اژدهای دوم

شکار اژدها

فصل دوم (مثلثات)

سید امیر مؤید

Telegram: @XY_Riazi

ارائه درسنامه های فصل به فصل و بیان اشتباهات متداول

Instageram: @XY_Riazi

تمرینات و تستهای آموزشی، تمرینی و ارزیابی

تست های آزمون های بین المللی، کنکور داخل و خارج کشور

VERSION DH 9.7

I ♥ MATH

ریاضی دهم

مثلثات:

- نسبت های مثلثاتی
- دایره مثلثاتی
- رابطه بین نسبت های مثلثاتی

@XY_Riazi

مقدمه ای کوتاه

پس از حدود ۱۰ سال تدریس ریاضی و دروس مهندسی عمران و معماری در دانشگاه و مدارس و آموزشگاه های برتر و شناخت نقاط ضعف و قوت دانش آموزان کنکوری در درس ریاضی، تصمیم گرفتم با تغییر کتاب های درسی جزوه ای کامل و جامع برای دانش آموزان عزیزم گردآوری نمایم. از آنجا که همواره به برابری آموزشی در کشور عزیزمان ایران اعتقاد داشتم مصمم شدم این جزوه را که انشالله به زودی به کتاب تبدیل خواهد شد از طریق فضای مجازی در دسترس تمام دانش آموزان علاقمند کشورم قرار بدهم.

افتخار من تربیت و همراهی شاگردانی با رتبه های برتر کنکور و همچنین دانشجویانی قوی و تحلیلگر است که همه آنها را اکنون دوستان خود می دانم. امروز نیز هرکسی از این مکتوب استفاده نماید به گروه بزرگ دوستان من اضافه خواهد شد. شما در انتشار و استفاده از این جزوه آزادید چه با نام و چه بی نام و هیچ و هیچ حقی بر دوش شما نیست...

در صورتی که هرگونه ابهامی در جزوه مشاهده گردید میتوانید با شماره زیر تماس گرفته و آنرا مطرح نمایید

هرگز فراموش نکنید که شما میتوانید، فقط باید با تمام وجود بخواهید...

سیدامیر میرموید

تابستان ۱۳۹۷

Telegram: @XY_Riazi

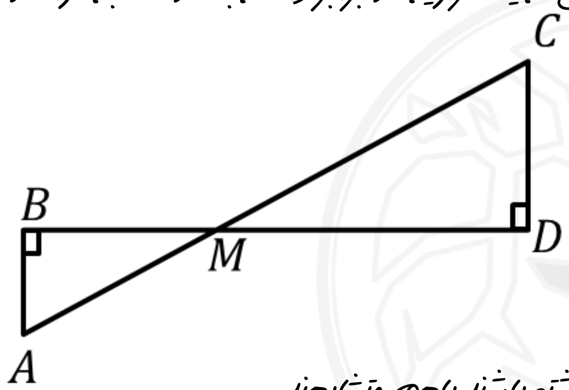
۰۹۱۱-۴۳۲-۲۴۲۲

بخش اول: یادآوری تشابه مثلث ها

قانون: چند ضلعی هایی که زاویه های متناظر آنها برابر باشد را متشابه می گویند.

اصلاحیه اول قانون: مثلث هایی که دو زاویه یکسان داشته باشند را متشابه می گویند. (چون مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است و زاویه سوم خودبه خود مساوی خواهد بود)

اصلاحیه دوم قانون: مثلث های قائم الزاویه در صورتی که یک زاویه تند برابر داشته باشند متشابه خواهند بود (چون همیشه یک زاویه ۹۰ درجه مساوی دارند)



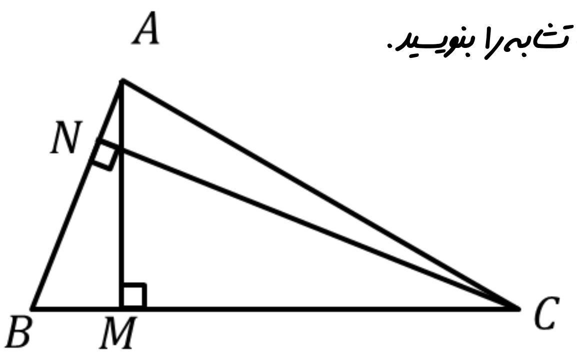
بنابراین هر دو مثلث قائم الزاویه که یک زاویه تند مساوی داشته باشند باهم متشابهند.

نکته: در مثلث های متشابه همه ضلع های مثلث بزرگ تقسیم بر ضلع های متناظر در مثلث کوچکتر عدد ثابتی را بدست می دهند که به این عدد نسبت تشابه می گویند.

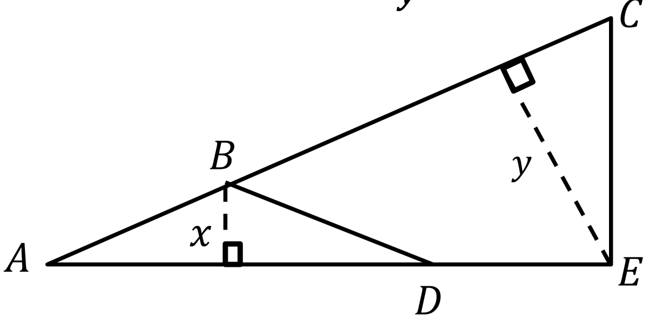
$$\frac{\text{اضلاع شکل بزرگ}}{\text{اضلاع شکل کوچک}} = \frac{CD}{AB} = \frac{CM}{AM} = \frac{MD}{MB}$$

نکته: ضلع های روبه رو به زاویه های مساوی را باید در یک کسر قرار داد.

مثال ۱: نشان دهید دو مثلث $\overset{\Delta}{ABM}$ و $\overset{\Delta}{BNC}$ متشابهند. نسبت تشابه را بنویسید.



تست ۱:در شکل زیر $AD = ۸$ ، $DE = ۴$ ، $AB = ۶$ و $BC = ۱۰$. نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟ (تجربی ۸۵)



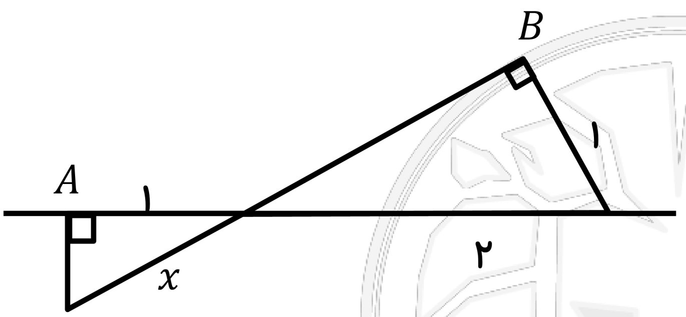
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۵}{۹}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

تست ۲: در شکل مقابل دو زاویه $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ قائمه اند. مقدار x چقدر است؟ (ریاضی ۹۱)



۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$

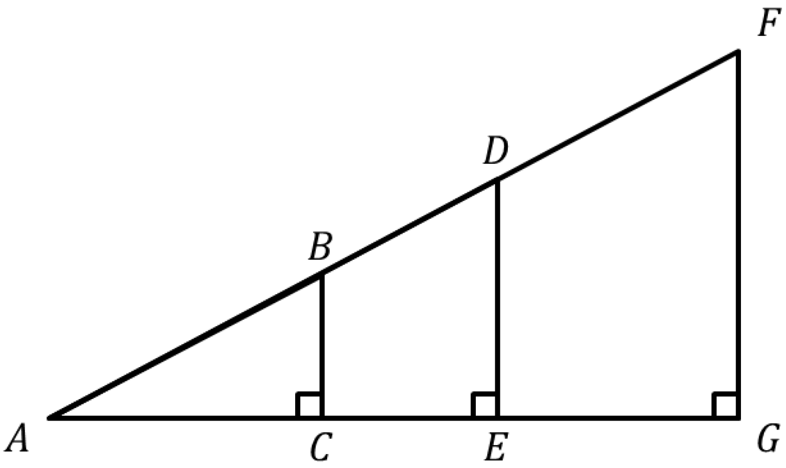
۲) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

نسبت‌های مثلثاتی

دریافتیم در دو مثلث قائم الزاویه برابری تنها یک زاویه حاده از مثلث اولی با یک زاویه حاده از مثلث دومی برای تشابه دو مثلث کفایت می کند. بنابراین در شکل زیر مثلث های قائم الزاویه ای که در راس مشترکند متشابه هستند. حال اگر نسبت تشابه را در این مثلث ها بنویسیم خواهیم داشت:

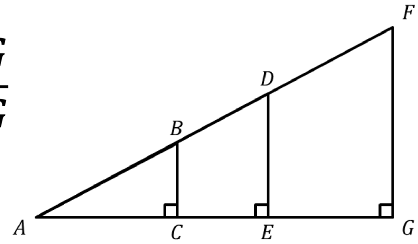


$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG}$$

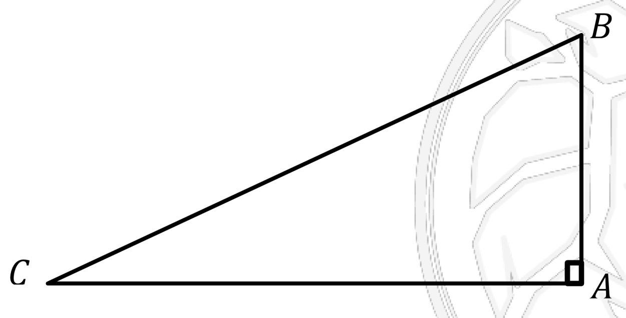
۱- تانژانت

برای یک زاویه ثابت مثل A در مثلث قائم الزاویه با افزایش طول ضلع مقابل و ضلع مجاور، نسبت آنها ثابت باقی می‌ماند. این نسبت ثابت برای هر زاویه دیگر هم ثابت است و به آن تانژانت می‌گویند

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه}} = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG}$$



مثال ۲: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ اگر $\tan \hat{B} = ۴$ و $AC = ۹$ ، آنگاه اندازه وتر BC چقدر است؟



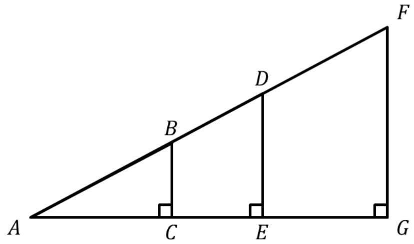
مثال ۳: اگر در مثال بالا رابطه $\tan^{۲} \hat{B} = (۲ - \tan \hat{B})^{۲}$ برقرار باشد، آنگاه اندازه وتر BC چقدر است؟

نکته سرعتی: در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به ضلع a وتر می‌شود : $\sqrt{۲}a$

هشدار: باید دقت کنیم که $\tan x^{۲}$ و $\tan^{۲} x$ بسیار با هم متفاوت هستند.

۲-کتانژانت

در شکل قبل مثلث های قائم الزاویه ای که در راس مشترکند متشابه بودند. حال اگر نسبت تشابه را در این مثلث ها بنویسیم خواهیم داشت:

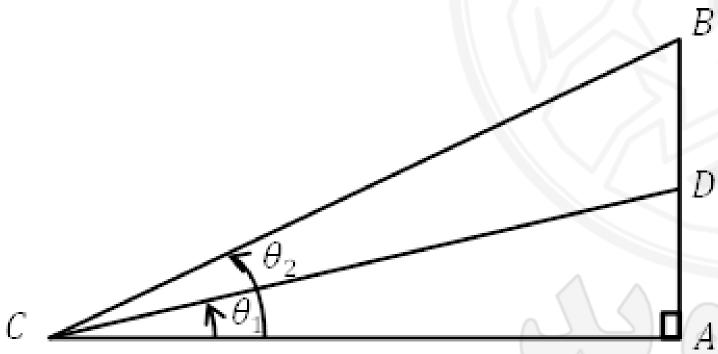


$$\cot \widehat{A} = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه}}{\text{طول ضلع مقابل به زوایه}} = \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{DE} = \frac{AG}{FG}$$

نکته: همانطور که مشاهده می شود کتانژانت معکوس تانژانت است

$$\cot \widehat{A} = \frac{۱}{\tan \widehat{A}}$$

چند نکته در مورد تانژانت



با توجه به شکل مقابل:

نکته ۱: با افزایش یک زاویه حاده تانژانت زاویه افزایش می یابد.

نکته ۲: اگر زاویه‌ای به صفر نزدیک شود تانژانت آن به صفر نزدیک می شود و در نهایت تانژانت صفر درجه صفر می شود.

نکته ۳: اگر زاویه ای به ۹۰ درجه نزدیک شود تانژانت آن به سمت بینهایت میل میکند و در نهایت تانژانت ۹۰ درجه تعریف نشده است.

چند نکته در مورد کتانژانت

با توجه به شکل بالا:

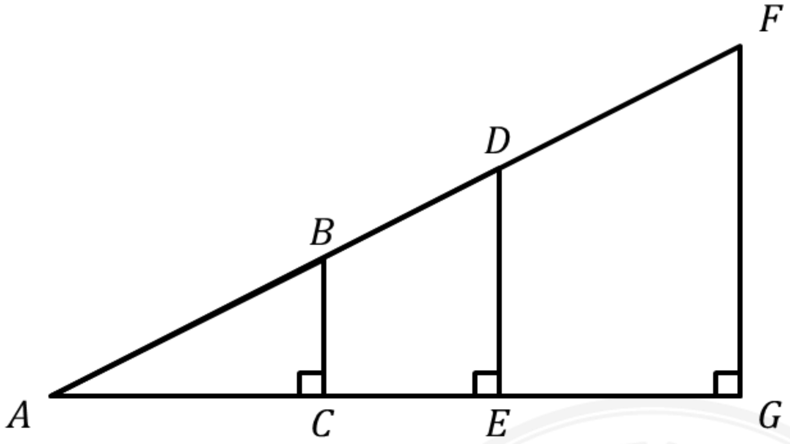
نکته ۱: با افزایش یک زاویه حاده کتانژانت زاویه کاهش می یابد.

نکته ۲: اگر زاویه ای به ۹۰ درجه نزدیک شود کتانژانت آن به سمت صفر نزدیک می شود و در نهایت کتانژانت ۹۰ درجه صفر است.

نکته ۳: اگر زاویه ای به صفر نزدیک شود کتانژانت آن به بینهایت نزدیک می شود و در نهایت تانژانت صفر درجه تعریف نشده می شود.

