

فصل سوم : توانها و کوی و عبارتهای صوری

در سال گذشته بارشده های نام و رسم اعداد آشنا کرده اید و دانستید که ریشه و توان از اجزای دو طرفه با هم دارند.

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \leftrightarrow (-2)^3 = -8$$

ریشه سوم      توان سوم

مثال : در هر مورد جاهای خالی را پر کنید.

$$2^4 = 16 \leftrightarrow$$

$$11^2 = 121 \leftrightarrow$$

$$(4/25)^2 = 0.16 \leftrightarrow$$

$$(0.5)^2 = 0.25 \leftrightarrow$$

$$(-9)^2 = 81 \leftrightarrow$$

$$\sqrt{81} = 9 \leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{27} = 3 \leftrightarrow$$

$$\sqrt{50} = 2\sqrt{2} \leftrightarrow$$

$$\sqrt{100} = 10 \leftrightarrow$$

$$\sqrt{10000} = 100 \leftrightarrow$$

مثال : حجم یک مکعب  $70 \text{ cm}^3$  است. ضلع یک ضلعی را برصفت هر ضلع را بدست آورید.

یادآوری : توان

توان به کماظ معنوی اطلاق می شود برای  $n$  تایی حاصل ضرب عددهای  $a$  به تعداد  $n$  بار در خودشان که در این صورت  $a$  پایه و  $n$  توان می گویند.

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ بار}} = a^n$$

ضرب اعداد تواندار :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

الف) پایه ها مساوی باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توانها را با هم جمع کنیم.

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

ب) توانها مساوی باشند : یکی از توانها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب کنیم.

اگر در ضرب اعداد تواندار هم پایه ها و هم توانها مساوی بودند به علاوه از این روابط استفاده می کنیم.



تقسیم اعداد تواندار:

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

الف) پایه‌ها مساوی باشند: یکی از پایه‌ها را نوشته و توانها را از هم کم کنیم.

$$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

ب) توانها مساوی باشند: یکی از توانها را نوشته و پایه‌ها را به هم تقسیم کنیم.

جمع عبارتهای تواندار: وقتی چند عبارت تواندار جمع شوند می‌توانیم بین آنها عامل مشترک یافت و پس از

عامل مشترک فاکتورگیری کرده و در زیر انفرت باقی‌مانده از جهت اعداد گانه محاسبه نمود.

مثال: حاصل عبارتهای زیر را بدیانت آورید:

$$\underbrace{d^3 + d^3 + d^3 + d^3 + d^3}_{5d^3} = 5 \times d^3 = d^5$$

$$\frac{3 \times 2^2 + 8 \times 2^7}{3^2 + 2^3} = \frac{1 \times 2^7}{9 + 8} = \frac{2^3 \times 2^4}{17} = \frac{2^7}{17} = \frac{512}{17}$$

برای معنی:

$$(a, b \neq 0, n \in \mathbb{N}): \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad \text{و} \quad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad (a \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

نکته: در بیان و معانی اعداد تواندار، توانها در هم ضرب می‌شوند:

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

$$\begin{aligned} (3^2)^4 &= 3^{2 \times 4} \\ &= 3^8 \neq 3^{16} \end{aligned}$$

توجه:

نکته: اگر عدد متقی بیان فرد برابر حاصل عددهای متقی است و اگر بیان زوج برابر حاصل عددهای متقی است.

$$(-2)^3 = -8 \quad ; \quad (-2)^4 = +16$$

ریشه n ام: اگر  $n > 2$  عددی مجهول باشد در این صورت عدد حقیقی b را ریشه n ام (فرد n ام)

عدد a می‌نامیم که  $a = b^n$  باشد.



نکته: اگر  $n$  زوج باشد عدد حقیقی مثبت  $a$  دارای ۲ ریشه  $n$  ام است که قرین و یکدیگرند  
 مثلاً عدد ۸۱ دارای ۲ ریشه ۴ام است. کس ۳ و دیگری ۳- . زیرا:  $3^4 = 81$  و  $(-3)^4 = 81$   
 نکته: اعداد متقی ریشه زوج ندارند مثلاً ریشه ۵م ۶۴- موجود نیست  
 نکته: اگر  $n$  فرد باشد، علامت داخل را در کمال می‌تواند مثبت و یا متقی باشد.  
 نکته:  $\sqrt[n]{a}$  در حالتیکه  $n$  زوج باشد، ریشه  $n$  ام مثبت از ریشه  $n$  ام اصل نامیده و اگر جواب برای  $\sqrt[n]{a}$  می‌دانیم.

