

مثلث قائمه

- بنوعی مثلث است -

- یک زاویه

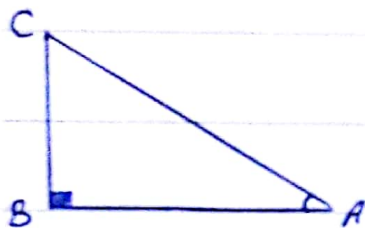
شماره دو چند ضلعی: اگر اضلاع و زاویه های متناظر در چند ضلعی تقصیر به تقصیر با هم برابر باشند آن دو مثلث با هم مشابهند.

شماره دو مثلث: شماره دو مثلث به یکی از دو حالت زیر ممکن است:

1- اگر دو زاویه از مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث مشابهند.

2- اگر نسبت اضلاع از مثلث با نسبت اضلاع از مثلث دیگر برابر بوده و زاویه بین آن دو ضلع نیز در دو مثلث برابر باشد، دو مثلث مشابهند.

3- اگر سه ضلع مثلث با سه ضلع از مثلث دیگر متناظر باشد، آن دو مثلث مشابهند.



در مثلث قائم الزاویه ABC زاویه زاویه A معین واحده A داریم:

$$\sin A = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{اندازه وتر}}$$

$$\cos A = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{اندازه وتر}}$$

$$\tan A = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه A}}$$

$$\cot A = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه A}}$$

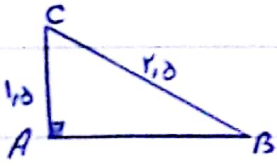
بنابراین در مثلث ABC داریم:

$$\sin A = \frac{BC}{AC} ; \cos A = \frac{AB}{AC} ; \tan A = \frac{BC}{AB} ; \cot A = \frac{AB}{BC}$$

در یک مثلث قائم الزاویه بنوعی سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را بنوعی می توانیم

$$\tan A = \frac{1}{\cot A} \quad \text{نقشه: با توجه به تقویم واضع است که}$$

مثال ۱: در مثل مقابل منبجی مثلثی زاویه های B و C را بدست آورده و با هم مقایسه کنید.

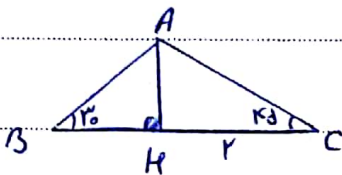


مثال ۲: در مثل قائم الزاویه (A=90) داریم ABC، AC=2 و  $\sin B = \frac{1}{3}$  . مطلوب است  $\cos B$  و  $\tan B$ .

مثال ۳: در یک مثلث قائم الزاویه طول وتر برابر با اوله است و تا نترافت یکی از زاویه های حاده برابر  $\frac{3}{4}$  است. سایر منبجی های مثلثی این زاویه را بدست آورید.

مثال ۴: یک رسم یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲ اوله در رسم یک ارتفاع آن منبجی های مثلثی زوایای ۳۰، ۶۰ و ۹۰ را محاسبه کنید.

مثال ۵: یک مربع به ضلع یک رسم کرده و با رسم قطر آن منبجی های مثلثی زاویه ۴۵ در رسم را محاسبه کنید.



مثال ۶: با توجه به شکل زیر مقدار BH را محاسبه کنید.

مثال: در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:  $BC=5$  و  $AC=3$  و  $\hat{A}=90^\circ$ . محاسبه  $\sin B$  و  $\cos B$ :

نکته: به سبب شباهت مثلثات برابری می توان نوشت:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} ; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} ; \tan \alpha \times \cot \alpha = 1$$

نکته: جدول زیر را همیشه باید به خاطر داشته باشیم:

$\theta$ زاویه درجه	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده
$\cot$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

