اژدهای دهم

شکار اژدها 10

فصل سوم (توان گویا و عبارت جبری)

سید امیر میر مؤید

ارائه درسنامه های فصل به فصل و بیان اشتباهات متداول

تمرینات و تستهای آموزشی، تمرینی و ارزیابی

تست های آزمون های بین المللی، کنکور داخل و خارج کشور

@XY_Riazi

VERSION DH 9.8

مقدمه ای کوتاه

پس از سالها تدریس ریاضی و دروس مهندسی عمران و معماری در دانشگاه ، و ریاضیات در مدارس و آموزشگاه های برتر و شناخت نقاط ضعف و قوت دانش آموزان کنکوری در درس ریاضی، تصمیم گرفتم با تغییر کتاب های درسی جزوه ای کامل و جامع برای دانش آموزان عزیزم گردآوری نمایم. از آنجا که همواره به برابری آموزشی در کشور عزیزمان ایران اعتقاد داشتم مصمم شدم این جزوه را که انشالله به زودی به کتاب تبدیل خواهد شد از طریق فضای مجازی در دسترس تمام دانش آموزان علاقمند کشورم قرار بدهم.

افتخار من تربیت و همراهی شاگردانی با رتبه های برتر کنکور و همچنین دانشجویانی قوی و تحلیلگر است که همه آنها را اکنون در پست های مدیریتی ، اجرایی مهندسی و پزشکی دوستان خود می دانم. امروز نیز هرکسی از این مکتوب استفاده نماید به گروه بزرگ دوستان من اضافه خواهد شد. شما در انتشار و استفاده از این جزوه آزادید چه با نام و چه بی نام و هیچ حقی بر دوش شما نیست...

تنها در صورتی که هرگونه ابهامی در جزوه مشاهده کردید، به تلگرام یا اینستاگرام شماره زیر پیام داده و آنرا مطرح نمایید و به من کمک کنید هر سال کاملتر از سال قبل باشم...

هرگز فراموش نکنید ترسوها همیشه سیاهپوش آرزوهای خود خواهند بود...

شجاعت مقدمه موفقیت است...

پس برای آرزوهایتان بجنگید...