مثال: کامل کنید.

$$\sqrt[3]{48} =$$

$$\sqrt[3]{64} =$$

$$\sqrt[5]{1024} =$$

$$\sqrt[4]{4096} =$$

$$\sqrt{\frac{121}{100}} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^3}}$$

$$\sqrt{\frac{34}{25}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{216}{27}}$$

$$\sqrt{(2.4)^2} =$$

$$\sqrt[3]{8} \sqrt[4]{64} =$$

نمبر این درجته کلی داریم.

- \* برای اعداد مثبت وقتی که  $n$  زوج باشد، دو ریشه  $n$  ام داریم و هر دو را.
- \* برای اعداد متقی وقتی که  $n$  زوج باشد، ریشه  $n$  ام وجود ندارد.
- \* برای اعداد غیر مثبت یا متقی که  $n$  فرد باشد، فقط یک ریشه  $n$  ام وجود دارد.
- \* هرگاه  $n$  فرد و زیر را در کمال متقی باشد، علامت متقی می‌تواند از داخل خارج شود.

توجه: بدانید که چگونه می‌توان عدد  $\sqrt[3]{2}$  را روی محور رسم کرد.  
 (این مثال، تضعیف مکتب معروف است)

ویژگی‌های ریشه‌گیری

در زیر بهترین خواص را به شما می‌گویم:

$$1) \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{اگر } n \text{ فرد} \\ |a| & \text{اگر } n \text{ زوج} \end{cases}$$

مثال:  $\sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{(-3)^5} = -3$  ;  $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

مثال:  $\sqrt[7]{(-2)^7} = 1 - 2 = -1$

$$2) \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

مثال:  $\sqrt[5]{12} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{24} = \sqrt[5]{2^3} = 2$

$$3) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

مثال:  $\frac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{14}{7}} = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^1} = 2$

$$4) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال:  $\sqrt[4]{256^3} = (\sqrt[4]{256})^3 = 4^3 = 64$

$$5) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

مثال:  $\sqrt[2]{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$

$$6) (\sqrt[k]{a})^k = a$$

مثال:  $\sqrt[5]{25} = 5$

$$7) a \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b} & \text{اگر } a > 0 \\ \sqrt[n]{a^n b} & \text{اگر } ab > 0 \\ -\sqrt[n]{a^n b} & \text{اگر } a < 0, b > 0 \end{cases}$$

$$8) \sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$$

$$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{25}$$

$$9) \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$$





مثال: عبارتهای زیر را ساده کنید:

$$\sqrt[4]{64a^8b^2c^{16}} =$$

$$\text{ب) } \sqrt[4]{(\sqrt{2}\sqrt{3})^8} =$$

$$\text{ج) } \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^7}} =$$

$$\text{د) } \sqrt{11} \times \sqrt[3]{243} =$$

مثال: در هر مورد ضریب رادیکال را بیرون رادیکال بیاورید:

$$2\sqrt[3]{7} =$$

$$4a^2b^5 \sqrt[3]{3a^4b^7} =$$

مثال: عبارت  $\sqrt[8]{\frac{x+1}{3}} - \frac{x}{2}$  به ازای کدام مقادیر حقیقی  $x$  تعریف شده است؟

مثال: حاصل عبارتهای زیر را بیست آورید:

$$\sqrt[3]{11} - 2\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{378} =$$

$$\sqrt{32} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{72} - \sqrt{8} =$$

نکته: با توجه به رابطه بین ضرایب رادیکالها را بیست بلا بیست آورید

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{na^{n-1}}$$

مثال: رادیکالهای زیر را تقریباً بنویسید:

$$\sqrt[3]{45} =$$

$$\sqrt[5]{30} =$$

$$\sqrt[4]{150} =$$

$$\sqrt[7]{10} =$$

$$\sqrt[9]{35} =$$



**مثال:** درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.  
 ۱. همه اعداد حقیقی دارای دو ریشه مجزا و متمم یکدیگرند.  
 ۲. ریشههای چهارم عدد ۱۶ در عدد  $\sqrt[4]{16} \pm$  منبسطند.  
 ۳. هر عدد همواره ریشه ۱۲ آن دارد.

۴. هر عدد صفر همواره دارای ریشه هفتم است.