مثال: حاصل عبارتهای زیر را بیابید:

$$\sin 30^\circ \tan 60^\circ =$$

$$\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ =$$

$$2 \sin^2 45^\circ - \cos^2 45^\circ =$$

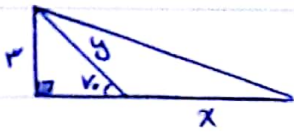
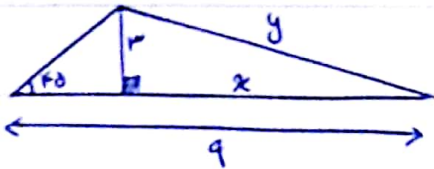
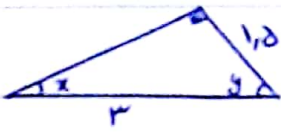
$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ =$$

$$1 + \sin 30^\circ + \cos^2 45^\circ + 2 \sin 30^\circ \cos 70^\circ =$$

$$\frac{\tan 45^\circ - \tan 70^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 70^\circ} =$$

مثال: یک کوس بر تپه در ارتفاع ۱۰ متری سطح زمین قرار دارد. مویش تحت زاویه  $30^\circ$  در تپه بر تپه می شود و حرکت خود تحت همین زاویه از راه منتهی الیه حرکت می کند. روی سطح زمین ۱۰۰۰ متر طی کرده باشد خود مویش در چه ارتفاعی است و چه مسافتی در امتداد خط سیر خود طی کرده است؟

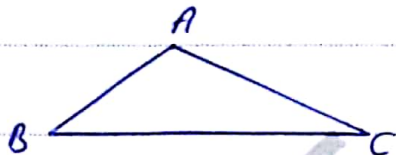
مثال: در هر مورد معادله  $x$  و  $y$  را بیابید (اورین:  $(\sin 70^\circ = 0,94, \cos 70^\circ = 0,34, \tan 70^\circ = 2,75)$ )



مثال: فردی با قد ۱۵۰ سانتی متر در کنار ستیبر قوس ایستاده است. طول سایه شخص ۱۵۰ سانتی متر و طول سایه درخت ۳۰ متر است. طول درخت را حساب کنید.

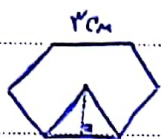
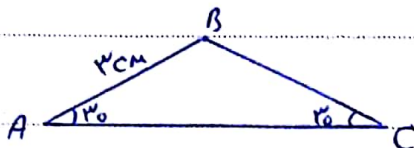
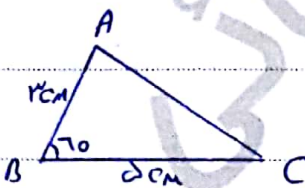
مساحت مثلث بر حسب ضلع‌های مثلث است:

در هر مثلث با معلوم بودن معادله طول ارتفاع مثلث و اندازه دو ضلع دیگر می‌توان مساحت مثلث را از رابطه زیر بیابید:

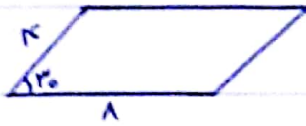


$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

مثال: مساحت مثلثی را بیابید

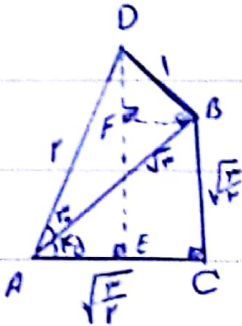


مثال: مساحت متوازی‌الاضلاع زیر زاویه  $A$  آورید.



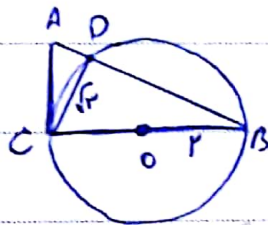
مثال: زاویه  $A$  در مثلث  $ABC$  در مثلث  $ABC$  است که  $\sin A = \frac{4}{5}$ . مطلوب است مساحت  $ABC$  بر حسب  $a$  این زاویه.

مثال: با توجه به شکل زیر نسبت  $\sin A$  زاویه  $A$  را بدست آورید.



مثال: در یک مثلث قائم الزامی از زاویه  $A$  داریم:  $\tan A = 3$ . مطلوب است  $\cos A$  بر حسب  $A$ .

مثال: در مثلث زیر قطر دایره  $BC$  و شعاع دایره  $OC$  است.  $AC$  بر دایره  $OC$  و  $CD = \sqrt{3}$  می باشد.

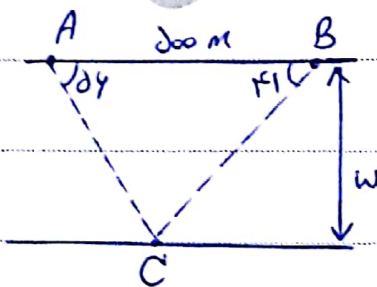


الف)  $\sin A$  را بدست آورید.