سیدامیر میرموید

تابستان ۱۳۹۸

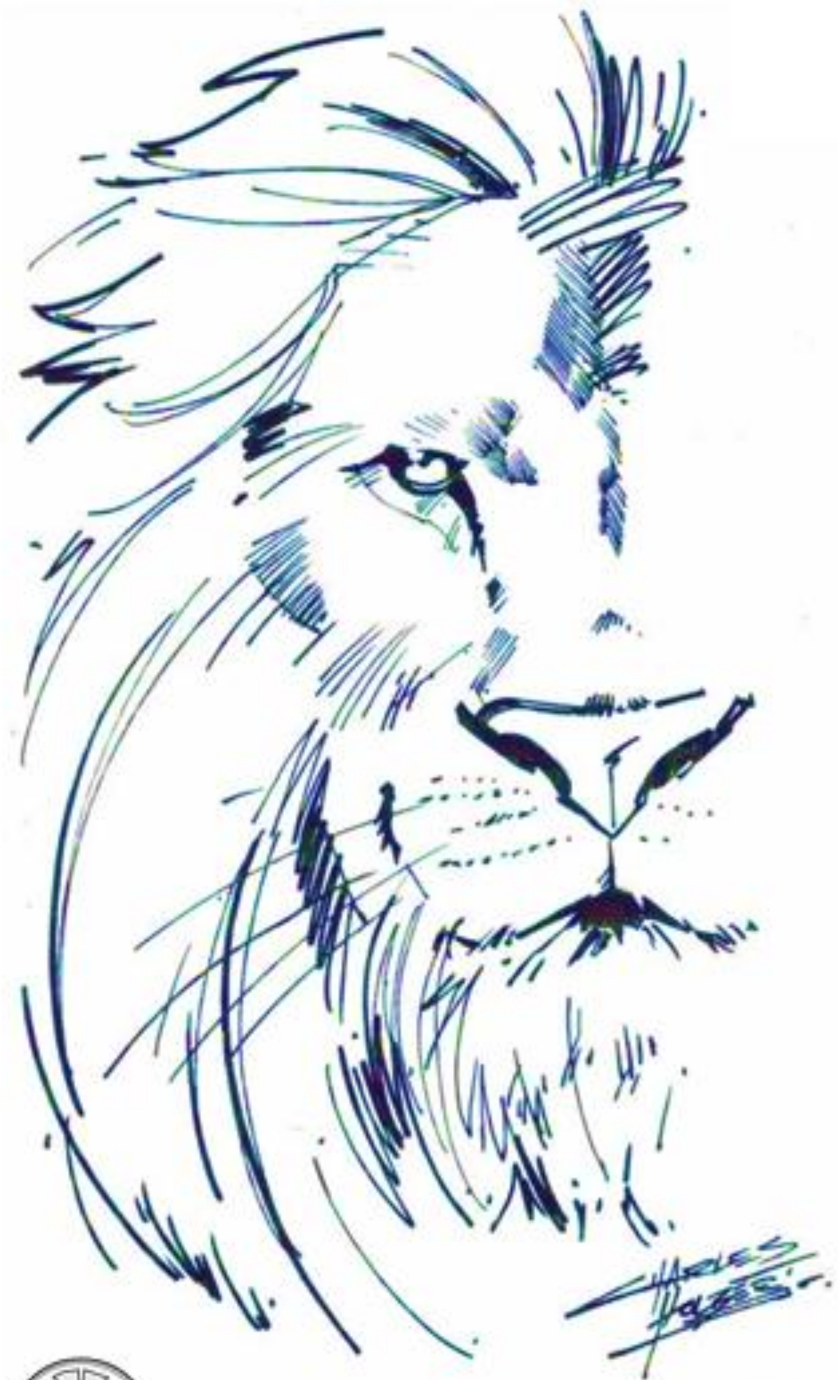
Telegram & instageram: @XY_Riazi

۰۹۱۱-۴۳۲-۲۴۲۲

I ♥ MATH

ریاضی دهم

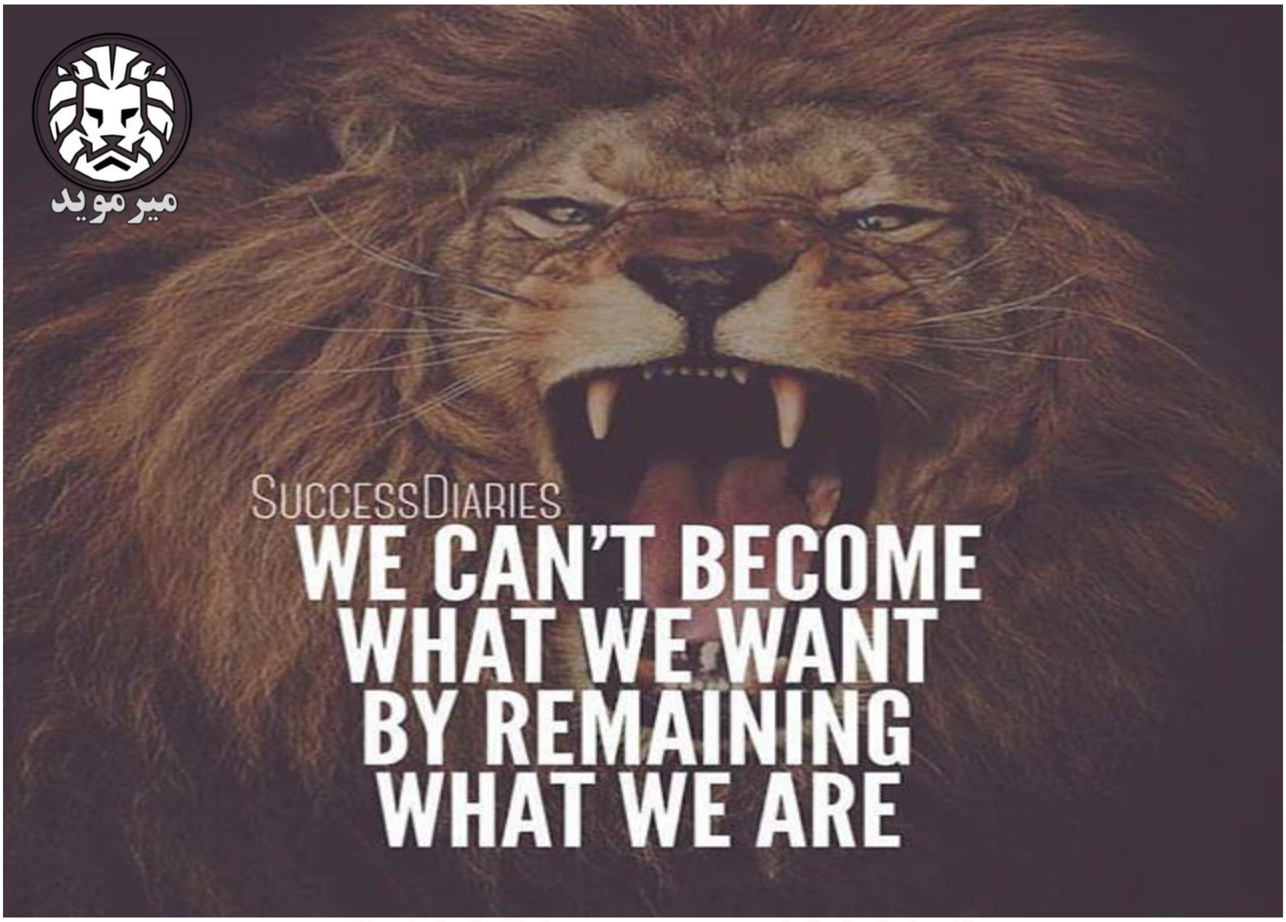
عباس سیاح



@XY_Riazi

توان و جبر:

- ریشه و توان
- ریشه n ام
- توان های گویا
- عبارت های جبری



معلم یک کودکستان به بچه های کلاس گفت که میخواهد با آنها بازی کند. او به آنها گفت که فردا هر کدام یک کیسه پلاستیکی بردارند و درون آن به تعداد آرزوهایی که فکر می کنید هرگز به آن نمی رسید، سیب زمینی بریزند و با خود به کودکستان بیاورند. فردا بچه ها با کیسه های پلاستیکی به کودکستان آمدند. در کیسه بعضی ها ۲ بعضی ها ۳، و بعضی ها ۵ سیب زمینی بود. معلم به بچه ها گفت: تا یک هفته هر کجا که می روند کیسه پلاستیکی را با خود ببرند.

روزها به همین ترتیب گذشت و کم کم بچه ها شروع کردند به شکایت از بوی سیب زمینی های گندیده. به علاوه، آنهایی که سیب زمینی بیشتری داشتند از حمل آن بار سنگین خسته شده بودند. پس از گذشت یک هفته بازی بالاخره تمام شد و بچه ها راحت شدند.

