فصل ۳

توان های گویا و عبارات جبری

۱.۳ ریشه و توان اعداد حقیقی

در سال گذشته با ریشه های دوم و سوم عددها آشنا شده اید. ریشه و توان رابطه دو سویه ای با هم دارند.

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \longleftrightarrow (-3)^3 = -27 \qquad \text{یا} \qquad -27 \underset{\text{ریشه سوم}}{\overset{\text{توان سه}}{\rightleftharpoons}} (-3)$$

مثال ۱.۳. در هر مورد جاهای خالی را پر کنید.

$11^2 = 121 \longleftrightarrow$ $\qquad$ $2^4 = 16 \longleftrightarrow$

$(0/5)^2 = 0/25 \longleftrightarrow$ $\qquad$ $(0/25)^2 = 0/0625 \longleftrightarrow$

$\sqrt{81} = 9 \longleftrightarrow$ $\qquad$ $(-9)^2 = 81 \longleftrightarrow$

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \longleftrightarrow$ $\qquad$ $\sqrt[3]{27} = 3 \longleftrightarrow$

$\sqrt{1000} = 10\sqrt{10} \longleftrightarrow$ $\qquad$ $\sqrt{100} = 10 \longleftrightarrow$

مثال ۲.۳. حجم یک مکعب برابر $50cm^3$ است. ضلع مکعب با دقت یک رقم اعشار چقدر است؟

در حالت کلی توان و ریشه رابطه ی عکس با هم دارند. مطالب مطرح شده در بالا را بصورت دقیق تر در تعریف زیر آورده ایم.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $n \geq ۲$ عددی طبیعی باشد.دراین صورت عدد حقیقی b را یک ریشه n ام عدد حقیقی a گوییم هرگاه $b^n = a$ باشد.

مثلا ۳− ریشه پنجم ۲۴۳− است چرا که $-۲۴۳ = (-۳)^۵$. همچنین دو عدد ۲ و ۲− ریشه چهارم ۱۶ می باشند چراکه $۱۶ = (\pm ۲)^۴$ است. اگر n زوج باشد عدد حقیقی و مثبت a دارای دو ریشه n ام می باشد که قرینه یکدیگرند. در این حالت ریشه n ام مثبت را ریشه n ام اصلی می نامیم و با نماد $\sqrt[n]{a}$ نشان می دهیم. پس حاصل عبارت $\sqrt[۴]{۸۱}$ فقط برابر ۳ است و هیچگاه از عبارت نادرست $\sqrt[۴]{۸۱} = -۳$ استفاده نمی کنیم. اعداد منفی دارای ریشه n ام زوج نیستند ولی ریشه n ام فرد دارند. مثلا $\sqrt[۴]{-۳۲}$ وجود ندارد اما $\sqrt[۵]{-۳۲} = -۲$ است.

مثال ۳.۳. کامل کنید.

۱) $\sqrt[۳]{۶۴} =$ ۲); $\sqrt[۶]{۶۴} =$

۳) $\sqrt[۵]{۱۰۲۴} =$ ۴) $\sqrt[۴]{۰/۰۶۲۵} =$

۵) $\sqrt{\frac{۱۲۱}{۱۰۰}} =$ ۶) $\sqrt[۳]{\frac{۱}{x^۳}} =$

۷) $\sqrt{\frac{۳۶}{۲۵}}$ ۸) $\sqrt[۳]{۲\frac{۱۰}{۲۷}}$

۹) $\sqrt[۳]{(۲\sqrt{۲})^۲}$ ۱۰) $\sqrt{۸\sqrt{۴\sqrt[۳]{۶۴}}}$

مهمترین خواص رادیکال ها در زیر فهرست کرده ایم.

۱) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{فرد } n \\ |a| & \text{زوج } n \end{cases}$

۲) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ واضح است که باید b, a مثبت باشند.

