فصل ۴

معادلات و نامعادلات

در این فصل بسیار مهم با حل انواع معادلات و نامعادلات آشنا می‌شویم. در ابتدا حل معادله درجه دوم را بررسی کرده و سپس یک منحنی مرتبط با معادله درجه دوم یعنی سهمی‌ها را بررسی کرده ، و در نهایت تعیین علامت عبارات جبری را که نقشی کلیدی در حل نامعادلات دارند را بررسی می‌کنیم.

۱.۴ معادله درجه دوم و روش‌های حل آن

معادله درجه دوم چیست؟ فرض کنید هدف یافتن عددی است که وقتی با مربعش جمع می‌شود حاصل برابر ۶ شود. برای یافتن جواب می توان آزمون–خطا کرد و با چندبار امتحان عدد ۲ را یافت که در شرایط صدق می کند. اما فقط عدد ۲ جواب است؟ اگر بخواهیم بازهم آزمون–خطا کنیم این بار به سادگی دفعه قبل نمی توان جواب را یافت که البته عدد -3 است. حال فرض کنید بخواهیم مسئله را بدون آزمون–خطا حل کنیم. بدین منظور فرض کنید عدد مورد نظر را با x نشان دهیم. پس باید داشته باشیم $x^2 + x = 6$. حال معادله را بصورت $x^2 + x - 6 = 0$ مینویسیم. چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟ پاسخ تجزیه است.داریم:

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) = 0 \Longrightarrow (x+3)(x+2) = 0 \Longrightarrow x = 2 \;\&\; x = -3$$

معادله شکل گرفته در بالا یک معادله درجه دوم است چرا که مجهول ما یعنی x در این معادله دارای توان ۲ است.

تعریف ۱.۴. به معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ یک معادله درجه دوم گوییم بشرطی که $a \neq 0$ باشد. اعداد $c, b, a \in \mathbb{R}$ را ضرائب معادله می‌نامیم. x مجهول معادله است و منظور از حل معادله فوق یعنی یافتن تمام اعداد حقیقی چون x که در معادله صدق کنند. با این حساب عدد λ جواب معادله است هرگاه : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

حال به معرفی روش‌های حل این معادله می پردازیم[1]. برای این منظور با توجه به وضعیت ضرائب معادله

[1] محمد ابن موسی خوارزمی ریاضیدان نامی ایران و جهان در قرن هشتم و نهم میلادی است.خوارزمی بحق از نوادر تاریخ ریاضیات

روش هایی ارائه می‌شود.

روش ریشه‌گیری

اگر در معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ داشته باشیم $b = ۰ \ \& \ c \leq ۰$ آنگاه با یک ریشه‌گیری جواب معادله بدست می‌آید. مثلا برای حل معادله $۴x^۲ - ۱۶ = ۰$ داریم:

$$۴x^۲ - ۱۶ = ۰ \Longrightarrow ۴x^۲ = ۱۶ \Longrightarrow x^۲ = ۴ \Longrightarrow x = \pm ۲$$

روش فاکتورگیری

اگر در معادله درجه دوم داشته باشیم $b = ۰$ با یک فاکتورگیری ساده معادله حل می‌شود. به عنوان یک مثال ساده برای حل معادله $۳x^۲ + ۱۲x = ۰$ داریم:

$$۳x^۲ + ۱۲x = ۰ \Rightarrow ۳x(x + ۴) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \,\&\, x = -۴$$

روش تجزیه

چنانچه هیچ یک از ضرائب صفر نباشد به کمک تجزیه کردن سه جمله‌ای می‌توان معادله را حل کرد. در این مورد توجه داریم که ازیکی از خواص اعداد حقیقی استفاده می کنیم که قبلا به آن اشاره کرده ایم :

$$if \quad ab = ۰ \Longrightarrow a = ۰ \ \textbf{یا} \ b = ۰$$

به یک مثال ساده برای حل معادله $x^۲ - x - ۱۲ = ۰$ داریم:

$$x^۲ - x - ۱۲ = (x - ۴)(x + ۳) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} x - ۴ = ۰ \Longrightarrow x = ۴ \\ x + ۳ = ۰ \Longrightarrow x = -۳ \end{cases}$$

تمرین ۱.۴. معادلات زیر را حل کنید.

$۱)۹x^۲ - ۲۵ = ۰$ 　 $۲)۴x^۲ + ۱۶ = ۰$

$۳)۲۵x^۲ + ۵x = ۰$ 　 $۴) - \frac{۱}{۲}x = \frac{۸}{۳}x^۲$

$۵)x^۲ + ۱۱x + ۳۰ = ۰$ 　 $۶)۶x^۲ + x = ۲$

$۷)x^۲ + ۹x - ۱۳۶ = ۰$ 　 $۸)x^۳ + x^۲ = ۵۶x$

است و وی را پدر جبر نام نهاده‌اند. وی معادله درجه دوم را طبقه بندی کرد و برای هر کدام روش حل ارائه داد.

روش مربع کامل کردن

تصور کنید می‌خواهید جواب معادله $x^{۲} + ۲x - ۱ = ۰$ را بدست آورید. هرچه تلاش کنید ، معادله به روش‌های معمول اشاره شده در بالا حل نخواهد شد. پس باید راهکار تازه‌ای بکار برد. بدین منظور می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x^{۲} + ۲x = ۱ &\Longrightarrow x^{۲} + ۲x + ۱ = ۱ + ۱ \\ &\Longrightarrow (x + ۱)^{۲} = ۲ \\ &\Longrightarrow x + ۱ = \pm\sqrt{۲} \\ &\Longrightarrow x = \sqrt{۲} - ۱ \ \& \ x = -\sqrt{۲} - ۱ \end{aligned}$$

اگر خوب به محاسبات نگاه کنید هدف از اضافه کردن عدد ۱ به طرفین تساوی این بوده است که یک‌طرف معادله مربع کامل شود تا بتوان از طرفین جذر گرفت و جواب را یافت. چرا عدد ۱؟ جواب در محاسبه زیر نهفته است. در حالت کلی برای اینکه عبارت $x^{۲} + bx$ را به عبارتی تبدیل کنیم که شامل مربع کامل باشد به شکل زیر عمل می کنیم:

$$x^{۲} + bx = x^{۲} + bx + \frac{b^{۲}}{۴} - \frac{b^{۲}}{۴} = \left(x + \frac{b}{۲}\right)^{۲} - \frac{b^{۲}}{۴}$$

