

# فصل چهارم ریاضی پایه دهم

رشته های تجربی و ریاضی و فیزیک

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی



پاسخ کاملا تشریحی



تمرین های برای آمادگی



مؤلف:

حبیب هاشمی

۱۳۹۶



جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس در برگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی تلگرام @habib\_hashemi پیام دهید.

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

## تدریس خصوصی و مبحثی ریاضیات

متوسطه

و

تضمینی کنکور

تهران و کرج

## مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب فصل چهارم کتاب درسی ریاضی پایه دهم رشته های تجربی و ریاضی و فیزیک نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

- ۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.
  - ۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.
  - ۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.
  - ۴- در این کتاب با نگاهی عمیق تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.
  - ۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.
  - ۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.
  - ۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.
  - ۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.
- در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبيب هاشمی

## درس اول: معادله‌ی درجه‌ی دوم و روش‌های مختلف حل آن

هر معادله که پس از ساده شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن ۲ باشد، معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌نامیم.

شکل کلی معادله درجه دوم

$$ax^2+bx+c=0, (a \neq 0)$$

**مثال:** آیا معادله‌ی  $x = (x-3)^2 - (x+2)^2$  یک معادله‌ی درجه‌ی دوم است؟ خیر

زیرا:

$$(x+2)^2 - (x-3)^2 = (x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 6x + 9) = 10x - 5$$

در نتیجه معادله به صورت  $10x - 5 = x$  درمی‌آید که یک معادله‌ی درجه‌ی یک می‌باشد.

**روشهای حل معادله درجه دوم:**

۱. به کمک تجزیه
۲. به کمک ریشه گیری
۳. روش مربع کامل کردن
۴. روش فرمول کلی ( $\Delta$ )

## حل معادله‌ی درجه‌ی دوم به روش تجزیه

## یاد آوری

تجزیه چند جمله‌ای‌ها: عمل تبدیل یک چند جمله‌ای به حاصل ضرب حداقل دو چند جمله‌ای را تجزیه می‌گوییم.

از جمله تجزیه‌هایی که در حل معادله‌ی درجه‌ی دوم استفاده می‌شوند، عبارت‌اند از:

۱. فاکتورگیری (باید  $c = 0$  باشد)

$$ax^2 + bx = x(ax + b)$$

۲. تجزیه به کمک اتحاد مزدوج: (باید  $b = 0$  باشد)

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

۳. تجزیه به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک: ( $b \neq 0$  و  $c \neq 0$  باشد)

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

**مثال:** عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

۱)  $4x - 8x^2 = x(4 - 8x)$

۲)  $x - x^2 = x(1 - x)$

۳)  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

۴)  $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

۵)  $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

۶)  $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$

۷)  $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x - 2)$

۸)  $x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$

$$۹) x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

$$۱۰) x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1)$$

$$۱۱) x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

$$۱۲) x^2 - 18x + 72 = (x - 6)(x - 12)$$

$$۱۳) x^2 - 15x + 50 = (x - 10)(x - 5)$$

$$۱۴) x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$$

$$۱۵) -x^2 - 7x + 8 = -(x^2 + 7x - 8) = -(x - 1)(x + 8)$$

$$۱۶) 4x^2 - 8x - 12 = 4(x^2 - 2x - 3) = 4(x - 3)(x + 1)$$

**نکته:** در صورتی که نتوانیم از ضریب  $x^2$  فاکتور بگیریم از روش زیر که به روش  $A$  مشهور است استفاده می کنیم.

روش  $A$  را با ذکر یک مثال توضیح می دهیم. فرض کنید می خواهیم عبارت سه جمله ای  $3x^2 - 7x + 4$  را تجزیه کنیم. عبارت را برابر  $A$  در نظر می گیریم و طرفین آن را در ضریب جمله ی درجه ی بالاتر، ضرب می کنیم.

$$A = 3x^2 - 7x + 4$$

$$3A = (3x)^2 - 7(3x) + 12$$

حال دنبال دو عدد می گردیم که جمعشان  $-7$  و ضربشان  $12$  شود؛ این دو عدد  $-3$  و  $-4$  هستند، پس می توان نوشت:

$$3A = (3x - 3)(3x - 4)$$

$$3A = 3(x - 1)(3x - 4)$$

$$A = (x - 1)(3x - 4)$$

حال با تقسیم طرفین عبارت بر  $3$  عبارت  $A$  تجزیه می شود.

**مثال:** عبارت  $5t^2 - 4t - 1$  را تجزیه کنید.

حل:

$$A = 5t^2 - 4t - 1$$

$$5A = (5t)^2 - 4(5t) - 5$$

جمع دو عدد  $(-4)$  و حاصل ضربشان  $(-5)$  است، این دو عدد  $-5$  و  $1$  می باشند.

$$5A = (5t - 5)(5t + 1) \Rightarrow A = (t - 1)(5t + 1)$$

$$\begin{aligned} 1) \quad 3x^2 - 8x + 5 &\Rightarrow 3A = (3x)^2 - 8(3x) + 15 \\ 3A &= (3x - 3)(3x - 5) \\ 3A &= 3(x - 1)(3x - 5) \\ A &= (x - 1)(3x - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad -2x^2 + 5x - 3 &\Rightarrow -2A = (-2x)^2 + 5(-2x) + 6 \\ -2A &= (-2x + 3)(-2x + 2) \\ -2A &= (-2x + 3) - 2(-2x - 1) \\ A &= (-2x + 3)(x - 1) \end{aligned}$$

**مثال:** تجزیه کنید.

$$1) \quad x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 2x^2 + 7x + 5 &\rightarrow A = 2x^2 + 7x + 5 \Rightarrow 2A = (2x)^2 + 7(2x) + 2 \times 5 \\ \Rightarrow 2A &= (2x + 2)(2x + 5) \Rightarrow A = (x + 1)(2x + 5) \end{aligned}$$

$$3) \quad -a^2 + 7a + 18 = -(a^2 - 7a - 18) = -(a + 2)(a - 9)$$

$$\begin{aligned} 4) \quad 2x^2 - 7x + 6 &\rightarrow A = 2x^2 - 7x + 6 \rightarrow 2A = (2x)^2 - 7(2x) + 12 \\ \Rightarrow 2A &= (2x - 3)(2x - 4) = (2x - 3)^2(x - 2) \Rightarrow A = (2x - 3)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad 7x^2 - 13x - 2 &\rightarrow A = 7x^2 - 13x - 2 \Rightarrow 7A = (7x)^2 - 13(7x) - 14 \\ &= (7x - 14)(7x + 1) \rightarrow 7A = 7(x - 2)(7x + 1) \Rightarrow A = (x - 2)(7x + 1) \end{aligned}$$





## ویژگی حاصل ضرب صفر

اگر  $A$  و  $B$  دو عبارت جبری باشند و  $AB=0$ ، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی  $B=0$  یا  $A=0 \rightarrow AB=0$

$$\text{مثال : } (2x-1)(-x+4)=0 \rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \rightarrow 2x=1 \rightarrow x=\frac{1}{2} \\ -x+4=0 \rightarrow x=4 \end{cases}$$

## نکته

اگر بتوان عبارت درجه‌ی دوم  $ax^2+bx+c$  را به کمک فاکتورگیری یا اتحادها تجزیه کرد، آنگاه می‌توان از ویژگی حاصل ضرب صفر برای حل معادله‌ی  $ax^2+bx+c=0$  استفاده کرد.