۳) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

۴) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad m, n \in \mathbb{N}, \quad a \geq 0$

۵) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad m, n \in \mathbb{N}, \quad a \geq 0$

۶) $a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b} & n > 1 \quad \text{فرد } n \\ \sqrt[n]{a^n b} & b \geq 0 \quad a \geq 0 \quad \text{زوج } n \\ -\sqrt[n]{a^n b} & b \geq 0 \quad a \leq 0 \quad \text{زوج } n \end{cases}$

۷) $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a} \qquad a > 0, \qquad m, n \in \mathbb{N}$

یادداشت تاریخی: رسم عدد $\sqrt{2}$ روی محور یا کلا رسم پاره خطی با طول $\sqrt[3]{2}$ یکی از قدیمی ترین مسائل در تاریخ ریاضیات است. این مسئله به تضعیف مکعب معروف است. داستانی نقل می کنند که یکی از فراعنه مصر که مقبره ای برای فرزندش می ساخته (مقبره به شکل مکعب مستطیل بوده است. البته مدفن اصلی مقبره) به مهندسان دستور داده که مقبره کوچک است و آن را دو برابر کنید. مهندسان به اشتباه اضلاع مکعب را دو برابر کرده اند و مقبره بسیار بزرگتر از انتظار پادشاه بود. در واقع مکعب مستطیلی که حجم آن دو برابر دیگری باشد نیاز به ترسیم و استفاده از عدد $\sqrt[3]{2}$ دارد. اما به کمک خط کش و پرگار ساده این کار امکان پذیر نیست. در این زمینه می توانید مسئله تضعیف مکعب را در گوگل جستجو کنید.حال ممکن است این سوال به ذهنتان خطور کند که از کجا بدانیم چه اعدادی را می شود با خط کش و پرگار ترسیم کرد. پاسخ دقیق به این پرسش درحال حاضر با اطلاعات شما غیرممکن است اما بطور خلاصه می توان گفت تمام اعداد گویا ترسیم پذیرند. عددی حقیقی چون r ترسیم پذیر با خط کش و پرگار است هرگاه بتوان با تعداد متناهی عملیات جمع یا تفریق یا ضرب یا تقسیم و یا ریشه دوم گرفتن از اعداد صحیح حاصل شود. پس با این حساب چون ۲ و ۳ ترسیم پذیرند پس عدد $\sqrt{3+\sqrt{5}}+2$ نیز ترسیم پذیر است.

تذکر مهم: آیا بدون استفاده از ماشین حساب می توان مقدار تقریبی (اما با دقت بالا) رادیکال ها را بدست آورد؟ پاسخ مثبت است. دستور زیر در این ارتباط بسیار مفید است:

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n \pm b} \approx a \pm \frac{b}{na^{n-۱}}$$

$$\sqrt[۳]{۶۵} = \sqrt[۳]{۴^۳ + ۱} \approx ۴ + \frac{۱}{۳ \times ۴^۲} = ۴ + ۰/۰۲ = ۴/۰۲$$

$$\sqrt[۵]{۳۰} = \sqrt[۵]{۲^۵ - ۲} \approx ۲ - \frac{۲}{۵ \times ۲^۴} = ۲ - ۰/۰۲ = ۱/۹۸$$

مثال ۴.۳. درست و نادرست را مشخص کنید.

۱ – هر عدد حقیقی دو ریشه پنجم دارد که قرینه یکدیگرند.

۲ – ریشه های چهارم عدد ۱۶ دو عدد $\pm\sqrt[۴]{۱۶}$ می باشند

۳ – هر عدد همواره ریشه n ام دارد.

۴ – هر عدد فرد همواره دارای ریشه هفتم است.

مثال ۵.۳. آیا رابطه $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ درست است؟ چرا؟

مثال ۶.۳. آیا رابطه $(\sqrt[n]{a})^n = a$ همیشه درست است؟ چرا؟

مثال ۷.۳. اگر $x = \sqrt[n]{a}$ باشد و فرجه n را افزایش دهیم برای مقدار x چه اتفاقی می افتد؟ بزرگتر می شود یا کوچکتر می شود؟

مثال ۸.۳. از دو عدد $\sqrt[۳]{۲}$ و $\sqrt[۴]{۳}$ کدام بزرگتر است؟

مثال ۹.۳. عدد $\sqrt[۳]{۳۲۱}$ مابین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

مثال ۳.۱۰. کامل کنید.