به عنوان مثالی دیگر فرض کنید می‌خواهیم جواب معادله $۳x^{۲} - ۹x + ۳ = ۰$ را حل کنیم. برای این منظور داریم:

$$\begin{aligned} ۳x^{۲} - ۹x + ۳ = ۰ &\Longrightarrow x^{۲} - ۳x + ۱ = ۰ \\ &\Longrightarrow x^{۲} - ۳x + \frac{۹}{۴} - \frac{۹}{۴} + ۱ = ۰ \\ &\Longrightarrow \left(x - \frac{۳}{۲}\right)^{۲} = \frac{۹}{۴} - ۱ \\ &\Longrightarrow x - \frac{۳}{۲} = \pm\frac{\sqrt{۵}}{۲} \\ &\Longrightarrow x = \frac{۳}{۲} - \frac{\sqrt{۵}}{۲} \ \& \ x = \frac{۳}{۲} + \frac{\sqrt{۵}}{۲} \end{aligned}$$

روش کلی حل معادله درجه دوم

همان‌طور که مثال های حل شده بالا ملاحضه کردید،روش مربع کامل کردن کمی‌وقت‌گیر و پرمحاسبه است. به همین دلیل یکبار روش مربع کامل را روی فرم کلی معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ بکار می‌بریم تا دستوری کلی بر حسب رادیکال ها بیابیم و بعد از آن برای حل از دستور یافت شده استفاده کنیم. قبل از شروع محاسبات مبین معادله درجه دوم را بصورت $\Delta = b^۲ - ۴ac$ تعریف می کنیم. Δ یک عدد حقیقی است و لذا هر سه حالت $\Delta = ۰$, $\Delta > ۰$, $\Delta < ۰$ ممکن است اتفاق بیافتد.

$$\begin{aligned} ax^۲ + bc + c = ۰ &\Longrightarrow x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = ۰ \\ &\Longrightarrow x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{b^۲}{۴a^۲} - \frac{b^۲}{۴a^۲} + \frac{c}{a} = ۰ \\ &\Longrightarrow \left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ = \frac{b^۲}{۴a^۲} - \frac{c}{a} \\ &\Longrightarrow \left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ = \frac{b^۲ - ۴ac}{۴a^۲} \\ &\Longrightarrow x + \frac{b}{۲a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ &\Longrightarrow x = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{۲a} \end{aligned}$$

به این ترتیب با فرض اینکه $\Delta > ۰$ باشد معادله دارای دو جواب $x_۱ = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a}$, $x_۲ = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}$ می‌باشد. اگر $\Delta = ۰$ باشد هر دو جواب برابرند و داریم : $x_۱ = x_۲ = \dfrac{-b}{۲a}$ و سرانجام اگر $\Delta < ۰$ باشد گوییم معادله جواب حقیقی[۲] ندارد.

$$\Delta : \begin{cases} \Delta > ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \\ x_۲ = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} \end{cases} & \text{معادله دو ریشه حقیقی دارد} \\ \Delta = ۰ \Longrightarrow x_۱ = x_۲ = \dfrac{-b}{۲a} & \text{معادله ریشه مضاعف دارد} \\ \Delta < ۰ \Longrightarrow & \text{معادله جواب حقیقی ندارد} \end{cases}$$

درس را با ارائه‌ی مثال های کلی از مطالب مطرح شده پی می‌گیریم.

[۲]کلمه حقیقی اشاره به اعداد حقیقی دارد.در واقع در حالتی که $\Delta < ۰$ است بازهم معادله جواب دارد اما این جواب ها عدد حقیقی نیستند بلکه اعداد مختلط هستند که در فصل یک به ان ها اشاره‌ای داشته‌ایم.کارل فردریش گاوس در پایان نامه دوره‌ی دکتری خود ثابت کرد که یک معادله از درجه n حداکثر n ریشه حقیقی دارد.

مثال ۱.۴. معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

۱) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ تجزیه

۲) $8x^2 - 7x - 1 = 0$ تجزیه

۳) $x^2 + 5x = 1$ مربع کامل

۴) $3x^2 + 2x = 5$ مربع کامل

۵) $4x^2 + 4x - 7 = 0$ روش دلتا

۶) $20x + 1 = 21x$ روش دلتا

مثال ۲.۴. یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 3a - 5 = 0$ برابر ۱ است. ریشه دیگر معادله را بدست آورید.

مثال ۳.۴. مقدار a را به گونه‌ای بیابید که معادله $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$ دارای ریشه مضاعف باشد و سپس آن ریشه مضاعف را بدست آورید.

مثال ۴.۴. از چه عدد مثبتی اگر معکوس آن کم شود باقیمانده برابر $\frac{5}{6}$ می‌شود؟

مثال ۵.۴. طول مستطیلی سه برابر عرض آن است.اگر مساحت این مستطیل ۵۸۸ واحد باشد، محیط مستطیل را بدست آورید.

مثال ۶.۴. طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر $2x, 2x+1, 2x+2$ است. محیط این مثلث چند واحد است؟

مثال ۷.۴. جواب معادله $\frac{x^2+1}{x^2+x-6} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-2}$ را بیابید.

مثال ۸.۴. حاصل عبارت $A = 2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{\cdots}}}$ را بیابید.

تمرین ۲.۴. حاصل عبارت $A = \sqrt[3]{5\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5\sqrt[3]{\cdots}}}}$ را بدست آورید.

تمرین ۳.۴. معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

۱) $5x^2 + 6x - 8 = 0$ مربع کامل

۲) $7x^2 - 5x + 2 = 0$ روش دلتا

تمرین ۴.۴. معادله‌ی $x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}) = 5$ را حل کنید.

تمرین ۵.۴. معادله $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 1 = 0$ را حل کنید.

تمرین ۶.۴. معادله $\frac{11}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1}$ را حل کنید.

تمرین ۷.۴. معادله‌ی $26x^2 = x^4 + 25$ را حل کنید.

تمرین ۸.۴. معادله‌ی $x^{8} - 17x^{4} + 16 = 0$ را حل کنید.