معلم از بچه ها پرسید: از اینکه یک هفته سیب زمینی ها را با خود حمل می کردید چه احساسی داشتید؟ بچه ها از اینکه مجبور بودند، سیب زمینی های بد بو و سنگین را همه جا با خود حمل کنند شکایت داشتند. آنگاه معلم منظور اصلی خود را از این بازی، این چنین توضیح داد: این درست شبیه وضعیتی است که شما یاس و نا امیدی را در دل خود نگه می دارید و همه جا با خود می برید. بوی بد ناامیدی قلب شما را فاسد می کند و شما آن را به همه جا همراه خود حمل می کنید. حالا که شما بوی بد سیب زمینی ها را فقط برای یک هفته نتوانستید تحمل کنید. پس چطور می خواهید بوی بد حسرت و ایکاش بیشتر تلاش میکردم را برای تمام عمر در دل خود تحمل کنید؟

واقعا تا اخر عمر قرار است همینطور زندگی کنید؟

با کوله باری از افکار پوسیده نسبت به توانایی خود و حسرت آرزوهای در دل مانده بخاطر ترس از شکست؟

بخش اول: ریشه و توان

یادآوری: در سال های گذشته با بخشی از قوانین مربوط به توان آشنا شدیم:

$۱^{۵۷} =$	$۱^n = ۱$
$۰^{۶۹} =$	$۰^n = ۱ \quad (n > ۰)$
$۱۰۲۳^{۰} =$	$a^{۰} = ۱ \quad (a \neq ۰)$
$۲^{-۱۵} =$	$a^{-n} = \frac{۱}{a^n} \quad (a \neq ۰)$
$۶^{۳} \times ۶^{۱۷} =$	$a^n \times a^m = a^{n+m}$
$۱۷^{۵} \times ۱۵^{۵} =$	$a^n \times b^n = (ab)^n$
$۳^{۱۰} \div ۳^{۷} =$	$a^n \div a^m = a^{n-m} \quad (a \neq ۰)$
$۲۰^{۱۰۰} \div ۱۵^{۱۰۰} =$	$a^n \div b^n = (\frac{a}{b})^n \quad (b \neq ۰)$
$۲^{۴} + ۳^{۴} \neq (۲+۳)^{۴}$	$a^n + b^n \neq (a+b)^n$
$۳^{۵} + ۳^{۵} + ۳^{۵} =$	$a^n + a^n + \cdots + a^n = a \times a^n = a^{n+۱}$
$(۱۷^{۵})^{۶} =$	$(a^n)^m = a^{nm}$
$(۴^{۲})^{۳} \neq ۴^{۲^{۳}}$	$(a^n)^m \neq a^{n^m}$

یادآوری: مهمترین چیز در قسمت توان تجزیه کردن اعداد است. پیش از هر کاری باید در قسمت توان و جذر اعداد را تا حد امکان تجزیه نمود.

$۵۰۰ =$

$۱۲۰ =$

مثال۱: حاصل عبارت های زیر را بصورت تواندار بدست آورید.

$$\frac{۱۰۰۰ \times ۱۵^{۲}}{۱۲۰ \times ۴۵^{۳}} =$$

$$\frac{۷^{۵} + ۷^{۵} + ۷^{۵} + ۷^{۵} + ۷^{۵} + ۷^{۵} + ۷^{۵}}{۱۴^{۵} \times ۳۲^{-۱}} =$$

نکته۱: یکی از مهمترین بی دقتی ها در بخش توان و رادیکال علامت آنهاست. پس بهتر است انرا برای همیشه با توان و فرجه فرد (انسان فردگرا) و توان و فرجه زوج (انسان های اجتماعی) به صورت زیر رفع کنیم:

$$\frac{(-۲)^{۵} \times (-۲)^{۲}}{-۲^{۴} \times -۲^{۳}} =$$

$$\frac{(-۲۷)^{۵} \times (-۹)^{۲}}{۳^{-۴} \times -۸۱^{۳}} =$$

$$\frac{\sqrt[۵]{(-۲)^{۵}} \times \sqrt{(-۲)^{۲}}}{\sqrt{۲^{-۲}} \times \sqrt[۳]{-۲^{۳}}} =$$

نکته۲: یکی از اشتباهات رایج در توان و رادیکال وارد کردن مستقیم توان به داخل پرانتز و یا خروج اعداد از رادیکال است که میتوانیم آنرا با اختلاف طبقاتی به صورت زیر حل نماییم

نکته۳: یکی از مهمترین قوانین رادیکال خارج کردن عدد از زیر آن است که از روش (نینجا فروتس) استفاده میکنیم. باید بدانیم در رادیکال ها ضرب و تقسیم خاصیت جدا شدن از هم در زیر رادیکال های جدا را دارند ولی در حضور حتی یک جمع و تفریق غیر از اینکه داخل پرانتز جدا باشند رادیکال ها قابل شکستن نیستند.

$$\sqrt{۲۵ \times (۶۴+۳۶)} =$$

$$\sqrt{(۱۶+۹) \times (۶۴+۳۶)} =$$

نکته۴: از این روش برای ساده کردن رادیکال ها میتوانیم استفاده کنیم. یعنی آنها را به صورت ضرب بزرگترین عدد مجذور ممکن و عددی دیگر مینویسیم و سپس هرکدام را که جذر دارند، جذر گرفته از رادیکال خارج میکنیم.

$$\sqrt{۴۰۰} =$$

$$\sqrt{۸۰} =$$

$$\sqrt{۰/۰۰۳۶} =$$

خروج وورود اعداد تواندار به رادیکال (فرار از زندان)

برای خارج کردن عدد از زندان رادیکال باید :

۱- ابتدا آنرا تجزیه کرد

۳-توان های کوچکتر از فرجه راه فرار ندارند .

۴- سپس توانهای بزرگتر از فرجه به عددهای بخشپذیر بر فرجه میشکنیم یا آنها را بر فرجه تقسیم می کنیم. خارج قسمت تقسیم از رادیکال به صورت توان خارج می شود و باقی مانده به صورت توان در رادیکال باقی می ماند.

نکته۵: اگر توان بر فرجه بخشپذیر باشند ، عدد با توان ساده شده از رادیکال خارج می شود

$$\sqrt[۳]{۱۴۴۰۰۰} = \sqrt[۳]{۵^{۳} \times ۲^{۷} \times ۳^{۲}} =$$

$$\sqrt[۴]{۲۵ \times ۱۵ \times ۷۲ \times ۶۴} =$$

ریشه زوج (زندان رادیکال):

هر عدد مثبت دارای دو ریشه با فرجه زوج می باشد که فقط علامت آنها متفاوت است. به عنوان مثال اگر $a^۲ = b$ در این صورت a و a− را ریشه دوم عدد b می نامیم. باید دقت کنیم ریشه دوم مثبت عدد عدد b را با نماد $\sqrt{b}$ (رادیکال) و ریشه دوم منفی عدد b را با نماد $-\sqrt{b}$ نشان میدهند.