$۱)\sqrt[۳]{۱۲۵} =$

$۲)\sqrt[۵]{-۳۲} =$

$۳)\sqrt[۷]{۱۲۸} =$

$۴)\sqrt[۸]{۲۵۶} =$

$۵)\sqrt[۹]{-۱} =$

$۶)\sqrt[۴]{۶۲۵} =$

$۷)\ -\sqrt[۴]{۱۶} =$

$۸)\sqrt[۵]{-\frac{۱}{۳۲}} =$

$۹)\sqrt[۳]{-۰/۰۰۱} =$

$۱۰)\sqrt[۶]{۰} =$

$۱۱)\sqrt[۴]{(-۳)^۴} =$

$۱۲)\sqrt[۶]{(-۲)^۶} =$

$۱۳)\sqrt[۴]{۱۶} \times \sqrt[۴]{۸۱} =$

$۱۴)a^۲ \bigcirc a^۳ \qquad ۰ < a < ۱$

$۱۵)\sqrt{a} \bigcirc \sqrt[۳]{a} \qquad ۰ < a < ۱$

$۱۶)\sqrt[۳]{a} \bigcirc \sqrt[۵]{a} \qquad ۰ < a < ۱$

$۱۷)(\sqrt[۴]{۱۶})^۴ =$

$۱۸)(\sqrt[۳]{-۸})^۲ =$

$۱۹)\sqrt{۱۵۰} =$

$۲۰)\sqrt{۴۸۶} =$

$۲۱)\sqrt[۳]{۱۰۸۰} =$

$۲۲)\sqrt[۵]{۸۰۰}$

$۲۳)\sqrt[۳]{\frac{۳}{۴}} \times \sqrt[۳]{\frac{۹}{۱۶}} =$

$۲۴)\ \sqrt[۲۱]{۱۲۸ \times ۳^{۱۴}}$

مثال ۱۱.۳. حاصل عبارات زیر را تاسرحدامکان ساده کنید.

۱) $\sqrt[۴]{\frac{(a+b)^۴}{(a-b)^۴}} =$

۲) $\sqrt{۴x^۲+۴x+۱} =$

۳) $\frac{\sqrt{x^۳y^۳}}{\sqrt{xy}}$

۴) $۲\sqrt{۲۷}\times ۳\sqrt{۱۲} =$

۵) $\sqrt[۳]{a^۲}\times\sqrt[۴]{a^۳} =$

۶) $\sqrt[۵]{a^۳}\times\sqrt[۶]{a^۵}\times\sqrt[۳]{a^۲} =$

۷) $\sqrt[۳]{۴-۲\sqrt{۲}}\times\sqrt[۶]{۶+۴\sqrt{۲}} =$

۸) $\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲\sqrt[۳]{۲}}} =$

۹) $\sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}}\times\sqrt{۲-\sqrt{۲}} =$

۱۰) $\sqrt{(c-۱)^۲}-\sqrt{(۱+c)^۲} = \qquad , c\in[-۱,۱]$

۱۱) $(۲\sqrt{۲}-\sqrt{۵}+۳\sqrt{۲})(\sqrt{۱۸}-\sqrt{۲۰}+۲\sqrt{۲})$

تمرین ۱.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $\sqrt[5]{-32(x-y)^{10}} =$

۲) $\sqrt[3]{-(x-y)^{6}} =$

۳) $\sqrt[3]{27c^{7}} =$

۴) $\sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{2} =$

۵) $\mp\sqrt{6/25} =$

۶) $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} =$

۷) $\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{11+4\sqrt{6}} =$

۸) $\sqrt{31} \times \sqrt{6-\sqrt{5}} \times \sqrt{3+\sqrt{3-\sqrt{5}}} \times \sqrt{3-\sqrt{3-\sqrt{5}}} =$

۹) $\sqrt{11-2\sqrt{2}} =$

۱۰) $\sqrt{13+\sqrt{48}} =$

۱۱) $\sqrt{2+\sqrt{3}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} =$

۱۲) $\sqrt[4]{\dfrac{-243}{x^{2}-\sqrt{x^{4}+6x^{2}+9}}} =$

۱۳) $x\sqrt{-x} \times \sqrt[3]{x} =$

۲.۳ توان های گویا

از کلاس نهم برخی مطالب را در مورد توان می دانید. با اینحال جهت مرور ، مطالب زیر را آورده ایم.