تمرین ۹.۴. یک درهم را بین چند مرد تقسیم کرده ایم ولی چون یک مرد به آن‌ها اضافه شده است،تقسیم را دوباره بین همه‌ی مردها انجام داده‌ایم.معلوم شد در تقسیم دوم به هر مرد $\frac{1}{6}$ درهم کمتر از تقسیم اول رسیده است.در آغاز چند مرد بوده است؟(مسئله خوارزمی)

تمرین ۱۰.۴. معادله‌ی $x^{2} - (2+2\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

تمرین ۱۱.۴. یک قالی دراتاقی به ابعاد ۶ متر در ۴ متر قرار دارد به طوری که فاصله هر طرف آن تا کنار دیوار اتاق یکسان است.اگر مساحت قالی ۸ متر مربع باشد فاصله هر طرف قالی را تا دیوار حساب کنید.

تمرین ۱۲.۴. حدود m را طوری بیابید تا معادله‌ی درجه دوم $mx^{2} - (2m-1)x + m - 2 = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد.

تمرین ۱۳.۴. اختلاف مربع عدد $\frac{3}{7}$ از خود $\frac{3}{7}$ برابر اختلاف مربع چه کسری از خود آن کسر است؟

تمرین ۱۴.۴. ثابت کنید در معادله درجه دوم $ax^{2} + bx + c = 0$ روابط زیر برقرار است.

$$\begin{cases} a+b+c=0 \Longrightarrow x_1 = 1 \ \& \ x_2 = \dfrac{c}{a} \\[2ex] a+c=b \Longrightarrow x_1 = -1 \ \& \ x_2 = -\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

تمرین ۱۵.۴. معادلات داده شده را به روش دلخواه حل کنید.

$1)\ 148x^{2} + 2x = 150$

$2)\ \frac{1}{3}x^{2} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{5} = 0$

$3)\ (1+\sqrt{2})x^{2} = x + \sqrt{2}$

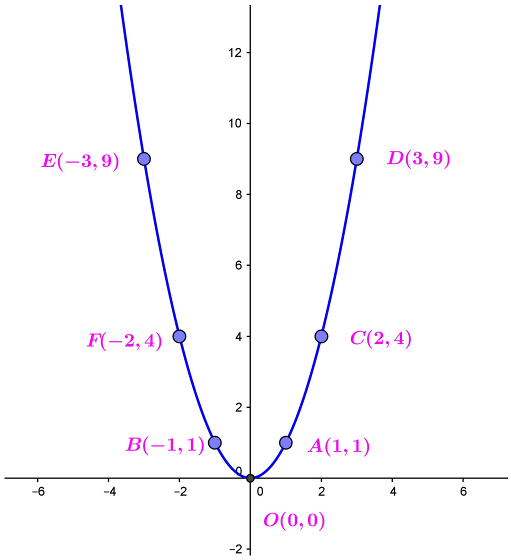
$4)\ 1395x^{2} - 1394x - 1 = 0$

$5)\ x^{4} - 13x^{2} + 36 = 0$

$6)\ x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$

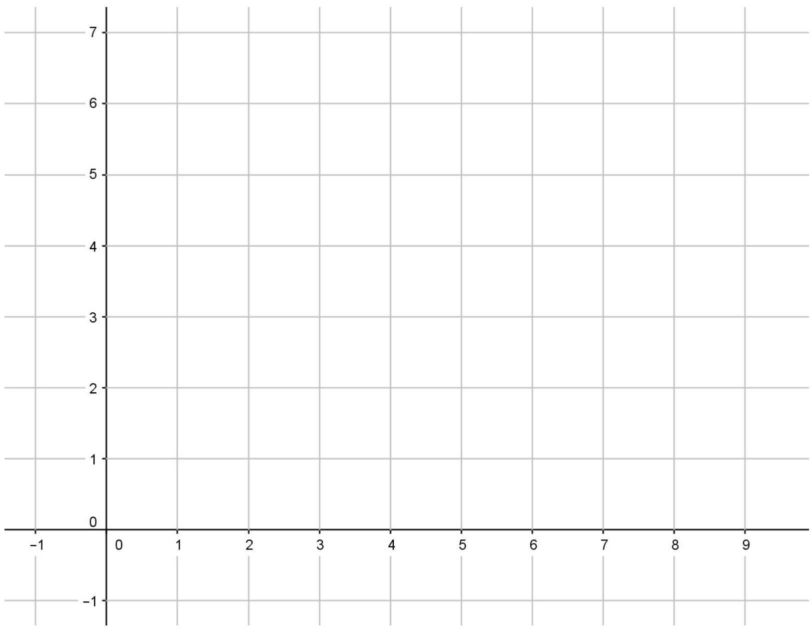
۲.۴ سهمی‌ها

یکی از کاربردی‌ترین منحنی‌ها در زندگی روزمره ما سهمی است. سهموی که سه بعدی شده سهمی است،امروزه نقش اصلی در ارسال و دریافت اطلاعات از طریق هوایی را دارد. نام امروزی سهمی (parabola) را آپولونیوس معرفی کرد و نیوتن اولین بار خاصیت همگرایی نور در کانون سهمی را بررسی کرد. ساده‌ترین سهمی دارای معادله‌ی $y = x^{2}$ است. اگر به متغیر x مقدار دهیم می‌توانیم نمودار آن را رسم کنیم. مثلا با فرض $x = 0, \pm1, \pm2, \pm3$ مقادیر حاصل عبارتند از $y = 0, 1, 4, 9$. اگر این نقاط را روی محورهای مختصات مشخص کنیم و نقاط حاصل را به‌هم وصل کنیم شکل زیر حاصل می‌شود.



ذکرچند نکته ضروری است.اول اینکه پایین‌ترین نقطه سهمی در شکل فوق مبداء مختصات است. نقطه $O(۰,۰)$ را مینیمم(کمینه) سهمی گوییم. دوم اینکه محور عرض‌ها سهمی را به دو قسمت یکسان تقسیم کرده است. محور عرض‌ها $x = ۰$ را محور تقارن سهمی گوییم.

مثال ۹.۴. سهمی $y = x^۲ - ۴x + ۵$ را رسم کنید.



تعریف ۲.۴. منظور از یک سهمی معادله‌ای بصورت $y = ax^۲ + bx + c$ است که $a, b, c \in \mathbb{R}$ با $a \neq ۰$. با مربع کامل کردن این عبارت بصورت:

$$y = a(x-h)^۲ + k$$

درمی‌آید که در این حالت راس سهمی یا مینیمم سهمی نقطه $M(h,k)$ است و خط $x = h$ را محور تقارن سهمی گوییم. اگر $a > ۰$ باشد دهانه‌ی سهمی رو به بالا باز می‌شود و اگر $a < ۰$ باشد دهانه سهمی رو به پایین باز می‌شود.