۴- کسینوس

در شکل زیر مثلث های قائم الزاویه ای که در راس مشترکند متشابه هستند. حال اگر نسبت تشابه وتر را در این مثلث ها بنویسیم خواهیم داشت:

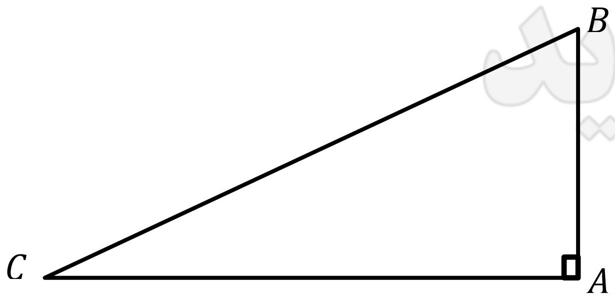


$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AF}$$

بنابراین نتیجه می گیریم برای یک زاویه ثابت مثل **A** در مثلث قائم الزاویه با افزایش طول ضلع وتر و ضلع مجاور، نسبت آنها ثابت باقی می ماند. این نسبت ثابت برای هر زاویه دیگر هم ثابت است و به آن کسینوس می گویند

$$\cos \widehat{A} = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه}}{\text{طول وتر}} = \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AF}$$

مثال ۴: در مثلث قائم الزاویه $\overset{\Delta}{ABC}$ اگر $AC = ۳AB$ ، آنگاه اندازه $\cos \widehat{B}$ چقدر است؟



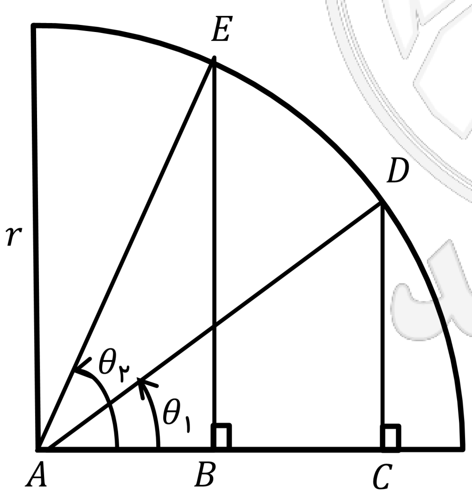
۴- سینوس

در شکل قبل مثلث های قائم الزاویه ای که در راس مشترکند متشابه هستند. حال اگر نسبت تشابه وتر را در این مثلث ها بنویسیم نتیجه می گیریم برای یک زاویه ثابت مثل **A** در مثلث قائم الزاویه با افزایش طول ضلع وتر و ضلع مقابل، نسبت آنها ثابت باقی می ماند. این نسبت ثابت برای هر زاویه دیگر هم ثابت است و به آن سینوس می گویند

$$\sin\hat{A}=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه}}{\text{طول وتر}}=\frac{BC}{AB}=\frac{DE}{AD}=\frac{FG}{AF}$$

نکته: همانطور که مشاهده می شود کتانژانت معکوس تانژانت است

$$\cot\hat{A}=\frac{\cos\hat{A}}{\sin\hat{A}}\qquad\qquad \tan\hat{A}=\frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}}$$



چند نکته در مورد کسینوس

با توجه به شکل مقابل

نکته ۱: با افزایش یک زاویه حاده کسینوس زاویه کاهش می یابد.

نکته ۲: اگر زاویه ای به صفر نزدیک شود کسینوس آن به یک نزدیک می شود و در نهایت کسینوس صفر درجه یک میشود.

نکته ۳: اگر زاویه ای به ۹۰ درجه نزدیک شود کسینوس آن به سمت صفر میل میکند و در نهایت کسینوس ۹۰ درجه صفر است.

چند نکته در مورد سینوس

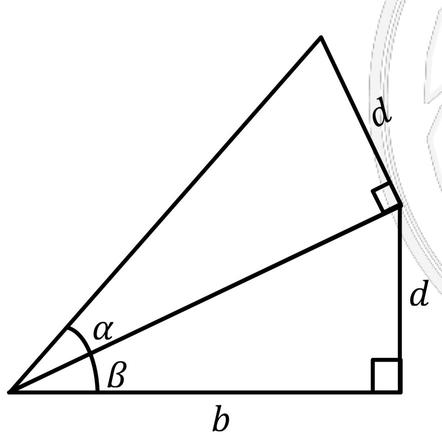
با توجه به شکل بالا

نکته ۱: با افزایش یک زاویه حاده سینوس زاویه افزایش می یابد.

نکته ۲: اگر زاویه ای به صفر نزدیک شود سینوس آن به صفر نزدیک می شود و در نهایت سینوس صفر درجه صفر می شود.

نکته ۳: اگر زاویه ای به ۹۰ درجه نزدیک شود سینوس آن به سمت یک میل میکند و در نهایت سینوس ۹۰ درجه یک است.

مثال ۵: در شکل زیر مقدار $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$ را بدست آورید

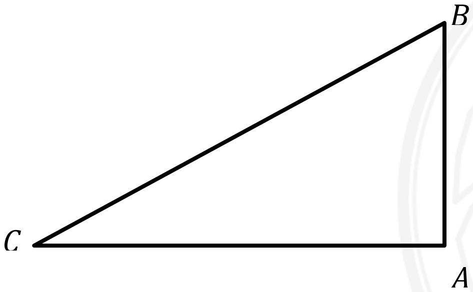


تمرین: در شکل بالا مقدار $\frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$ را بدست آورید

مثال ۶: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\left|\sin ۷ - \sin ۸\right| + \left|\sin ۸ + \sin ۷\right| - ۲\sin ۸ =$$

مثال ۷: در مثلث قائم الزاویه زیر اگر $\tan \hat{B} = \frac{۱}{۳}$ باشد مقدار $\tan \hat{C} + \sin \hat{B} + \cos \hat{A}$ را بدست آورید.



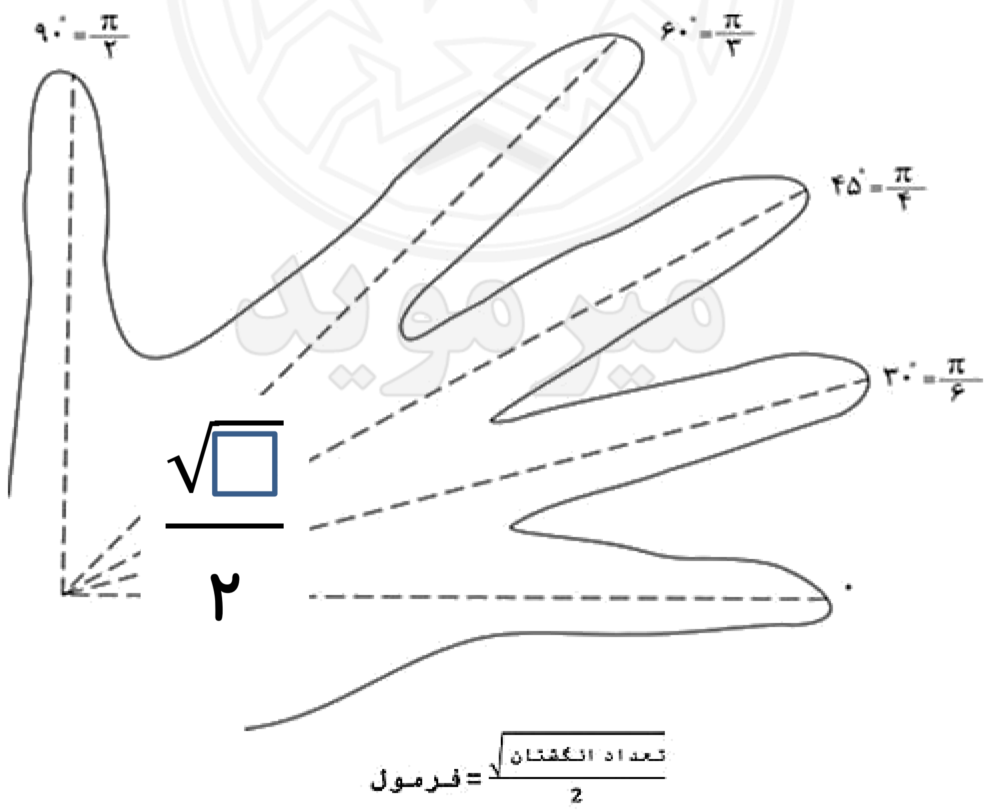
مثال ۸: نسبت های مثلثاتی زاویه ۶۰ درجه را به کمک یک مثلث متساوی الاضلاع بدست آورید.