**مثال:** معادله  $x^2-2x-3=0$  را حل کنید.

$$(x+1)(x-3)=0 \rightarrow x+1=0 \text{ یا } x-3=0 \rightarrow x=-1 \text{ یا } x=3$$

برای اطمینان از صحت جواب‌های حاصل شده، می‌توانیم هر دو جواب به دست آمده را در معادله قرار

دهیم و آنها را آزمایش کنیم. یکی از جواب‌ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

$$x=-1$$

$$x^2-2x-3=0$$

$$(-1)^2-2(-1)-3=0$$

$$1+2-3=0$$

$$0=0 \quad \checkmark$$

$$x=3$$

$$x^2-2x-3=0$$

$$3^2-2(3)-3=0$$

$$9-6-3=0$$

$$0=0 \quad \checkmark$$

**مثال:** معادله‌های درجه‌ی دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

$$x^2 - 3x = 10 \quad (\text{الف})$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x = 10 \xrightarrow{x=5} 5^2 - 15 = 10 \rightarrow 25 - 15 = 10 \rightarrow 10 = 10 \quad \checkmark$$

$$x^2 - 3x = 10 \xrightarrow{x=-2} (-2)^2 - 3(-2) = 1 \rightarrow 4 + 6 = 10 \rightarrow 10 = 10 \quad \checkmark$$

$$3t^2 - t = 0 \quad (\text{ب})$$

$$3t^2 - t = 0 \rightarrow t(3t - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$3t^2 - t = 0 \xrightarrow{t=0} 3(0)^2 - 0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$3t^2 - t = 0 \xrightarrow{t=\frac{1}{3}} 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

**مثال:** معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad (\text{ت}) \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (\text{پ}) \quad 9x^2 - 4 = 0 \quad (\text{ب}) \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad (\text{آ})$$

$$(2x+1)^2 - (x+1)^2 = 5 \quad (\text{چ}) \quad 5x^2 + 7x - 6 = 0 \quad (\text{ج}) \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (\text{ث})$$

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases} \quad (\text{آ})$$

$$9x^2 - 4 = 0 \rightarrow (3x - 2)(3x + 2) = 0 \quad (\text{ب})$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 0 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3} \\ 3x + 2 = 0 \rightarrow 3x = -2 \rightarrow x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \quad (\text{پ})$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow (x+3)^2 = 0 \rightarrow x+3=0 \rightarrow x=-3 \quad (\text{ت})$$

$$3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1) = 0 \quad (\text{ث})$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 0 \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3} \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\Delta x^2 + 7x - 6 = (x+2)(\Delta x - 3) = 0 \quad (\text{ج})$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \\ \Delta x - 3 = 0 \rightarrow \Delta x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{\Delta} \end{cases}$$

$$(2x+1)^2 - (x+1)^2 = \Delta \rightarrow (4x^2 + 4x + 1) - (x^2 + 2x + 1) = \Delta \quad (\text{چ})$$

$$\rightarrow 3x^2 + 2x - \Delta = 0 \rightarrow (3x + \Delta)(x - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x + \Delta = 0 \rightarrow x = -\frac{\Delta}{3} \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

**مثال:** معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

$$۱) \quad x^2 - 11x = -10 \rightarrow x^2 - 11x + 10 = 0 \rightarrow (x-1)(x-10) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 10 \end{cases}$$

$$۲) \quad \Delta t^2 = 20 \rightarrow \Delta t^2 - 20 = 0 \rightarrow \Delta(t-2)(t+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} t-2=0 \rightarrow t=2 \\ t+2=0 \rightarrow t=-2 \end{cases}$$

$$۳) \quad \Delta a^2 - 7a = 2a(a-3) \rightarrow \Delta a^2 - 7a = 2a^2 - 6a \rightarrow 3a^2 - a = 0 \rightarrow a(3a-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 3a-1=0 \rightarrow a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$۴) \quad 4k^2 - 12k + 8 = 0 \rightarrow 4(k-1)(k-2) \rightarrow \begin{cases} k-1=0 \rightarrow k=1 \\ k-2=0 \rightarrow k=2 \end{cases}$$

## حل معادله‌ی درجه‌ی دوم به کمک ریشه‌گیری

اگر  $a$  یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 = a$  عبارت‌اند از:  $x = \sqrt{a}$  و  $x = -\sqrt{a}$

$$x^2 = 25 \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{25} = 5 \\ x = -\sqrt{25} = -5 \end{cases}$$

$$u^2 = a \begin{cases} \xrightarrow{a \geq 0} u = \pm\sqrt{a} \\ \xrightarrow{a < 0} \text{جواب ندارد} \end{cases} \quad \text{حالت کلی ریشه‌گیری:}$$

نکته: در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $b = 0$  باشد می‌توانیم از ریشه‌گیری استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$ax^2 + c = 0 \implies x^2 = -\frac{c}{a} \begin{cases} \xrightarrow{a \text{ و } c \text{ مختلف علامه}} x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \\ \xrightarrow{a \text{ و } c \text{ هم علامت}} \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

**تذکر:** اگر  $x^2 = a$  یک معادله‌ی درجه‌ی دوم باشد که در آن  $a$  یک عدد حقیقی منفی باشد آنگاه این معادله ریشه حقیقی ندارد. (چون جواب عبارت با توان ۲ هیچوقت منفی نمی‌شود)

$$9x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$$

$$-x^2 - 1 = 0 \rightarrow -x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = -1 \quad \text{ریشه ندارد}$$

$$x^2 + 25 = 0 \rightarrow x^2 = -25 \quad \text{ریشه حقیقی ندارد}$$

**مثال:** جواب هر یک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به روش ریشه‌گیری به دست آورید.

$$(r-2)^2 = 16 \quad \text{(پ)}$$

$$\rightarrow r - 2 = \pm 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} r - 2 = 4 \rightarrow r = 6 \\ r - 2 = -4 \rightarrow r = -2 \end{cases}$$

$$t^2 + 7 = 0 \quad \text{(ب)}$$

$$\rightarrow t^2 = -7$$

که این غیر ممکن است

و معادله جواب ندارد.

