اگر همه جملات دنباله حسابی با قدر نسبت d را با یک عدد ثابت جمع یا از یک عدد ثابت کم کنیم دنباله حاصل نیز مجدداً یک دنباله حسابی با قدر نسبت d می‌باشد.

برای بخش قبل یک مثال ارایه دهید.

نکته: اگر همه جملات یک دنباله حسابی را به توان یک عدد ثابت برسانیم دنباله حاصل می‌تواند حسابی باشد یا نباشد.

برای بخش قبل یک مثال ارایه دهید.

نکته: اگر همه جملات دنباله حسابی با قدر نسبت d را در یک عدد ثابت k ضرب کنیم دنباله حاصل نیز حسابی با قدر نسبت kd می‌باشد.

برای بخش قبل یک مثال ارایه دهید.

سوال: در دنباله حسابی $\dots, \frac{7}{4}, 2, \dots$ جملات $a_4, a_{11}, a_{12}, \dots$ تشکیل یک دنباله حسابی دیگری می‌دهند قدر نسبت این دنباله را بیابید.

سوال: اگر به قدر نسبت یک دنباله حسابی ۲ واحد اضافه کنیم به جمله پنجم دنباله حاصل چند واحد اضافه می‌شود؟

نکته: در یک دنباله حسابی اگر اشاره‌ای به نوع جملات متوالی نشود، از ساختارهای زیر کمک بگیرید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{سه جمله متوالی: } a - d, a, a + d \\ \text{قدر نسبت } 2d \text{ است. } \Rightarrow a - 3d, a - d, a + d, a + 3d \text{ : چهار جمله متوالی} \\ \text{پنج جمله متوالی: } a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d \end{array} \right.$$

تست ۸۵: مجموع سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی نزولی ۳۰ و حاصل ضرب آنها ۳۶۰ می باشد. قدر نسبت دنباله برابر است با:

- الف (۶ ب (۸ ج (۶- د (۸-

تست ۸۶: مجموع سه عدد که تشکیل دنباله حسابی می دهند ۱۲ و حاصلضرب مربعات آنها ۷۸۴ است کوچکترین عدد در بین این اعداد را بیابید.

- الف (۱ ب (۳ ج (۴ د (۵

سوال: اگر زاویه داخلی یک پنج ضلعی تشکیل دنباله حسابی دهند که بزرگترین زاویه ۱۳۶ درجه باشد. بقیه زاویا را بیابید.

سوال: اگر زاویه های مثلثی تشکیل یک دنباله حسابی بدهند یک زاویه مثلث را بدست آورید؟

*سوال: در یک دنباله حسابی مجموع چهار جمله اول ۲ و مجموع مربعات ۲۴۶ است. جمله پنجم را بیابید.

تست ۸۷: در یک دنباله حسابی $(a_{15})^2 - (a_5)^2 = 350$ ، اگر جمله ی دهم برابر ۷ باشد. قدر نسبت دنباله کدام است؟

- الف ($\frac{5}{2}$ ب ($\frac{2}{5}$ ج (۲ د (۵

نکته: اگر اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل دنباله حسابی دهند می توان آنها را به صورت $3d, 4d, 5d$ در نظر گرفت.

تست ۸۸: اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت d می دهند. مساحت مثلث بر حسب d کدام است؟

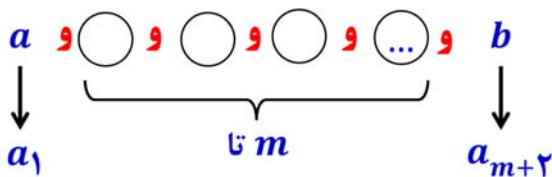
- الف ($2d^2$ ب ($4d^2$ ج ($6d^2$ د ($12d^2$

نکته: در دنباله‌ی حسابی اگر قدرنسبت عدد صفر باشد آن را دنباله‌ی ثابت گویند.

***سوال:** در دنباله‌ی حسابی ... ۱۵, ۱۱, ۷, ۳ آخرین جمله‌ی ۶ جمله‌ی دهم را بیابید.

سوال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2 + 9^2 - 10^2 =$$



۴.۲.۳ درج m واسطه‌ی حسابی بین دو عدد a و b

اگر بخواهیم بین دو عدد a و b ، m عدد چنان درج کنیم که با

دو عدد a و b تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند، قدرنسبت این دنباله

$$d = \frac{a_{m+2} - a_1}{(m+2) - 1} = \frac{b - a}{m+1}$$

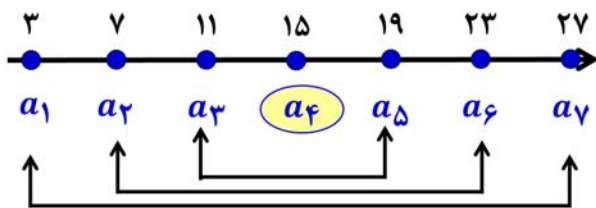
از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید $d = \frac{b-a}{m+1}$

سوال: بین اعداد ۳, ..., ۲۳، چهار واسطه‌ی حسابی چنان درج کنید که دنباله‌ی حسابی ایجاد گردد. سپس جمله‌ی عمومی این دنباله را بنویسید.

ارتباط بین اندیس‌ها و جملات: اگر m, n, p, q اعدادی طبیعی باشند که $m \pm n = p \pm q$ آنگاه داریم:

$$a_m \pm a_n = a_p \pm a_q \Rightarrow 19 + 1 = 9 + 11 \rightarrow a_{19} + a_1 = a_9 + a_{11}$$

به بیان دیگر، بین جملات دنباله و اندیس‌های آن روابط یکسانی برقرار است.



مثال:

$$a_3 + a_5 = a_2 + a_6 = a_1 + a_7$$

سوال : در یک دنباله ی حسابی $a_3 + a_4 = 20$ می باشد حاصل $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ را بیابید

*نکته : در دنباله ی حسابی مجموع جملات متساوی الفاصله از طرفین با یکدیگر برابر است : (جهت مطالعه)

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$$

نکته : اگر جملات مشترک دنباله های حسابی a_n و b_n یک دنباله حسابی جدید به نام c_n ایجاد کنند قدرنسبت دنباله ی

c_n ، ک.م.م قدرنسبت های a_n و b_n می باشد . به عنوان مثال به دو دنباله ی زیر دقت کنید:

$$\begin{cases} 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \dots \\ 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, \dots \end{cases}$$

جملات مشترک این دو دنباله به صورت $5, 11, 17, 23, \dots$ هستند که همان طور مشاهده میشود یک دنباله ی حسابی جدید با قدرنسبت ۶ می باشد که همان ک م م قدرنسبت های ۲ و ۳ از دو دنباله ی داده شده است.

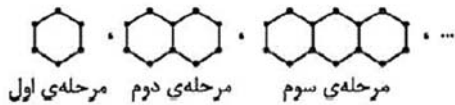
تست ۸۹ : مضارب مشترک دو عدد ۳ و ۴ را کنار یکدیگر قرار داده ایم، این دنباله چند جمله ی کوچکتر از ۱۰۰ دارد؟

الف (۱۲) ب (۷) ج (۸) د (۹)

نکته : اگر جملات دو دنباله حسابی را با یکدیگر جمع کنیم دنباله ی حسابی جدیدی به دست می آید که جمله اول و قدرنسبت آن از جمع جمله اول و قدرنسبت دو دنباله به دست می آید.