جدول نسبتهای مثلثاتی (مثل جدول ضرب حفظ شود):

همانطور که میدانیم نسبت های مثلثاتی برای زاویه ها ثابت است پس برای استفاده از آن باید نسبتهای مثلثاتی چند زاویه مهم را یاد بگیریم

زاویه / نسبت	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
sin	۰				۱
cos					
tan					
cot					

نسبتهای مثلثاتی مهم



مثال ۹ : حاصل عبارت های زیر را بدست آورید

$$\left(\cos ۶۰ + \sin ۴۵\right)\left(\cos ۶۰ - \sin ۴۵\right) =$$

$$\frac{۲\cos^{۲} ۳۰ + \sin ۹۰}{\cos ۹۰ + ۵\sin^{۲} ۴۵} =$$

کاربرد نسبت های مثلثاتی مهم

الف) کاربرد در پیدا کردن ارتفاع و فاصله

در مواردی که لازم است فاصله یا ارتفاع از یک نقطه که زاویه آن مشخص است را بخواهیم از مثلثات استفاده می کنیم.

مثال ۱۰ : اگر پرندگان انگری بیرد از فاصله ۱۰ متری با زاویه ۳۰ درجه به سمت دیوار رها شوند و در بازی مجدد با زاویه ٦٠ درجه رها شوند محل برخورد با دیوار چقدر پایین می آید؟

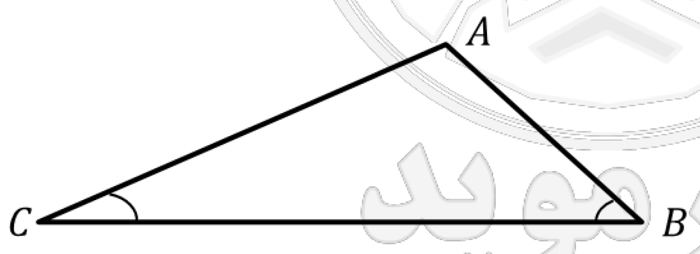
مثال ۱۱ : دو کشتی نوری را از برج مراقبت دریافت می کنند. اگر کشتی اول نور را با زاویه ۴۵ و کشتی دوم نور را با زاویه ۳۰ درجه نسبت به خط افق دریافت کند و فاصله کشتی اول از فانوس دریایی ۲ کیلومتر باشد فاصله کشتی دوم از فانوس دریایی چقدر است؟

تمرین: دو کشتی نوری را از برج مراقبت دریافت می کنند. اگر کشتی اول نور را با زاویه ۶۰ و کشتی دوم نور را با زاویه ۳۰ درجه نسبت به خط افق دریافت کند و فاصله کشتی اول از فانوس ۲ کیلومتر باشد فاصله کشتی دوم از کشتی اول چقدر است؟

ب) بدست آوردن مساحت

۱) مساحت مثلث با استفاده از سینوس

مساحت یک مثلث را می توانستید با نصف ضرب قاعده و ارتفاع آن بدست آوریم اما اکنون می توان با استفاده از دو ضلع و سینوس زاویه بین آنها آنرا بدست آورد



$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin A$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times BC \times \sin B$$

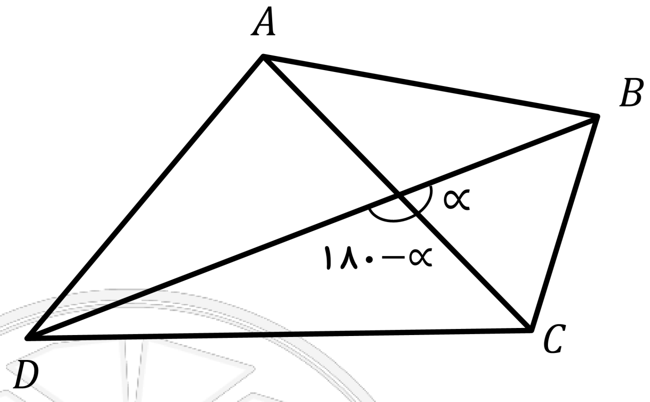
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} CB \times AC \times \sin C$$

۲)مساحت چهارضلعی بااستفاده‌ازسینوس

مساحت چهارضلعی ها را می توانستید با قاعده و ارتفاع و اضلاع آن بدست آوریم اما اکنون می توان با استفاده از دو قطر و سینوس زاویه بین آنها آنرا بدست آورد

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} DB \times AC \times \sin \propto$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} DB \times AC \times \sin (۱۸۰ - \propto)$$



نکته: نسبت های مثلثاتی هر زاویه با زاویه مکمل آن یکسان است و نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم جابجا است.

مثال ۱۲ : در یک مثلث با زاویه تند طول ضلع ٦ و ۲۲ می باشد. اگر مساحت مثلث $۳۳\sqrt{۲}$ باشد ، زاویه بین دو ضلع چند درجه است؟

تمرین: در متوازی الاضلاعی اندازه دو قطر ۱۲ و ۸ است و زاویه بین دو قطر برابر ۱۳۵ درجه می باشد. مساحت متوازی الاضلاع چقدر میباشد؟

ج) بدست آوردن شیب خط

یادآوری معادله خط:

همانطور که در سال گذشته اموختیم می توانیم با داشتن شیب خط (a) و یک نقطه از آن $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ می توانیم با فرمول زیر معادله خط را بنویسیم:

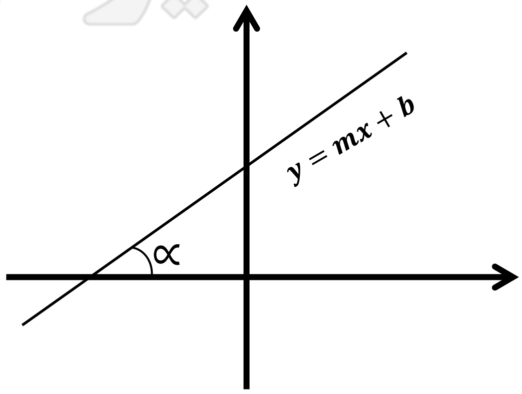
$$\left(y - y_1\right) = a\left(x - x_1\right)$$