ب) طول  $AC$  را بدست آورید.

ج) مساحت مثلث  $ABC$  را به طریق معمولی و مثلثی بیابید.

مثال: در شکل زیر دو ساحل رودخانه موازی اند. با توجه به اطلاعات داده شده عرض رودخانه را بدست آورید.

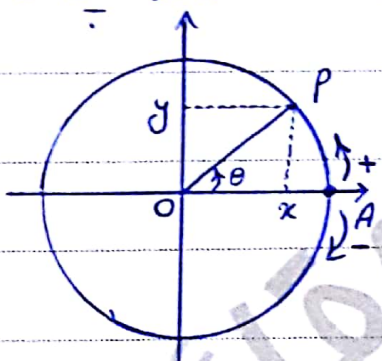


مثال: یک مثلث در ارتفاع ۳۰ متری از سطح زمین و با زاویه ۵۰ درجه برآب منتهی شود. این از طرف  
 ۳۰ متری با همین زاویه، موانع ۳۰ متری ارتفاع از سطح زمین می رسد. (۳۰ متری ۵۰ درجه)

مثال: شخصی در فاصله ۵۰ متری از یک برج غایب است. این ده است و بلندترین نقطه ی برج را با زاویه ۳۰  
 من بیند. اگر فاصله ی عمودی چشم این شخص تا زمین ۵ متر باشد، ارتفاع برج چند متر است؟ (۳۰ متری ۵۰ درجه)

دایره ی مثلثاتی:

دایره ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدأ مختصات را دایره ی مثلثاتی می نامیم. اگر از نقطه ی A(۱,۰) در خلاف  
 جهت عقربه های ساعت شروع به حرکت کنیم زاویه ای مثبت تولید خواهد شد. در صورت حرکت در  
 جهت عقربه های ساعت زاویه منفی حاصل خواهد شد.



در دایره ی مثلثاتی معادله داریم:

$$\cos \theta = \frac{ox}{op} = \frac{x}{1} = x \quad ; \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\sin \theta = \frac{oy}{op} = y \quad ; \quad \cot \theta = \frac{x}{y}$$

بنابراین رابطه ی غرض در مثلث OPx داریم:  $x^2 + y^2 = 1$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

رابطه ی فوق معروف به رابطه ی حاکمی در مثلثات است.

نکته: در دایره ی مثلثاتی برای هر زاویه ی θ داریم:  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  ;  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$

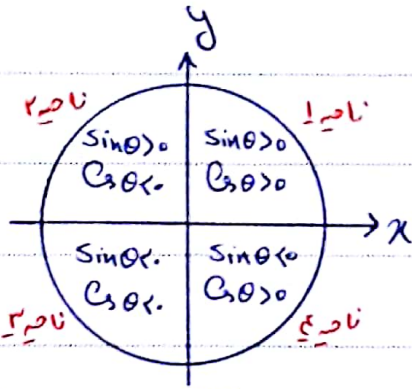
نکته: در دایره ی مثلثاتی tan, cot می توانند مقادیر از  $-\infty$  تا  $+\infty$  را داشته باشند.

نکته: در دایره ی مثلثاتی محور x ها را محور cos و محور y ها را محور sin می نامیم.



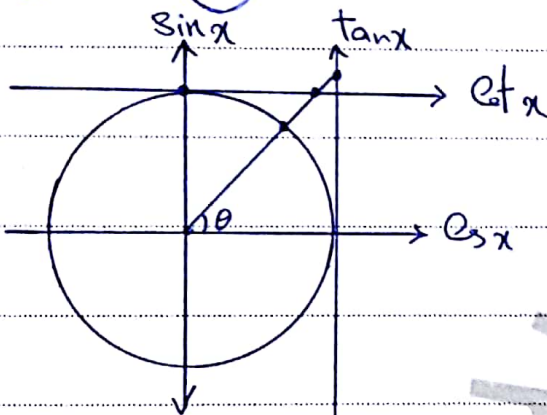
با توجه به تفاوت مثل علامت نوبتی مثلث در هر ناحیه با توجه به علامت نوبتی  $x$  و  $y$  در ناحیه ها مشخص می شود:

$$\sin = \frac{y}{r} \quad \text{و} \quad \cos = \frac{x}{r} \quad \text{و} \quad \tan = \frac{y}{x} \quad \text{و} \quad \cot = \frac{x}{y}$$