تست های دنباله حسابی

تست ۹۰: با توجه به الگوی زیر تعداد پاره خط‌ها در مرحله ی دهم کدام است؟



- الف) ۵۰ ب) ۵۱ ج) ۶۰ د) ۶۱

تست ۹۱: کدام یک از دنباله های زیر، دنباله ی حسابی است؟

- الف) $t_n = 8n + 1$ ب) $t_n = n^2$ ج) $t_n = \frac{1}{n}$ د) $t_n = n^3 + n$

تست ۹۲: چندمین جمله از دنباله ی ... ۲, ۵, ۸, برابر ۵۶ است؟

- الف) ۱۸ ب) ۱۹ ج) ۲۰ د) ۲۱

تست ۹۳: در یک دنباله ی حسابی جمله ی دوم ۱۰ و جمله ی هجدهم ۵۲ می باشد. جمله ی دهم این دنباله چقدر است؟

- الف) ۳۱ ب) ۳۰ ج) ۲۹ د) ۳۲

تست ۹۴: هفتمین جمله از یک دنباله حسابی ۱۵ و دهمین جمله آن ۲۱ است. جمله دوم این دنباله کدام است؟

- الف) ۲ ب) ۳ ج) ۵ د) ۶

تست ۹۵: در یک دنباله حسابی جمله هفتم نصف جمله سوم است. جمله اول چند برابر قدرنسبت است؟

- الف) ۱۰ ب) -۱۰ ج) ۲۰ د) -۲۰

تست ۹۶: اعداد $3 + 4, 2p + 1, 3p - 5$ سه عدد جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی هستند ، قدر نسبت این دنباله کدام است ؟

- الف (۴) ب (۵) ج (۶) د (۷)

تست ۹۷: بین اعداد ۳ و ۱۹ سه واسطه حسابی درج کردیم. مجموع این سه عدد کدام است ؟

- الف (۵۵) ب (۳۳) ج (۲۷) د (۲۳)

تست ۹۸: اگر ۱۹۹ واسطه حسابی بین دو عدد ۱۰ و ۱۸ درج کنیم جمله نود و نهم دنباله کدام است ؟

- الف (۱۳/۹۲) ب (۱۲/۶۴) ج (۱۴/۱۴) د (۱۳/۸۶)

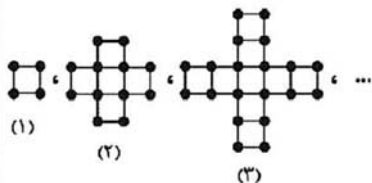
تست ۹۹: در یک دنباله حسابی $4^x, 10, 16^x$ سه جمله ی متوالی هستند، مقدار x کدام است؟

- الف (۱) ب (۲) ج (-۱) د (-۲)

تست ۱۰۰: چندمین جمله ی دنباله $12, 7, 3x + 7, 3x + 2, 3x + 67$ برابر $3x + 67$ است ؟

- الف (۱۲) ب (۱۳) ج (۱۴) د (۱۵)

تست ۱۰۱: با توجه به الگوی زیر در کدام مرحله تفاضل تعداد مربع ها از تعداد چوب کبریت ها برابر ۹۱ است ؟



- الف (۸) ب (۱۰) ج (۱۲) د (۱۴)

تست ۱۰۲: بین دو عدد ۱۸ و ۶۲، ده واسطه حسابی درج می‌کنیم تا یک دنباله حسابی با دوازده جمله حاصل شود. مجموع سه جمله سوم این دنباله چند برابر مجموع سه جمله دوم آن است؟

- الف) $\frac{۶۹}{۲۰}$ ب) $\frac{۲۳}{۱۷}$ ج) $\frac{۲۹}{۲۳}$ د) $\frac{۲۹}{۱۷}$

تست ۱۰۳: اگر a_n یک دنباله حسابی با قدرنسبت d باشد تحت کدام عمل زیر روی جملات، دنباله‌ی حسابی جدیدی با قدرنسبت $۳d$ به دست می‌آید؟

- الف) جمع جملات با عدد ۳ ب) ضرب کردن جملات در عدد ۳
ج) به توان ۳ رساندن جملات د) ۲ برابر کردن تمام جملات

تست ۱۰۴: در یک دنباله حسابی ۹۱ جمله‌ای، جملات اول و آخر به ترتیب ۱۴- و ۴۰+ است. تعداد جملات مثبت این دنباله کدام است؟

- الف) ۶۷ ب) ۶۴ ج) ۲۷ د) ۲۴

تست ۱۰۵: جملات اول و هشتم یک دنباله حسابی ۹ و ۴۴ است. در یک دنباله حسابی دیگر بین اعداد ۱۳ و ۳۷ چند واسطه حسابی می‌توان درج کرد طوری که جمله‌ی پنجم دو دنباله باهم برابر شوند؟

- الف) ۵ ب) ۴ ج) ۶ د) ۳

تست ۱۰۶: مثلث‌هایی قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمه ۲ واحد چنان رسم شده‌اند که همگی در یک رأس مشترک بوده و ضلع قائم‌المثلث بعدی، وتر مثلث قبلی است. وتر هشتمین مثلث کدام است؟

- الف) ۶ ب) ۵ ج) $۱۰\sqrt{۲}$ د) $\sqrt{۱۰}$

تست ۱۰۷: در یک دنباله حسابی $a_1 = 3 + \sqrt{2}$, $a_2 = 5 + \sqrt{2}$ می باشد. مجموع چهار جمله ی چهارم چقدر از مجموع چهار جمله ی دوم بیشتر است؟

- الف) ۸ ب) ۶۴ ج) ۱۶ د) ۳۲

تست ۱۰۸: در یک دنباله حسابی جمله اول -2 بوده و مجموع ۵ جمله ی اول آن، $\frac{1}{4}$ مجموع پنج جمله ی بعدی می باشد. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- الف) ۴ ب) $\frac{1}{4}$ ج) -4 د) $-\frac{1}{4}$

تست ۱۰۹: در دنباله حسابی $\dots, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}, 1$ جمله ی اول را با $\frac{8}{3}$ ، جمله ی دوم را با $\frac{7}{3}$ ، جمله ی سوم را با $\frac{6}{3}$ و... جمع می کنیم. جمله شصت و پنجم دنباله جدید کدام است؟

- الف) $\frac{139}{3}$ ب) ۱۲۵ ج) ۲۵ د) ۲۴

تست ۱۱۰: اگر دنباله با جمله عمومی $a_n = an(2 - n) + 4n^2 - a$ یک دنباله ی حسابی و جمله ی دوم دنباله $t_n = \left(\frac{b}{2}\right)n + a^2$ برابر a_3 باشد عدد b کدام است؟

- الف) -6 ب) ۶ ج) ۴ د) ۳۶

تست ۱۱۱: در دو دنباله حسابی به صورت های $\dots, 2, 7, 12, \dots$ و $\dots, 8, 11, 14, \dots$ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟ (ریاضی خارج کشور ۹۴)

- الف) ۵۸ ب) ۵۹ ج) ۶۰ د) ۶۱

تست ۱۱۲: بیست جمله اول دنباله حسابی به جمله اول $a_1 = 3$ و قدرنسبت $d_1 = 2$ با بیست جمله اول دنباله حسابی به جمله اول $b_1 = 2$ و قدرنسبت $d_2 = 3$ چند جمله‌ی مساوی دارند؟

- الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹

تست ۱۱۳: در یک مثلث قائم الزاویه طول اضلاع دنباله حسابی می‌سازند. وتر چند برابر محیط است؟

- الف) $\frac{5}{7}$ ب) $\frac{5}{8}$ ج) $\frac{5}{12}$ د) $\frac{5}{13}$

تست ۱۱۴: در دنباله‌ی حسابی $2, 9, 16, \dots$ و $12, 17, 22, \dots$ چند جمله مشترک سه رقمی کمتر از ۳۰۰ دارند؟

- الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸

تست ۱۱۵: هفتادمین عدد طبیعی که باقیمانده اش بر ۷ برابر ۲ باشد کدام است؟

- الف) ۴۹۱ ب) ۴۹۲ ج) ۴۹۵ د) ۴۹۶

تست ۱۱۶: بین دو عدد که تفاضل آنها ۹۰۰ است، ۱۱ عدد درج شده است به طوری که ۱۳ جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی را تشکیل می‌دهند، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- الف) ۶۵ ب) ۷۰ ج) ۷۵ د) ۸۰

تست ۱۱۷: در یک دنباله حسابی $a_6 + a_8 = 3$ و $a_9 + a_{11} = -2$ ، حاصل $a_{13} + a_{15}$ چقدر است؟

- الف) $\frac{-55}{6}$ (الف) ب) $\frac{-37}{6}$ (ب) ج) $\frac{-5}{6}$ (ج) د) $\frac{-67}{6}$ (د)

تست ۱۱۸: دنباله حسابی $20, 3k + 2, \dots, 11, 8, 5$ چند جمله دارد؟

- الف) k (الف) ب) $3k + 20$ (ب) ج) $k + 6$ (ج) د) $k + 3$ (د)

تست ۱۱۹: مجموع سه جمله اول یک دنباله حسابی، چهار برابر مجموع سه جمله بعدی آن است، جمله چندم این دنباله برابر صفر است؟