**مثال:** اگر رابطه  $a = (\sqrt[n]{a})^n$  همیشه درست است، صراحتاً

**مثال:** اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

$\sqrt{2} \bigcirc \sqrt[4]{3}$  ;  $\sqrt{-9} \bigcirc \sqrt[5]{-9}$  ;  $\sqrt[4]{25} \bigcirc \sqrt[3]{8}$   
 $\sqrt[5]{-0.2} \bigcirc \sqrt[11]{-0.2}$  ;  $\sqrt[3]{8} \bigcirc \sqrt[5]{8}$  ;  $(0.2)^{\frac{1}{8}} \bigcirc (0.2)^{\frac{2}{7}}$

**مثال:** عدد  $\sqrt[3]{321}$  را بین کدام دو عدد صحیح متوالی است!

**مثال:** کامل کنید.

$\sqrt[3]{1.80} =$  ;  $\sqrt[5]{-32} =$   
 $\sqrt[7]{128} =$  ;  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \times \sqrt[3]{\frac{9}{14}} =$   
 $\sqrt[4]{-1} =$  ;  $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} =$   
 $\sqrt[4]{12} =$  ;  $\sqrt[7]{0} =$   
 $\sqrt[2]{-0.001} =$  ;  $\sqrt[7]{(-2)^7} =$   
 $\sqrt[4]{(-3)^4} =$  ;  $(\sqrt{-8})^2 =$   
 $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[4]{81} =$  ;  $\sqrt[4]{486} =$   
 $(\sqrt[5]{12})^5 =$  ;  $\sqrt[5]{1000} =$   
 $\sqrt[3]{150} =$  ;  $\sqrt[21]{128 \times 3^{14}} =$



مثال: حاصل عبارت زیر را حدفاصل  $\mathbb{R}$  در کنید

$$\sqrt{\frac{(a+b)^n}{(a-b)^n}} =$$

$$\sqrt{4x^2+5x+1} =$$

$$2\sqrt{27} \times 3\sqrt{2} =$$

$$\frac{\sqrt{x^3y^3}}{\sqrt{xy}} =$$

$$\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} =$$

$$\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{a^3} =$$

$${}^a\sqrt{a^3} \times {}^7\sqrt{a^5} \times \sqrt[2]{a^2} =$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}\sqrt[3]{2}} =$$

$$\sqrt[4]{7+5\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}} =$$

$$\sqrt{(c-1)^2} - \sqrt{(1+c)^2} ; c \in [-1, 1]$$

$$(2\sqrt{2}-\sqrt{2}+3\sqrt{2})(\sqrt{18}-\sqrt{2}+2\sqrt{2}) =$$

مثال: حاصل عبارت های زیر را بنویسید

$${}^a\sqrt{-3xy(x-y)^{10}} =$$

$$\sqrt[3]{-(x-y)^7} =$$

$$\sqrt[3]{27c^9} =$$

$$\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{2} =$$

$$\pm\sqrt{7,25} =$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} =$$

$$\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{11+5\sqrt{2}} =$$

$$\sqrt{11-2\sqrt{2}} =$$



$$\sqrt{21} \times \sqrt{7-\sqrt{5}} \times \sqrt{3+\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \sqrt{3-\sqrt{3}-\sqrt{5}} =$$

$$\sqrt{13+\sqrt{58}} =$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} =$$

$$\sqrt{\frac{-224}{x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 9}}} =$$

$$x\sqrt{-x} \times \sqrt{x} =$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

فرض کنید  $a$  عدد حقیقی باشد. اگر  $m, n \in \mathbb{N}$  باشد معرّف می کنیم:

حاصل عبارتی زیر را به دست آورید.

$$(-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$(2i)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(9i2i)^{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{1}}} + (\sqrt[2]{\sqrt[3]{2}})^3 = 2^{\frac{1}{6}} - 1 =$$

$$1^{\frac{1}{2}}$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x} \sqrt[4]{y^2}}{\sqrt{x^2}}$$

مثال: آیا عبارت زیر درست است؟

$$\sqrt[3]{(-3)^9} = [(-3)^3]^{\frac{1}{3}} = [(-3)^{\frac{1}{3}}]^3 = (-3)^{\frac{1}{3} \times 3} = (-3)^1 = -3$$

مثال: از رابطه  $(\frac{1}{p})^{2q-3} = 4 \times 16^q$  مقدار  $q$  را بیابید.

$$(9i2i)^{-\frac{3}{4}}$$

$$(\frac{12i}{7i})^{-\frac{1}{4}}$$

مثال: حاصل عبارتی زیر را به دست آورید.



$$\left(\frac{3^p}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{p}}$$

$$\left(\frac{1}{p}\right)^{p+1} \times \sqrt{\frac{1}{p}} \geq 1 \rightarrow p = ?$$