با داشتن دو نقطه $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ هم می توان معادله خط را بدست آورد اما باید اول شیب را از رابطه زیر محاسبه نمود و سپس در معادله قبل قرار داد:

$$a = \frac{\left(y_2 - y_1\right)}{\left(x_2 - x_1\right)}$$

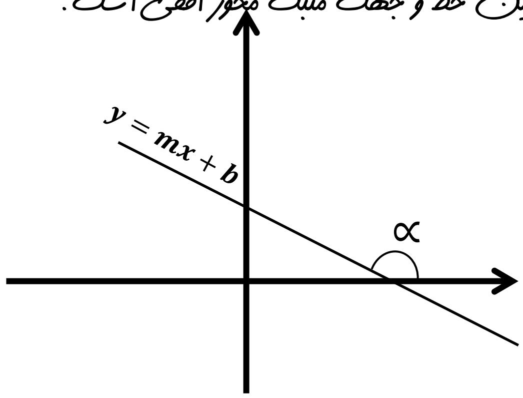
حال روش دیگری برای بدست اوردن شیب خط میتوان پیشنهاد کرد. شیب هر خط که با محور افقی (جهت مثبت محور طول ها) زاویه تند می سازد برابر با تانژانت زاویه بین خط و محور افقی است.

$$a = \tan \propto$$



نکته: شیب هر خط که با محور افقی (جهت مثبت محور طول ها) زاویه باز می سازد برابر با قرینه تانژانت مکمل زاویه بین خط و جهت مثبت محور افقی است.

$$a = -\tan(۱۸۰ - \propto)$$



نکته: خط هایی که دارای شیب مثبت هستند با محور افقی زاویه تند می سازند و خط هایی که دارای شیب منفی هستند با محور افقی زاویه باز می سازند.

نکته: خط هایی که دارای شیب صفر هستند با محور افقی زاویه صفر می سازند

نکته: خط هایی که شیب ندارند با محور افقی زاویه ۹۰ درجه می سازند.

مثال ۱۳: خط $y = \frac{x}{\sqrt{۳}} + ۲$ با جهت مثبت محور طول هاچه زاویه ای می سازد؟

تمرین: آیا خطی که با جهت مثبت محور طول ها زاویه ۱۵۰ درجه میسازد و از مبدا میگذرد، از نقطه P (۳و۱) عبور می کند؟

دایره مثلثاتی

میدانیم زاویه بخشی از یک دایره است. اما یک دایره را میتوان در جهت عقربه ساعت کشید یا خلاف عقربه ساعت آنرا رسم نمود. بنابراین میتوان از دایره بخشی را که زاویه های حتی بزرگتر از ۹۰ درجه که در مثلث قائم الزاویه نمیتوان نشان داد را جدا کرد.

زاویه مثبت: زاویه ای که انرا در خلاف جهت عقربه ساعت روی یک دایره رسم کنیم.

زاویه منفی: زاویه ای که آنرا در جهت عقربه ساعت روی یک دایره رسم کنیم.

نسبت های مثلثاتی روی دایره مثلثاتی

اگر روی محور های مختصات در جهت خلاف عقربه های ساعت یک دایره رسم کنیم که شعاع آن یک باشد به این دایره دایره مثلثاتی میگوییم.

در دایره مثلثاتی محور طول ها را محور کسینوس (cos) و محور عرض ها را محور سینوس (sin) میگوییم. حال اگر در سمت راست دایره یک خط مماس کنیم انرا محور تانژانت (tan) و اگر در بالای دایره یک خط مماس کنیم آنرا محور کتانژانت (cot) می گویند.

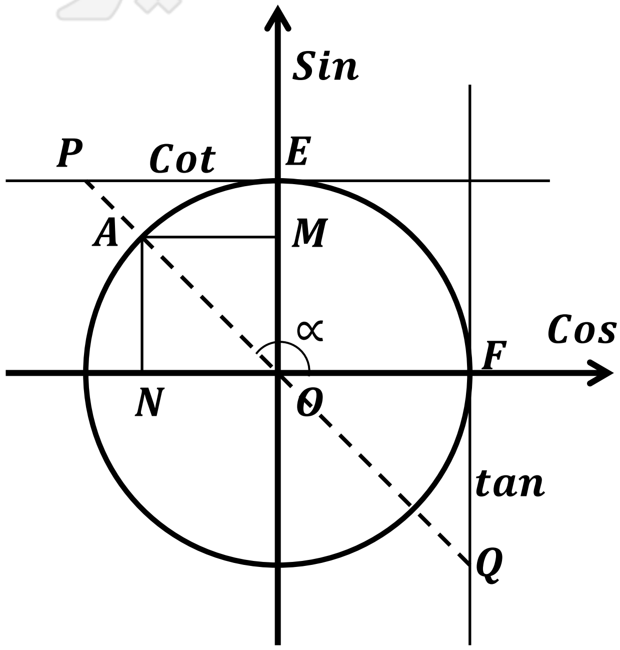
بنابراین در دایره مثلثاتی طول و عرض هر نقطه همان کسینوس و سینوس آن نقطه میباشند. که در هریک از چهار ناحیه مختصاتی علامت آنها خاص است.

$$\sin \propto = y = OM$$

$$\cos \propto = x = ON$$

$$\tan \propto = \frac{y}{x} = \frac{\sin \propto}{\cos \propto} = FQ$$

$$\cot \propto = \frac{x}{y} = \frac{\cos \propto}{\sin \propto} = EP$$



نکته: با توجه به شکل بالا میتوان نتیجه گرفت:

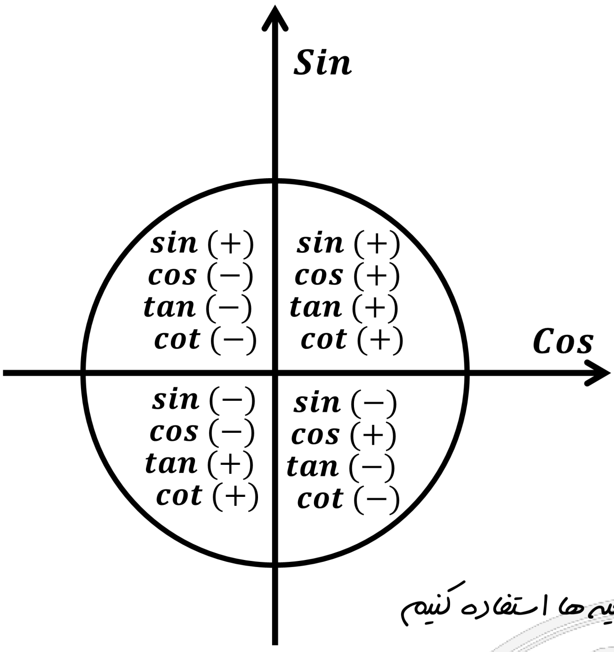
$$-۱ \leq \cos \propto \text{ و } \sin \propto \leq +۱$$

$$-\infty \leq \tan \propto \text{ و } \cot \propto \leq +\infty$$

مثال ۱۴: اگر زاویه θ دایره مثلثاتی را در نقطه $P(\frac{-۱}{\sqrt{۳}} \text{ و } \frac{۱}{\sqrt{۳}})$ قطع کند، نسبت های مثلثاتی مربوط به زاویه θ را بدست آورید.

تمرین: مختصات نقطه P روی دایره مختصاتی متناظر با زاویه ۱۲۰ درجه و ۳۱۵ درجه کدامست؟

تعیین علامت ناحیه های دایره مثلثاتی



همانطور که میدانیم علامت سینوس و کسینوس در نواحی چهارگانه با هم فرق میکند ولی در هر ناحیه مشخص برای هر زاویه ای علامت ثابت است.

دانستن علامت این نسبت ها در هر ناحیه مهم و ضروری می باشد.