$$5x^2 = 20 \quad \text{(الف)}$$

$$\xrightarrow{\div 5} x^2 = 4$$

$$\rightarrow x = \pm 2$$

**مثال:** معادلات زیر را به روش ریشه‌گیری حل کنید.

$$(3x + 2)^2 = 36 \quad \text{(پ)}$$

$$x^2 + 4 = 0 \quad \text{(ب)}$$

$$2x^2 = 50 \quad \text{(آ)}$$

$$16(2x-1)^2 - 25 = 0 \quad \text{(ث)}$$

$$4x^2 - 20 = 0 \quad \text{(ت)}$$

(حل آ)

$$2x^2 = 50 \xrightarrow{+2} x^2 = 25 \xrightarrow{25>0} x = \pm \sqrt{25} = \pm 5$$

$$x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \xrightarrow{-4<0}$$

(ب) معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

$$(3x + 2)^2 = 36 \xrightarrow{36>0} 3x + 2 = \pm \sqrt{36} = \pm 6 \quad \text{(پ)}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x + 2 = 6 \rightarrow 3x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3} \\ 3x + 2 = -6 \rightarrow 3x = -8 \rightarrow x = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$4x^2 - 20 = 0 \rightarrow 4x^2 = 20 \rightarrow x^2 = \frac{20}{4} = 5 \xrightarrow{5>0} x = \pm \sqrt{5} \quad \text{(ت)}$$



$$۱۶(۲x-۱)^۲-۲۵=۰ \rightarrow ۱۶(۲x-۱)^۲=۲۵$$

(ث)

$$\rightarrow (۲x-۱)^۲ = \frac{۲۵}{۱۶} \rightarrow ۲x-۱ = \pm \frac{\sqrt{۲۵}}{۴} \rightarrow \begin{cases} ۲x-۱ = \frac{\sqrt{۲۵}}{۴} \\ ۲x-۱ = -\frac{\sqrt{۲۵}}{۴} \end{cases}$$

**مثال:** هریک از معادله‌های زیر را با ریشه‌ی دوم گرفتن حل کنید.

$$۱) n^۲ - ۲ = ۲۶ \rightarrow n^۲ = ۲۸ \rightarrow n = \pm\sqrt{۲۸} = \pm ۲\sqrt{۷}$$

$$۲) x^۲ + ۱۲ = ۳ \rightarrow x^۲ = -۹ \rightarrow \text{غیر ممکن است و معادله جواب حقیقی ندارد}$$

$$۳) (۳t-۲)^۲ = ۴ \rightarrow ۳t-۲ = \pm ۲ \rightarrow \begin{cases} ۳t-۲ = ۲ \rightarrow t = \frac{۴}{۳} \\ ۳t-۲ = -۲ \rightarrow t = ۰ \end{cases}$$

$$۴) ۳ - ۳k = ۳k(۲k+۱) \rightarrow ۳ - ۳k = ۶k^۲ - ۳k \rightarrow ۳ = ۶k^۲ \rightarrow k^۲ = \frac{۱}{۲} \rightarrow k = \pm \frac{1}{\sqrt{۲}} = \pm \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

**مثال:** در معادله زیر، یک جواب از معادله داده شده است. مقدار  $m$  و جواب دیگر معادله را به دست آورید.

$$-۳x^۲ + mx + ۱۲ = 0, x=۲$$

حل) با قرار دادن جواب داده شده در معادله، مقدار  $m$  را به دست می‌آوریم:

$$x=۲, -۳x^۲ + mx + ۱۲ = 0$$

$$\rightarrow -۳(۲)^۲ + ۲m + ۱۲ = 0 \rightarrow m = 0$$

$$\rightarrow -۳x^۲ + ۱۲ = 0 \rightarrow x^۲ = ۴ \rightarrow x = \pm ۲$$

## حل معادله‌ی درجه‌ی دوم به روش مربع کامل

مرحله ۱. در صورت نیاز با تقسیم دو طرف معادله بر ضریب  $x^2$ ، ضریب  $x^2$  را تبدیل به ۱ می‌کنیم.

مرحله ۲. مجهول‌ها را در سمت چپ و عدد ثابت را به سمت راست منتقل می‌کنیم

مرحله ۳. به طرفین تساوی  $\left(\frac{\text{ضریب } x}{p}\right)^2$  را اضافه می‌کنیم تا سمت چپ مربع کامل شود.

مرحله ۴. سمت چپ را به صورت مربع کامل می‌نویسیم یعنی به صورت  $\left(x \pm \frac{\text{ضریب } x}{p}\right)^2$  می‌نویسیم

مرحله ۵. به کمک ریشه‌گیری (روش قبلی) در صورت وجود ریشه‌ها را به دست می‌آوریم

**مثال:** معادله‌ی  $x^2 - 6x + 5 = 0$  را به روش مربع کامل حل کنید.

۵ را به سمت راست منتقل می‌کنیم  $x^2 - 6x = -5$

به دو طرف معادله  $\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = 9$  را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود  $x^2 - 6x + 9 = -5 + 9$

سمت چپ را به شکل مربع کامل می‌نویسیم  $(x - 3)^2 = 4$

از دو طرف معادله، ریشه‌ی دوم می‌گیریم  $x - 3 = \pm\sqrt{4} \rightarrow \begin{cases} x - 3 = 2 \rightarrow x = 5 \\ x - 3 = -2 \rightarrow x = 1 \end{cases}$