در واقع در هر ناحیه که  $x > 0$  یعنی  $\cos > 0$  و در هر ناحیه  $y > 0$  یعنی  $\sin > 0$  و در هر ناحیه که  $x$  و  $y$  هم علامت باشند  $\tan$  و  $\cot$  مثبت هستند.  
 محورها  $\tan$  و  $\cot$ :

شکل دیگری از دایره مثلث نیز متداول است که در آن چهار محور به نام نوبتی مثلث ترسیم صورت می گیرد.



از روی شکل مقابله مقادیر مختلفه خواهد شد.  
 حتما  $\tan$  و  $\cot$  را در هر مقدار از  $x$  اعتبار کنید.

مثال: نقطه  $P(-\frac{1}{3}, \frac{4}{5})$  روی دایره مثلث است. زاویه  $\theta$  را در هر ناحیه قرار داده اگر زاویه  $\theta$  را با  $\alpha$  برابر  $\theta$  باشد نوبتی مثلث زاویه  $\theta$  را بیابید.

مثال: اگر  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  باشد، هر دو  $\alpha$  را بیابید.

مثال: بهترین و کمترین مقدار عبارت  $A = 13 \cos \theta$  را بیابید.

مثال: زاویه های  $+160^\circ$  و  $-10^\circ$  هر کدام در کدام ربع مثلث قرار دارند؟

مثال: با توجه به دایره منگانه، نسبتی را بیابید که  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  را در بر میگیرد.

مثال: حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{2 \sin 270^\circ + 2 \cos 340^\circ - \tan 0^\circ + \csc 180^\circ}{2 \sin 30^\circ - 4 \cot 90^\circ}$$

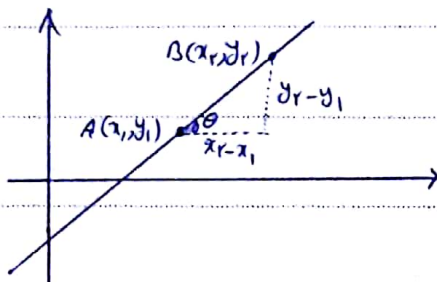
مثال: اگر زاویه  $\theta$  در ربع سوم منگانه  $\frac{1}{3}$  باشد، مقدار  $\sin \theta$  و  $\tan \theta$  را بیابید.

مثال: اگر نقطه  $P$  روی دایره منگانه در زاویه  $\theta$  باشد،  $\vec{OP}$  با  $\vec{OX}$  باشد و  $\sin \theta = \frac{2}{5}$ ، آنوقت  $\cos \theta$  را بیابید.

شیب خط با تانژانت زاویه:

در حال قبل با  $m$  شیب خط و مفهوم شیب آشنا شدیم و دیدیم که شیب خط گذرنده از نقاط  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  بصورت زیر برآید:

$$\text{شیب خط} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{تفاضل عمودی}}{\text{تفاضل افقی}}$$



$$\tan \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{جوار}} \rightarrow \tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$



@iemath

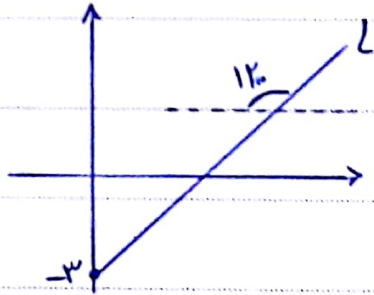
tel : 09024619001

(۳۷)

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی



یعنی تا آنجا که زاویه‌های که خط با جهت مثبت محور  $x$  و  $y$  برابر است. خط است.  
 نکته: اگر خط با جهت مثبت محور  $x$  زاویه تند بزرگتر از جهت مثبت آن جهت و اگر خط با جهت مثبت محور  
 $x$  زاویه باز بزرگتر از جهت مثبت آن جهت است در نگاه خط افقی باشد یعنی با جهت مثبت آن جهت در نگاه خط عمودی  
 باشد جهت مثبت آن جهت نشده است.