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{p+1} \div \left(a^{-\frac{1}{p}}\right)^{-\frac{p}{p}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^p \times \sqrt{\frac{1}{xy}} \times \left(\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}\right)^{-1} =$$

$$\left(a^{\frac{k}{p}} y^{-\frac{k}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} \times a^{\frac{k}{p}} \times y^{\frac{k}{p}}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \left(-\frac{1}{p}\right)^{-p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$$

$$\left(\sqrt[3]{3^2} \sqrt[4]{4^3} \sqrt[5]{5^4} \div \sqrt[6]{6^5} \sqrt[7]{7^4} \sqrt[8]{8^3}\right)^{-\frac{1}{24}}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} \sqrt{\frac{y}{x}} \sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$\sqrt{\frac{y}{x}} \sqrt{\frac{x}{y}} \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\sqrt{2+3} \times \sqrt{11-7\sqrt{2}}$$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\sqrt{5}\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{2})\right)(\sqrt{5}+\sqrt{2})$$



مقایسه دو عبارت توانمند بتوانانهای برابر:

هرگاه توانهای دو عدد تواندار یک نباشند، ابتدا باید آنها را با استفاده از ب.م.م توانهای یک کنیم.

مثال: هر دو سه از اعداد زیر را مقایسه کنید.

الف)  $2^3, 3^2, 5^{12}$

ب)  $5^8, 2^2, 3^{15}$

نکته: هرگاه پایه ها قابل تبدیل حجم باشند ابتدا باید پایه ها را تبدیل کنیم.

مثال: اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

الف)  $8^{\frac{4}{5}}, 16^{\frac{4}{5}}$

ب)  $(\frac{1}{5})^{\frac{4}{5}}, (\frac{1}{5})^{\frac{4}{5}}$

عبارت‌های جبری:

مفهوم اتحاد: در کلاس نهم به شما یاد دادیم که برای تمام مقادیر مقید موجود در آن کلاس درست

باشد اتحاد مربع‌ها می‌باشد. به یاد دارید زیر دقت کنید.

۱)  $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$       ۲)  $x^2 - 2 = 4$

توجه! برای تمام مقادیر  $x$  و  $y$  درست است و لذا به آن اتحاد می‌گوئیم. اتحاد کلاس ۲ برای دو مقدار

$x = 3$  و  $x = -3$  درست است و نه هر مقدار  $x$ ! بنابراین به آن معادله می‌گوئیم.

مروزی بر اتحادهای گذشته:

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$  اتحاد مربع ۲ جمله‌ای

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$  اتحاد مزدوج

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$  اتحاد کلاس ۲

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$  اتحاد مربع ۳ جمله‌ای



حال چند اتحاد جبری بررس می کنیم.

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \quad \text{، اتحاد مکتب مجموع دو جمله ای}$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \quad \text{، اتحاد مکتب تفاضل دو جمله ای}$$

با فاکتورگرفتن از  $x$  و  $y$  عبارات هم و سوم فوراً نتایج زیر حاصل می شود:

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

$$(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$$

از روابط بالا دو اتحاد دیگر نیز با مجموع و تفاضل مکتب دو جمله ای حاصل می شود:

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

نکته: با اتحاد فوق، اتحاد جابجایی و علامت و یا مثل و مضارب نیز گرفته می شود.

مثال: حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها برایت آورید.

$$(2x - y^2)^2 =$$

$$(x-y)(x+y)(x^2 + x^2y^2 + y^2) =$$

$$(1+x^2+x^4)(1-x^2) =$$

$$(x - \frac{1}{x})(1+x^2+x^4)(2x+1) =$$

$$\left(\frac{x}{5} - \frac{y}{3}\right)^2 =$$

$$(2x-1)^3 =$$

$$(1.1)^3 =$$

$$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2) - 1y^3 =$$

$$(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1) =$$

$$(a-b-c)^2 - (a-b+c)^2 =$$



$$\frac{(x+1)^r - r(x+1)^{r-1} + r(x+1) - 1}{(x+1)^r - r(x+1) + 1} =$$

$$(2x-y)(r x^r + r x y + y^r)(1 x^r + y^r) =$$

$$(x+\sqrt{3})^r =$$

$$(r+x^r)^r =$$

$$99^r =$$

$$1 \cdot r^r =$$

$$99 \times 101 =$$

$$1002 \times 992 =$$

$$(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2) =$$

$$(x^r + \frac{r}{2})(x^r - \frac{r}{2}) =$$

$$(rx + \frac{r}{p})(rx - \frac{r}{p}) =$$

$$(r-3x)(r-x) =$$

$$98 \times 101 =$$

$$101^r \times 103 =$$

$$(x - \frac{1}{x})(x^r + \frac{1}{x^r} + 1) =$$

$$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x^r}-\sqrt{x}+1) =$$

$$(x^r+y^r)(\epsilon x^r - r x^r y^r + y^r) =$$

$$(x^r+r)^r =$$

$$(x - \frac{1}{p})^r =$$



$$99^3 =$$

$$52^3 =$$

$$(1 - 2x + x^2)^2 =$$

$$(2x - 3y + \frac{1}{y})^2 =$$

مثال: اگر  $x + \frac{1}{x} = 5$  باشد حاصل عبارت  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  را بدست آورید.