مثال۲: ریشه چهارم عدد ۱۶ را بدست آورید.

مثال۳: مقدار عبارت $\sqrt{۱۶}$ چقدر می شود؟

مثال۴: مقدار x ، اگر عبارت $x^۲ = ۳۶$ باشد چقدر می شود؟

مقدار تقریبی یک رادیکال

برای آنکه بدانیم یک عدد زیر رادیکال بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد میتوانیم عددهای به توان فرجه را بنویسیم و بعد بیابیم که عدد زیر رادیکال بین جواب کدام دو عدد قرار دارد و سپس از کل عبارت رادیکال بگیریم.

مثال۵: اگر $۲۷ > x > ۸$ باشد آنگاه حدود $\sqrt{x}$ چقدر است؟

مثال۶: حدود $\sqrt{۳۰}$ چقدر است؟ حدود $\sqrt[۴]{۱۰۰}$ چقدر است؟ حدود $\sqrt[۳]{-۶۵}$ چقدر است؟

ریشه n ام (اصل و نسب و...)

اگر $a^n = b$ در این صورت a را ریشه n ام عدد b می نامیم. باید دقت کنیم اگر n زوج باشد دو ریشه داریم که ریشه زوج مثبت عدد b را با نماد $\sqrt[n]{b}$ (رادیکال) و ریشه دوم منفی عدد b را با نماد $-\sqrt[n]{b}$ نشان میدهند. و اگر n فرد باشد تنها یک ریشه دارد که $\sqrt[n]{b}$ می باشد.

$$a^n = b \Rightarrow \begin{cases} \text{فرد} \quad n, b \in R \ \Rightarrow \qquad b \text{ ام } n \text{ ریشه} = \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} = a \\ \text{زوج} \quad n, b > 0 \ \Rightarrow \quad b \text{ ام } n \text{ ریشه} = \pm\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} = |a| = \pm a \end{cases}$$

نکته۶: ریشه n ام یعنی عددی را بیابید که اگر n بار در خودش ضرب شود عدد زیر رادیکال شود. یقینا نمیتوان عددی پیدا کرد که زوج بار در خودش ضرب شود و جواب منفی شود بنابراین میگوییم عدد منفی زیر رادیکال فرجه زوج غیرممکن و تعریف نشده است.

نکته۷: در ریاضیات هرگز رادیکال فرجه زوج با عدد زیر منفی و همچنین کسر مخرج صفر دار پیدا نمی شود.

نکته۸: عدد های منفی ریشه زوج ندارند یعنی اگر n زوج باشد b حتما باید مثبت باشد.

n فرد باشد	n زوج باشد
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \quad (a, b \in R)$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \quad (a, b > 0)$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad (a, b \in R)$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad (a, b > 0)$
$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$	$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad (a > 0)$
$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[n]{a^n b} = \lvert a\rvert\sqrt[n]{b} \quad (b > 0)$

نکته۹: هر چیزی که از رادیکال فرجه زوج خارج می شود (مخصوصا متغیر حروف انگلیسی) باید داخل قدرمطلق خارج شود ولی فرجه فرد نیاز به قدرمطلق ندارد.

$$\sqrt[n]{b^n} \Rightarrow \begin{cases} \text{فرد} \quad n \Rightarrow \sqrt[n]{b^n} = b \\ \text{زوج} \ n \Rightarrow \sqrt[n]{b^n} = |b| \end{cases}$$

مثال۷: عبارت های زیر تا حد امکان ساده کنید.

$$\sqrt[۶]{(۴-\sqrt{۱۸})^۶} - ۳\sqrt[۷]{\left(\sqrt{۲}-۳\right)^۷} =$$

$$a, b < ۰ \quad , \quad \frac{\sqrt[۴]{(a+b)^۴}}{\sqrt[۵]{(a+b)^۵}} =$$

$$\sqrt[۶]{(-۴)^۶} - ۳\sqrt[۷]{(-۵)^۷} =$$

$$۳\left(\sqrt[۷]{-۱۲}\right)^۷ + ۵\left(\sqrt[۱۲]{۴}\right)^{۱۲} =$$

مثال۸: معادله زیر را حل کنید.

$$(x+۲)^۲ = ۲۵$$

$$۲ < \sqrt{x} < ۳$$

$$-۲ < \sqrt[۳]{x} < ۳$$

$$-۲ < \sqrt[۴]{x} < ۳$$

ضرب و تقسیم رادیکال ها

ضرب و تقسیم رادیکال ها نیاز به فرجه یکسان دارد که در مواردی قدرت هم فرجه کردن را داریم . . .

جمع و تفریق رادیکال ها

جمع و تفریق رادیکال نیاز به فرجه و زیر رادیکال یکسان دارد که پیش از جمع و تفریق تا حد امکان باید رادیکال ها را ساده نمود

توان گویا

در بعضی موارد میتوان رادیکال را به توان تبدیل کرد که به صورت زیر می باشد یعنی ترکیبی از قوانین اعداد تواندار و اعداد کسری

$a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$۵^{\frac{۱}{۴}} =$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$۷^{\frac{۵}{۹}} =$
$۰^{\frac{m}{n}} = ۰ \quad , \quad ۱^{\frac{m}{n}} = ۱$	$۰^{\frac{۱۱}{۵}} = \quad , \quad ۱^{\frac{۱۱}{۵}} =$
$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(\sqrt[۵]{۱۳})^{۱۱} =$
$a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}} \quad , \; k \neq ۰$	$a^{\frac{۲\times۱۱}{۲\times۵}} =$
$\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m} \, , \; k \neq ۰$	$\sqrt[۴\times۷]{a^{۴\times۱۳}} =$
$\sqrt[p]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}} = \sqrt[pmn]{a}$	$\sqrt[۳]{\sqrt[۷]{\sqrt[۵]{a}}} =$