**مثال:** معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

(آ)  $x^2 - 4x - 5 = 0$       (ب)  $x^2 - 5x + 1 = 0$       (پ)  $2x^2 + 3x = 0$

(ت)  $2x^2 + 6x = 1$       (ث)  $8 - x = 3x(x - 1)$

(حل)

$$x^r - 4x - 5 = 0 \rightarrow x^r - 4x = 5 \xrightarrow{\left(\frac{r}{r}\right)^r} x^r - 4x + 2^r = 5 + 2^r \quad (أ)$$

$$\rightarrow (x - 2)^r = 9 \rightarrow x - 2 = \pm 3 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \rightarrow x = 5 \\ x - 2 = -3 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$x^r - 5x + 1 = 0 \rightarrow x^r - 5x = -1 \quad (ب)$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{\Delta}{r}\right)^r} x^r - 5x + \left(\frac{\Delta}{r}\right)^r = -1 + \left(\frac{\Delta}{r}\right)^r \rightarrow (x - \frac{\Delta}{r})^r = \frac{r1}{r}$$

$$2x^r + 3x = 0 \xrightarrow{\div r} x^r + \frac{r}{r}x = 0 \quad (پ)$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{r}{r}\right)^r = \left(\frac{r}{r}\right)^r} x^r + \frac{r}{r}x + \left(\frac{r}{r}\right)^r = \left(\frac{r}{r}\right)^r$$

$$\rightarrow (x + \frac{r}{r})^r = \left(\frac{r}{r}\right)^r \rightarrow x + \frac{r}{r} = \pm \frac{r}{r}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + \frac{r}{r} = \frac{r}{r} \rightarrow x = 0 \\ x + \frac{r}{r} = -\frac{r}{r} \rightarrow x = -\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = -\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = -\frac{r}{r} = -\frac{r}{r} \end{cases}$$

$$2x^r + 6x = 1 \xrightarrow{\div r} x^r + 3x = \frac{1}{r} \quad (ت)$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{r}{r}\right)^r} x^r + 3x + \left(\frac{r}{r}\right)^r = \frac{1}{r} + \left(\frac{r}{r}\right)^r$$

$$\rightarrow (x + \frac{r}{r})^r = \frac{1}{r} + \frac{r}{r} = \frac{11}{r} \rightarrow x + \frac{r}{r} = \pm \frac{\sqrt{11}}{r}$$

$$\rightarrow x = -\frac{r}{r} \pm \frac{\sqrt{11}}{r}$$

$$\lambda - x = 2x(x - 1) \rightarrow \lambda - x = 2x^r - 2x \quad (ث)$$

$$\rightarrow 2x^r - 2x = \lambda \xrightarrow{\div r} x^r - \frac{r}{r}x = \frac{\lambda}{r}$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{r}{r}\right)^r = \left(\frac{r}{r}\right)^r} x^r - \frac{r}{r}x + \left(\frac{r}{r}\right)^r = \frac{\lambda}{r} + \left(\frac{r}{r}\right)^r$$

$$\rightarrow (x - \frac{r}{r})^r = \frac{\lambda}{r} + \frac{r}{r} = \frac{r\Delta}{r} \rightarrow x - \frac{r}{r} = \pm \frac{\Delta}{r}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - \frac{r}{r} = \frac{\Delta}{r} \\ x - \frac{r}{r} = -\frac{\Delta}{r} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\Delta}{r} + \frac{r}{r} = 2 \\ x = -\frac{\Delta}{r} + \frac{r}{r} = -\frac{r}{r} \end{cases}$$



**مثال:** معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$2r^2 + r - 2 = 0$ (ت)	$n^2 - 4n + 5 = 0$ (پ)	$t^2 + 3t = 3$ (ب)	$x^2 + 2x = 24$ (الف)
$2r^2 + r = 2$	$n^2 - 4n = -5$	$t^2 + 3t + \frac{9}{4} = 3 + \frac{9}{4}$	$x^2 + 2x + 1 = 25$
$\xrightarrow{+\frac{1}{4}} r^2 + \frac{1}{2}r = 1$	$\rightarrow n^2 - 4n + 4 = -5 + 4$	$\rightarrow (t + \frac{3}{2})^2 = \frac{21}{4}$	$\rightarrow (x+1)^2 = 25$
$\rightarrow r^2 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{16}$	$\rightarrow (n-2)^2 = -1$	$\rightarrow t + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$	$\rightarrow x+1 = \pm 5$
$\rightarrow (r + \frac{1}{2})^2 = \frac{17}{16}$	غیر ممکن است	$\rightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$	$\rightarrow x = 4, x = -6$
$\rightarrow r + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$	معادله جواب حقیقی ندارد	$x = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}$	
$\rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$			

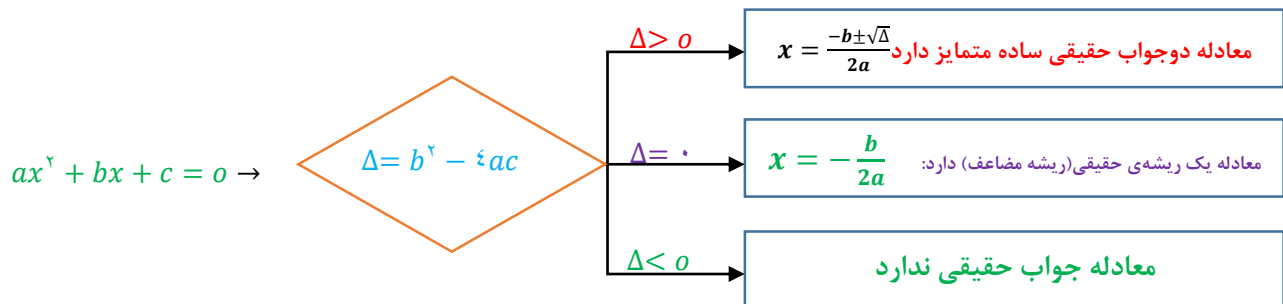
**مثال:** معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$1) x^2 - 6x = 7$	$2) s^2 - 3s + 3 = 0$	$3) r^2 + 4r + 4 = 0$	$4) 2a^2 + 5a - 3 = 0$
$x^2 - 6x + 9 = 7 + 9$	$s^2 - 3s + 3 = 0$	$\rightarrow (r+2)^2 = 0$	$\xrightarrow{+\frac{25}{4}} a^2 + \frac{5}{2}a = \frac{3}{2} \rightarrow a^2 + \frac{5}{2}a + \frac{25}{16} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16}$
$\rightarrow (x-3)^2 = 16$	$\rightarrow s^2 - 3s + \frac{9}{4} = -3 + \frac{9}{4}$	$\rightarrow r+2 = 0$	$\rightarrow (a + \frac{5}{4})^2 = \frac{49}{16} \rightarrow a + \frac{5}{4} = \pm \frac{7}{4}$
$\rightarrow x-3 = \pm 4$	$\rightarrow (s - \frac{3}{2})^2 = -\frac{3}{4}$	$\rightarrow r = -2$	$\rightarrow \begin{cases} a + \frac{5}{4} = \frac{7}{4} \rightarrow a = \frac{1}{2} \\ a + \frac{5}{4} = -\frac{7}{4} \rightarrow a = -3 \end{cases}$
$\rightarrow \begin{cases} x-3 = 4 \rightarrow x = 7 \\ x-3 = -4 \rightarrow x = -1 \end{cases}$	غیر ممکن است		
	معادله جواب حقیقی ندارد		



## حل معادله‌ی درجه‌ی دوم به روش فرمول کلی

ابتدا دلتا را به دست می آوریم و با توجه به علامت دلتا تعداد جواب ها و جواب ها را به دست می آوریم