می توانیم از " **هستک** " برای به یاد سپردن این ناحیه ها استفاده کنیم

ناحیه اول......همه مثبت........هـ

ناحیه دوم......سینوس مثبت..... س

ناحیه سوم.....تانژانت مثبت ..... ت

ناحیه چهارم....کسینوس مثبت... ک

مثال ۱۵: اگر $-60^\circ \le \theta \le 45^\circ$ باشد محدوده $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را بدست آورید.

تمرین: اگر $-30^\circ \le \theta \le 60^\circ$ باشد محدوده $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را بدست آورید.

روابط بین نسبت های مثلثاتی

نسبت های مثلثاتی سینوس، کسینوس ، تانژانت و کتانژانت همگی با هم ارتباط دارند و با داشتن یکی میتوانیم دیگری را پیدا کنیم. در این ارتباط ها رابطه سینوس و کسینوس باهم و تانژانت و کتانژانت باهم خیلی نزدیکتر است.

الف) رابطه سینوس و کسینوس

با داشتن سینوس یا کسینوس بلافاصله از این رابطه استفاده میکنیم

$$\sin^{۲}\theta + \cos^{۲}\theta = ۱$$

ب) رابطه تانژانت و کتانژانت

$$\tan\theta = \frac{۱}{\cot\theta}$$

ج) رابطه سینوس و کتانژانت

$$۱ + \cot^{۲}\theta = \frac{۱}{\sin^{۲}\theta}$$

د) رابطه کسینوس و تانژانت

$$۱ + \tan^{۲}\theta = \frac{۱}{\cos^{۲}\theta}$$

نکته بسیار مهم: در همه روابط بالا علامت نسبت های مثلثاتی از روی ناحیه ای که زاویه آنها قرار دارد بدست می آید.

مثال ۱۶: در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت های مثلثاتی را بدست آورید.

$$\cot\beta = \frac{5}{4} \qquad \sin\alpha = -\frac{2}{3}$$

اتحادهای مثلثاتی

هر رابطه‌ای که بین نسبت های مثلثاتی برای همه زاویه ها برقرار باشد را یک اتحاد مثلثاتی گویند. در بسیار از موارد با توجه به اتحاد های ساده تر میتوان به روابطی دست یافت که بسیار پیچیده تر هستند. اتحاد های ساده تر در قسمت روابط بین نسبتهای مثلثاتی اشاره شد.

مثال ۱۷: تساوی زیر را ثابت کنید.

$$1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

نسبت‌های مثلثاتی برای زاویه‌های معمولی:

گاهی اوقات زوایای داده شده جزء زوایای مهم نیستند اما میتوانیم با استفاده از جمع و تفریق چهار زاویه محوری ۹۰، ۱۸۰، ۲۷۰ و ۳۶۰ درجه آنها را به زاویه های مهم تبدیل کرده و علامت آنها را نیز با تعیین ناحیه قرارگیری مشخص نماییم.

باید دقت کنیم که استفاده از زوایای محوری ۱۸۰ و ۳۶۰ نسبت مثلثاتی را تغییر نمیدهد ولی کمک گرفتن از زوایای ۹۰ و ۲۷۰ نسبت مثلثاتی را وارونه میکند.

زاویه محوری ۱۸۰

$۱۸۰ - \alpha$	$۱۸۰ + \alpha$
$\sin(۱۸۰ - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin(۱۸۰ + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(۱۸۰ - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(۱۸۰ + \alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(۱۸۰ - \alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(۱۸۰ + \alpha) = \tan\alpha$
$\cot(۱۸۰ - \alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(۱۸۰ + \alpha) = \cot\alpha$

زاویه محوری ۳۶۰

$۳۶۰ - \alpha$	$۳۶۰ + \alpha$
$\sin(۳۶۰ - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin(۳۶۰ + \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(۳۶۰ - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(۳۶۰ + \alpha) = \cos\alpha$
$\tan(۳۶۰ - \alpha) = \tan\alpha$	$\tan(۳۶۰ + \alpha) = \tan\alpha$
$\cot(۳۶۰ - \alpha) = \cot\alpha$	$\cot(۳۶۰ + \alpha) = \cot\alpha$

زاویه محوری ۹۰

$۹۰+\alpha$	$۹۰-\alpha$
$\sin\left(۹۰+\alpha\right)=\cos\alpha$	$\sin\left(۹۰-\alpha\right)=\cos\alpha$
$\cos\left(۹۰+\alpha\right)=-\sin\alpha$	$\cos\left(۹۰-\alpha\right)=\sin\alpha$
$\tan\left(۹۰+\alpha\right)=-\cot\alpha$	$\tan\left(۹۰-\alpha\right)=\cot\alpha$
$\cot\left(۹۰+\alpha\right)=-\tan\alpha$	$\cot\left(۹۰-\alpha\right)=\tan\alpha$

زاویه محوری ۲۷۰

$۲۷۰+\alpha$	$۲۷۰-\alpha$
$\sin\left(۲۷۰+\alpha\right)=-\cos\alpha$	$\sin\left(۲۷۰-\alpha\right)=-\cos\alpha$
$\cos\left(۲۷۰+\alpha\right)=\sin\alpha$	$\cos\left(۲۷۰-\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\tan\left(۲۷۰+\alpha\right)=-\cot\alpha$	$\tan\left(۲۷۰-\alpha\right)=\cot\alpha$
$\cot\left(۲۷۰+\alpha\right)=-\tan\alpha$	$\cot\left(۲۷۰-\alpha\right)=\tan\alpha$

نسبت‌های مثلثاتی برای زاویه‌های منفی

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

مثال ۱۸: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$\cos 120 + \sin 300 - \tan 150 + 2\cot 315 =$$

تمرین: اگر $\tan 20 = 0/36$ حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{\cos 160 + 2\sin 200}{3\sin 70 - 2\cos 110} =$$

تست ۱۹: در متوازی الاضلاعی اندازه دو قطر ۱۲ و ۸ است. اگر مساحت آن ۲۷ باشد، زاویه تند بین دو قطر چند درجه است؟ (تجربی ۹۲)

الف) ۳۰ ب) ۴۵ ج) ۶۰ د) ۹۰

تست ۲۰: اگر $\tan\theta = 0/25$ باشد مقدار $\frac{\cos(270+\theta)-\cos(180+\theta)}{\sin(180-\theta)-\sin(180+\theta)}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

الف) ۲- ب) ۱/۲ ج) ۲ د) ۳

تست ۲۱: حاصل عبارت $\frac{\cos 285-\sin 255}{-\cos 105-\sin 105}$ با فرض $\tan 15 = 0/28$، کدام است؟ (تجربی ۹۴)

الف) $-\frac{16}{9}$ ب) $-\frac{9}{16}$ ج) $\frac{9}{16}$ د) $\frac{16}{9}$

تست سایر گروه‌های آزمون سراسری

تست ۶: AH ارتفاع مثلث قائم الزاویه ABC ( ) و HK ارتفاع مثلث AHB می‌باشد. کدام دو مثلث متشابه نیستند؟ (کنکور سراسری)

الف) AKC , ABC   ب) AHC , AHB   ج) AHK , BHK   د) AKC , ABH

تست ۷: در مثلث قائم الزاویه ABC داریم $\widehat{A}=۹۰^\circ$ و $AB = ۲AC$. مقدار $\sin\widehat{B}$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

الف) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ب) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ج) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ د) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

تست ۸: در مثلث قائم الزاویه ABC زاویه A قائمه و $\tan\widehat{C} = \frac{۵}{۱۲}$ است. مقدار $\cos\widehat{A} + \cos\widehat{B} + \cos\widehat{C}$ برابر است با؟ (کنکور سراسری)