مثال: با توجه به شکل معادله خط را بنویسید.

مثال: اگر اینگونه گمان  $\alpha$  در نامجه چهارم باشد و  $\tan \alpha = -\frac{5}{3}$  باشد، با اینجهت  $\alpha$  را بنویسید.

مثال: اگر  $0 \leq \alpha \leq 70$  و  $\alpha = \frac{m-1}{2}$  باشد، عدد صحیح  $m$  را بنویسید.

مثال: کمترین و بیشترین مقدار عبارت  $\frac{10}{4+3\sin x}$  را بدین آوری.

مثال: معادله خطی را بنویسید که زاویه‌های آن با جهت مثبت محور  $x$  ها  $30^\circ$  باشد و از نقطه  $(0, 1)$  بگذرد.

مثال: جهت با جهت مثبت محور  $x$  زاویه  $150^\circ$  باشد و از نقطه  $(0, 0)$  عبور کند معادله خط را بنویسید.

نکته:

در زاویه حاد با افزایش زاویه، مقدار سینوس هم افزایش می‌یابد:  $30^\circ < 45^\circ \Rightarrow \sin 30^\circ < \sin 45^\circ$

در زاویه حاد با افزایش زاویه، مقدار کسینوس کاهش می‌یابد:  $30^\circ < 45^\circ \Rightarrow \cos 30^\circ > \cos 45^\circ$

در زاویه حاد با افزایش زاویه، مقدار تانژانت هم افزایش می‌یابد:  $15^\circ < 17^\circ \Rightarrow \sin 15^\circ < \sin 17^\circ$

در زاویه حاد با افزایش زاویه، مقدار کسینوس هم کاهش می‌یابد:  $30^\circ < 45^\circ \Rightarrow \cos 30^\circ > \cos 45^\circ$

روابط بین سینوس و کسینوس:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$2) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \tan \alpha \times \cot \alpha = 1$$

$$3) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$4) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

نکته: اگر  $\alpha + \theta = 90^\circ$  باشد داریم:

$$\sin \alpha = \cos \theta; \sin \theta = \cos \alpha; \tan \alpha = \cot \theta; \tan \alpha \times \tan \theta = 1$$

مثال: ثابت کنید همواره  $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) = 1$  برقرار است.

مثال: اگر  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$  باشد و انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه سوم باشد، سایر سینوسی و کسینوسی این زاویه را بدست آورید.

مثال: فرمول کنید  $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$  باشد در این صورت مقدار عبارت  $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin x - \cos x}$  را بیابید.

مثال: درستی رابطه  $\frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 x - \cot^2 x} = \tan^2 x$  را بررسی کنید.

مثال: ثابت کنید رابطه  $\sec^2 x (1 + 2 \tan^2 x) + (\sec x - 1)(\sec x + 1) = 1$  برقرار است.

مثال: درستی رابطه  $\sqrt{\sin^2 x + 4 \cos^2 x} - \sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x$  را ثابت کنید.

مثال: اگر  $\frac{2}{3} = \cos \theta$  و  $\tan \theta \times \cos \theta > 0$  باشد، معین کنید اندازه  $\theta$  در کمان واحد است.

مثال: درستی روابط زیر را بررسی کنید.

الف)  $3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1$

ب)  $\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} - 2 \tan^2 x = 2$

ج)  $\frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x(1 - \cos x)}$

د)  $\frac{1}{\sin^4 x} - \frac{1}{\sin^2 x} - \cot^4 x = \cot^2 x$

مثال: اگر  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$  باشد حاصل  $\frac{4}{\sin \alpha} - \frac{3}{\cos \alpha}$  را بیابید.

مثال: اگر  $\sin x = -\frac{1}{4}$  و  $0 < x < \pi$  باشد مقدار  $\tan x$  را بیابید.

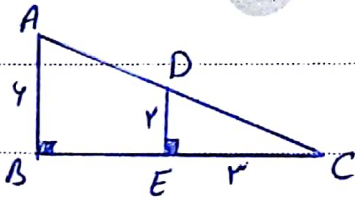
مثال: اگر  $0 < \alpha < 90^\circ$  و  $\tan \alpha = \frac{2}{3}$  باشد سایر نوبه‌های  $\alpha$  را بیابید.