مثال ۱۰.۴. راس سهمی‌های زیر را بیابید و سپس نمودار آن‌ها را رسم کنید.

$۱)y = ۲x^۲ + ۱$ $۲)y = -x^۲ + ۴$

$۳)y = x^۲ + ۴x + ۳$ $۴)y = ۱ - \frac{x^۲}{۲}$

$۵)y = ۱ - ۴x - ۲x^۲$ $۶)۳y = x^۲ - ۴x + ۷$

رسم سهمی ساده‌تر می‌شود اگر بتوانیم دستوری صریح از راس سهمی بدست آوریم. برای این منظور داریم :

$$\begin{aligned} y = ax^۲ + bx + c &\Longrightarrow y = a\left(x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &\Longrightarrow y = a\left(x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{b^۲}{۴a^۲} - \frac{b^۲}{۴a^۲} + \frac{c}{a}\right) \\ &\Longrightarrow y = a\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ - \frac{b^۲}{۴a} + c \\ &\Longrightarrow y = a\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ + \frac{۴ac - b^۲}{۴a} \end{aligned}$$

با این حساب راس سهمی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\text{راس سهمی} \longrightarrow M\left(-\frac{b}{۲a}, \frac{۴ac - b^۲}{۴a}\right)$$

به این ترتیب با داشتن راس سهمی کافیست یک یا دو نقطه قبل و بعد از آن را در معادله منحنی جایگذاری کنیم تا عرض آن نقاط حاصل شده و سپس سهمی را رسم کنیم. همچنین توجه کنید که اگر $a > ۰$ باشد سهمی مینیمم دارد و اگر $a < ۰$ باشد سهمی ماکزیمم(بیشینه) دارد.

مثال ۱۱.۴. نمودار سهمی $y = -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x + \frac{۱}{۲}$ را رسم کنید.

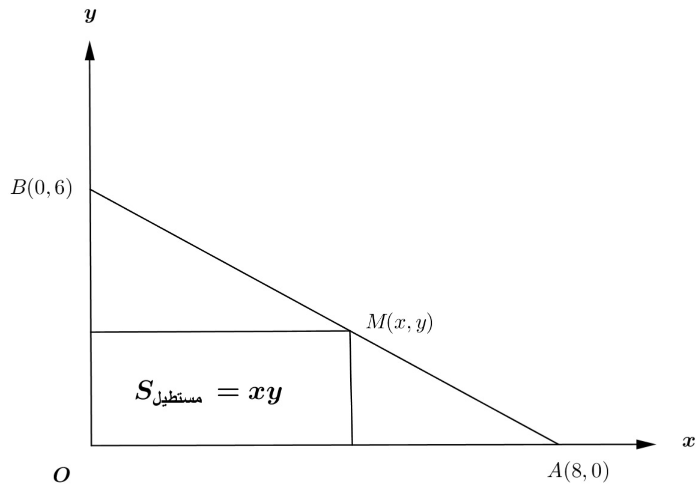
مثال ۱۲.۴. مجموع دو عدد مقدار ثابت ۲۰ است. بیشترین مقدار حاصلضرب این دو عدد را بدست آورید.

مثال ۱۳.۴. مستطیلی به اضلاع ۲۰ و ۶۰ واحد مفروض است. اگر یک واحد به عرض ان اضافه کنیم دو واحد از طول آن کم می شود. در بین مستطیل هایی که به این ترتیب ساخته می‌شود کدامیک بیشترین مساحت را داراست؟

مثال ۱۴.۴. یک طناب به طول ۸۸ متر در دسترس است. با این طناب قرار است زمینی مستطیل شکل که یک طرف آن رودخانه است حصار شود. بیشترین مساحتی که می توان با این طناب حصار کرد چقدر است؟

مثال ۱۵.۴. مقدار a را به گونه‌ای بیابید تا ماکزیمم سهمی $y = ax^۲ + ۴x + ۵$ برابر ۹ شود.

مثال ۱۶.۴. بیشترین مساحت ممکنه برای مستطیل زیر را بیابید.



مثال ۱۷.۴. موشکی با زاویه معینی به هوا شلیک شده است و ارتفاع موشک t ثانیه پس از پرتاب از دستور $y = -۵t^۲ + ۵۰t + ۵۵$ بدست می‌آید. معین کنید پس از چند ثانیه موشک به بیشترین ارتفاع خود می‌رسد. پس از چند ثانیه موشک به زمین می‌خورد؟

تمرین ۱۶.۴. سهمی‌های زیر را رسم کنید.

$۱)y = \frac{۱}{۳}x^۲ - ۳$ 　 $۲)y = ۶x^۲ - ۲۴x + ۲۴$

$۳)y = ۴ - ۲x - ۲x^۲$ 　 $۴)y = ۴x^۲ + ۲۸x = ۴۹$

$۵)y = ۲x - ۳ - x^۲$ 　 $۶)y = \frac{۱}{۱۲}x^۲ - \frac{۱}{۱۲}x - ۱$

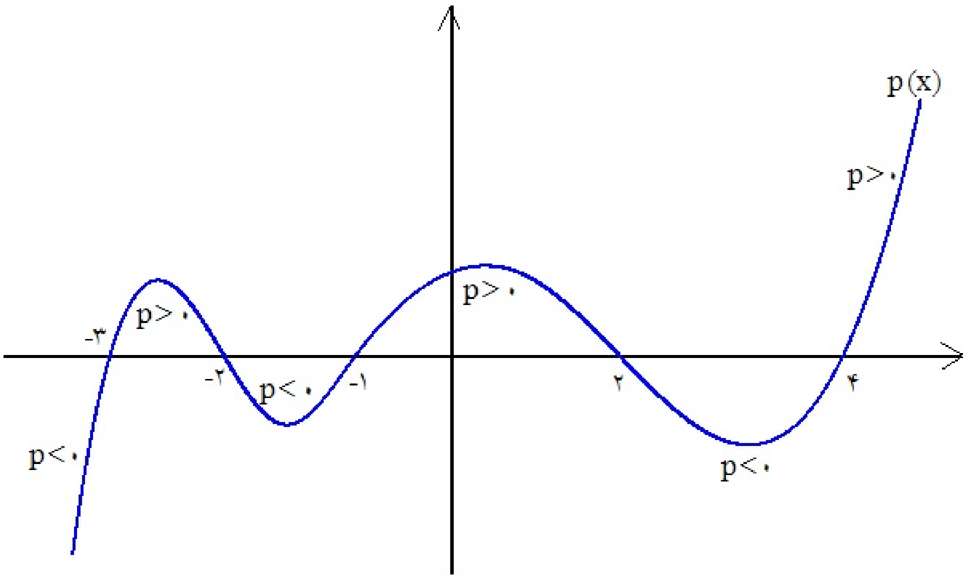
تمرین ۱۷.۴. بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل که یک طرف آن رودخانه است و با طناب می‌توان حصارکرد ۶۴۸ متر است. طول طناب را بیابید.