- الف) چهارم (الف) ب) پنجم (ب) ج) ششم (ج) د) هفتم (د)

تست ۱۲۰: اگر x, y, z سه عدد متوالی از دنباله حسابی باشند و حاصل جمع آنها -10 باشد، درین صورت حاصل $xy + zy$ کدام است؟

- الف) $\frac{-20}{9}$ (الف) ب) $\frac{9}{200}$ (ب) ج) $\frac{-200}{3}$ (ج) د) $\frac{200}{9}$ (د)

تست ۱۲۱: دنباله حسابی با جمله اول 63 و قدرنسبت -4 چند جمله مثبت دارد؟

- الف) 15 (الف) ب) 16 (ب) ج) 17 (ج) د) 18 (د)

تست ۱۲۲: در بیست جمله اول از دنباله حسابی مجموع جملات ردیف فرد برابر ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج برابر ۱۵۰ می باشد. قدرنسبت کدام است؟

- الف) $\frac{1}{5}$ ب) $\frac{0}{75}$ ج) ۲ د) ۱

*تست ۱۲۳: در یک دنباله حسابی مجموع جملات هفتم و بیست و چهارم برابر ۱۰۰ می باشد. اگر جمله بیست و نهم برابر ۱۵۰- باشد، آنگاه مجموع سه جمله اول کدام است؟

- الف) ۱۰۰۰ ب) ۱۵۰۰ ج) ۳۰۰۰ د) ۷۵۰

نکته: اگر a_1, a_2, a_3, \dots جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند آنگاه $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{d} \left(\frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} \right)$

تست ۱۲۴: در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n که همه ی جملات مخالف صفرند حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{19} a_{20}}$$

- الف) $19a_1 a_{20}$ ب) $20a_1 a_{19}$ ج) $\frac{19}{a_1 a_{20}}$ د) $\frac{20}{a_1 a_{19}}$

سوال: چند عدد سه رقمی وجود دارد که یکان آن برابر ۷ است؟

۳.۳ دنباله هندسی

تعریف: دنباله هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. جمله اول هم باید غیرصفر باشد.

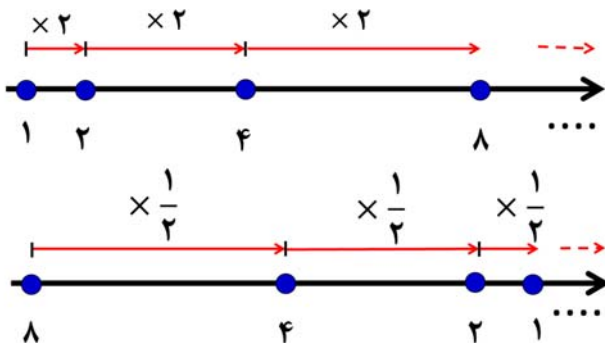
$$\begin{array}{ccccccc} & \times 2 & & \times 2 & & \times 2 & \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ 2 & , & 4 & , & 8 & , & 16 & , & \dots \end{array}$$

به عنوان مثال در دنباله $2, 4, 8, 16, \dots$ هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عدد ۲ به دست آمده است، پس این دنباله یک دنباله هندسی است.

سوال: فرض کنید تعداد ۳ باکتری وجود دارد که در هر ثانیه تعداد آنها چهار برابر می‌شود در این صورت:
الف) تعداد باکتری‌ها را در هفت ثانیه اول بیابید.

ب) آیا تعداد باکتری‌ها می‌تواند یک دنباله هندسی ایجاد کند؟
پ) آیا می‌توانید برای این دنباله یک جمله عمومی ارائه دهید؟

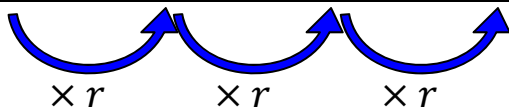
ساختار دنباله هندسی:



$$\begin{array}{ccccccc} \times r & & \times r & & \times r & & \times r \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright \\ t_1 & \text{و} & t_2 & \text{و} & t_3 & \text{و} & t_4 & \text{و} & t_5 & \text{و} & \dots \end{array}$$

در حالت کلی در یک دنباله هندسی، اگر جمله اول t_1 و قدرنسبت r باشد، جملات آن به شکل زیر خواهد بود. جدول زیر را کامل کنید.

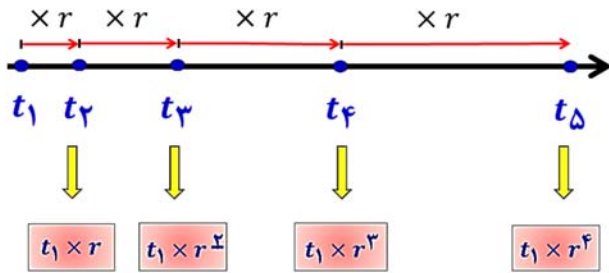
t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	...	t_n	...
t_1	$t_1 r$	$t_1 r^2$	$t_1 r^3$		



نتیجه: جمله عمومی دنباله هندسی با قدرنسبت و جمله اول به صورت خواهد بود.



۱.۳.۳ جمله عمومی دنباله هندسی



جمله ی عمومی دنباله ی هندسی، با جمله ی اول t_1 و قدرنسبت r را می توان به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ نشان داد.

$$t_n = t_1 \times r^{n-1}$$

سوال: از بین موارد زیر، دنباله های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

یادآوری: برای یافتن قدر نسبت دنباله ی هندسی کافی است هر جمله را بر جمله ی قبلی تقسیم کنیم. $r = \frac{t_{n+1}}{t_n}$

الف) $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$

ب) $\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$

ج) $5, 5, 5, 5, \dots$

سوال: جمله عمومی هر یک از دنباله های هندسی زیر را بدست آورید.

الف) $1, 4, 16, 64, \dots$

ب) $2, 6, 18, 54, \dots$

ج) $6, -60, 600, -6000, \dots$

د) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$

سوال: اگر یک مستطیل کاغذی را در هر مرحله با تازدن نصف کنیم، تعداد مستطیل ها تا مرحله چهارم را نوشته و برای آن یک جمله عمومی ارائه دهید.

سوال: درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.

الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

تست ۱۲۵: چه تعداد از دنباله‌های زیر هندسی است؟

$$b_n = 2 \times 3^n$$

$$a_n = n\pi$$

$$t_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

$$c_n = \frac{1}{n^2}$$

۳ (د)

۲ (ج)

۱ (ب)

۰ (الف)

تست ۱۲۶: در یک دنباله هندسی صعودی جمله سوم ۸ و جمله هفتم ۱۲۸ است جمله اول کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (د)

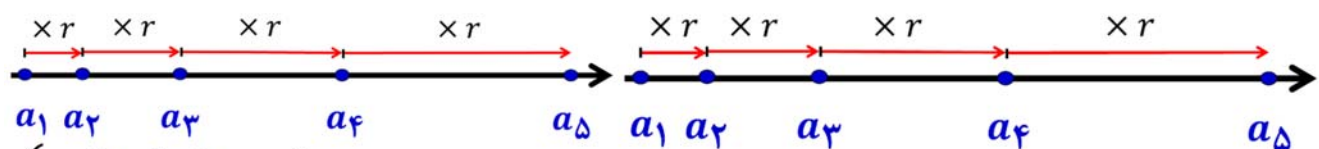
۴ (ج)

۲ (ب)

$\sqrt{2}$ (الف)

۲.۳.۳ فاصله‌ی بین دو جمله‌ی دلخواه در دنباله‌ی هندسی

اگر در یک دنباله هندسی جمله اول a_1 و قدرنسبت برابر r باشد آنگاه:



$$\begin{cases} a_2 \div a_1 = r \\ a_4 \div a_2 = r^2 \\ a_5 \div a_2 = r^3 \end{cases}$$

$$\frac{a_m}{a_n} = r^{m-n}$$

$$a_m \div a_n = ?$$

سوال: جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند. دنباله را مشخص کنید.

دبیر ریاضی: عادل آخکندی

سوال: در یک دنباله ی هندسی جمله ی سوم برابر ۱۶ و جمله ی هفتم ۲۵۶ می باشد، با فرض اینکه قدرنسبت منفی باشد، جمله ی دهم این دنباله را بیابید.