مثال ۹: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt{64}} =$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt{4\sqrt{8}}} =$$

$$(\sqrt{18}-\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} \times (\sqrt{18}+\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} =$$

$$25^{0.16} \times 25^{0.09} =$$

$$3\sqrt[6]{5^2} + 5\sqrt[12]{4^2} =$$

مسائل ترکیبی توان و ریشه

در این نوع سوالات اولین مرحله تجزیه کردن اعداد است و سپس اگر چند رادیکال داخل هم داشتیم عدد ها را با رعایت قوانین ورود به رادیکال به داخل رادیکال میبریم تا در نهایت یک عدد داشته باشیم

مثال ۱۰: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$\frac{\sqrt[۳]{۶۴}\times\sqrt[۳]{۴\sqrt{۴}}}{\sqrt[۶]{۳۲}}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[۴]{8}\div\sqrt[8]{4}\right)\times\left(\sqrt[۳]{4\sqrt{4}}\right)^{\frac{۲}{۳}}}{\left(\sqrt{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}}=$$

مقایسه اعداد تواندار و رادیکالی (ورزشکاران... دلاوران... دوپینگیان...)

یک محور مثبت اعداد را میتوان به دو بخش تقسیم کرد

۱-بزرگتر از یک (ورزشکار)

۲-بین صفر تا یک (معتاد)

نکته کنکوری ۱۰: در حالت تساوی پایه ها توان بیشتر عدد بزرگتری میدهد و در حالت تساوی توان ها عددی که پایه بزرگتری دارد مقدار بیشتری دارد مگر اینکه :

الف) پایه ها بین صفر و یک باشد (اعداد معتاد)

ب) پس از ساده شدن پشت پرانتز هردو منفی باشد (بچه منفی)

در اینصورت جهت نامساوی عوض می شود.

مثال ۱۱: عبارت های زیر را مقایسه کنید

نکته ۱۱: در مورد عددهای کوچکتر از واحد (معتاد) و یا منفی کاملا جهت نامساوی میچرخد. اما اگر همزمان معتاد و منفی باشند اثر یکدیگر را خنثی می کنند.

نکته ۱۲: همیشه پایه ورزشکار از پایه معتاد بزرگتر است و همیشه عدد مثبت از عدد منفی بیشتر می باشد.

نکته ۱۳: دقت کنیم پیش از هر کاری منفی های توان و پایه باید از رادیکال یا حالت توان‌دار خارج شوند. تکلیف از بین رفتن یا ماندن آنها مشخص شود بعد مقایسه گردند.

$(-۲)^{-۴} \square (-۲)^{-۳}$, $۵^{-۱۲} \square ۲^{-۷}$, $(-۳)^{۴} \square ۲^{-۵}$, $۳^{۷} \square ۲^{۷}$

$(-۲)^{-۳۲۴} \square (-۵)^{-۳۲۴}$, $۵^{-۱۲} \square ۲^{-۱۲}$, $(-۳)^{-۵} \square ۲^{-۵}$, $۳^{-۷} \square ۲^{۷}$

نکته۱۴: در مورد رادیکال ها میتوانیم پس از ساده کردن و تبدیل آنها به یک عدد تواندار با توان کسری آنها را با هم مقایسه نماییم.

$$\sqrt{۸}\ \square\ \sqrt[۳]{۱۶} \quad , \quad \sqrt{۲\sqrt{۸}}\ \square\ ۲\sqrt{۱۶} \quad , \quad ۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}\ \square\ ۴\sqrt{۲\sqrt[۳]{۲}} \quad , \quad \sqrt[۳]{-۲\sqrt{۳۲}}\ \square\ ۲\sqrt{۱۶}$$

معادلات توانی و رادیکالی

در معادلات توانی و رادیکالی از قانون برج میلاد استفاده میکنیم. رادیکال ها را به صورت توان گویا در آورده و کسرها را نیز به صورت توان منفی. سپس دو طرف تساوی را تا حد امکان ساده میکنیم تا تبدیل به پایه های اول و توان شوند. سپس با این قانون که پایه مساوی توان مساوی لازم دارد و توان های مساوی پایه های مساوی میخواهند، عبارت های مجهول را بدست می آوریم.

مثال۱۲: معادلات زیر را حل نمایید.

$$(۵)^{۳x+۵} = (۵)^{x}$$

$$(\frac{1}{۳})^{۳x-۳} = ۹(۸۱)^{x}$$

$$\sqrt[۶]{x\sqrt{x}} = \sqrt[۱۲]{۲۷}$$

نکته۱۵: پایه‌ای که وجود نداشته باشد با توان صفر مخفی شده است.

نکات وجمع بندی توان وریشه

اتحادها:

ضرب پرانتز ها به روش جمله اول در همه، جمله دوم در همه و ... انجام می شود. ولی اتحادها روش های سریعی هستند که برای ضرب پرانتز های خاص به وجود امده اند. اتحاد ها شبیه آدرس دادن است. یا شما آدرس عادی از خیابان های معروف (ضرب) می دهید و یا با توجه به امکانات و توان و آشنایی فرد با موقعیت به او آدرس میانبر (اتحاد) میدهید.