مثال: عبارت زیر را ساده کنید حاصل آن را بیابید.

$$\frac{1 + \cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta (1 - \cos \theta)}$$

مثال: اگر  $\tan \alpha = 4$  باشد مقدار  $\frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}$  را بیابید.

مثال: اگر  $2 \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha = 4$  باشد  $\tan^2 \alpha$  را بیابید.



مثال: در مثل زیر اندازه‌های  $BE$  را بیابید.

تکونيات پايان فصل دوم :

۱ اگر  $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$  و انقوی زاویه  $\alpha$  در ناحیه چهارم باشد، حاصل عبارت  $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$  را بیابید.

۲ طول وتر یک مثلث قائم الزاویه ۲۰ و مقدار کسینوس یکی از زاویه های آن  $\frac{4}{5}$  است. مساحت مثلث را بیابید آورید.

۳ درستی یا نادرستی زیر را بررسی کنید.

الف)  $(\sin \beta)^4 - (\cos \beta)^4 = 2(\sin \beta)^2 - 1$

ب)  $\frac{1}{\sin a} - \cot a = \frac{\sin a}{1 + \cos a}$

ج)  $\sin^2 x - \cos^2 x = 1 - 2 \cos^2 x$

۴ اگر  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  و  $\cos \theta = \frac{m-1}{2}$  باشد، هر دو  $m$  را بیابید آورید.

۵ اگر خط گزرنده از نقطه  $A(2m+2, 3)$  و  $B(4, m+3)$  با جهت مثبت محور  $x$  زاویه  $45^\circ$  بسازد مقدار  $m$  را بیابید آورید.

۶ در مثلث  $ABC$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ ) داریم  $\tan A = \frac{3}{\sqrt{5}}$  و  $b = \sqrt{2}$  اندازه های  $a$  و  $c$  را بیابید.

۷ اگر  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{5}$  باشد حاصل  $\sin \theta \cos \theta$  را بیابید آورید.

۸ مقدار  $x$  را از عبارت  $\cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3} \tan 70^\circ - 4 \sin 70^\circ}{2\sqrt{2} \cos 50^\circ + \tan 50^\circ}$  بیابید آورید.

۹ آیا زاویه ای وجود دارد که زین کسینوس آن به ترتیب  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{2}{3}$  باشد؟ صراحتاً

۱۱ طول وتر یک مثلث قائم الزامی ۳۹ و کسینوس یکی از زاویه های حاده آن  $\frac{2}{13}$  می باشد. محیط مثلث را بدست آورید.

۱۱ اگر  $\tan \alpha = 3$  باشد حاصل عبارت  $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$  را بدست آورید.

۱۲ حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\frac{|\sin 2\theta - \sin 7\theta| + |\sin 2\theta + \sin 7\theta|}{\sin 2\theta \cos 5\theta + \cos 2\theta \sin 5\theta} = \frac{1}{1 + \tan^2 2\theta}$$

۱۳ اگر  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$  حاصل  $|\sin \alpha - \cos \alpha| + |\sin \alpha + \cos \alpha|$  را بدست آورید.

۱۴ در صورتیکه  $\frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{4}{2}$  باشد  $\tan \theta$  را بدست آورید.

۱۵ مساحت متوازی الاضلاعی را بدست آورید که اندازه اضلاع آن ۱۲ و ۱۷ و اندازه یکی از زاویه های آن ۵۷ درجه است. ( $\sin 57^\circ \approx 0.8$ )

۱۶ مساحت یک بیض قائم مقام را تعیین کنید که در ضلع آن ۱۸ cm می باشد. ( $\tan 44^\circ \approx 0.9$ )

۱۷ مساحت یک مثلث قائم الزامی ۱۸۳ است. اگر یکی از زاویه های آن  $7^\circ$  باشد ضلع مقابل به زاویه  $7^\circ$  چقدر است؟

تفاوتی مثل دوم

۱ حاصل عبارت  $\frac{1 + \cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta (1 - \cos \theta)}$  کدام است؟

- ۱ منفی
- ۲  $\frac{1}{\sin \theta}$
- ۳  $\frac{1}{\sin \theta}$
- ۴  $\cos \theta$