**مثال:** معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

$$x^2 - x + 1 = 0 \text{ (الف)}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 \rightarrow \text{معادل جواب حقیقی ندارد}$$

$$-2x^2 + x + 3 = 0 \text{ (ب)}$$

$$\Delta = 1^2 - 4(-2) \times 3 = 25 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{-4} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

$$-x^2 + 4x - 4 = 0 \text{ (پ)}$$

$$\Delta = 16 - 16 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm 0}{-2} = 2$$

**مثال:** هر یک از معادلات زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

$$\frac{x^2}{5} - \frac{x}{3} - \frac{1}{2} = 0 \text{ (پ)}$$

$$3x - x^2 = -7 \text{ (ب)}$$

$$2x^2 - x - 5 = 0 \text{ (آ)}$$

$$x^2 + (\sqrt{5} + 1)x - (2 + \sqrt{5}) = 0 \text{ (ث)}$$

$$(3x+1)^2 - (2x+3)^2 + 1 = 0 \text{ (ت)}$$



$$a=2, b=-1, c=-5$$

(آ)

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(2)(-5) = 41 > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$3x - x^2 = -7 \rightarrow x^2 - 3x - 7 = 0$$

(ب)

$$A=1, b=-3, c=-7 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(1)(-7) = 37 > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$$

(پ) معادله را در  $2 \times 3 \times 5 = 30$  ضرب می‌کنیم تا مخارج کسرها از بین بروند:

$$6x^2 - 10x - 15 = 0, a=6, b=-10, c=-15$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4(6)(-15) = 460$$

$$\rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{460}}{12} = \frac{10 \pm \sqrt{4 \times 115}}{12}$$

$$= \frac{10 \pm 2\sqrt{115}}{12} = \frac{2(5 \pm \sqrt{115})}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{115}}{6}$$

(ت) با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای، معادله را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$(3x+1)^2 - (2x+3)^2 + 1 = 0$$

$$\rightarrow (9x^2 + 6x + 1) - (4x^2 + 12x + 9) + 1 = 0 \rightarrow 5x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$A=5, b=-6, c=-7 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(5)(-7) = 176$$

$$\rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{176} = \sqrt{16 \times 11} = 4\sqrt{11}$$

$$\rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm 4\sqrt{11}}{10} = \frac{2(3 \pm 2\sqrt{11})}{10} = \frac{3 \pm 2\sqrt{11}}{5}$$

$$a = 1 \cdot b = \sqrt{5} + 1 \cdot c = -(2 + \sqrt{5}) \quad (\text{ث})$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{5} + 1)^2 - 4(1)(-(2 + \sqrt{5}))$$

$$= (5 + 2\sqrt{5} + 1) + 8 + 4\sqrt{5} = 9 + 6\sqrt{5} + 5 = (3 + \sqrt{5})^2$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(\sqrt{5} + 1) + (3 + \sqrt{5})}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(\sqrt{5} + 1) - (3 + \sqrt{5})}{2}$$

$$= \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{2} = -2 - \sqrt{5}$$

**مثال:** هریک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

$$1) 4x^2 - 13x + 3 = 0 \xrightarrow{\Delta=169-48=121} x = \frac{13 \pm 11}{8} \rightarrow x = 3, x = \frac{1}{4}$$

$$2) r - r^2 = 3 \rightarrow r^2 - r + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 12 = -11 \rightarrow \text{معادله جواب حقیقی ندارد}$$

$$3) a^2 + 2\sqrt{3}a = 9 \rightarrow a^2 + 2\sqrt{3}a - 9 = 0 \xrightarrow{\Delta=48} a = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ a = -3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$4) \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{2}{3} = 0 \xrightarrow{x^2} 2t^2 - 3t - 9 = 0 \xrightarrow{\Delta=81} t = \frac{3 \pm 9}{4} \rightarrow t = 3, t = \frac{-3}{2}$$

**مثال:** هریک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

$$1) 2x^2 = 25 \cdot \overset{\div 2}{\rightarrow} x^2 = 12.5 \rightarrow x = \pm \sqrt{12.5} = \pm 5\sqrt{5}$$

$$2) 9 - 6z + z^2 = 0 \rightarrow (z - 3)^2 = 0 \rightarrow z - 3 = 0 \rightarrow z = 3$$

$$3) 4a^2 + 3a = 1 \rightarrow 4a^2 + 3a - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=25} a = \frac{-3 \pm 5}{8} \rightarrow a = \frac{1}{4}, a = -1$$

$$4) b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=18} b = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} \rightarrow b = \sqrt{2}, b = -2\sqrt{2}$$

**مثال:** در معادله زیر، یک جواب از آن داده شده است. مقدار  $m$  و جواب دیگر معادله را به دست آورید.

$$4x^2 - 5x + m + 1 = 0, \quad x = -3$$

حل) با قرار دادن جواب داده شده در معادله، مقدار  $m$  را به دست می‌آوریم:

$$x = -3, \quad 4x^2 - 5x + m + 1 = 0$$

$$\rightarrow 4(-3)^2 - 5(-3) + m + 1 = 0$$

$$\rightarrow 4x^2 - 5x - 51 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4(4)(-51) = 841 = 29^2$$

$$\rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 29}{8} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5 + 29}{8} = \frac{34}{8} = \frac{17}{4} \\ x_2 = \frac{5 - 29}{8} = -\frac{24}{8} = -3 \end{cases}$$

**مثال:** در هریک از قسمت‌های زیر، ابتدا مقدار  $m$  را طوری به دست آورید که معادله‌ی داده شده ریشه‌ی مضاعف داشته باشد و سپس ریشه‌ی مضاعف را مشخص کنید.

$$(2m+1)x^2 + 6x + 1 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$2x^2 + (m+1)x + 8 = 0 \quad (\text{آ})$$

حل) در معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر  $\Delta = 0$ ، آن‌گاه معادله دارای ریشه‌ی مضاعف