سوال: علی دوچرخه ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه اش را داشته باشد، به چه قیمتی می تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه ای به دست می آید؟

سوال: فرض کنید توپی در اختیار داریم که از ارتفاع ۸ متری رها می شود و در هر بار برخورد با زمین، نصف ارتفاع قبلی بالا می رود تا بالاخره متوقف می شود.

الف) دنباله ای برای ارتفاع های بالا رونده توپ بنویسید.

ب) دنباله ای برای ارتفاع های پایین رونده توپ بنویسید.

سوال: در یک دنباله هندسی $a_1 a_3 = 4$ و $a_3 a_5 = 16$ می باشد قدرنسبت دنباله را بیابید؟

تست ۱۲۷: در یک دنباله ی هندسی، جمله ی دوم برابر $\frac{1}{3}$ و جمله ی چهارم برابر $\frac{1}{27}$ می باشد، اگر قدرنسبت این دنباله مثبت باشد، جمله ی هفتم دنباله کدام است؟

الف) $\frac{1}{243}$ ب) $\pm \frac{1}{243}$ ج) $\frac{1}{729}$ د) $\pm \frac{1}{729}$

تست ۱۲۸: در یک دنباله ی هندسی، با قدرنسبت ۲ حاصل $\frac{a_1 a_7}{(a_2)^2}$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{16}$ ب) ۱۶ ج) $\frac{1}{4}$ د) ۴

تست ۱۲۹: در یک دنباله ی هندسی، $a_2 a_3 a_4 = 8$ حاصل $a_1 a_5$ کدام است؟

- الف) ۴ ب) ۸ ج) ۲ د) ۱۶

۳.۳.۳ واسطه هندسی

اگر a, b, c سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی باشند، در این صورت b را واسطه هندسی بین a و c می گوئیم و

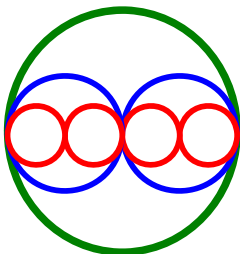
$$\text{داریم: } b^2 = a \cdot c \text{ یا } b = \pm \sqrt{a \cdot c}$$

سوال: مقدار x را چنین تعیین کنید که سه جمله ی $1, 2x + 1, 5x, 4 - 12x$ ، به ترتیب جملات متوالی دنباله ی هندسی باشند.

سوال: در دنباله هندسی غیر افزایشی $l, 4, x, 2$ مقدار l را بیابید؟

سوال: اگر دوایری را مانند شکل مقابل درون هم لحاظ کنیم، مساحت دایره ای که در مرحله ی n ام محاط می شود را به

دست آورید.



تست ۱۳۰: در یک دنباله حسابی جملات سوم ، هفتم و نهم ، می توانند سه جمله ی متوالی از دنباله هندسی باشند .

چندمین جمله ی این دنباله ، صفر است ؟ (سراسری تجربی ۸۸)

۱۲ (د

ج) ۱۱

ب) ۱۰

الف) ۹

نکته: در حل مسائل ، جملات متوالی دنباله ی هندسی را معمولا به صورت زیر در نظر میگیریم :

$$\begin{cases} \frac{t}{r}, t, tr & \text{سه جمله ی متوالی} \\ \frac{t}{r^3}, \frac{t}{r}, tr, tr^3 & (\text{چهار جمله با قدرنسبت } r^2) \\ \frac{t}{r^5}, \frac{t}{r^3}, t, tr, tr^2 & \text{پنج جمله ی متوالی} \end{cases}$$

تست ۱۳۱ : در یک دنباله هندسی نزولی مجموع دو جمله اول ۱۲ و حاصلضرب آنها برابر ۳۲ است. جمله چندم این دنباله برابر یک است ؟

د) ششم

ج) پنجم

ب) چهارم

الف) سوم

نکته : اگر دنباله ای با جملات ناصفر هم حسابی و هم هندسی باشد باید دنباله ی ثابت باشد .

نکته : اگر تمام جملات یک دنباله هندسی دلخواه با عدد ثابتی جمع یا کم شوند دنباله جدید دیگر هندسی نیست. چرا؟

نکته : اگر تمام جملات دنباله هندسی در عددی مانند k ضرب شوند دنباله جدید نیز هندسی است و قدرنسبت آن تغییر نمی کند. چرا؟

نکته : اگر تمام جملات یک دنباله هندسی دلخواه را به توان عدد k برسانیم دنباله جدید نیز هندسی و قدرنسبت آن q^k می شود.

نکته: اگر تمام جملات دنباله هندسی را معکوس کنیم دنباله جدید نیز هندسی است و قدرنسبت آن معکوس می‌گردد. برای درستی این مطلب مثال بیاورید.

۴.۳.۳ حاصل ضرب جملات اولیه در دنباله ی هندسی

$$۱) a_n^2 = a_{n+k} \times a_{n-k}$$

۲, ۴, ۸, ۱۶, ...

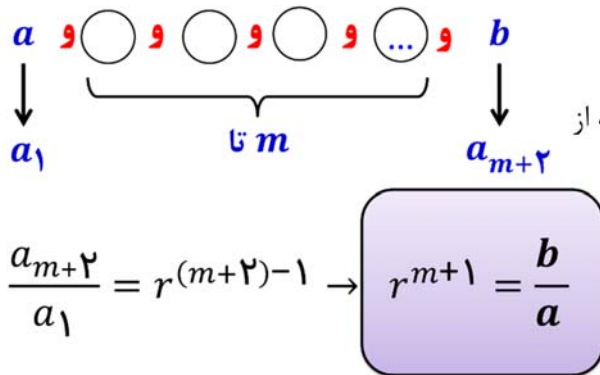
$$۲) (a_1 a_2 a_3 \dots a_n) = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}$$

سوال: حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.

۵.۳.۳ درج m واسطه ی هندسی بین دو عدد a و b

اگر بخواهیم بین دو عدد a و b، m عدد چنان درج کنیم که با

دو عدد a و b تشکیل دنباله هندسی بدهند قدرنسبت این دنباله از رابطه ی زیر به دست می‌آید:



$$\frac{a_{m+2}}{a_1} = r^{(m+2)-1} \rightarrow r^{m+1} = \frac{b}{a}$$

$$r^{m+1} = \frac{b}{a}$$

سوال: بین دو عدد $\frac{1}{27}$ ، ۳، سه واسطه ی هندسی درج نموده ایم، در این صورت واسطه ها و مجموع آنها را بیابید.

سوال: واسطه هندسی بین جملات هشتم و چهاردهم دنباله هندسی ...، ۱۶، ۸، ۴ را بیابید؟

تست ۱۳۲: بین دو عدد ۲- و $۱۶\sqrt{2}$ شش واسطه ی هندسی درج کرده ایم، جمله ی چهارم این دنباله کدام است؟

(د) $-4\sqrt{2}$

(ج) $4\sqrt{2}$

(ب) -۴

(الف) ۴

دبیر ریاضی: عادل آخندی



جزوه آموزشی مبحث مجموعه ، الگو و دنباله

آموزشگاه علمی پویندگان جوان

درس چهارم : دنباله های حسابی و هندسی

نکته : در دنباله حسابی $a_m, \dots, a_n, \dots, a_k$ اگر جملات a_m, a_n, a_k تشکیل سه جمله از یک دنباله هندسی متوالی را

بدهند ، قدر نسبت دنباله هندسی ایجاد شده

بصورت مقابل خواهد بود .

a_m, a_n, a_k

جملات غیر متوالی دنباله حسابی

$$r = \frac{k - n}{n - m}$$

قدر نسبت دنباله هندسی

تست ۱۳۳: جملات دوم ، پنجم و دوازدهم یک دنباله ی حسابی تشکیل یک دنباله ی هندسی می دهند قدر نسبت دنباله ی

هندسی کدام است ؟ (سراسری تجربی ۹۲)

الف) $\frac{7}{4}$

ب) $\frac{7}{3}$

ج) $\frac{5}{3}$

د) $\frac{9}{4}$

تست ۱۳۴: جملات چهارم ، ششم و دوازدهم یک دنباله ی حسابی به ترتیب سه جمله ی متوالی از دنباله ی هندسی اند .