۲ اگر  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$  باشد، گزاره  $\cos^2 x = \frac{m-1}{2}$  به ازای چه مقادیری از  $m$  برقرار است؟

- ۱  $2 < m \leq 3$
- ۲  $-1 < m \leq 1$
- ۳  $0 < m \leq 2$
- ۴  $0 < m \leq 1$

۳ حاصل  $\tan^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{12}$
- ۲  $\frac{10}{12}$
- ۳  $\frac{13}{12}$
- ۴  $\frac{1}{12}$

۴ عبارت  $\tan \theta (\tan \theta + \cot \theta)$  کدام گزینه معادل است؟

- ۱  $\sin^2 \theta$
- ۲  $\cos^2 \theta$
- ۳  $\frac{1}{\sin^2 \theta}$
- ۴  $\frac{1}{\cos^2 \theta}$

۵ اگر  $1 - \cos \theta = \frac{5}{3}$  و  $\tan \theta (\cos \theta) = 0$ ، در کدام ربع  $\theta$  قرار دارد؟

- ۱ اول
- ۲  $\frac{\pi}{2}$
- ۳  $\frac{3\pi}{2}$
- ۴  $\frac{3\pi}{4}$

۶ در کدام یک از موارد زیر  $\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} < 0$  و  $\tan \alpha = -\frac{2}{3}$  است؟

- ۱ اول
- ۲  $\frac{\pi}{2}$
- ۳  $\frac{3\pi}{2}$
- ۴  $\frac{3\pi}{4}$

۷ در مثلث  $a=7$ ،  $b=7\sqrt{3}$ ،  $A = \frac{\pi}{4}$  است. اندازه زاویه  $C$  کدام است؟

- ۱ فقط  $\frac{\pi}{3}$
- ۲ فقط  $\frac{\pi}{2}$
- ۳  $\frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$
- ۴  $\frac{\pi}{7} \leq \frac{\pi}{2}$

۸ کدام گزینه صحیح است؟

- ۱  $\cos \alpha < \cos \beta$
- ۲  $\sin \alpha < \sin \beta$
- ۳  $\sin \alpha > \sin \beta$
- ۴  $\tan \alpha < \tan \beta$

۹ در مثلث قائم الزامی  $ABC$  داریم  $\hat{A} = 90^\circ$  و  $AB = 2AC$ ، معادله  $\sin \hat{B}$  کدام است؟

- ۱  $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- ۲  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- ۳  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- ۴  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۰ با توجه به رابطه  $\cos \alpha = \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \sin \theta$  معادله  $\alpha$  چند راه دارد؟

- ۱ ۰
- ۲ ۳
- ۳ ۵
- ۴ ۹۰

۱۱ در یک مثلث با زاویه ۵۰ درجه، طول وترها ۱۲ است. اگر مساحت مثلث  $\sqrt{2}$  باشد، زاویه بین وترها چقدر است؟

۱۵ د) ۱۲۰ ۱۲ ب) ۱۵۰ ۱۳ ج) ۱۲۰ ۱۴ د) ۱۵۰

۱۲ مقدار  $\frac{\sin 1}{\cos 1}$  کدام است؟

۱ د)  $\tan 1^\circ$  ۲ ب)  $\cot 1$  ۳ ج)  $\frac{1}{\tan 1}$  ۴ د)  $\frac{1}{\cot 1}$

۱۳ اگر  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$  و  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، مقدار  $\sin \alpha$  کدام است؟

۱ د)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  ۲ ب)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  ۳ ج)  $-\frac{\sqrt{2}}{3}$  ۴ د)  $\frac{\sqrt{2}}{5}$

۱۴ مقدار عبارت  $\sin(180^\circ + \theta)$  و  $\cos(180^\circ - \theta)$  کدام است؟

۱ د)  $-\frac{1}{2}$  ۲ ب)  $-\frac{1}{2}$  ۳ ج)  $\frac{1}{2}$  ۴ د)  $\frac{1}{2}$

۱۵ فرض  $\tan \theta = 2a - 1$  حاصل  $\frac{\sin 1 \theta - \sin 2 \theta}{\cos 2 \theta}$  کدام است؟