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ است:}$$

$$\Delta = (m+1)^2 - 4(2)(8) = (m+1)^2 - 64 = 0 \quad (\text{آ})$$

$$\rightarrow (m+1)^2 = 64 \rightarrow \begin{cases} m+1 = 8 \rightarrow m = 7 \\ m+1 = -8 \rightarrow m = -9 \end{cases}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{m+1}{4} = -\frac{8}{4} = -2 \quad \text{اگر } m = 7, \text{ آن‌گاه:}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{m+1}{4} = -\frac{-8}{4} = 2 \quad \text{اگر } m = -9, \text{ آن‌گاه:}$$

$$\Delta = 36 - 4(2m+1) \times 1 = 0 \rightarrow 36 = 4(2m+1) \quad (\text{ب})$$

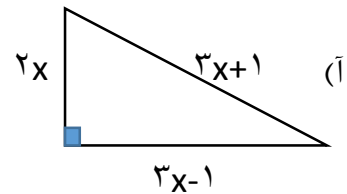
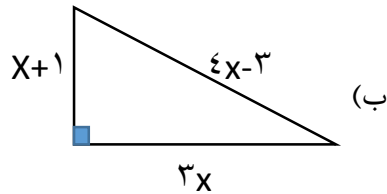
$$\rightarrow 2m+1 = 9 \rightarrow 2m = 8 \rightarrow m = 4$$

$$(x \text{ ریشه‌ی مضاعف}) \quad x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(2m+1)} = \frac{-6}{2 \times 9} = -\frac{1}{3}$$



## حل چند مسأله به کمک معادلات درجه دوم

**مثال:** در هریک از شکل‌های زیر مقدار  $x$  را به دست آورید.



(حل) (آ) با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه و تشکیل معادله، مقدار  $x$  را به دست می‌آوریم:

$$(3x+1)^2 = (2x)^2 + (3x-1)^2$$

$$\rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 4x^2 + 9x^2 - 6x + 1 \rightarrow 4x^2 - 12x = 0$$

$$\rightarrow 4x(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

طول ضلع مثبت است، بنابراین این  $x=0$  غیر قابل قبول و فقط  $x=3$  قابل قبول می‌باشد.

$$(4x-3)^2 = (x+1)^2 + (2x)^2 \quad (\text{ب})$$

$$\rightarrow 16x^2 - 24x + 9 = x^2 + 2x + 1 + 4x^2$$

$$\rightarrow 6x^2 - 26x + 8 = 0 \xrightarrow{+2} 3x^2 - 13x + 4 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 169 - 4(3)(4) = 121 \rightarrow x = \frac{13 \pm 11}{6}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{13+11}{6} = 4 \\ x = \frac{13-11}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

به ازای  $x = \frac{1}{3}$  مقدار  $4x-3$  عددی منفی می‌شود، پس غیر قابل قبول است.

**مثال:** مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

گیریم آن دو عدد  $k$  و  $k+2$  باشند، بنابر این:

$$k^2 + (k+2)^2 = 290 \rightarrow k^2 + k^2 + 4k + 4 = 290 \rightarrow 2k^2 + 2k - 286 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} k^2 + k - 143 = 0 \rightarrow (k+13)(k-11) = 0 \rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} k = -13 \rightarrow -11, -13 \\ k = 11 \rightarrow 13, 11 \end{array} \right.$$

**مثال:** مجموع مربعات دو عدد طبیعی متوالی ۲۶۵ است. این دو عدد را پیدا کنید.

(حل) فرض کنیم  $n$  و  $n+1$  دو عدد طبیعی متوالی باشند. داریم:

$$n^2 + (n+1)^2 = 265 \rightarrow n^2 + (n^2 + 2n + 1) = 265$$

$$\rightarrow 2n^2 + 2n - 264 = 0 \xrightarrow{+2} n^2 + n - 132 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-132) = 529 = 23^2$$

$$\rightarrow n = \frac{-1 \pm 23}{2} \xrightarrow{n \geq 1} n = \frac{-1 + 23}{2} = 11$$

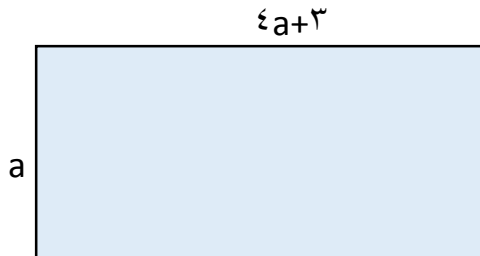
بنابر این دو عدد متوالی ۱۱ و ۱۲ می‌باشد.

**مثال:** مجموع مربع عددی طبیعی با سه برابر همان عدد برابر ۴۰ است. عدد را پیدا کنید.

$$n^2 + 3n = 40 \rightarrow n^2 + 3n - 40 = 0 \rightarrow (n+8)(n-5) = 0 \quad (\text{حل})$$

$$\rightarrow \begin{cases} n+8=0 \rightarrow n=-8 \\ n-5=0 \rightarrow n=5 \end{cases} \begin{array}{l} n \text{ عددی} \\ \rightarrow n=5 \\ \text{طبیعی است} \end{array}$$

**مثال:** طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی متر مربع باشد. ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

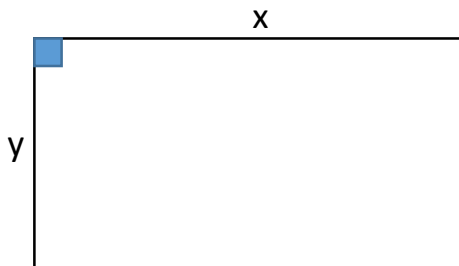


$$s = a(4a + 3) = 45 \rightarrow 4a^2 + 3a - 45 = 0 \xrightarrow{\Delta=729} a = \frac{-3 \pm 27}{8} \rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} a = -\frac{15}{4} \text{ غیر قابل قبول} \\ a = 3 \rightarrow \text{عرض مستطیل ۳ و طول آن ۱۵ است} \end{array} \right.$$

**مثال:** محیط و مساحت مستطیلی به ترتیب ۲۰ و ۲۴ می باشد. ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

حل) فرض کنیم طول و عرض مستطیل به ترتیب برابر  $x$  و  $y$  باشند ( $x > y$ )، داریم:



$$P = 2(x+y) = 20 \rightarrow x+y = 10 \rightarrow y = 10-x \text{ (محیط)}$$

$$S = xy = x(10-x) = 24 \rightarrow 10x - x^2 = 24 \text{ (مساحت)}$$

$$\rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0 \rightarrow (x-4)(x-6) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-4=0 \rightarrow x=4 \\ x-6=0 \rightarrow x=6 \end{cases} \xrightarrow{y=10-x} \begin{cases} y=10-4=6 \\ y=10-6=4 \end{cases}$$

بنابر این طول و عرض مستطیل ۶ و ۴ می باشند.