الف) $\frac{۳۰}{۱۳}$ ب) $\frac{۱۷}{۱۳}$ ج) $\frac{۷}{۱۳}$ د) $\frac{۱۲}{۱۳}$

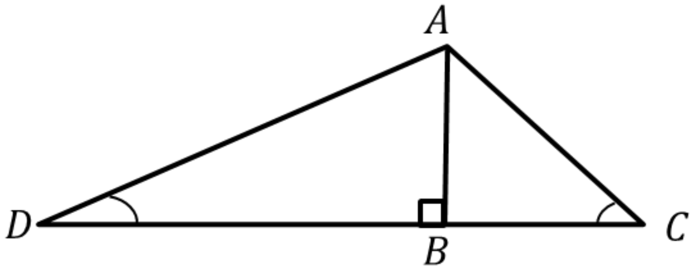
تست ۹: حاصل $\sin^۲ ۳۰^\circ + \cos ۶۰^\circ - \sin ۹۰^\circ$ برابر کدام است؟ (کنکور سراسری)

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) ۴   ج) $-\frac{۱}{۴}$ د) $-\frac{۱}{۲}$

تست ۱۰: حاصل $۱ + \cot^۲ ۶۰^\circ$ برابر کدام است؟ (کنکور سراسری)

الف) $۱ + \tan^۲ ۴۵^\circ$ ب) $۱ - \tan^۲ ۳۰^\circ$ ج) $۱ + \tan^۲ ۳۰^\circ$ د) $۲ + \tan^۲ ۴۵^\circ$

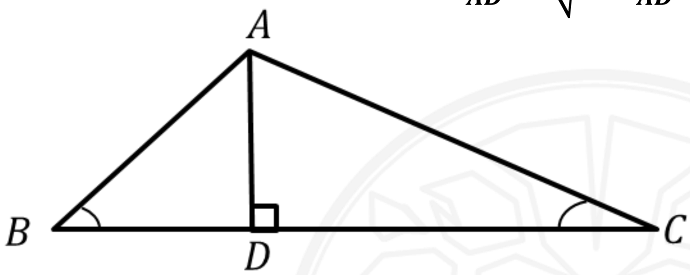
تست۱۱: در شکل، $AD = \sqrt{۲}\,AB$ ، $AB = \sqrt{۳}$ و $AC = ۲\,BC = ۲$ ، اندازه زاویه $D\hat{A}C$ چند درجه است؟ (کنکور سراسری)



الف) ۱۰۵ ب) ۱۳۵

ج) ۱۲۰ د) ۷۵

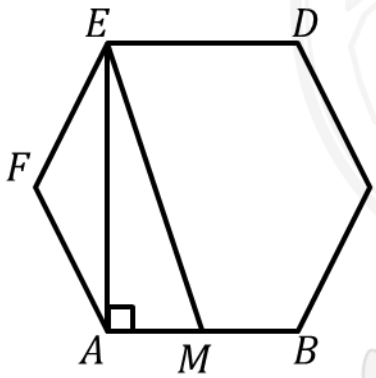
تست۱۲: در شکل زیر $\frac{CD}{AD} = \sqrt{۳}$ ، $\frac{AC}{AD} = ۲$ و $\frac{AB}{AD} = \sqrt{۲}$ می باشد. زاویه $B\hat{A}C$ چندبرابر زاویه $A\hat{C}D$ میباشد ؟ (کنکور سراسری)



الف) ۳ ب) ۲

ج) $\frac{۷}{۳}$ د) $\frac{۷}{۲}$

تست۱۳: در شکل زیر اندازه ضلع شش ضلعی منتظم برابر ۲۰ و M وسط AB می باشد. اندازه مساحت مثلث AME کدام است ؟ (کنکور سراسری)



الف) $۴۰۰\sqrt{۳}$ ب) $۲۰۰\sqrt{۳}$

ج) $۳۰۰\sqrt{۳}$ د) $۱۰۰\sqrt{۳}$

تست۱۴: اگر $۲\cos(۳x) + ۱ = m$ و $|x| \leq ۲۰^\circ$ ، مقادیر m در کدام بازه است؟ (کنکور سراسری)

الف) $[۱\,,۲)$ ب) $(۱\,,۲]$ ج) $[۲\,,۳)$ د) $(۲\,,۳]$

تست۱۵: اگر $-۲۰^\circ \leq x \leq ۲۰^\circ$ و $\cos(۳x) = \frac{m-۱}{۲}$ و ، مقادیر m در کدام فاصله است؟ (کنکور سراسری)

الف) $(۱\,,۲]$ ب) $(۰\,,۲]$ ج) $(۲\,,۳]$ د) $[۳\,,۴)$

تست: بافرض $180^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$ و $\tan \alpha = \frac{2}{m-1}$ و ، حدود تغییرات m کدامست؟ (کنکور سراسری)

الف) $m<-1$ ب) $m<1$ ج) $-1<m<1$ د) $-2<m<-1$

تست۱۶: بافرض $150^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$ و $\sin x = \frac{3-m^2}{3+m^2}$ و ، مقادیر m درکدام فاصله است؟ (کنکور سراسری)

الف) $|m|<\sqrt{3}$ ب) $|m|<\sqrt{2}$ ج) $|m|<1$ د) $|m|<\frac{1}{2}$

تست۱۷: بافرض $108^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$ و $\sin x = \frac{m}{2}$ و ، حدود m کدام است؟ (کنکور سراسری)

الف) $m\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ ب) $m>\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) $\sqrt{2}<m\leq 2$ د) $1\leq m<\sqrt{2}$

تست۱۸: اگر $1-\cos\theta=\frac{5}{3}$ و $\tan\theta\cos\theta>0$ ، انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی است؟ (کنکور سراسری)

الف) اول ب) دوم ج) سوم د) چهارم

تست۱۹: اگر $\sin\theta\cos\theta>0$ و $\tan\theta\cos\theta<0$ ، انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی است؟ (کنکور سراسری)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

تست۲۰: اگر $a\in R-\{0\}$ و $\cos x=\sqrt{\frac{\cot x}{\cot x-a^2}}$ ، انتهای کمان x در کدام ربع مثلثاتی است؟ (کنکور سراسری)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

تست۲۱: در مثلث ABC رابطه $\tan(B+30)\tan(C+30)=1$ برقرار است. آنگاه: (کنکور سراسری)

۱) $\angle A=150^\circ$ ۲) $\angle A=120^\circ$ ۳) $\angle A=60^\circ$ ۴) $\angle A=30^\circ$

تست۲۲: حاصل عبارت $\tan^2\theta\cos^2\theta+\cot^2\theta\sin^2\theta$ برابراست با: (کنکور سراسری)

۱) ۱ ۲) $\cos^2\theta$ ۳) $\sin^2\theta$ ۴) $\tan^2\theta$

تست۲۳: حاصل عبارت $\cos\theta\,(\cos\theta + \sin\theta\tan\theta)$ برابراست با: (کنکور سراسری)

۱) $\cos^{2}\theta$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\sin^{2}\theta$

تست۲۴: حاصل عبارت $(1 - \cos\theta)(1 + \sin\theta\cot\theta) - \tan\theta\cot\theta$ برابراست با: (کنکور سراسری)

۱) $\sin^{2}\theta$ ۲) $-\sin^{2}\theta$ ۳) $\cos^{2}\theta$ ۴) $-\cos^{2}\theta$