تمرین ۱۸.۴. دو ضلع مستطیلی روی محورهای مختصات در ناحیه اول و زیر خط $y = \frac{۶-x}{۲}$ واقع است. یک راس آن روی مبداء و راس مقابلش Mروی خط $y = \frac{۶-x}{۲}$ قرار دارد. بیشترین مساحت مستطیل وقتی $M(x, y)$ روی خط اشاره شده حرکت می کند را بیابید.

تمرین ۱۹.۴. اگر $x + ۲y = ۳۰$ باشد ماکزیمم مقدار حاصلضرب xy را بدست آورید.

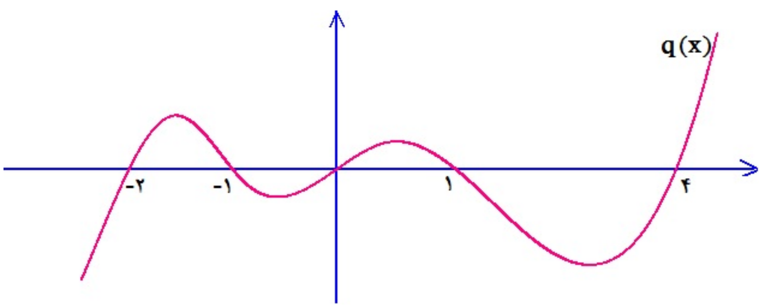
۳.۴ تعیین علامت چندجمله‌ایها

به دقت به شکل زیر نگاه کنید. نمودار یک منحنی در دستگاه مختصات ترسیم شده است. نام منحنی $p(x)$ است و در برخی بازه‌ها بالای محور x هاست و لذا مثبت است و در برخی بازه‌ها زیر محور x هاست و لذا منفی است. اگر دقت کنید نقاطی که منحنی محور طولها را در آن‌ها قطع کرده است نقشی اساسی در تعیین اینکه p مثبت است یا منفی بازی می‌کند. **چنین نقاطی را ریشه‌های p گوییم. در حالت کلی نقاط حاصل از حل معادله $p(x) = ۰$ را ریشه‌های p گوییم.**



$$\begin{cases} x < -۳ \Longrightarrow p(x) < ۰ & \text{گوییم عبارت منفی است} \\ -۳ < x < -۲ \Longrightarrow p(x) > ۰ & \text{گوییم عبارت مثبت است} \\ -۲ < x < -۱ \Longrightarrow p(x) < ۰ & \\ \vdots & \\ x > ۴ \Longrightarrow p(x) > ۰ & \end{cases}$$

مثال ۱۸.۴. با توجه به شکل علامت منحنی $q(x)$ را تعیین کنید.

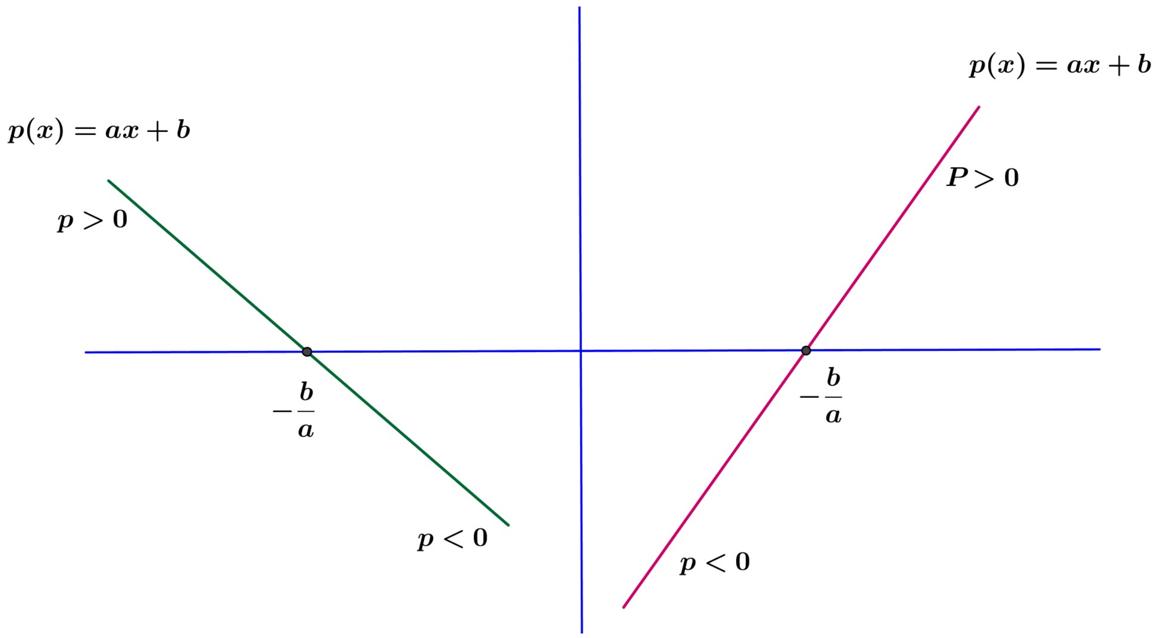


۱.۳.۴ تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول

می‌خواهیم عبارت $p(x) = ax + b$ را تعیین علامت کنیم. ابتدا ریشه‌یا ریشه‌های آن را بدست می‌آوریم:

$$p(x) = 0 \Longrightarrow ax + b = 0 \Longrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

در حالت کلی نمودار $p(x) = y = ax + b$ یکی از دو حالت زیر را دارد:



ازنمودار فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} a > 0 \Longrightarrow \begin{cases} x < -\frac{b}{a} \Longrightarrow p < 0 \\ x > -\frac{b}{a} \Longrightarrow p > 0 \end{cases} \\ \\ a < 0 \Longrightarrow \begin{cases} x < -\frac{b}{a} \Longrightarrow p > 0 \\ x > -\frac{b}{a} \Longrightarrow p < 0 \end{cases} \end{cases}$$

خلاصه بحث فوق در جدول زیر که آن‌را جدول تعیین علامت می‌نامیم آمده است.

x		$-\frac{b}{a}$	
p(x)=ax+b	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

مثال ۱۹.۴. علامت عبارات $p(x) = ۲x - ۴\ ,\ q(x) = (۶ - ۲x)^۳$ را تعیین کنید.