تعریف ۲.۳. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ باشد و $a \in \mathbb{R}$ عددی دلخواه. عدد a^n را بصورت :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n مرتبه}}$$

تعریف می کنیم. برای اعداد صحیح منفی نیز این تعریف قابل تعمیم است . a^{-n} را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$a^{-n} = \frac{۱}{a^n}$$

در نهایت $a^{۰} = ۱$ تعریف می شود و حال a^n را برای تمام اعداد صحیح تعریف کرده ایم. مهمترین خواص توان عبارتند از :

۱ - همواره $a^n \times a^m = a^{m+n}$.

۲- همواره $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

۳ - همواره $(a^m)^n = a^{mn}$

پرسش: آیا دو مقدار a^{m^n} و $(a^m)^n$ مساوی اند؟ چرا؟

حال می خواهیم توان را به اعداد گویا تعمیم دهیم.

گازی با فشار وارد یک مخزن می شود. در هر دقیقه فشار گاز دو برابر می شود تا به فشار معینی برسد.

دقیقه	۱	۲	۳	$\cdots$	n
فشار	۲	$۲^۲$	$۲^۳$	$\cdots$	۲^n

حال پرسش این است که در ۳۰ ثانیه پس از دقیقه دوم فشار گاز چقدر خواهد بود؟ واضح است که جواب عددی چون a است که $۲^۲ < a < ۲^۳$. چون زمان دقیق را داریم پس می توان ادعا کرد که $a = ۲^{\frac{۵}{۲}}$ که البته درست است اما چه معنایی می دهد؟ اگر تصور کنیم مقدار فشار در هر ۳۰ ثانیه x برابر می شود پس باید بعد از ۱ دقیقه $x \times x = x^۲$ برابر شود اما بعد از یک دقیقه دو برابر فشار داریم یعنی $x^۲ = ۲$ و لذا $x = \sqrt{۲}$. حال کل زمان دو نیم دقیقه شامل ۵ زمان ۳۰ ثانیه است پس فشار می شود $x^۵$ یعنی $a = x^۵ = \sqrt{۲^۵}$. به عبارت بهتر باید داشته باشیم

$$۲^{\frac{۵}{۲}} = \sqrt{۲^۵}$$

حال می توان در حالت کلی توان گویای یک عدد حقیقی را تعریف کرد.

تعریف ۳.۳. فرض کنید a عددی حقیقی باشد. اگر $m, n \in \mathbb{N}$ باشند تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال ۱۲.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $(-۸)^{\frac{۱}{۳}} =$

۲) $۸^{\frac{۲}{۳}} =$

۳) $(۳۲)^{-\frac{۲}{۵}} =$

۴) $(-۸)^{\frac{۸}{۶}} =$

۵) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[۳]{x}\sqrt[۵]{y^۲}}{\sqrt[۶]{z^۴}}} =$

۶) $(۰/۲۵)^{\frac{۳}{۲}} =$

۷) $\sqrt[۵]{۲\sqrt[۳]{\sqrt{۸}}} + (\sqrt[۵]{\sqrt{۲}})^۳ - ۲^{۰/۳} - ۸^{۰/۱} =$

تمرین ۲.۳. درستی روابط حاکم بر اعداد توانداری که قبلا در مورد توان های صحیح گفته شده را در مورد توان های گویا تحقیق کنید. بعنوان نمونه

$$\begin{aligned} a^r \times a^s = a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{pn}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{qm+pn}} \\ &= a^{\frac{pn+qm}{nq}} \\ &= a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \\ &= a^{r+s} \end{aligned}$$

مثال ۱۳.۳. آیا تساوی $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ درست است؟ در مورد جواب بحث کنید.