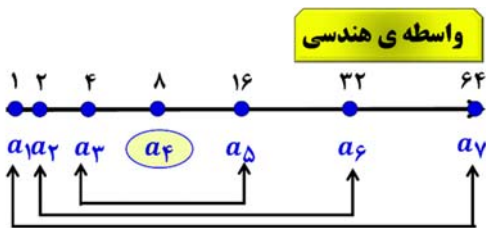
قدر نسبت دنباله ی هندسی کدام است ؟ (سراسری ریاضی ۸۱)

الف) $\frac{7}{4}$

ب) ۲

ج) $\frac{5}{3}$

د) ۳



$$(a_4)^2 = a_2 \times a_6 = a_1 \times a_7$$

*** فراموش نکنید که :** واسطه ی هندسی قابل تعمیم است یعنی :

نکته : اگر m, n, p, q چهار عدد طبیعی باشند در دنباله ی هندسی داریم :

$$m + n = p + q \Rightarrow a_m \times a_n = a_p \times a_q$$

$$m - n = p - q \Rightarrow \frac{a_m}{a_n} = \frac{a_p}{a_q}$$

دبیر ریاضی : عادل آخکندی



سوال: در یک دنباله ی هندسی اگر $a_9 = 250$ و $a_4 \times a_5 \times a_6 \times a_7 \times a_8 = 32$ می باشد، قدرنسبت دنباله را بیابید.

تست های دنباله هندسی

تست ۱۳۵: در یک دنباله هندسی، جمله سوم ۳ و جمله ششم برابر ۲۴ است. جمله اول این دنباله کدام است؟

- الف) $\frac{3}{8}$ ب) $\frac{3}{4}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{1}{8}$

تست ۱۳۶: در یک دنباله ی هندسی جمله پنجم ۶ و جمله هشتم ۴۸ است. جمله دوم چند برابر جمله سوم است؟

- الف) ۲ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{8}$ د) ۸

تست ۱۳۷: حاصل ضرب سی جمله اول دنباله هندسی ...، ۱۲۵، ۲۵، ۵ کدام است؟

- الف) 5^{30} ب) 5^{450} ج) 5^{465} د) 5^{300}

تست ۱۳۸: در یک دنباله هندسی مثبت بین جملات رابطه $\frac{a_1 a_2 a_3}{(a_4)^3} = 16$ برقرار است. جمله دوم چند برابر جمله هشتم است؟

- الف) ۴ ب) ۸ ج) ۱۶ د) ۶

تست ۱۳۹: بین $\frac{1}{3}$ و ۲۷ سه واسطه ی هندسی درج شده است. مجموع این سه عدد مثبت چقدر است؟

- الف) ۱۱ ب) ۱۳ ج) ۱۵ د) ۹

تست ۱۴۰: جمله ی نهم یک دنباله ی هندسی ۵ برابر جمله ی ششم آن است، نسبت جمله ی دهم به جمله ی چهارم برابر است با:

- الف (۵) ب (۱۵) ج (۲۵) د (۱۲۵)

تست ۱۴۱: بین دو عدد $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ شش واسطه هندسی درج کرده ایم. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- الف ($\frac{1}{4}$) ب (۲) ج (۴) د ($\sqrt[3]{4}$)

تست ۱۴۲: جمله هشتم از دنباله حسابی ... ۱, ۳, -۱ با جمله چندم دنباله هندسی با جمله عمومی $t_n = \frac{1}{3} \times 9^{n-1}$ برابر است؟

- الف (سوم) ب (پنجم) ج (ششم) د (هشتم)

تست ۱۴۳: بین اعداد ۸ و $\frac{81}{4}$ سه واسطه ی هندسی درج کرده ایم، جمله ی دوم این دنباله که جملات آن مثبت هستند کدام است؟ (سراسری ریاضی ۷۰)

- الف (۱۲) ب (۱۴) ج (۱۶) د (۱۸)

تست ۱۴۴: اعداد $2^b, 4\sqrt{2}, 2^a$ سه جمله ی متوالی از دنباله ی هندسی اند. واسطه ی حسابی بین a و b کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

- الف ($\frac{5}{2}$) ب (۲) ج ($\frac{3}{2}$) د ($\sqrt{2}$)

تست ۱۴۵ : اگر اعداد $1, 2x^2 - 1, 2x$ سه جمله ی متوالی دنباله ی هندسی باشند قدرنسبت آن کدام است ؟

- الف ($-\frac{1}{4}$) ب ($-\frac{1}{2}$) ج ($-\frac{3}{4}$) د ($-\frac{5}{4}$)

تست ۱۴۶ : بزرگترین جمله دنباله هندسی $\frac{1}{24}, d, \frac{1}{3}, c, \frac{1}{3}, b, a$ کدام است ؟

- الف (۱) ب ($\frac{8}{3}$) ج ($\frac{4}{3}$) د ($\frac{2}{3}$)

تست ۱۴۷ : اگر مساحت مربع هایی تشکیل یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۴ بدهد آنگاه محیط این مربع ها تشکیل یک دنباله با قدرنسبت می دهند.

- الف (هندسی - ۲) ب (حسابی - ۲) ج (هندسی - ۴) د (حسابی - ۴)

تست ۱۴۸ : دو عدد مثبت x و y را بین -2 و 18 طوری می نویسیم که سه عدد اول دنباله حسابی و سه عدد دوم دنباله هندسی بسازند. مجموع قدرنسبت های این دو دنباله کدام می تواند باشد ؟

- الف (۶) ب (۸) ج ($\frac{8}{5}$) د ($\frac{9}{5}$)

تست ۱۴۹ : در یک دنباله هندسی حاصلضرب جملات سوم، پنجم و هفتم ۹ برابر حاصلضرب جملات چهارم ، ششم و نهم است. قدرنسبت دنباله کدام است ؟

- الف ($\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$) ب ($\pm \sqrt{3}$) ج ($\pm \frac{1}{3}$) د (± 3)

تست ۱۵۰ : جمله ی دوم یک دنباله هندسی برابر ۱۰ است. از جمله ی سوم آن چه عددی کم شود تا سه جمله نخست آن یک دنباله حسابی افزایشی با قدرنسبت ۶ تشکیل دهند ؟

- الف (۴) ب (۹) ج (۱۲) د (۱۶)

تست ۱۵۱: در یک دنباله هندسی تفاضل جملات دوم و اول برابر ۶ و تفاضل جملات چهارم و سوم برابر ۵۴ است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

- الف (۲) ب (-۳) ج (۳) د (± 3)

تست ۱۵۲: قدرنسبت دو دنباله هندسی برابر و جمله اول یکی دو برابر جمله اول دیگری است. جمله n ام دنباله اول چند برابر جمله n ام دنباله دوم است؟

- الف (۲) ب ($2n$) ج (2^n) د (n^2)

تست ۱۵۳: در یک دنباله ی هندسی، مجموع سه جمله ی متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آنها ۲۱۶ است تفاضل کوچکترین و بزرگترین این سه عدد کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

- الف (۴) ب (۵) ج (۶) د (۷)

تست ۱۵۴: در یک دنباله هندسی با جملات متمایز حاصلضرب ده جمله اول p است. حاصلضرب جمله اول در جمله دهم چقدر است؟

- الف (\sqrt{p}) ب ($\sqrt[10]{p}$) ج ($\sqrt[5]{p}$) د (p)

تست ۱۵۵: در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، جمله دوم ۷ واحد بیشتر از جمله اول و جمله چهارم ۶۳ واحد بیشتر از جمله سوم است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- الف (۳) ب (۹) ج (۲) د (۴)

تست ۱۵۶: در دنباله حسابی $1, 7, \dots, 4, 2x - 3x$ واسطه هندسی جملات دوم و بیستم کدام است؟

- الف) $5\sqrt{3}$ ب) $5\sqrt{7}$ ج) ۱۵ د) ۲۱

تست ۱۵۷: در یک دنباله هندسی جمله هفتم ۲۷ برابر جمله ی چهارم است. اگر جمله دوم ۶ باشد، اختلاف جمله پنجم از جمله ششم کدام است؟

- الف) ۳۲۴ ب) ۱۶۲ ج) ۲۷ د) ۱۲۶

تست ۱۵۸: در یک دنباله هندسی جمله اول برابر ۲ و جمله هشتم، مربع جمله پنجم است. قدرنسبت این دنباله برابر است با

- الف) ۲ ب) $\sqrt{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

تست ۱۵۹: جمله دوم یک دنباله هندسی ۱ است. جملات اول و سوم نسبت به هم چه نوع اعدادی هستند؟