تست۲۵: حاصل عبارت $\cos^{2}\theta - \sin^{2}\theta$ با کدام برابر نیست: (کنکور سراسری)

۱) $2\sin\theta\cos\theta - 1$ ۲) $1 - 2\sin^{2}\theta$ ۳) $2\cos^{2}\theta - 1$ ۴) $\cos^{4}\theta - \sin^{4}\theta$

تست۲۶: حاصل عبارت $\cos^{2}\theta\,(1 + 2\tan\theta) + (\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$ کدامست: (کنکور سراسری)

۱) -1 ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

تست۲۷: حاصل عبارت $\left(\frac{1}{\cos\theta} + 1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)$ کدامست: (کنکور سراسری)

۱) $\tan^{2}\theta$ ۲) $\cot^{2}\theta$ ۳) $\frac{1}{\sin^{2}\theta}$ ۴) $\frac{1}{\cos^{2}\theta}$

تست۲۸: ساده شده عبارت $(1-\sin^{2}\theta)(1-\tan^{2}\theta)$ کدامست: (کنکور سراسری)

۱) $2\cot^{2}\theta$ ۲) $2\tan^{2}\theta$ ۳) $1-2\cos^{2}\theta$ ۴) $1-2\sin^{2}\theta$

تست۲۹: حاصل عبارت $(\sin\theta + \cos\theta)^{2} - 2\tan\theta\cos^{2}\theta$ کدامست: (کنکور سراسری)

۱) $2\cot^{2}\theta$ ۲) $2\tan^{2}\theta$ ۳) $1-2\cos^{2}\theta$ ۴) $1-2\sin^{2}\theta$

تست۳۰: اگر $\sin x + \tan x > 0$ و $\frac{1}{\cos x} - \sin x\tan x < 0$ انتهای کمان x در کدام ناحیه است: (کنکور سراسری)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

تست۳۱: حاصل عبارت $(1 - \sin^{2}\theta)\left(1 + \frac{1}{\cos^{2}\theta}\right) - (1 - \cos\theta)^{2}$ کدامست: (کنکور سراسری)

۱) $\sin^{2}\theta$ ۲) $\cos^{2}\theta$ ۳) $-\cos^{2}\theta$ ۴) $2\cos\theta$

☐ **تست۳۲:** حاصل عبارت $\frac{\sin^۴\theta+\cos^۴\theta}{\sin^۲\theta\cos^۲\theta}-(\tan\theta+\cot\theta)^۲$ کدامست: (کنکور سراسری)

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) صفر

☐ **تست۳۳:** اگر $\tan x=\frac{۳}{۴}$ باشد، حاصل $A=\frac{۴}{\cos x}-\frac{۳}{\sin x}$ کدامست: (کنکور سراسری)

۱) صفر ۲) ۱- ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

☐ **تست۳۴:** در صورتی که $\frac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{۳}{۲}$ مقدار $\tan\theta$ کدامست: (کنکور سراسری)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

☐ **تست۳۵:** حاصل عبارت $\frac{\tan\theta}{۱+\tan^۲\theta}$ کدامست: (کنکور سراسری)

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) صفر

☐ **تست۳۶:** حاصل عبارت $\left(۱+\tan^۲\theta\right)\left(1-\sin^۲\theta\right)$ کدامست: (کنکور سراسری)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\cos^۲\theta$ ۴) $\cot^۲\theta$

☐ **تست۳۷:** اگر $\tan x=-\frac{۱}{۲}$ و $\cos x<۰$ باشد، مقدار $\sin x$ کدامست: (کنکور سراسری)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

☐ **تست۳۸:** اگر $x=\frac{۲}{\sin\propto}$ و $y=۳\cot\propto$ باشد، مقدار $۹x^۲$ کدامست: (کنکور سراسری)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

☐ **تست۳۹:** اگر $\cos\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $\cos x<۰$ باشد، مقدار $\sin^۴\theta-\cos^۴\theta+\frac{۱}{۱+\tan^۲\theta}$ کدامست:

(کنکور سراسری)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

تست۴۰: به ازای کدام مقدار A، تساوی $\tan^{4}x-1=\dfrac{A}{\cos^{2}x}+\dfrac{1}{\cos^{4}x}$ یک اتحاد است؟ (کنکور سراسری)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

تست۴۱: مقدار عبارت $\cos\left(180^\circ-45^\circ\right)\sin\left(180^\circ+45^\circ\right)$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

تست۴۲: مقدار $\cos 20^\circ$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) $\sin 110^\circ$ ۲) $\cos 110^\circ$ ۳) $\sin 200^\circ$ ۴) $\cos 200^\circ$

تست۴۳: حاصل کدام گزینه با $\tan 10^\circ$ برابر است؟ (کنکور سراسری)

۱) $\tan -10^\circ$ ۲) $\cot 100^\circ$ ۳) $\tan 170^\circ$ ۴) $\tan 190^\circ$

تست: اگر $\sin\propto=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ و انتهای کمان $\propto$ در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد مقدار $\sin\left(270^\circ+\propto\right)$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

تست: مقدار عددی $\cos 315^\circ$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

تست: با فرض $\tan 35^\circ=2a-1$ حاصل $\dfrac{\sin 145^\circ-\sin 235^\circ}{\cos 325^\circ}$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) $2a$ ۲) $4a$ ۳) $2a-1$ ۴) $4a-2$

تست: اگر $\cot ۳۴^\circ = ۱/۵$ حاصل $\dfrac{۲\sin ۳۲۶^\circ - ۳\sin ۵۶^\circ}{\cos ۳۰۴^\circ}$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) $۲/۵$　　۲) ۲　　۳) -۱　　۴) $-۱/۵$

تست: اگر $\cot ۳۴^\circ = ۱/۵$ حاصل $\dfrac{۲\sin ۳۲۶^\circ - ۳\sin ۵۶^\circ}{\cos ۳۰۴^\circ}$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) $۲/۵$　　۲) ۲　　۳) -۱　　۴) $-۱/۵$

تست: اگر $\sin x = -۱$ حاصل $(\sin x + \cos x) + (\sin\frac{x}{۲} + \cos\frac{x}{۲})$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) ۰　　۲) -۱　　۳) ۱　　۴) ۲

تست: حاصل عبارت $\cos\left(۹۰^\circ + x\right) + \sin\left(۱۸۰^\circ + x\right) + \cos\left(۲۷۰^\circ + x\right) + \sin\left(۱۸۰^\circ - x\right)$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) ۰　　۲) -۱　　۳) ۱　　۴) ۲

تست: حاصل عبارت $\dfrac{۱}{\tan\left(۱۸۰^\circ - x\right)} \times \dfrac{\sin\left(۱۸۰^\circ - x\right)}{\cos\left(۳۶۰^\circ + x\right)} + \dfrac{\cos\left(۲۷۰^\circ + x\right)}{\sin\left(۹۰^\circ - x\right)}$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) ۰　　۲) -۱　　۳) ۱　　۴) ۲

تست: اگر $\cos x = \dfrac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$ و انتهای کمان x در ناحیه سوم دایره مثلثاتی باشد مقدار $\tan\left(۲۷۰^\circ - x\right)$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) -۳　　۲) $-\frac{۱}{۳}$　　۳) $\frac{۱}{۳}$　　۴) ۳

تست: اگر $\sin x + \dfrac{۱}{\sin x} = ۲$ باشد، مقدار $\sin^۲ x + \cos^۵ x$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) ۲　　۲) ۱　　۳) $۲-\sqrt{۲}$　　۴) $\sqrt{۲}-۱$