مثال ۱۴.۳. هرگاه $a > ۱$ باشد ثابت کنید $a^n > a^{n-۱}$. در حالتی که $۰ < a < ۱$ باشد چه حکمی می توان کرد؟ ادعای خود را ثابت کنید.

samadit.farhad@gmail.com

مثال ۱۵.۳. آیا محاسبه زیر درست است؟

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = \left[(-3)^4\right]^{\frac{1}{4}} = \left[(-3)^{\frac{1}{4}}\right]^4 = (-3)^{\frac{1}{4}\times 4} = (-3)^1 = -3$$

مثال ۱۶.۳. نیلوفر و کیوان هر کدام عبارت $\sqrt[6]{a^2}$ را ساده کرده اند. جوابهای آنها بصورت زیر است. جواب کدام دقیق تر است؟ چرا؟

$$\text{راه حل کیوان} \longrightarrow \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3\times 2]{a^2} = \sqrt[3]{a}$$

$$\text{راه حل نیلوفر} \longrightarrow \sqrt[6]{a^2} = \begin{cases} \sqrt[3]{a} & a > 0 \\ \sqrt[3]{-a} & a < 0 \end{cases}$$

مثال ۱۷.۳. از رابطه $(\frac{1}{2})^{2\alpha-3} = 4 \times 16^{\alpha}$ مقدار α را بیابید.

تمرین ۳.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $(3\frac{3}{8})^{-\frac{2}{3}}$

۲) $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right)^2 \times \sqrt{\frac{1}{xy}} \times \left(\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}\right)^{-1}$

۳) $\left(a^{\frac{5}{7}}\right)^{0/7} \div \left(d^{-\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}$

۴) $\left(a^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} \times a^{\frac{10}{3}} \times y^{\frac{4}{5}}$

۵) $\left(\sqrt[3]{32\sqrt[4]{16\sqrt[5]{128}}} \div \sqrt[4]{1024\sqrt[5]{256\sqrt[3]{64}}}\right)^{-\frac{30}{53}}$

۶) $0/027^{-\frac{1}{3}} - (-\frac{1}{6})^{-2} + 256^{0/75}$

۷) $\dfrac{\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}}}}}{\sqrt{\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}}}$

۸) $\left(\frac{1}{3}\right)^{p+2} \cdot \sqrt{\frac{1}{27}} \geq 9 \longrightarrow p = ?$

۳.۳ عبارت های جبری

در این بخش به معرفی چند اتحاد جبری دیگر و استفاده از آنها در تجزیه عبارت های جبری می پردازیم.
از کلاس نهم با اتحاد ها آشنا شده اید. یک تساوی که به ازای تمامی مقادیر متغیر موجود در آن تساوی درست باشد را یک اتحاد گوییم. به دو تساوی زیر دقت کنید.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \tag{۱.۳}$$

$$x^2 - 5 = 4 \tag{۲.۳}$$

تساوی (۳ ۰ ۱) به ازای تمامی مقادیر y, x درست است و لذا به آن اتحاد گوییم . در حالیکه تساوی (۳ ۰ ۲) به ازای دو مقدار $x = 3, x = -3$ درست است و لذا به آن معادله گوییم. از کلاس نهم با برخی اتحادها آشنا شده اید. در اینجا آن اتحادها را بازنویسی می کنیم.

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

حال آماده هستیم تا چند اتحاد جدید معرفی کنیم. اولین اتحاد ، اتحاد مربع سه جمله ای است. یعنی هدف یافتن حاصل $(x+y)^3$ است. به کمک اتحادهای بالا عبارت فوق را تا سرحد امکان ساده می کنیم.

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y)^2 \times (x+y) \\
&= (x^2 + 2xy + y^2) \times (x+y) \\
&= x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2 + y^2x + y^3 \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3
\end{aligned}$$

بنابراین نتیجه حاصل بصورت زیر بدست می آید:

$$\boxed{(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$$

اگر در رابطه فوق $(-b) \longrightarrow b$ تبدیل شود اتحاد زیر حاصل می شود:

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

در نهایت اگر از xy در جملات دوم و سوم فاکتور بگیریم خواهیم داشت:

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$$

مثال ۱۸.۳. به کمک آخرین رابطه عبارت های $x^3 + y^3$ و $x^3 - y^3$ را تجزیه کنید.