تذکر مهم: چنانچه بخواهیم علامت یک عبارت جبری را که شامل چند دوجمله‌ای درجه اول است را تعیین کنیم، می‌توانیم در یک جدول همه‌ی دوجمله‌ایها را نوشته و ریشه تک‌تک آنها را یافته و هرکدام را تعیین علامت کنیم و دست آخر با ضرب علامت‌ها درهم علامت کل عبارت را بیابیم. مثال زیر را که به همین طریق حل می‌شود به دقت نگاه کنید.

مثال ۲۰.۴. عبارت $A = (x - ۱)(x + ۲)(x - ۳)^۵$ را تعیین علامت کنید.

مثال ۲۱.۴. چندجمله‌ای $p(x) = x^۳ - ۲x^۲ - x + ۲$ را تعیین علامت کنید.

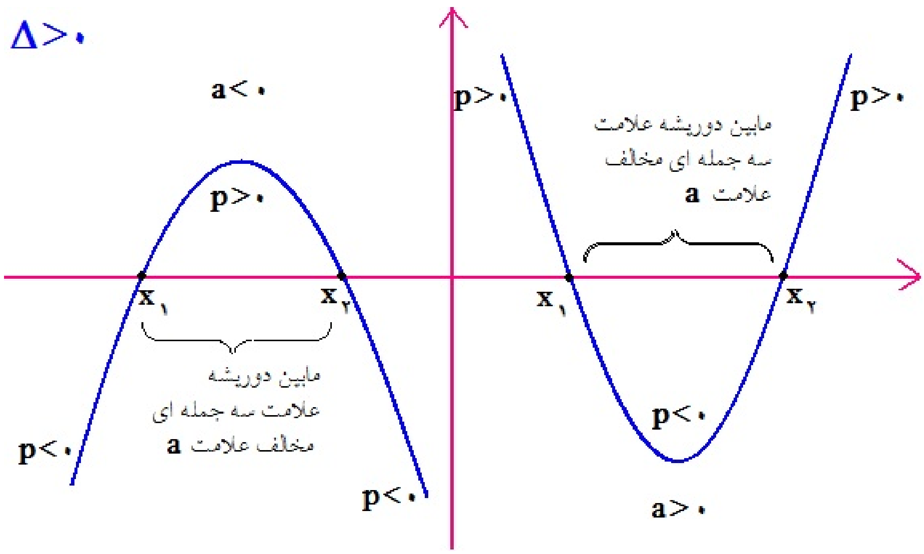
مثال ۲۲.۴. عبارت $A = \dfrac{(۱ - x)(x + ۲)}{(x + ۱)(x - ۳)^۲}$ را تعیین علامت کنید.

مثال ۲۳.۴. سهمی $y = x^۲ - ۲x - ۸$ مفروض است. معین کنید در چه بازه‌ای سهمی زیر محور طولها و در چه بازه‌ای بالای محور طول‌هاست؟

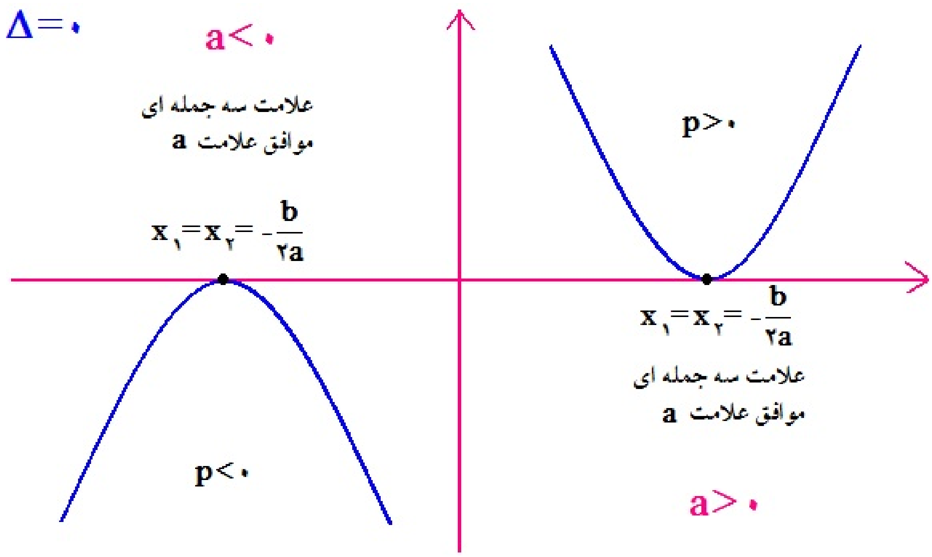
۲.۳.۴ تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم

همان‌طورکه تا الان متوجه شدید یک سه‌جمله‌ای درجه دوم را می‌توان با تجزیه به عامل‌های درجه اول تعیین علامت کرد. اما این زمانی شدنی است که عبارت تجزیه شود . در صورتیکه عبارت تجزیه نشود راه‌حل چیست؟ راه‌حل یافتن روشی است که به کمک آن بتوان سه‌جمله‌ای‌ها را مستقیما تعیین علامت کرد. در حالت کلی یک سه جمله ای درجه دوم یا همان سهمی به یکی از صورت‌های زیر است:

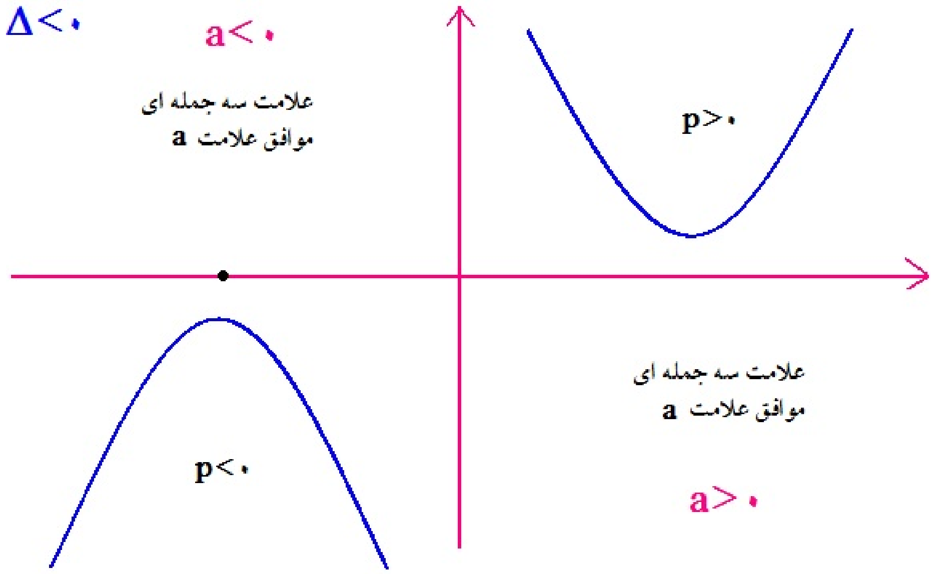
الف : اگر $\Delta > ۰$



ب : اگر $\Delta = 0$



ج: اگر $\Delta < 0$



پس برای تعیین علامت سه‌جمله‌ای $p(x)$ ابتدا باید $p(x) = 0$ را حل کنیم. پس اولین گام یافتن مبین معادله درجه دوم است یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ است که بسته به علامت Δ یکی از جداول زیر را تشکیل می‌دهیم.
اگر $\Delta > 0$ باشد:

x		x_1		x_2	
$p = ax^2 + bx + c$	علامت موافق a	۰	علامت مخالف علامت a	۰	علامت موافق a

اگر $\Delta = 0$ باشد:

x		$x_1=x_2=-\frac{b}{a}$	
$p=ax^2+bx+c$	علامت موافق a	0	علامت موافق a

اگر $\Delta < 0$ باشد:

x	سه جمله ای ریشه ندارد
$p=ax^2+bx+c$	علامت موافق a

تذکر: نتایج حاصل از بررسی نمودارهای یک سه‌جمله‌ای درجه دوم را می‌توان از روی معادله سه‌جمله‌ای درجه دوم $p(x) = ax^2+bx+c$ نیز بدست آورد. برای این منظور فرم تبدیل شده‌ی عبارت p را که قبلا محاسبه کرده‌ایم بصورت زیر می‌نویسیم:

$$p(x) = ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{p(x)}{a} = \left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

حال اگر $\Delta < 0$ باشد عبارت $(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ همواره مثبت است پس $\dfrac{p(x)}{a}$ هم مثبت است و این یعنی اگر a مثبت باشد آنگاه $p(x)$ هم مثبت است.و اگر a منفی باشد آنگاه $p(x)$ هم منفی است.

حال اگر $\Delta = 0$ باشد عبارت حاصل بصورت $(x+\frac{b}{2a})^2$ درمی‌آید و باز $\dfrac{p(x)}{a}$ مثبت است و مانند حالت قبل نتیجه حاصل می‌شود.

سرانجام اگر $\Delta > 0$ باشد پس $\sqrt{\Delta}$ با معنی است و داریم:

$$\frac{p(x)}{a} = \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \qquad (*)$$

عبارت‌های داخل پرانتز که بلافاصله بعد از x آمده‌اند همان ریشه‌های معادله $p(x) = 0$ هستند. اگر قرار دهیم:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

آنگاه معادله $(*)$ بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{p(x)}{a} = (x-x_1)(x-x_2)$$

بدون آنکه استدلال دچار نقصان شود می‌توان فرض کرد $x_1 < x_2$ است.(چرا) حال برای بررسی علامت $\frac{p(x)}{a}$ باید حالات زیر را بررسی کرد.

۱. اگر $x_1 < x < x_2$ باشد عبارت $(x-x_1)(x-x_2)$ منفی است ولذا $\frac{p(x)}{a}$ منفی است و این یعنی $p(x)$ و a از نظر علامت مخالف هم هستند. (این همان عبارت جدول تعیین علامت است)

۲. اگر $x < x_1 < x_2$ باشد ویا $x_1 < x_2 < x$ باشد عبارت $(x-x_1)(x-x_2)$ مثبت است و لذا $\frac{p(x)}{a}$ هم مثبت است و این یعنی $p(x)$ و a هم علامت هستند.

همان‌طور که مشاهده کردید نتایج بدست آمده در این حالت منطبق بر نتایج بدست آمده از نمودارهای هندسی است.

درس را با بررسی چند مثال پی می گیریم.

مثال ۲۴.۴. عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

$1)\, p = 2x^2 - x - 3$ $\qquad$ $2)\, p = -x^2 + x + 2$

$3)\, A = \dfrac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$ $\qquad$ $4)\, p = (x^2-9)(3x-1)$

$5)\, B = \dfrac{-x^2+6x-9}{x^2+x+3}$ $\qquad$ $6)\, C = \dfrac{x^2-1}{(x^2+x+1)(x-3)}$

تمرین ۲۰.۴. تعیین علامت کنید.

$1)\, p = \frac{1}{3}x - 1$ $\qquad$ $2)\, p = (6-3x)(2+2x)$

$3)\, A = \dfrac{(1-x)(2-x)(3-x)}{(4-x)(5-x)}$ $\qquad$ $4)\, B = \dfrac{x^2+x+2}{4-3x-x^2}$

$5)\, C = \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^4-1}$ $\qquad$ $6)\, D = \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x}(x^2+4x+4)}$

۴.۴ نامعادله

یکی از مهم‌ترین کاربردهای تعیین علامت حل نامعادلات جبری است. برای یافتن مقادیری از x که در شرط $p(x) > 0$ صدق می‌کند تنها راه تعیین علامت p است . حتی ممکن است p لزوما چندجمله‌ای نباشد. قبل از هر چیز خواص مقدماتی نامساوی‌ها را بیان می‌کنیم.