مثال: اگر  $x + \frac{1}{x} = 4$  باشد حاصل عبارت  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  را بدست آورید.

مثال: اگر  $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$  باشد حاصل عددهای عبارت زیر را بدست آورید.

$$x^2 + \frac{1}{x^2} =$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} =$$

$$x^4 - \frac{1}{x^4} =$$

$$x^5 - \frac{1}{x^5} =$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} =$$

اعداد هفتم فرعی: با تغییر اعداد (های) کتبی، با آنها آشنا شدیم. میتوان

اعداد هفتم فرعی صورت زیر تعریف و از آنها در حل مسائل استفاده کرد:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

$$x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$$

نکته: اعداد اولی:  $a, b, c$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$a^3+b^3+c^3 = 3abc$$

اگر  $\begin{cases} a+b+c=0 \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \end{cases}$  باشد آنگاه:

$$a=b=c$$



تجزیه عبارتهای جبری :

دانشجویان که در سال قبل خوانده اند، تجزیه یعنی نوشتن یک عبارت جبری بصورت حاصلضرب چند عبارت جبری دیگر درصم.

تجزیه به یکی از راههای فاکتورگیری و استفاده از اتحادها صورت میگیرد که البته ممکن است در یک عبارت هم از فاکتورگیری و هم از اتحادها همزمان استفاده شود.

\* برای تجزیه یک عبارت شناخت کامل و تسلط بر اتحادها شرط لازم است. بنابراین توصیه می شود در صورتیکه اتحادها به درستی فرا گرفته نشده اند قبل از ورود به صفت تجزیه مجدداً تمرین و تکرار شوند.

مثال: به کمک اتحادها عبارتهای جبری زیر را تجزیه کنید.

$$y^2 - 7xy + 9x^2 =$$

$$9x^2 - 34y^2 =$$

$$x^2 - 2x - 3 =$$

$$x^3 + 7x^2y + 12xy^2 + 8y^3 =$$

$$27a^3 + \frac{1}{8}b^3 + \frac{27}{4}a^2b + \frac{9}{4}ab^2 =$$

$$18a^7 - 12a^4b^3 + 7a^2b^7 - b^9 =$$

$$y^3 - 27 =$$

$$7ab^7 - 18a^9z^{12} =$$

$$x^7 - y^7 =$$

$$x^3 - 125 =$$

$$27x^3 + 1 =$$

$$fa^2 - b^2 - 2b + 4a =$$





$$9x^r - 3x - r =$$

$$x^r - x^r - x + 1 =$$

$$a^r - 2a^r + 5a =$$

$$x^r y^r - x^r y^r - 1 + y =$$

$$7a^r - 7E =$$

$$7Ex^r - 5Ax^r + 12x - 1 =$$

$$(x+1)^r + 1 =$$

$$x^2 + x + 1 =$$

$$7x^r - 1 =$$

$$x^r - 12x^r + 7x - 1 =$$

$$ab - a^r b^r =$$

$$a^r b^r + a^r b^r =$$

$$34a^r b - 17b^2 =$$

$$c^r + p^r =$$

$$(a+b)^r - (a-b)^r - 2b =$$

$$a+b + a^r - b^r =$$

$$x^7 - (yz)^r =$$

$$a^r c^r + b^r d^r - b^r c^r - a^r d^r - (abcd) =$$

$$x^r + 7Em^r =$$

$$(a+b)^r + (a-b)^r - 2a =$$



مضرب و شمارزه :

در عبارت  $20 = 4 \times 5$  اعداد ۴، ۵، ۲۰ (شمارنده‌ها) عدد ۲۰ و عدد ۲۰ را مضرب ۴ و مضرب ۵ می‌دانیم.

البته عدد ۲۰ شماره‌های دیگری نیز دارد. همچنین در عدد ۴ و ۵ مضرب دیگری نیز دارند.

همچنین در اتحادها نیز مضرب و شمارنده وجود دارد. مثلاً در اتحاد مزدوم  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$  دو عبارت

$(a-b)$  و  $(a+b)$  شماره‌ها  $a^2 - b^2$  اند. همچنین  $a^2 - b^2$  مضرب  $(a+b)$  و نیز مضرب  $(a-b)$  است.

به طور کلی برای یافتن ب.م.م و ک.م.م دو عبارت چیزی استدا آنها را تجزیه کرده و همان‌ها

ب.م.م و ک.م.م. نوعی رفتار می‌کنند (ب.م.م = حاصلضرب عوامل مشترک با کمترین تکرار و

ک.م.م = حاصلضرب عوامل مشترک با بیشترین تکرار مضرب در عوامل غیر مشترک)

مثال: ب.م.م و ک.م.م دو عبارت  $a^2 - b^2$  و  $a^3 - b^3$  را بیابید. آورید.