نتیجه مثال بالا به قدری اهمیت دارد که به آنها اسم اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات بدهیم:

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

مثال ۱۹.۳. حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها بدست آورید.

۱) $(2x - y^2)^2 =$

۲) $(\frac{x}{4} - \frac{y}{3})^2 =$

۳) $(x-y)(x+y)(x^4 + x^2y^2 + y^4) =$

۴) $(2x-1)^3 =$

۵) $(1 + x^2 + x^4)(1 - x^2) =$

۶) $(101)^3 =$

۷) $(x - \frac{1}{2})(8x^2 + 2)(2x + 1) =$

۸) $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) - 8y^3 =$

۹) $\dfrac{(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1}{(x+1)^2 - 2(x+1) + 1}$

۱۰) $(x-1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1)$

۱۱) $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)(8x^3 + y^3)$

۱۲) $(a - b - c)^2 - (a - b + c)^2$

مثال ۲۰.۳. فرض کنید $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ باشد. حاصل عددی عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $x^2+\frac{1}{x^2}=$

۲) $x^3+\frac{1}{x^3}=$

۳) $x^2-\frac{1}{x^2}=$

۴) $x^3-\frac{1}{x^3}=$

۵) $x^4+\frac{1}{x^4}=$

مثال ۲۱.۳. به کمک اتحادها عبارات زیر را تجزیه کنید.

۱) $x^6-y^6=$

۲) x^3-125

۳) $27x^3+1$

۴) $4a^2-b^2-2b+4a=$

۵) $9x^2-3x-2=$

۶) $x^3-x^2-x+1=$

۷) $a^4-2a^2+49=$

۸) $x^2y^2-x^2y^3-1+y=$

۹) $64x^3-48x^2+12x-1=$

۱۰) $4a^4-64=$

۱۱) $(x+1)^3+8=$

۱۲) $x^5+x+1= \qquad (hint: x^2-x^2)$

۱۳) $4x^4+1$

۱۴) $8x^3-12x^2+6x-1=$

تمرین ۴.۳. به کمک اتحادها حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) $(x-2y^2)^2-(x+2y^2)^2$

۲) $(\frac{3}{2}xy-\frac{1}{2}y)^2$

۳) $(2m-n)(4m^2+2mn+n^2)$

۴) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

۵) $(2+x)(4-2x+x^2)(8-x^3)$

۶) $(x-y)^3-(x+y)^3$

۷) $(2x-y)(4x^2+y^2)(2x+y)+y^4$

۸) $(a-b+c)(a-b-c)$

تمرین ۵.۳. تجزیه کنید.

۱) $ab-a^2b^2$

۲) $a+b+a^2-b^2$

۳) $a^2-b^2+a^3-b^3$

۴) $x^6-(yz)^6$

۵) $36a^4b-16b^5$

۶) $a^2c^2+b^2d^2-b^2c^2-a^2d^2-4abcd$

۷) c^6+p^6

۸) x^3+64m^3

۹) $(a+b)^3-(a-b)^3-2b$

۱۰) $(a+b)^3+(a-b)^3-3a$

کاربرد تجزیه در یافتن ب م م و ک م م چندجمله‌ایها

یک چندجمله‌ای مثل $a+b$ را در نظر بگیرید. اگر این دو جمله‌ای را در اعداد صحیح یا هر چندجمله‌ای دیگری ضرب کنیم ، حاصل را مضربی از $a+b$ گوییم. پس عبارات زیر همگی مضارب $a+b$ هستند.