اتحادهای اصلی

اتحاد مزدوج:

۱-دوپرانتز

۲-داخل هر پرانتز دو قطعه کاملا یکسان پیدا شود

۳-بین دو قطعه یکی علامت مثبت و یکی علامت منفی وجود داشته باشد

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$$

آدرس: آدو بدو همیشه منفی

مثال ۱۳: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\left(x-۳\right)\left(x+۳\right)=$$

$$\left(۳x+۳\right)\left(۳x-۳\right)=$$

$$\left(۲x^{۲}+۵\right)\left(۲x^{۲}-۵\right)=$$

$$\left(۳x^{۲}-۳x\right)\left(۳x+۳\right)=$$

$$\left(۱۰۰۱\right)\left(۹۹۹\right)=$$

$$\left(x+۱\right)\left(x-۱\right)\left(x^{۲}+۱\right)\left(x^{۴}+۱\right)=$$

اتحاد مربع دو جمله

۱- یک پرانتز با توان ۲ (یا دو پرانتز کاملا یکسان)

۲- داخل پرانتز دوجمله

$$(a \pm b)^{۲} = a^{۲} \pm ۲ab + b^{۲}$$

آدرس: آدو بدو دوآبه

مثال ۱۴: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\left(x + ۱۲\right)^{۲} =$$

$$\left(۲x + ۱\right)^{۲} =$$

$$\left(۳x + ۳\right)\left(۳x + ۳\right) =$$

$$\left(-۲x - ۳y\right)^{۲} =$$

$$\left(۲\sqrt{۲} - ۳y\right)^{۲} =$$

$$\left(۹۹۹\right)^{۲} =$$

$$\left(x + ۱\right)\left(x - ۱\right)\left(x^{۲} - ۱\right) =$$

$$\left(x + ۱\right)^{۲}\left(x - ۱\right)^{۲} =$$

$$\left(-۲x - ۳y\right)^{۲} =$$

مثال ۱۵: اگر $a + b = ۳$ و $a^{۲} + b^{۲} = ۷$ آنگاه ab را بدست آورید.

اتحاد یک جمله مشترک

۱- دو پرانتز

۲- در هر پرانتز دو جمله که فقط یکی از انها در هردو کاملا یکسان و مشترک باشند.

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})(a+c)=a^{۲}+(b+c)a+bc$$

آدرس: مشترک توان دو،

جمع غیر مشترک تو مشترک ضرب بشه

ضرب غیر مشترک با اخرش جمع بشه

نکته۱۶: فقط در این اتحاد جملات را با علامت خودشان در سمت راست به جای a و b جاگذاری میکنیم.

مثال۱۶: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\left(x+۵\right)\left(x+۲\right)=$$

$$\left(x^{۲}-۴\right)\left(x^{۲}+۳\right)=$$

$$\left(۳x+۱\right)\left(۳x-۳\right)=$$

$$\left(x-۱\right)\left(۳+x\right)=$$

$$\left(x+1\right)^{۴}\left(-x-3\right)^{۴}=$$

اتحاد مکعب دو جمله

۱- یک پرانتز با توان ۳

۲- داخل پرانتز دو جمله

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}b+۳b^{۲}a+b^{۳}$$

$$(\mathrm{a}-\mathrm{b})^{۳}=a^{۳}-۳a^{۲}b+۳b^{۲}a-b^{۳}$$

آدرس: آسه بسه، سه آدو به سه بدوآ

نکته۱۷: اتحاد فرعی زیر که از جابجایی اتحاد های بالا بدست می آید بسیار پرکاربرد است.

$$a^{۳}+b^{۳}=(\mathrm{a}+\mathrm{b})^{۲}+۳ab(a+b)$$

$$a^{۳}-b^{۳}=(\mathrm{a}-\mathrm{b})^{۲}+۳ab(a-b)$$

مثال۱۷: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$(x+۵)^{۳}=$$

$$\left(۲x+1\right)^{۳}=$$

$$\left(۲\sqrt{۲}-۳\sqrt{۳}\right)^{۳}=$$

مثال۱۸: اگر $a+b=۳$ و $a^{۲}+b^{۲}=۳$ آنگاه $a^{۳}+b^{۳}$ را بدست آورید.

اتحاد مربع سه جمله

۱- یک پرانتز با توان ۲

۲- داخل پرانتز سه جمله

$$(a+b+c)^{2}=a^{2}+b^{2}+c^{2}+2ab+2ac+2bc$$

نکته۱۸: اگر در این شرایط منفی دیدید با علامت جاگذاری کنید.

$$(2x+2y+1)^{2}=$$

$$(2x-2y-1)^{2}=$$

اتحاد مجموع و تفاضل مکعب ها(چاق و لاغر)

۱- دو پرانتز

۲- اولی دو جمله ای لاغر با لپ لاغر

۳- دومی سه جمله ای چاق (با دو لپ چاق و یک شکم ناراض)

(نی، شیلنگ، لوله)

$$(a+b)(a^{2}-ab+b^{2})=a^{3}+b^{3}$$

$$(a-b)(a^{2}+ab+b^{2})=a^{3}-b^{3}$$

هشدار: پشت ab لطفا دو نگذارید... به اندازه کافی چاق هست...

$$(a+2)(a^{2}-2a+4)=$$

$$(a^{n}+1)(a^{2n}-a^{n}+1)(a^{6n}+1)(a^{3n}-1)=$$

تجزیه

تبدیل جمع اعداد به ضرب پرانتز ها را تجزیه میگویند چون در ضرب و تقسیم آزادی بیشتری در ساده کردن و توان رساندن داریم . این بخش بسیار در ریاضیات مهم است .

الف)فاکتور گیری

اولین گام در هر تجزیه ای فاکتور گیری است و بعد به سراغ سایر روش ها میرویم ، و به این معنیست که عدد ها و حروف انگلیسی مشترک که از همه میتوانیم بگیریم را پشت پرانتز جمع کنیم سپس با تقسیم دنگ بگیریم .

(به شیوه دنگ گذاری) .

در فاکتورگیری اولین مرحله معمولا تجزیه قسمت عددی می باشد.

نکته: همیشه هر پرانتز مثل یک عدد جدیدی است که شما همان لحظه کشف کرده اید و میتوانید به نام خود ثبت کنید و همانطور که عددهای یکسان را با هم ساده میکنیم پرانتزهای یکسان را هم با هم ساده کنیم .