مثال: چند مضرب عبارت  $(2a-1)$  را بنویسید.

نکته: عبارت  $\sqrt{3}(a-b)$  مضرب  $(a-b)$  نیست. ضرایب عددی فقط می‌توانند عدد صحیح باشند بنابراین

$3(a-b)$  می‌تواند مضرب از  $(a-b)$  باشد.

عبارت‌های گویا: هر عبارت کسری بصورت  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  که  $P(x)$  و  $Q(x)$  چند جمله‌ای باشند را یک

عبارت گویا می‌نامیم. شرط تعریف همین عبارت است که مخرج مضرب نباشد یعنی  $Q(x) \neq 0$  باشد.

نکته: عبارتهایی که صورت یا مخرج آنها شامل متغیر یا مقبره‌هایی زیر رادیکال و یا داخل قدر مطلق باشند گویا نیستند.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+8}, \frac{x^2-2}{|x+1|}, \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{3x+5}}$$



مثال: حرکت از عبارتهای گویای زیر بر اساس مقادیری تعریف نشده اند: (رأبندی تعریف آنها را مشخص کنید)

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

$$g(x) = \frac{xy}{y^2-4}$$

$$h(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$k(x) = \frac{z'}{2z^2-7z+5}$$

$$I(x) = \frac{x}{x}$$

$$L(x) = \frac{3}{2x^2+2x} + \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x}$$

$$M(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+9x+8}$$

$$N(x) = \frac{1}{a-2} + \frac{1}{a+2} - \frac{1}{a^2+7}$$

$$S(x) = \frac{7x^2+7x-2}{2x^2-1x+1}$$

$$T(x) = \frac{m}{m-n} + \frac{n}{m+n}$$



مثال: عددهای صحیح مقادیر شده بر عبارت گویا را انجام دهید.

$$\frac{1^x}{2x-7} - \frac{2x}{x^2-9}$$

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \div (x+y) =$$

$$\frac{m^3-n^3}{(mn-n^2)^2} \div \frac{mn+m^2}{m^2-n^2} =$$

$$a \div \frac{a-1}{2} - \frac{a^3+2a(a-1)-1}{2a^2+2a} \times \frac{-2a}{a^2-2a+1} - \frac{2a^2}{a^2-1} =$$

$$\left(\frac{n}{m-n} + \frac{m}{m+n}\right) \left(\frac{m+n}{m^2+n^2}\right) \left(\frac{m-n}{m+n}\right) =$$

مثال: صورت و مخرج هر کس را تجزیه و بسط عبارت را ساده کنید.

$$\frac{7x^2+7x-3}{2x^2-x-7} =$$

$$\frac{y^2+1}{y^4-1} =$$

$$\frac{y^4-y^2}{y^4+y^3+y^2} =$$

$$\frac{a^5-a^3-12a}{2a^2+1 \cdot a} =$$



گویا کردن مخرج کسرها:

در سال گذشته با گویا کردن مخرج کسرهایی شامل اعداد رادیکالی آشنا شدیم. حال می‌خواهیم کسرهایی را بررسی کنیم که مخرج آنها بصورت  $\pm a \pm \sqrt{b}$  باشد. در این حالت باید بصورت مخرج گویا شده را در مزدوج مخرج ضرب کنیم.

مثال: مخرج کسرهایی زیر را گویا کنید.

$$\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2}{2+\sqrt{4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$\frac{7}{2-\sqrt{2}}$$

$$\frac{-5}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

$$\frac{8}{2\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-2}$$



@iemath

tel : 09024619001

دانلود از اپلیکیشن یادرس



حذف رادیکال از عبارتهای جبری:

هائیکه گویا کردن که هم توان عبارتهای جبری شامل رادیکال را نیز بصورت گویا تبدیل کرد. و مقب داریم که اگر در خروجی که رادیکال با فرض ۳ وجود داشته باشد، برای گویا کردن خروجی که از آنجا چنان و آنرا استفاده کنیم

مثال: خروجی کههای زیر را گویا کنید

$$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2}-\sqrt{x}+1}$$

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{r}}+a^{\frac{1}{r}}b^{\frac{1}{r}}+b^{\frac{1}{r}}}$$

$$\frac{a-1}{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$





تمرینهای فصل سوم:

۱. حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$\left(\frac{1}{7}x^{-1}y^3\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{2x^2}{y^3}\right)^{-2}$$

$$125 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^P \leq 2125 \rightarrow P = ?$$

$$\left(27^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{3}} \times 27^{\frac{1}{3}} \times 81^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{8}}$$

$$(4 + \sqrt{18})(\sqrt{10} - \sqrt{6})(\sqrt{4} - \sqrt{18})$$

$$\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{8}}}$$

۲. عبارتهای که صورت مجموع چند جمله‌اند را تجزیه کنید و آنهایی که صورت حاصلضرب چند براتر هستند به یک اتحاد حاصلضرب کرده و ساده کنید.

$$(1 + x + x^2)(1 - x)(1 + x)(1 - x + x^2)$$

$$2^3y^3 + 7x^2y^2 + 12xy + 1$$

$$(a^2 - 2a^3 + 9)(a^3 + 3)$$



$$r - b^r y^r - by =$$

$$1 - 2x - x^r =$$

$$p^r - 7p^r q + 9q^r =$$

$$(x + r z - y)(x - y - r z) =$$

$$x^{\omega} + x^{\epsilon} + x^r + x^r + x + 1 =$$

$$x^r - 1 + (x+r)^r - 2x =$$

$$\frac{r x^r + 12x + 9}{x^r + 2x^r + 7} =$$

$$\frac{a^r - 1}{a} \times \frac{a^r}{a-1} \times \frac{1}{a+1} =$$

$$\frac{1}{a^r + ra + r} + \frac{ra}{a^r + ra + r} + \frac{1}{a^r + ra + r} =$$

$$\left( \frac{x^r}{x-y} - y \right) \left( x + \frac{y^r}{x+y} \right)^{-1} =$$

$$\frac{\frac{x+1}{y}}{\frac{x+z}{yz+1}} - \frac{1}{y(xyz+x+z)} =$$



@iemath

tel : 09024619001

دانلود از اپلیکیشن یادرس





۳ گویا کنفت

$$\frac{1}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

۴ اگر  $\sqrt{a} = 5$  باشد،  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  کدام است؟

۵ ضمیمه حرکت از رادیکالها را به داخل رادیکال ببرید.

$$8\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{10}$$

$$2\sqrt[3]{x}$$

$$2\sqrt[4]{2^3}$$

۶ حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$\sqrt[12]{(\sqrt{3}-1)^7} \div \sqrt[9]{(\sqrt{3}-1)^4}$$

$$\sqrt[5]{(1-\sqrt{2})^5} + \sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4} + \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} + \sqrt[2]{(\sqrt{2}-1)^2}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{x^2} \sqrt[3]{\frac{1}{4xy^2}}}$$

۸ عبارتهای زیر را ساده کنفت

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{25x^2} \sqrt[5]{125x^2}}$$

$$\sqrt[9]{a\sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[3]{\sqrt{a}}} = \sqrt[3]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[9]{a} \times (\sqrt{a})^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{\sqrt{a}}} = \sqrt{a}$$

$$\sqrt{10 + (x+10)^{\frac{1}{2}}} = x$$

۱۰. تخمین کنید

$$x^2 a^3 + x^2 a^2 b + 9ab^2 + b^3 =$$

$$\frac{1}{7E} x^4 - \frac{3}{32} x^2 y^2 + \frac{3}{17} xy^5 - \frac{1}{8} y^7 =$$

$$\frac{x^3}{12} - \frac{12x^2}{20} + \frac{5x}{2} - 7E =$$

$$7Ea^2 - b^2 =$$

$$m^2 - n^2 =$$

$$12a^3 - 2V =$$





تقریباً فصل سوم:

۱ اگر  $x+y=7$  و  $xy=2$  باشد حاصل  $x^3+y^3$  کدام است؟

- ۱. ۲۱۷
- ۲. ۲۳۸
- ۳. ۲۴۴
- ۴. ۲۷۴

۲ در تجزیه عبارت  $144 - (x^2 - 7x - 4)^2$  کدام عامل ضرب موجود ندارد؟

- ۱.  $x-1$
- ۲.  $x-4$
- ۳.  $x+2$
- ۴.  $x+4$

۳ حاصل  $\sqrt{\frac{19}{7} + \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}}}$  کدام است؟

- ۱.  $\frac{1}{3}$
- ۲.  $\frac{1}{2}$
- ۳. ۱
- ۴.  $\frac{2}{3}$

۴ کسری  $\frac{2x^2+10x+11}{x^2-12x+35}$  را بر کسری  $\frac{x^2-12x+35}{x^2+11x-10}$  تقسیم کنیم حاصل کدام است؟