$$2(a+b)\ ,\ (a^2-b^2)\ ,\ (a^3-b^3)\ \cdots$$

همچنین عبارت $a+b$ مقسوم علیه مشترک هر سه عبارت فوق است. بطور کلی برای یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عبارت جبری ابتدا آنها راتجزیه کرده و سپس برای ب م م عوامل مشترک با کمترین توان در تجزیه را منظور می کنیم و برای ک م م هم عوامل مشترک را با بزرگترین توان در عوامل غیرمشترک ضرب می کنیم. به عنوان یک مثال ساده فرض کنید هدف یافتن ب م م و ک م م دو عبارت جبری $a^2-b^2\ ,\ a^3-b^3$ است. با تجزیه کردن آنها داریم:

$$\begin{cases} a^2-b^2=(a-b)(a+b) \\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \end{cases}$$

پس با این حساب ب م م برابر $a-b$ است و ک م م برابر $(a-b)(a+b)(a^۲+ab+b^۲)$. یکی از فواید محاسبه ک م م در مخرج مشترک گرفتن برای جمع و تفریق عبارات گویاست. در قسمت بعد عبارات گویا را بررسی می‌کنیم.

عبارات گویا

تعریف ۴.۳. منظور از یک عبارت گویا عبارتی است که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشند. اگر $p(x)$, $q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند عبارت

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

را یک عبارت گویا گوییم. شرط تعریف چنین عبارتی آنست که $q(x)\neq ۰$ باشد.

مثال ۲۲.۳. معین کنید هر عبارت گویا به ازای چه مقادیری از متغیرش تعریف شده است؟(دامنه‌ی تعریف آن را بیابید)

۱) $f(x)=\frac{x+۱}{x-۳}$

۲) $g(x)=\frac{۳y}{y^۲-۴}$

۳) $h(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۴+۱}$

۴) $k(x)=\frac{z}{۲z^۲-۷z+۵}$

۵) $\ell(x)=\frac{x}{x}$

۶) $u(x)=\frac{۳}{۲x^۲+۲x}+\frac{۲x-۱}{x^۲-۱}-\frac{۲}{x}$

مثال ۲۳.۳. عملیات‌های خواسته شده بر عبارات گویا را انجام دهید. اگر تنها یک کسر در صورت مسئله است هدف ساده کردن آن است.

$$۱)\ \frac{۶x^۲+۷x-۳}{۲x^۲-x-۶}$$

$$۲)\ \frac{۱۳}{۲x-۶}-\frac{۲x}{x^۲-۹}$$

$$۳)\ \frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}\div(x+y)$$

$$۴)\ \frac{m^۳-n^۳}{(mn-n^۲)^۲}\div\frac{mn+m^۲}{m^۲-n^۲}$$

$$۵)\ a\div\frac{a-۱}{۲}-\frac{a^۳+۳a(a-۱)-۱}{۲a^۲+۲a}\times\frac{-۴a}{a^۲-۲a+۱}-\frac{۴a^۲}{a^۲-۱}$$

$$۶)\ \left(\frac{n}{m-n}+\frac{m}{m+n}\right)\left(\frac{m+n}{m^۲+n^۲}\right)\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$$

حذف رادیکال از عبارات جبری

در اتحاد $a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$ اگر قرار دهیم $a=\sqrt[۳]{x}\ ,\ b=۱$ آنگاه:

$$(\sqrt[۳]{x})^۳-۱=\underbrace{(x-۱)}_{\text{بدون رادیکال}}=\underbrace{(\sqrt[۳]{x}-۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}_{\text{عبارت شامل رادیکال‌ها}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید با ضرب دو عبارت در هم حاصل یک عبارت فارغ از رادیکال است. این کار اغلب به گویا کردن معروف است و یک دلیل ساده این کار این است که کلا کار با چندجمله‌ایها و عملیات بر آنها بسیار ساده تر از کار با عبارات رادیکالی است. بویژه زمانی که عبارت رادیکالی در مخرج باشد ، از بین بردن رادیکال آن امری مستحب است. به عنوان مثال ساده مخرج عبارت $\frac{۱}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ را گویا می کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{۱}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}&=\frac{۱}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\\&=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\\&=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}\end{aligned}$$