۱ د)  $2a$  ۲ ب)  $2a - 1$  ۳ ج)  $2a - 1$  ۴ د)  $2a - 2$

۱۶ اگر  $\sin \alpha = -1$  باشد، حاصل  $(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})(\sin \alpha + \cos \alpha)$  کدام است؟  $(0 \leq \alpha \leq 360^\circ)$

۱ د)  $2$  ۲ ب)  $1$  ۳ ج)  $-1$  ۴ د)  $-2$

۱۷ اگر  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$  و  $\alpha$  در ربع دوم باشد، مقدار  $\tan(270^\circ - \alpha)$  کدام است؟

۱ د)  $-\frac{1}{3}$  ۲ ب)  $-\frac{1}{3}$  ۳ ج)  $\frac{1}{3}$  ۴ د)  $\frac{1}{3}$

۱۸  $\sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} = 2$  باشد،  $\sin \alpha + \cos \alpha$  چقدر است؟

۱ د)  $2$  ۲ ب)  $1$  ۳ ج)  $2 - \sqrt{2}$  ۴ د)  $\sqrt{2} - 1$

۱۹ اگر  $\cot \theta = \sqrt{2} + 2$  و  $\tan \theta = \sqrt{2} - 2$ ،  $\sin \theta$  کدام است؟

۱ د)  $2$  ۲ ب)  $2$  ۳ ج)  $3$  ۴ د)  $4$

۲۰  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 + \tan \alpha}$  حاصل  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

۱ د)  $\sin \alpha$  ۲ ب)  $\cos \alpha$  ۳ ج)  $\sin \alpha + \cos \alpha$  ۴ د)  $\sin \alpha \cos \alpha$



۱۰ در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله اول آن  $\frac{1}{3}$  مجموع ۱۰ جمله بعدی آن است. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟

- ۱)  $\frac{3}{2}$  ۲)  $\frac{5}{2}$  ۳) ۳ ۴)  $\frac{4}{3}$

۱۱ در یک دنباله عددی مجموع ۲۰ جمله اول سه برابر مجموع ۱۲ جمله اول آن است. اگر  $a_3 = 7$  باشد  $a_9$  کدام است؟

- ۱) ۲۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۸

۱۲ در یک دنباله حسابی جمله ی نهم منفی جمله ی دهم است. مجموع چند جمله ی اول این دنباله منفی است؟

- ۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۱۳ در یک دنباله عددی جمله ی  $n$  اگر صورت  $a_n = \frac{3}{4}n - 5$  است. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله عبارت است از

- ۱) ۹۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

۱۴ به ازای یک مقدار  $x$  اعداد  $2 - x^2, 2x - 4, x^2 - 4$  به ترتیب ۳ جمله اول از یک دنباله حسابی متوالی اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله کدام است؟

- ۱)  $\frac{117}{12}$  ۲)  $\frac{125}{12}$  ۳)  $\frac{73}{4}$  ۴)  $\frac{127}{8}$

۱۵ مجموع  $n$  جمله اول از یک تسلسل عددی بصورت  $S_n = \frac{n(n-3)}{4}$  است. مجموع جمله های از این دنباله که از جمله بیست و نهم شروع می شود و بیستم ختم می شوند، کدام است؟

- ۱) ۱۳۲ ۲) ۱۴۵ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۵۴

۱۶ دنباله هندسی  $1, \frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \dots$  غیر متوالی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

- ۱)  $\frac{21}{32}$  ۲)  $\frac{11}{16}$  ۳)  $\frac{1}{8}$  ۴)  $\frac{23}{16}$

۱۷ اگر  $n(A-B) = 3n(A \cap B)$  و  $n(B) = 2n(A \cap B)$  باشد حاصل  $\frac{n(A \cap B)}{n(A \cup B)}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{4}$  ۲) ۱ ۳)  $\frac{1}{8}$  ۴)  $\frac{1}{16}$

۱۸ اگر  $n(A) + n(B) = 114$  و  $n(A') + n(B) = 7$ ،  $U$  مجموعه مرجع باشد، آنگاه  $U$  چند زیر مجموعه دارد؟

- ۱)  $2^8$  ۲)  $2^7$  ۳)  $2^6$  ۴)  $2^5$