- الف) اول ب) متوالی ج) معکوس د) متناوب

تست ۱۶۰: اضلاع یک مثلث تشکیل دنباله هندسی با قدرنسبت q می دهند. کدام گزینه در مورد ارتفاع نظیر این اضلاع همواره صحیح است؟ ($q \neq 1$)

- الف) دنباله حسابی می سازند ب) دنباله هندسی با قدرنسبت q می سازند
ج) باهم برابرند د) دنباله هندسی با قدرنسبت دیگری می سازند

* تست ۱۶۱: جمله دوم یک دنباله حسابی برابر ۱۴ بوده و اگر به جمله سوم آن عدد ۲۵ اضافه گردد، سه جمله نخست آن یک دنباله هندسی افزایشی تشکیل می دهند که جمله سوم این دنباله، برابر است با:

- الف (۲۵) ب (۳۶) ج (۳۹) د (۴۹)

* تست ۱۶۲: در یک دنباله هندسی با جمله های مثبت و صعودی اختلاف بین پنجمین و چهارمین جمله ۵۷۶ و اختلاف بین دومین و اولین جمله ۹ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- الف (۲) ب (۳) ج (۴) د (۵)

* تست ۱۶۳: اگر دنباله ی $a + 6, a - 2, a - 6, a - 2b - a, a - 6, a - 2, a + 6, \dots$ یک دنباله هندسی باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

- الف (۵) ب (۴) ج (۷) د (۳)

* تست ۱۶۴: در یک دنباله ی هندسی با قدرنسبت q جمله ی دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله ی هشتم میتوانند سه جمله متوالی از دنباله ی حسابی باشند. مقدار $q^3 + q^{-3}$ کدام است؟

- الف (۳) ب (۴) ج (۶) د (۲)

۴.۳ دنباله بازگشتی

در بسیاری از دنباله‌ها بین هر جمله و جملات ماقبل یک رابطه وجود دارد که به کمک آن می‌توان جملات بعدی را تعیین نمود. به چنین رابطه‌ای، رابطه‌ی بازگشتی و با دنباله‌ای با این رابطه دنباله‌های بازگشتی می‌گوییم.

سوال: فرض کنید جملات یک دنباله از قاعده‌ی $a_n = a_{n-1} - 3$ با فرض $a_1 = 2$ ، پیروی کنند. در این صورت ۱۰ جمله‌ی اول این دنباله را مشخص کنید.

تست ۱۶۵: در یک دنباله اعداد $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم $a_n = 2a_{n-1} - 2$ حاصل $a_8 - a_7$ کدام است؟
(سراسری تجربی خارج کشور ۹۵)

- الف (۳۲) ب (۴۸) ج (۵۶) د (۶۴)

تست ۱۶۶: در دنباله اعداد $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ جمله ۲۳م کدام است؟

- الف (۴۸۴) ب (۵۱۷) ج (۵۲۹) د (۵۷۶)

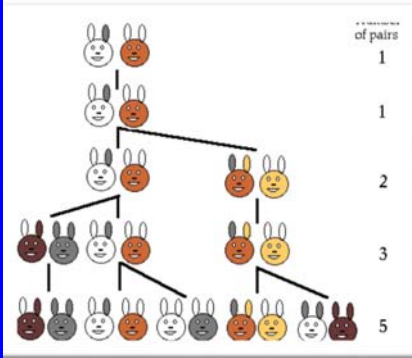
تست ۱۶۷: در دنباله اعداد $a_1 = 1$ و $a_n = 2a_{n-1} + 1$ جمله هشتم این دنباله کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۵)

- الف (۱۲۷) ب (۱۵۹) ج (۲۴۷) د (۲۵۵)

تست ۱۶۸: حاصل $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\dots}}}}}$ کدام است؟

- الف (۱) ب ($\sqrt[3]{12}$) ج ($\sqrt[3]{12}$) د ($\sqrt[3]{36}$)

از معروف ترین دنباله های بازگشتی می توان به دنباله های فیبوناتچی اشاره کرد. با جستجو در اینترنت سعی کنید کاربردهای فراوان این دنباله را مورد بررسی قرار دهید.



۱.۴.۳ دنباله فیبوناتچی

دنباله ای است که جمله اول و دوم آن عدد یک است و مجموع هر دو جمله، جمله بعدی را تشکیل می دهد.

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases} \quad 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

مجموع جملات این دنباله از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$S_n = 2F_n + F_{n-1} - 1$$

تست ۱۶۹ : جملات پانزدهم و شانزدهم دنباله ی فیبوناتچی به ترتیب ۶۱۰ و ۹۸۷ هستند. مجموع شانزده جمله ی نخست آن کدام است؟

- الف (۲۵۸۳ ب (۲۵۴۳ ج (۲۴۷۲ د (۲۴۵۲

همچنین جمله عمومی آن به صورت زیر است :

$$F_n = \frac{a^n - (1-a)^n}{\sqrt{5}} \quad a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

تست ۱۷۰ : جملات پنجم دنباله های فیبوناتچی، مثلثی و مربعی به ترتیب تشکیل یک دنباله ی حسابی می دهند قدر نسبت دنباله کدام است؟

- الف (۵ ب (۱۰ ج (۱۵ د (۲۰

تست ۱۷۱: رابطه ی $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$ بین جملات یک دنباله برقرار است. اگر $U_1 = U_2 = 1$ باشد، جمله ی نهم این دنباله کدام است؟ (سراسری تجربی ۷۸)

- الف (۳۵) ب (۳۴) ج (۳۳) د (۳۲)

تست ۱۷۲: بین دو عدد ۳۲۴ و ۴ سه عدد چنان درج کرده ایم که ۵ عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند. مجموع این ۵ عدد کدام است؟ (خارج از کشور ۹۱)

- الف (۴۲۸) ب (۴۸۴) ج (۴۸۶) د (۴۸۸)

تست ۱۷۳: مقادیر $..., k, k', \frac{1}{p}, \frac{1}{p}$ چهار جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی هستند در این صورت:

- الف ($k + k' = 0$) ب ($k + k' = \frac{1}{12}$) ج ($k + k' = \frac{1}{4}$) د ($k + k' = \frac{1}{6}$)

تست ۱۷۴: در دنباله ی حسابی $..., 204, 208$ کدامین جمله صفر است؟

- الف (۵۱) ب (۵۲) ج (۵۳) د (۵۴)

تست ۱۷۵: بین دو عدد ۳ و ۱۹ چند واسطه ی حسابی با قدرنسبت ۴ می توان درج کرد؟

- الف (۳) ب (۴) ج (۵) د (۶)

تست ۱۷۶: بین دو عدد که تفاضل آنها ۸۴۰ است پنج واسطه ی حسابی درج شده است قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

- الف) ۲۱۰ ب) ۱۶۸ ج) ۱۶۰ د) ۱۴۰

تست ۱۷۷: اگر a_1, a_2, a_3 سه جمله ی اول یک دنباله ی هندسی با قدرنسبت ۲ باشد کدام گزینه سه جمله ی اول یک دنباله ی هندسی هستند؟

- الف) $a_1 + 1, a_2 + a_1, a_3 + a_2$ ب) $a_1 + 1, a_2 + 4, a_3 + 16$
 ج) $a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 3$ ج) $a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 4$

تست ۱۷۸: در یک دنباله ی حسابی جملات اول، نهم، و چهل و نهم به ترتیب جملات متوالی از دنباله ی هندسی اند. قدرنسبت دنباله ی هندسی کدام است؟

- الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶

تست ۱۷۹: در یک دنباله ی هندسی $a_1 a_3 a_5 = 8 a_2 a_4 a_6$ قدر نسبت دنباله کدام است؟

- الف) $\frac{1}{3}$ ب) ۲ ج) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ د) $\sqrt[3]{2}$

تست ۱۸۰: اعداد $1 - 4, 3p + 3, 2p + 3$ سه جمله ی متوالی یک دنباله حسابی هستند قدرنسبت دنباله کدام است؟

سراسری ریاضی ۸۴

- الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷

* تست ۱۸۱ : اگر a, b, c, d جملات متوالی از یک دنباله هندسی باشند حاصل $\frac{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2}{(a-d)^2}$ چقدر است