مثال ۲۴.۳. مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

۱) $\dfrac{۱}{\sqrt{x}\sqrt[۳]{y}}$

۲) $\dfrac{۱}{\sqrt{x}-۲}$

۳) $\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱}$

۴) $\dfrac{۱}{a^{\frac{۱}{۲}}+a^{\frac{۱}{۴}}b^{\frac{۱}{۴}}+b^{\frac{۱}{۲}}}$

۵) $\dfrac{a-۱}{\sqrt{a-۱}-\sqrt{a+۲}}$

۶) $\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{x}+۱}$

۷) $\dfrac{۱}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}$

تمرینات تکمیلی

تمرین ۶.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$۱)\ (\frac{۱}{۶}x^{-۱}y^{۳})^{-۲}\cdot\left(\frac{x^{۲}}{y^{۲}}\right)^{-۲}\cdot\left(-\frac{۲x^{۲}}{y^{۳}}\right)^{-۴}$

$۲)\ ۱۲۵\leq(\frac{۱}{۵})^{p}\leq ۳۱۲۵\longrightarrow p=?$

$۳)\ ۱۰^{۲۰}\ \square\ ۲۰^{۱۰}$

$۴)\ ۲۰۲^{۳۰۳}\ \square\ ۳۰۳^{۲۰۲}$

$۵)\ \frac{\sqrt{۳۲}}{\sqrt{۸}}\times\frac{\sqrt[۴]{۳}}{\sqrt[۴]{۴۸}}$

$۶)\ \left(۲۷^{\frac{۱}{۳}}\times ۸^{\frac{۲}{۳}}\times ۳۲^{\frac{۲}{۵}}\times ۸۱^{\frac{۳}{۴}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$

$۷)\ (۴+\sqrt{۱۵})(\sqrt{۱۰}-\sqrt{۶})(\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}})$

$۸)\ \sqrt{۱۷-۴\sqrt{۹+۴\sqrt{۵}}}$

تمرین ۷.۳. عبارت‌هایی که بصورت مجموع چندجمله‌اند را تجزیه‌کنید و آنهایی که بصورت حاصلضرب چند پرانتز هستند به کمک اتحادها ضرب کرده و ساده کنید. عملیات بر عبارات گویا را نیز انجام دهید.

$۱)\ (۱+x+x^{۲})(۱-x)(۱+x)(۱-x+x^{۲})$

$۲)\ p^{۴}-۶p^{۲}q+۹q^{۲}$

$۳)\ x^{۳}y^{۳}+۶x^{۲}y^{۲}+۱۲xy+۸$

$۴)\ (x+۳z-y)(x-y-۳z)$

$۵)\ (a^{۶}-۳a^{۳}+۹)(a^{۳}+۳)$

$۶)\ x^{۵}+x^{۴}+x^{۳}+x^{۲}+x+۱$

$۷)\ ۲-b^{۳}y^{۳}-by$

$۸)\ x^{۳}-۸+(x+۲)^{۲}-۲x$

$۹)\ ۸-۲x-x^{۲}$

$۱۰)\ \frac{۳x^{۲}+۱۲x+۹}{x^{۶}+۵x^{۳}+۶}$

$۱۱)\ \frac{a^{۲}-۱}{a}\times\frac{a^{۳}}{a-۱}\times\frac{۱}{a+۱}$

$۱۲)\ \left(\frac{x^{۲}}{x-y}-y\right)\left(x+\frac{y^{۲}}{x+y}\right)^{-۱}$

$۱۳)\ \frac{۱}{a^{۲}+۳a+۲}+\frac{۲a}{a^{۲}+۴a+۳}+\frac{۱}{a^{۲}+۵a+۶}$

$۱۴)\ \frac{\frac{x+۱}{y}}{\frac{x+z}{yz+۱}}-\frac{۱}{y(xyz+x+z)}$

$۱۵)\ \frac{۱}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}$ گویا کنید,

$۱۶)\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{xy}+\sqrt[۳]{y^{۲}}}$

$۱۷)\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-\sqrt{y}}$

$۱۸)\ \frac{۱}{۱+\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}$