**مثال:** طول مستطیلی یک متر بیش تر از دو برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۵۵ متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

حل) فرض کنیم عرض مستطیل  $x$  باشد، در این صورت طول مستطیل  $2x+1$  است. طبق فرض داریم:

$$x(2x+1)=55 \rightarrow 2x^2+x=55 \rightarrow 2x^2+x-55=0$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 55 = 241$$

$$\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{241}}{2} = \frac{-1 \pm 15.5}{2} \xrightarrow{x>0} x = \frac{-1 + 15.5}{2} = 7.25$$

**مثال:** اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

$$\left. \begin{array}{l} \text{چهار سال بعد} \\ \text{سن برادر کوچک} = x \xrightarrow{\quad} = x + 4 \\ \text{چهار سال بعد} \\ \text{سن برادر بزرگ} = x + 4 \xrightarrow{\quad} = x + 8 \end{array} \right\} \rightarrow (x+4)(x+8) = 60 \rightarrow x^2 + 12x + 32 = 60 \rightarrow$$

$$x^2 + 12x - 28 = 0 \rightarrow (x-2)(x+14) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -14 \text{ غیر قابل قبول چون سن منفی نداریم} \\ x = 2 \rightarrow \text{برادر کوچک ۲ ساله و برادر بزرگ ۶ ساله‌اند} \end{array} \right.$$

**مثال:** اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۵ سال است. اگر سه سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۲۰۴ شود. سن کنونی هر کدام را به دست آورید.

حل) فرض کنیم سن برادر کوچک تر  $x$  باشد، پس:

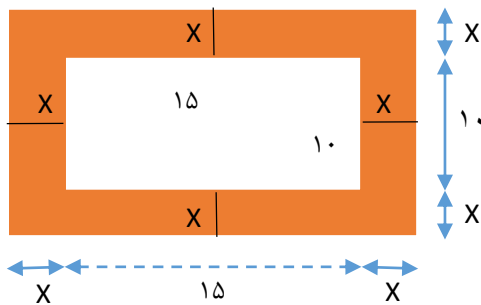
$$\left. \begin{array}{l} \text{سه سال بعد} \\ \text{سن برادر کوچک} = x \xrightarrow{\quad} = x + 3 \\ \text{سه سال بعد} \\ \text{سن برادر بزرگ} = x + 5 \xrightarrow{\quad} = x + 8 \end{array} \right\} \rightarrow (x+3)(x+8) = 204 \rightarrow x^2 + 11x + 24 = 204 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 11x - 180 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 121 + 720 = 841 = 29^2$$

$$\rightarrow x = \frac{-11 \pm 29}{2} \xrightarrow{x>0} x = \frac{-11 + 29}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

پس هم اکنون سن برادرها ۹ و ۱۴ می‌باشد.



**مثال:** یک عکس به اندازه‌ی ۱۰ در ۱۵ سانتی متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی متر مربع، قرار دارد، اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

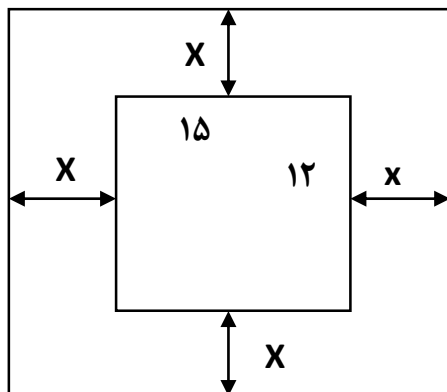
طبق شکل، طول مستطیل  $2x+15$  و عرض آن  $2x+10$  است. بنابر این طبق فرمول مساحت،

$$(2x + 10)(2x + 15) = 300 \rightarrow 4x^2 + 50x + 150 = 300 \rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0$$

$$= 0 \xrightarrow{+2} 2x^2 + 25x - 75 = 0 \xrightarrow{\Delta=1225} x = \frac{-25 \pm 35}{4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -15 & \text{غیر قابل قبول} \\ x = \frac{5}{2} & \rightarrow \text{طول قاب عکس برابر ۲۰ و عرض آن برابر ۱۵ می‌باشد} \end{cases}$$

**مثال:** یک عکس به اندازه‌ی ۱۲ در ۱۵ سانتی متر درون یک قاب مستطیلی با مساحت ۲۷۰ سانتی متر مربع قرار دارد. اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد. ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.



حل ( فرض کنیم فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب مستطیلی،  $x$  باشد:

$$\text{ابعاد قاب عکس: } 12 + 2x, 15 + 2x$$

$$\text{مساحت قاب} = 270 = (12 + 2x)(15 + 2x)$$

$$\rightarrow 4x^2 + 2x(12 + 15) + 12 \times 15 = 270 \rightarrow 4x^2 + 54x - 90 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} 2x^2 + 27x - 45 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 27^2 - 4(2)(-45) = 1089 = 33^2$$

$$\rightarrow x = \frac{-27 \pm 33}{4} \quad x > 0 \rightarrow x = \frac{-27 + 33}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1/5$$

بنابر این ابعاد قاب برابر است با:

$$12 + 2x = 12 + 2(1/5) = 15$$

$$15 + 2x = 15 + 2(1/5) = 18$$

**مثال:** در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیمهای تیمگان، تنها یک

بازی انجام داده باشد، تعداد تیمهای این تیمگان را به دست آورید. اگر تعداد بازیهای تیمگان  $N$  و تعداد تیمها  $n$  باشد، الگویی برای تعداد بازیها به دست آورید.

اگر تعداد تیمها  $n$  هر تیم با  $n-1$  تیم بازی دارد. پس با توجه به اینکه بین هر دو تیم تنها یک بازی

صورت میگیرد و اصطلاحاً رفت و برگشت نیست. تعداد کل بازیها برابر  $\frac{n(n-1)}{2}$  است. بنابر این:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45 \rightarrow n^2 - n = 90 \rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \rightarrow (n-10)(n+9) = 0 \rightarrow$$

$$n = -9 \quad \text{غیر قابل قبول}$$

$$n = 10 \quad \text{تیمگان مورد نظر دارای ۱۰ تیم است}$$

**مثال:** در یک مسابقه‌ی دوره‌ای بین تعدادی شطرنج‌باز، ۳۶ بازی انجام شده است. (در مسابقات دوره‌ای بین هر

دو نفر فقط یک بازی انجام می‌شود) تعداد شطرنج‌بازان این دوره از مسابقات را به دست آورید.

(حل) فرض کنیم تعداد شرکت‌کننده‌ها  $n$  نفر باشد، نفر اول با  $n-1$  نفر دیگر، نفر دوم با  $n-2$  نفر دیگر و ....