د) صفر

ج) ۳

ب) ۲

الف) ۱

آزمون جامع استاندارد شماره یک، فصل ۱ بخش مجموعه‌ها ۱۵ تست، زمان پیشنهادی ۲۵ دقیقه

۱- کدام یک از اعداد زیر به مجموعه $\mathbb{Q} - \mathbb{R}$ تعلق ندارد؟

(۱) $\sqrt{2/5}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\sqrt{2/25}$ (۴) $\frac{\pi}{3/14}$

۲- اگر $A = [1, 2]$ و $A - B$ متناهی باشد، B کدام مجموعه زیر نمی‌تواند باشد؟

(۱) $[-1, 4]$ (۲) $(1, 4)$ (۳) $(-2, 2)$ (۴) $[2, 3]$

۳- کدام یک از تساوی‌های زیر صحیح نیست؟

(۱) $(-\infty, 2] \cup (2, +\infty) = \mathbb{R}$ (۲) $[2, 4) - (-\infty, 3) = [3, 4)$

(۳) $(-2, 2) \cap [2, 3) = \emptyset$ (۴) $(-1, 4) - [-1, 4) = \{-1\}$

۴- اگر $\{-1, 1\} \subseteq (2a - 1, a + 3)$ ، آن‌گاه حدود a شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۵- کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

(۱) مجموعه اعداد گویای بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ (۲) مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک

(۳) مجموعه تمام خط‌های گذرنده از یک نقطه (۴) مجموعه مولکول‌های موجود در یک صفحه کاغذ

۶- مجموعه $\mathbb{N} \cup (\mathbb{N}' - \mathbb{W}')$ با کدام مجموعه زیر برابر است؟

(۱) \mathbb{N} (۲) \mathbb{W} (۳) \mathbb{Z} (۴) $\mathbb{Z} - \{0\}$

۷- اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، مجموعه‌های $A - B$ و $A \cup B$ چگونه اند؟

(۱) متناهی یا متناهی - نامتناهی (۲) متناهی - متناهی یا نامتناهی

(۳) نامتناهی - نامتناهی (۴) نامتناهی - متناهی یا نامتناهی

۸- اگر $(a, 3] \cup [1, 4) = (-1, b]$ آن‌گاه $a + b$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

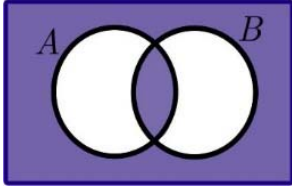
۹- اگر $A = [2, 4]$ و نمودار مجموعه $A - B$ به صورت رو به رو باشد، مجموعه B کدام می‌تواند باشد؟



- (۱) $(2, 3)$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $(3, 5)$ (۴) $[3, 5]$

۱۰- اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، متمم مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ برابر کدام است؟

- (۱) $A' - B$ (۲) $(B - A)'$ (۳) $(A - B)'$ (۴) $(B - A)'$



۱۱- با توجه به شکل مقابل، متمم ناحیه رنگی کدام است؟

- (۱) $U - (A \cup B)$ (۲) $(A \cup B) - (A \cap B)$ (۳) $U - (A \cap B)$ (۴) $A' - B'$

۱۲- در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۲ نفر عضو تیم بسکتبال و ۱۵ نفر عضو تیم والیبال هستند. اگر تعداد

افرادی که عضو هیچ کدام از این دو تیم نیستند، ۵ نفر باشد، چند نفر عضو هر دو تیم هستند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳- مجموعه مرجع U دارای ۸۰ عضو، $n(A') = ۳۵$ و $n(B \cap A') = ۳۰$ می‌باشد، مجموعه $A' \cap B'$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۱۴- اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد طبیعی باشد، $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 6\}$ و $B = \{4, 5, 6, 8, 9\}$ ، آن گاه مجموعه

$(A \cup B)'$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) بی شمار

۱۵- در یک نظرسنجی از ۱۰۰ مشتری یک فروشگاه، مشخص شد که ۶۰ نفر از محصولات شرکت A و ۴۵ نفر از محصولات شرکت

B خرید کرده‌اند. اگر تعداد افرادی که فقط محصول A را خریده‌اند، چهار برابر تعداد افرادی باشد که هیچ کدام از این دو محصول

را نخریده‌اند، تعداد افرادی که دقیقاً یکی از این دو محصول را خریده‌اند، کدام است؟

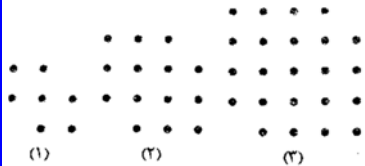
- (۱) ۷۵ (۲) ۷۸ (۳) ۷۳ (۴) ۷۶

آزمون جامع استاندارد شماره دو، فصل ۱ بخش الگو و دنباله ۱۵ تست، زمان پیشنهادی ۲۵ دقیقه

۱- جملات پنجم و هشتم یک الگوی خطی به ترتیب ۱۳ و ۲۲ است. جمله اول الگو کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۴

۲- در الگوی مقابل، تعداد نقطه‌های شکل دهم چه قدر از تعداد نقطه‌های شکل نهم بیشتر است؟



- (۱) ۲۱ (۲) ۲۰ (۳) ۲۳ (۴) ۲۲

۳- در دنباله درجه دوم $0, 2, 6, 12, \dots$ جمله ۲۱ام کدام است؟

- (۱) ۴۲۰ (۲) ۴۳۱ (۳) ۴۲۹ (۴) ۴۵۹

۴- در دنباله حسابی $t_n = an^2 + (a + 3)n - 2$ جمله ۷ام کدام است؟

- (۱) ۴۳ (۲) ۴۷ (۳) ۴۹ (۴) ۵۳

۵- مجموع چهار جمله اول یک دنباله حسابی ۴ و مجموع چهار جمله دوم آن ۶۸ است. مجموع سه جمله سوم دنباله چه قدر از مجموع سه جمله اول آن بیشتر است؟

- (۱) ۵۴ (۲) ۷۲ (۳) ۸۴ (۴) ۹۶

۶- یک دنباله حسابی $3, 0, 3, \dots$ جمله دارد. اگر جملات با شماره زوج دنباله را حذف کنیم، قدرنسبت دنباله حاصل ۸ می‌شود. اگر جمله سوم دنباله حاصل ۱۰ باشد. جمله دوازدهم دنباله اولیه کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۴ (۳) ۳۶ (۴) ۳۸

۷- برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو، لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده شود تا شدت تابش‌ها بیش از ۹۹ درصد کاهش یابد؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۸- واسطه‌های هندسی دو عدد $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ و $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ ، جملات دوم و سوم یک دنباله حسابی افزایشی‌اند. در این دنباله حسابی، جمله دهم کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۹- جمله سوم و ششم یک دنباله حسابی به ترتیب و است. چند جمله این دنباله مثبت است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۳ (۳) ۳۵ (۴) ۳۴

۱۰- در یک دنباله حسابی $t_1 + t_3 + t_5 = 15$ و $t_2 + t_4 + t_8 = 33$ است. در این دنباله بزرگ‌ترین جمله دورقمی کدام است؟

- (۱) ۹۹ (۲) ۹۸ (۳) ۹۷ (۴) ۹۶

۱۱- به ازای چند مقدار x دنباله $4 + 3x, x^2 - 2x, x + 2$ هم هندسی است و هم حسابی؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۱۲- مجموع چهار جمله اول یک دنباله هندسی صعودی $\frac{16}{81}$ برابر مجموع چهار جمله دوم است. اگر جمله اول و قدرنسبت برابر باشند، مجموع سه جمله اول کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{3}{6}$

۱۳- جملات اول، k برابر جمله پنجم و جمله دوم دنباله هندسی $75 / \circ, a, b, 6$ ، جملات متوالی یک دنباله حسابی اند. k کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۴- در یک دنباله هندسی حاصل ضرب جملات چهارم تا دهم، ۱۲۸ است. اگر جمله هفتم به صورت $3k + 1$ باشد، k کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۱۵- سه جمله اول یک دنباله حسابی مفروض است. اگر جمله سوم \circ باشد، به این جمله چند واحد اضافه کنیم تا سه جمله جدید تشکیل دنباله هندسی با قدرنسبت ۳ دهند؟