مثال۱۹: عبارت های زیر را با استفاده از فاکتور گیری تجزیه نمایید.

$$۱۲a^{۴}b^{۷} + ۱۲a^{۸}b^{۷}c + ۱۲a^{۳}b^{۷} =$$

$$-۱۲a^{۲}b^{۲} - ۴a^{۴}b^{۲}c + ۲a^{۳} =$$

$$۲x\left(۲x+1\right)^{۳} - ۸x^{۳}\left(۲x+1\right)^{۵}\left(x+1\right) =$$

$$۲x\left(۲x+1\right)^{۳} - ۴x\left(-۲x-1\right)^{۴} =$$

نکته۱۹: مراقب پرانتز های یکسانی که فقط علامت تک تک عبارتهای داخل آنها برعکس (قرینه) شده است باشید که موقع ساده کردن ۱- میسازد.

ب) استفاده از اتحاد در تجزیه (عکس اتحاد)

درخت تشخیص تجزیه زیر بسیار مفید است

- اتحاد
  - دوجمله
    - مزدوج ← [دوجمله با جذر کامل که یکی منفی باشد]
    - چاق و لاغر ← [دو جمله که هردو ریشه سوم داشته باشد]
  - سه جمله
    - یک جمله مشترک ← [الف) یکی از سه جمله جذر کامل داشته باشد
ب) بتوان دو عدد پیدا کرد ضربشان عدد تنها و جمعشان ضریب x باشد.]

میوه تجزیه اتحادی:

مزدوج ← (جذر دومی + جذراولی) (جذر دومی - جذراولی)

چاق و لاغر ← $\left(\sqrt[3]{\text{اولی}} \pm \sqrt[3]{\text{دومی}}\right)\left[\left(\sqrt[3]{\text{اولی}}\right)^{2} \mp \sqrt[3]{\text{اولی}} \times \sqrt[3]{\text{دومی}} + \left(\sqrt[3]{\text{دومی}}\right)^{2}\right]$

یک جمله مشترک ← (عدد دومی با علامت جذر) (عدد اولی با علامت جذر)

مربع دو جمله ← $\left(\text{جذراولی} \pm \text{جذر دومی}\right)^{2}$

نکته۲۰: در تجزیه سه جمله (با دوجمله جذر دار) گاهی اتحاد یک جمله مشترک دو پرانتز کاملا یکسان میدهد. این حالت همان مربع دو جمله است که میتوانیم برای آن هم آدرس بدهیم. به این صورت که اگر سه جمله داشتیم و دو جمله آن جذر کامل داشتند جمله سوم را بررسی می کنیم و اگر جمله سوم دوبرابر حاصلضرب جذر دو جمله قبلی بود در اینصورت اتحاد مربع دو جمله ای است.

جذردار ± ۲×جذر×جذر + جذردار

مثال ۲۰: عبارت های زیر را تجزیه نمایید.

$۹x^{۲} - ۲۵ =$

$x^{۲} - ۲x - ۲۴ =$

$x^{۲} - ۱۶ =$

$۲۷x^{۳} - ۱ =$

$۹x^{۲} - ۳۰xy + ۲۵y^{۲} =$

ج)روش های خاص:

۱-روش A (عدد مشکل گشا)

این روش برای سه جمله ای هایی است که فقط ضریب عددی x^2 آنها مانع استفاده از اتحاد یک جمله مشترک برای تجزیه است (یعنی بزرگترین توان x زوج است ولی عدد پشت آن رادیکال ندارد مثل ax^2)

در این حالت سر و ته عبارت را همزمان در ضریب مشکل دار (عدد مشکل گشا a) موقتا ضرب می کنیم، تا مشکل اولیه حل شود. در نهایت بعد از کامل شدن تجزیه یک جمله مشترک (با جمله مشترک ax) عددها جوری کنار هم قرار میگیرند که حتما می توانیم عدد موقتا ضرب شده a را با تقسیم پس بگیریم. در غیراینصورت اشتباه کرده ایم.

$۳x^۲ - ۲x - ۸ =$

$۵x^۲ - x - ۴ =$

$۵x^۴ - x^۲ - ۴ =$

۲- روش دسته بندی

در چهار جمله ای ها و یا زوج جمله ای ها گاهی می توانیم جملات را به چند دسته تقسیم کنیم و به طور جداگانه از انها فاکتور بگیریم و در نهایت بین همه دسته ها یک عامل مشترک جدید بزرگتر برای فاکتور گیری بیابیم.

$x^۳ + x^۲ + x + ۱ =$

$x^۳ + x^۲ - x - ۱ =$

۳- خرد کردن

در سه جمله ای هایی که اتحاد یک جمله مشترک نمی باشند گاهی یک جمله را میتوانیم خرد کنیم و سپس از روش دسته بندی و فاکتورگیری استفاده کنیم.

$x^۲ + ۵xy + ۴y^۲ =$

۴-روش کامل سازی

گاهی اوقات همزمان با اضافه و کم کردن جمله ای میتوان سد تجزیه را رد نمود

$x^۴ + x^۲ + ۱ =$

$x^۴ + ۱ =$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک عبارت های جبری (ب.م.م) (حاکم با مرام مردمی)

این کار بدرد فاکتورگیری میخورد چون عبارت پشت پرانتز همان ب.م.م است. مشابه عددها اولین مرحله در ب.م.م گیری تجزیه کردن است. سپس جواب میشود ضرب عامل های مشترک با توان کمتر (یعنی چیزی که بتوانیم همزمان از همه بگیریم و کسی کم نیاورد)

کوچکترین مضرب مشترک عبارت های جبری (ک.م.م) (...)

این کار بدرد مخرج مشترک گیری میخورد. باز هم اولین مرحله تجزیه عبارتها تا جای ممکن است. سپس جواب می شود عامل های مشترک و غیر مشترک با توان بزرگتر

مثال ۲۱: بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) عبارت های زیر را بدست آورید.