- ۱.  $x^2-11x-10$
- ۲.  $x^2-11x+10$
- ۳.  $x^2+11x+10$
- ۴.  $x^2+11x-10$

۵ برای آن  $m$  مقدار عبارت  $4x^2-7x+m$  مربع کامل است؟

- ۱.  $\frac{4}{9}$
- ۲.  $\frac{9}{4}$
- ۳.  $\frac{2}{3}$
- ۴.  $\frac{3}{2}$

۶ حاصل  $1001^2 - 999^2$  کدام است؟

- ۱. ۱۰۰۰
- ۲. ۲۰۰۰
- ۳. ۴۰۰۰
- ۴. ۷۰۰۰

۷ مجموع ریشه های معادله  $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$  کدام است؟

- ۱. صفر
- ۲. ۱
- ۳. ۲
- ۴. -۲

۸ عبارت  $7x^2 - 5x - 6$  بر کدام عبارت زیر تقسیم است؟

- ۱.  $3x-2$
- ۲.  $2x+3$
- ۳.  $2x-3$
- ۴.  $3x+4$

۹ اگر  $(a > 1)$  ،  $a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$  باشد حاصل  $a + \frac{1}{a}$  کدام است؟

- ۱.  $\frac{2\sqrt{a}}{2}$
- ۲.  $\frac{a\sqrt{a}}{3}$
- ۳. ۲
- ۴. ۳

۱۰ ساده شده عبارت  $\sqrt{\sqrt{12} - \sqrt{3}} - \sqrt{2\sqrt{27}}$  کدام است؟

- ۱.  $-2\sqrt{3}$
- ۲.  $7\sqrt{3}$
- ۳.  $\sqrt{2}$
- ۴.  $-3\sqrt{2}$

۱۱. مقدار عبارت  $x = \frac{1}{\lambda}$  را در  $7\epsilon x^3 - 8\lambda x^2 + 12x - 1$  کلام است؟

$\frac{1}{\lambda} \epsilon^4$        $\frac{3}{5} \epsilon^3$        $-\frac{1}{\lambda} \epsilon^2$        $-\frac{1}{\lambda} \epsilon$

۱۲. حاصل عبارت  $\sqrt[3]{3} + \sqrt{18} - \frac{\sqrt[3]{45} - \sqrt{32}}{2}$  کلام است؟

$2\sqrt{2} + \sqrt{3} \epsilon^4$        $-2\sqrt{3} \epsilon^3$        $2\sqrt{2} \epsilon^2$        $\sqrt{2} \epsilon$

۱۳. مقدار  $x$  در  $\sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x}} = \sqrt{8}$  کلام است؟

$4 \epsilon^4$        $\sqrt{4} \epsilon^3$        $2 \epsilon^2$        $\sqrt[3]{2} \epsilon$

۱۴. حاصل  $(\sqrt{32} + \sqrt[3]{32} - \sqrt{20})^{13}$  کلام است؟

$\epsilon^4$  صفر       $1 \epsilon^3$        $(\sqrt{2})^{13} \epsilon^2$        $(2\sqrt{2})^{13} \epsilon$

۱۵. در حاصل عبارت  $(2x^2 - 3x - 2)^2$  ضریب  $x^3$  کلام است؟

$-12 \epsilon^4$        $12 \epsilon^3$        $7 \epsilon^2$        $7 \epsilon$

۱۶. با افزودن کلام عدد به عبارت  $5x^2 - 7x + \frac{1}{x}$  جمع در آن حاصل می شود؟

$12 \epsilon^4$        $7 \epsilon^3$        $\frac{15}{x} \epsilon^2$        $2 \epsilon$

۱۷. اگر  $A = (2 - \sqrt{3})(7 + 5\sqrt{3})$  و  $B = \sqrt{27} + 5$  باشد حاصل  $\frac{2A}{B} + 1$  کلام است؟

$1 + \sqrt{3} \epsilon^4$        $1 - \sqrt{3} \epsilon^3$        $2\sqrt{3} \epsilon^2$        $\sqrt{3} \epsilon$

۱۸. اگر  $x + \frac{1}{x} = 4$  باشد حاصل  $(x - \frac{1}{x})^2$  کلام است؟

$16 \epsilon^4$        $17 \epsilon^3$        $14 \epsilon^2$        $12 \epsilon$

۱۹. کلام حاصل در تجزیه عبارت  $xy^2 - x^2y^3 - 1 + y$  به مرتبه  $x$  کلام است؟

$xy + 1 \epsilon^4$        $xy - 1 \epsilon^3$        $1 + y \epsilon^2$        $1 - y \epsilon$

۲۰.  $\frac{\sqrt[3]{45} - \sqrt{18}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$  زیر کلام است؟

$$A = \frac{\sqrt[3]{45} - \sqrt{18}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} \times (\sqrt{(32)^{-1}})$$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon^4$        $-\sqrt{2} \epsilon^3$        $\frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon^2$        $\sqrt{2} \epsilon$