- (۱) -۱ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۱۷

جزوه آموزشی مبحث مجموعه ، الگو و دنباله

آموزشگاه علمی پویندگان جوان

درس چهارم : دنباله های حسابی و هندسی

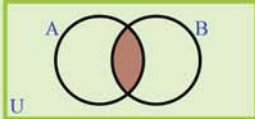

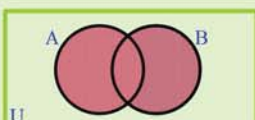

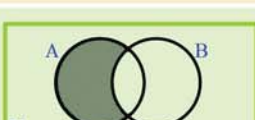

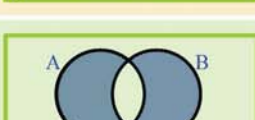





پاسخ کلیدی آزمون شماره ۱ و ۲

سوال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	آزمون شماره ۱
پاسخ	۳	۴	۴	۳	۴	۲	۱	۲	۲	۱	۲	۲	۱	۲	۳	
سوال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	آزمون شماره ۲
پاسخ	۱	۳	۱	۳	۲	۴	۲	۲	۴	۲	۱	۱	۱	۳	۳	


دبیر ریاضی : عادل آخندی



جمع بندی اعمال جبری روی مجموعه ها و تعداد عضوهای مربوط به مجموعه های A و B

رابطه ریاضی	نمودار ون	نام قانون	بیان فارسی
$n(A \cap B)$ تعداد عضوهای دو مجموعه که معمولاً داده شده یا خواسته شده است.		اشتراک دو مجموعه $A \cap B$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ عضو هر دو مجموعه باشد ✓ در هر دو گروه عضو باشد ✓ عضو A و B با هم ✓ مرف ربط و فراموش نشود
$n(A \cap B) = \emptyset$ معمولاً به مجزا بودن دو مجموعه اشاره می شود.		دو مجموعه مجزا $A \cap B = \emptyset$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ هیچ اشتراکی نداشته باشد
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ جدا از هم باشند.		اجتماع دو مجموعه $A \cup B$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ دست کم عضو یکی از آنها باشد ✓ مذاقل/لااقل/عضو یکی از آنها باشد ✓ عضو A یا B یا هر دو باشد ✓ مرف ربط یا فراموش نشود
$n(A') = n(U) - n(A)$		متمم یک مجموعه A'	<ul style="list-style-type: none"> ✓ شامل مهموعه A نباشد ✓ عضو مهموعه A نباشد ✓ فعل منفی فراموش نشود
$n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A)$ جدا از هم باشند.		تفاضل $A - B = A \cap B'$ $A - B = B' \cap A$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ فقط عضو A باشد ✓ عضو A باشد و عضو B نباشد ✓ کلمه فقط فراموش نشود
$n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$ $n(B \cap A') = n(B - A) = n(B)$ جدا از هم باشند.		تفاضل $B - A = B \cap A'$ $B - A = A' \cap B$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ فقط عضو B باشد ✓ عضو B باشد و عضو A نباشد ✓ کلمه فقط فراموش نشود
$n(A \Delta B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$ $n(A \Delta B) = n(A - B) + n(B - A)$ $n(A \Delta B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$		تفاضل متقارن $(A - B) \cup (B - A)$ $(A \cup B) - (A \cap B)$ $A \Delta B$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ دقیقاً عضو یکی از آنها باشد ✓ فقط عضو یکی از مجموعه ها باشد ✓ فقط عضو A یا فقط عضو B باشد
$n(A \cup B)' = n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B)$ در فرمول بالا با قانون اجتماع جایگذاری می شود $(A \cup B)' = A' \cap B' = A' - B = B' - A$ یادآوری		متمم اجتماع $(A \cup B)' = A' \cap B'$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ عضو هیچ کدام نباشد ✓ عضو A یا B نباشد ✓ نه عضو A و نه عضو B باشد
$n(A' \cup B') = n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B)$		متمم اشتراک $(A \cap B)' = A' \cup B'$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ مذاکثر عضو یکی از آنها باشد ✓ مذاقل عضو یکی از آنها نباشد
$n(A \cup B') = n(A' \cap B) = n(B - A)$ $= n(U) - n(B - A) = n(U) - [n(B) - n(A \cap B)]$ $= n(U) - n(B) + n(A \cap B)$		متمم تفاضل $(B - A)' = (B \cap A)'$ $(B - A)' = (B' \cup A)$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ عضو A باشد یا عضو B نباشد
$n(A' \cup B) = n(A \cap B') = n(A - B)$ $= n(U) - n(A - B) = n(U) - [n(A) - n(A \cap B)]$ $= n(U) - n(A) + n(A \cap B)$		متمم تفاضل $(A - B)' = (A \cap B)'$ $(A - B)' = (A' \cup B)$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ عضو A نباشد یا عضو B باشد
		زیر مجموعه و متمم $A \subseteq B \rightarrow B' \subseteq A'$	

کاری از دبیر ریاضی: عادل آخندی ایده از کتاب ریاضی تجربی مهندس حسین کاویانی

دانلود از اپلیکیشن پادرس 

جمع بندی نکات مربوط به دنباله های حسابی و هندسی

پارامتر	دنباله حسابی	دنباله هندسی
قدر نسبت	$d = t_n - t_{n-1}$ اختلاف هر جمله از جمله قبلی	$r = \frac{t_n}{t_{n-1}}$ تقسیم هر جمله بر جمله قبلی
جمله عمومی	$t_n = t_1 + (n-1)d$ $t_n = nd + (t_1 - d)$ $t_n = t_m + (n-m)d$	$t_n = t_1 r^{n-1}$ $t_n = t_m r^{n-m}$
قدر نسبت با معلوم بودن دو جمله	$t_m - t_n = (m-n)d$ $d = \frac{t_m - t_n}{m-n}$	$\frac{t_m}{t_n} = r^{m-n}$
شرط مسابی و هندسی بودن a, b, c	$2b = a + c$	$b^2 = ac$
سه جمله متوالی دنباله	$x - d, x, x + d$ سه جمله متوالی که هیچ اشاره ای به نوع آنها نشده است	$\frac{x}{r}, x, xr$ سه جمله متوالی که هیچ اشاره ای به نوع آنها نشده است
واسطه دو عدد a, c	$b = \frac{a+c}{2}$ واسطه یا میانگین حسابی	$b = \pm\sqrt{ac}$ واسطه یا میانگین هندسی
$m+n = p+q$ $m-n = p-q$ (ارتباط بین اندیس ها و جملات)	$t_m + t_n = t_p + t_q$ $t_m - t_n = t_p - t_q$	$t_m \times t_n = t_p \times t_q$ $t_m \div t_n = t_p \div t_q$
جمله وسط	$\frac{\text{مجموع اولی و آخری}}{2} = \frac{t_1 + t_n}{2}$ تعداد جملات $n = \frac{t_n - t_1}{d} + 1$	$\sqrt{\text{حاصلضرب اولی در آخری}} = \sqrt{t_1 \times t_n}$
درج m واسطه بین دو عدد a و b	قدر نسبت $d = \frac{b-a}{m+1}$ تعداد واسطه ها $m = \frac{b-a}{d} + 1$	$\frac{b}{a} = r^{m+1}$
مجموع n جمله اول دنباله ها	$s_n = \frac{n}{2}(t_1 + t_n)$ $s_n = \frac{n}{2}(2t_1 + (n-1)d)$	$s_n = \frac{t_1(1-r^n)}{1-r}$ $p_n = (t_1 \times t_n)^{\frac{n}{2}}$ حاصلضرب n جمله اول
مجموع و حاصلضرب جملات با تعداد فرد	جمله وسطی \times تعداد = مجموع n جمله	تعداد \times حاصلضرب n جمله = (جمله وسطی)
جملات با شماره های زوج و فرد	$s_{\text{زوج}} - s_{\text{فرد}} = \frac{n}{2}d$	$\frac{S_{\text{زوج}}}{S_{\text{فرد}}} = r$ $\frac{S_m}{S_n} = \frac{1-r^m}{1-r^n}$
افزایشی یا کاهششی بودن دنباله	$d > 0$ افزایشی $d = 0$ ثابت $d < 0$ کاهششی	قاعده فاصی ندارد و بهتر است مثال بزنید

دانلود از اپلیکیشن پادرس

کاری از دبیر ریاضی: **مادل آخندی** ایده از کتاب ریاضی تجربی مهندس حسین گویانی

یادداشت برداری