۱۲۰ و ۳۶۰

$(x^{۳}-۱)^{۲}$ و $(x^{۲}-۱)^{۲}$

$۱۲x^{۲}-۱۲x-۹$ و $۱۶x^{۲}+۱۶x+۴$

ضرب و تقسیم عبارت های گویا

ضرب: مشابه اعداد کسری و گویا به روش صورت در صورت و مخرج در مخرج انجام می شود و حتما در ابتدا و یا در نهایت با تجزیه کردن عبارت های صورت و مخرج باید تا حد امکان عبارت را ساده نمود.

تقسیم: مجددا مشابه اعداد کسری کسر اول را در معکوس کسر دوم ضرب میکنیم با این تفاوت که در ابتدا باید صورت و مخرج را تا حد امکان تجزیه کرده و ساده نمود.

مثال ۲۲: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$\left(x^2 - x - ۶\right) \times \frac{x^۲ - ۹}{x^۲ - ۶x + ۹} =$$

$$\frac{x^۲ + ۵x + ۶}{x^۳ + ۲x^۲} \div \frac{x^۲ + ۲x - ۳}{x^۲ - x} =$$

جمع وتفریق عبارتهای جبری گویا

همانطور که میدانیم برای جمع و تفریق کسرها باید حتما آنها را هم مخرج کنیم. برای مخرج مشترک گیری می توانیم از کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو عبارت استفاده نماییم ولی بهتر است اول عبارت ها را تا حد امکان پس از تجزیه، ساده کنیم و سپس مخرج مشترک بگیریم.

سپس صورت ها را با هم جمع کرده و در صورت امکان صورت و مخرج را در پایان تجزیه و ساده میکنیم.

$$\frac{۳x^{۳}+۲x^{۲}}{x^{۴}-x^{۳}}+\frac{x^{۲}+۲x+۱}{x^{۲}+x}-\frac{x+۱}{x^{۲}-۱}=$$

$$\frac{x^{۲}-۳x}{x-۴}+\frac{۵x-۱۶}{۴-x}=$$

گویاکردن مخرج کسرها(پاشنه بلند یا کلیپس؟)

طبق قوانین ریاضی اگرچه وجود رادیکال در مخرج کسر غلط نیست ولی نشانی از آماتور بودن ریاضیدان است. بنابراین در صورت وجود رادیکال در مخرج کسر با توجه به حالت آن یکی از روش های زیر را برای گویا کردن (از بین بردن رادیکال مخرج) استفاده میکنیم. (صورت رادیکالی آزاد است)

۱- رادیکال تنها

در این حالت برای نجات عبارت زیر رادیکال باید توان آنرا به توان فرجه رادیکال برسانیم. پس ابتدا زیر رادیکال را تا حد امکان به عامل اول تجزیه میکنیم و سپس عملیات تکمیل توان عبارت تا رسیدن به فرجه را با ضرب کردن همزمان رادیکال تکمیل کننده در صورت و مخرج آغاز میکنیم.

$$\frac{۱}{\sqrt[n]{x^m}} \times \frac{\sqrt[n]{x^{n-m}}}{\sqrt[n]{x^{n-m}}} \quad , \quad n > m$$

مثال۲۳: عبارت های زیر را گویا کنید.

$$\frac{۱}{\sqrt[۵]{۵^۲}} =$$

$$\frac{x+۱}{۴\sqrt[۳]{۳^۲}} =$$

۲-جفت رادیکال فرجه زوج

در این حالت میدانیم تنها راه به توان دو رساندن دو عدد همزمان اتحاد مزدوج است. پس عملیات تکمیل همزمان جفت رادیکال های فرجه زوج را با ضرب صورت و مخرج در مزدوج رادیکال ها (همون رادیکال ها فقط علامت بینشون عوض) آغاز می نماییم.

$$\frac{1}{\sqrt{x}\pm\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}$$

$$\frac{۲}{۴+\sqrt{۳}}=$$

$$\frac{۲}{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}=$$

۳-جفت رادیکال فرجه ۳

در این حالت میدانیم تنها راه به توان سه رساندن دو عدد همزمان اتحاد چاق و لاغر است. پس عملیات تکمیل همزمان جفت رادیکال های فرجه سه را با ضرب صورت و مخرج در چاق و لاغر (پرانتز لاغر دوتایی پرانتز چاق سه تایی) آغاز می نماییم.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{y}} \times \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \mp \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \mp \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}$$

مثال۲۴: عبارت های زیر را گویا کنید.

$$\frac{۴}{\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۷}}=$$

$$\frac{۷x+۵}{\sqrt[۳]{۵}+۲}=$$

$$\frac{۷\sqrt{x}+۵}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}=$$

مثال۲۵: عبارت های زیر را گویا کنید.

$$\frac{۴}{\sqrt{۲-۳\sqrt{۵}}}=$$

$$\frac{۲}{\sqrt{۲-\sqrt[۳]{۵}}}=$$

خلاصه فصل و مثال های مهم

به کنکور بخندیم

- مورد داشتیم پسره نزدیکه کنکور رفته خواستگاری

خانواده دختره گفتن اندازه رتبه کنکور پسرتون سکه مهر دخترمون.

پسره از زندگی زده نشسته درس خوندن تا اونجایی که خبر دارم رتبه یک کشور شده بود!!!

اینو میگن انگیزه...

- به یارو میگم واسه کنکور خوندی؟

میگه کنکور مگه ۸ نیست...

میگم چرا...

میگه ٦ بلند میشم میخونم!!!

- آهای همکلاسی که قرار بود توی دانشگاه با هم تصادف کنیم

و جزوه هات بریزه رو زمین و من جمعشون کنم و بعد عاشقت بشم...

.

.

.

میخوام بگم برات ارزوی موفقیت دارم!

منتظر من نباش...

من کنکور گند زدم نمیتونم بیام دانشگاه