بازی متفاوت انجام می‌دهند، بنابراین داریم:

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{(n-1) \times n}{2} = 36$$

$$\rightarrow n^2 - n = 72 \rightarrow n^2 - n - 72 = 0$$

$$\rightarrow (n-9)(n+8) = 0 \rightarrow \begin{cases} n-9 = 0 \rightarrow n = 9 \\ n+8 = 0 \rightarrow n = -8 \end{cases}$$



**مثال:** فشار خون نرمال یک شخص مذکر، که بر حسب میلی‌متر جیوه ( $mmHg$ ) اندازه‌گیری می‌شود. با

رابطه‌ی  $p = 0.006S^2 - 0.02S + 120$  محاسبه می‌شود که در آن  $p$  فشار خون نرمال یک فرد بان

سن  $S$  است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی‌متر جیوه باشد. (از ماشین حساب

استفاده کنید)

$$p = 125 \rightarrow 0.006S^2 - 0.02S + 120 = 125 \rightarrow 0.006S^2 - 0.02S - 5 = 0$$

$$\frac{\Delta = 0.0204}{0.012} \rightarrow S = \frac{0.02 \pm 0.0449}{0.012} \rightarrow$$

شخص مورد نظر تقریباً ۳۰ سال و ۲۰۷ روز سن داشته است  $S = 30.575$   
 غیر قابل قبول  $S = -27.241$

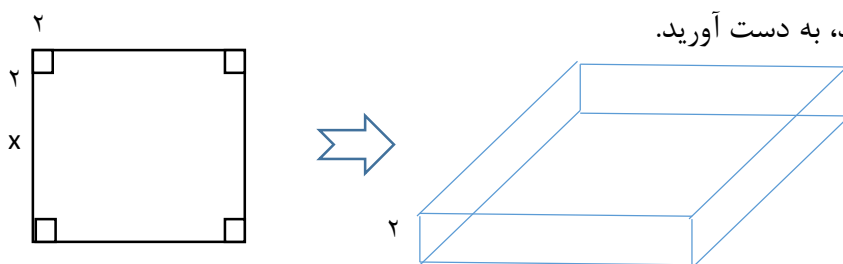
**توجه:** قرار داد کرده‌ایم که  
 $S$  بر حسب سال است

**مثال:** با یک دستگاه برش، یک صفحه‌ی مقوایی به شکل مربع را برش می‌زنیم. سپس چهار مربع کوچک در

گوشه‌های آن را جدا می‌کنیم. بعد با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر مربع‌های جدا شده به ضلع ۲ سانتی

متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه، ۲۰۰ سانتی متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این

کار انتخاب شوند، به دست آورید.



**حل:** از مقوایی که در شکل سمت چپ رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی متر جدا می‌کنیم تا جعبه‌ای که

سمت راست رسم شده، به دست آید. حجم این جعبه عبارت است از :

$$\text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع} = (x)(x)(2) = 2x^2$$

از آنجا که حجم جعبه، ۲۰۰ سانتی متر مکعب باید باشد، داریم:  $2x^2 = 200$  بنابر این  $x^2 = 100$  و با محاسبه‌ی ریشه‌های دوم این معادله، جواب‌های  $x = 10$  به دست می‌آید. و چون طول نمی‌تواند منفی باشد، تنها  $x = 10$  مورد قبول است و طول ضلع مربع اولیه  $14 = 10 + 4 = x + 4$  سانتی‌متر است.

**مثال:** از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم، طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

**حل:** اگر طول و عرض این مستطیل، برابر با  $s$  و  $t$  باشند، با توجه به اینکه محیط آن ۵۰ متر است. پس  $2(s+t) = 50$  از ساده کردن این معادله به معادله‌ی  $s+t = 25$  می‌رسیم، بنابر این  $t = 25 - s$ .

از سوی دیگر  $st = 144$  با جای گذاری  $t$  بر حسب  $s$  در این معادله به شکل  $s(25-s) = 144$  می‌رسیم که بعد از ساده شدن، معادله‌ی درجه‌ی دوم  $s^2 - 25s + 144 = 0$  به دست می‌آید.

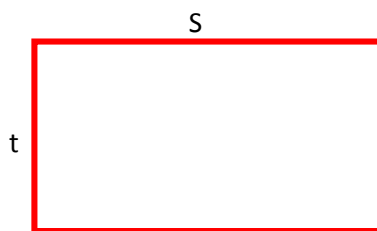
در این معادله  $c = 144$  و  $b = -25$  و  $a = 1$  بنابر این

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-25)^2 - 4(1)(144) = 625 - 576 = 49$$

پس  $\Delta > 0$  و معادله‌ی دو ریشه‌ی حقیقی دارد که به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\begin{cases} s_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 + 7}{2} = \frac{32}{2} = 16 \\ s_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 - 7}{2} = \frac{18}{2} = 9 \end{cases}$$

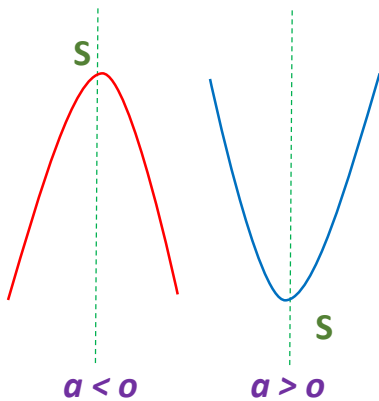


و چون  $t = 25 - s$  پس برای  $t$  نیز دو جواب به دست می‌آید:

بنابر این در هر حالت یک مستطیل با اضلاع ۹ و ۶ سانتی متر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} s_1 = 16 \rightarrow t_1 = 25 - 16 = 9 \\ s_2 = 9 \rightarrow t_2 = 25 - 9 = 16 \end{cases}$$

## درس دوم: سهمی (تابع درجه دوم)



**سهمی:** نمودار هر معادله به شکل  $y = ax^2 + bx + c$  را که در آن  $a, b, c$  اعداد حقیقی هستند و  $a \neq 0$  یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت مقابل است.

**محور تقارن سهمی:** خطی که سهمی را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند (خطوط نقطه چین در شکل های بالا)  
**رأس سهمی:** نقطه تلاقی سهمی و

جهت تهیه ادامه ی این جزوه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی تلگرام

@habib\_hashemi پیام دهید.

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

موفق بودن در ریاضی ادرصد استعداد و ۹۹ درصد پشتکار

# تدریس خصوصی ریاضیات

متوسطه اول و متوسطه دوم

کنکور - تقویتی

گروهی / انفرادی

به صورت تخصصی و کاملا مفهومی با جزوه اختصاصی

مشاهده جزوات در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

دبیر رسمی آموزش و پرورش با ۱۸ سال سابقه تدریس

کارشناس ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

مؤلف شش کتاب در زمینه کنکور

نویسنده برتر استان

معلم نمونه شهرستان و استان

نفر اول استان در جشنواره الگوهای برتر تدریس

نفر اول کشور در جشنواره الگوهای برتر تدریس

شماره تماس: ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