خواص اصلی نامساوی‌ها

$1) a \le b \Longrightarrow a + c \le b + c$

$$2) a \le b \Longrightarrow \begin{cases} c > 0 \Rightarrow ac \le bc \\ c < 0 \Rightarrow ac \ge bc \end{cases}$$

$3) a \le b \;\&\; b \le c \Longrightarrow a \le c$

$$4) 0 < a \le b \Longrightarrow \frac{1}{a} \ge \frac{1}{b} > 0$$

$$5) a \le b < 0 \Longrightarrow \frac{1}{b} \le \frac{1}{a} < 0$$

$$6) a < 0 < b \Longrightarrow \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$$

مثال ۲۵.۴. نامساوی $-8x + 3(x-2) > -x + 2$ را حل کنید و مجموعه جواب آن‌را بصورت بازه نمایش دهید.

مثال ۲۶.۴. نامعادله‌ی $\frac{2}{3} \le \frac{2x+3}{5} < \frac{1}{3}$ را حل کنید.

مثال ۲۷.۴. حدود پارامتر m را طوری تعیین کنید تا معادله‌ی درجه دوم $x^2 + mx + 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی باشد.

مثال ۲۸.۴. سهمی $y = x^2 + ax + b$ محور طولها را در دو نقطه با طول‌های ۱ و ۵ قطع می‌کند. اولا مقادیر b, a را بیابید و ثانیا معین کنید که نمودار این سهمی در چه بازه‌ای زیر خط $y = -3$ قرار می‌گیرد.

مثال ۲۹.۴. نامعادله‌ی $0 \ge \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$ را حل کنید.

مثال ۳۰.۴. نامعادله $\frac{1}{2} > \frac{x}{x-5}$ را حل کنید.

مثال ۳۱.۴. نامعادله‌ی $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ راحل کنید.

مثال ۳۲.۴. دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x^2-4x-3\leq 0 \\ \dfrac{1}{x^2}\geq 1 \end{cases}$$

مثال ۳۳.۴. نامعادله‌ی $\dfrac{(x-4)(x^2-5x+6)(x^2+x+2)}{(-2x^2+x-5)(x^2-2x+1)}<0$ را حل کنید.

مثال ۳۴.۴. حدود m را چنان تعیین کنید تا عبارت $(m-1)x^2+6x+2m+1$ برای هر مقدار x مثبت باشد.

مثال ۳۵.۴. نامعادله‌ی $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}<1$ را باشرط $x>0$ حل کنید.

تمرین ۲۱.۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $-1<\dfrac{x+1}{1-x}\leq 2$ را بیابید.

تمرین ۲۲.۴. حدود m را چنان بیابید که نابرابری زیر همواره درست باشد.

$$\frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}>-1$$

تمرین ۲۳.۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $(2-\sqrt{3})^{\frac{3}{x}}<(2-\sqrt{3})^{2+x}$ با شرط $x>0$ را بدست آورید.

تمرین ۲۴.۴. نامعادلات زیر را حل کنید.

$1)\ \dfrac{3-x^2}{x}>2$ $\qquad$ $2)\ \dfrac{2x-1}{x}<1$

$3)\ \dfrac{3x^2-3x}{x^3-1}>1$ $\qquad$ $4)\ -\dfrac{1}{2}x^2+2x+6>\dfrac{7}{2}$

$5)\ \dfrac{3x^2-2x}{x^2+4}<2$ $\qquad$ $6)\ \dfrac{1}{x-1}\geq\dfrac{1}{x+4}$

$7)\ \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}>\dfrac{2x+4}{x-2}$ $\qquad$ $8)\ (x+\sqrt{x})(2x^2+x-15)<0$

تمرین ۲۵.۴. اگر عبارت $(a-1)x^2+(a-1)x+1$ برای هر مقدار x منفی باشد حدود تغییرات a را بدست آورید.

تمرین ۲۶.۴. نامعادله $3x+1\leq 2x-1\leq \frac{5}{2}x+2$ را حل کنید.

تمرین ۲۷.۴. نامعادله‌ی $\dfrac{1}{x^2+1}\geq\dfrac{1}{2x^2+x+1}$ را حل کنید.(ببینید امکان معکوس کردن طرفین نامعادله وجود دارد؟)

۵.۴ قدرمطلق و معادلات و نامعادلات قدرمطلقی

در کلاس نهم با قدرمطلق آشنا شده‌اید. یادآوری می‌کنیم که قدرمطلق بصورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۴. قدر مطلق x را که با نماد $|x|$ نشان داده می‌شود بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال ۳۶.۴. قدرمطلق عبارت‌های زیر را حساب کنید.

۱) $|1+\sqrt{2}|$ ۲) $|1+t^2|$

۳) $|1-\sqrt{2}|$ ۴) $\left|1-\frac{\pi}{3}\right|$

مهم‌ترین خواص قدرمطلق ها

۱) $|u| = 0 \Longrightarrow u = 0$

۲) $|u| = a \Longrightarrow u = \pm a \qquad , a > 0$

۳) $|u| \leq a \Longrightarrow -a \leq u \leq a \qquad , a > 0$

۴) $|u| \geq a \Longrightarrow u \geq a$ یا $u \leq -a \qquad , a > 0$

۵) $u^2 \leq a^2 \Longleftrightarrow |u| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq u \leq a \qquad , a > 0$

۶) $u^2 \geq a^2 \Longleftrightarrow |u| \geq a \Longleftrightarrow u \geq a$ یا $u \leq -a \qquad , a > 0$

۷) $\begin{cases} |u| = u \Longleftrightarrow u \geq 0 \\ |u| = -u \Longleftrightarrow u \leq 0 \end{cases}$

۸) $\Big||a| - |b|\Big| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ **نامساوی مثلثی**

۹) $|ab| = |a||b| \ \ \& \ \ \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$

مثال ۳۷.۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $|x^3 - 9x| = 0$

۲) $|3x - 5| = 4$

۳) $|2x - 1| < 1$

۴) $|1 - x| \geq 2$

۵) $|x^2 + x - 2| = 2 - x - x^2$

۶) $|2x - 1| < x$

مثال ۳۸.۴. ثابت کنید $|a - b| = |b - a|$.

مثال ۳۹.۴. فرض کنید $|a| < 1$, $|b - 1| < 10$, $|a - c| < 10$ با این مفروضات ثابت کنید $|ab - c| < 20$.

مثال ۴۰.۴. در نامساوی مثلثی چه زمانی تساوی رخ می‌دهد؟ یعنی تحت چه شرایطی روی a, b نتیجه می‌شود: $|a + b| = |a| + |b|$.

مثال ۴۱.۴. معادله‌ی $|x^2 - 1| + |2 - x^3| = 1$ را حل کنید.

مثال ۴۲.۴. معادله‌ی $|x - 1| + |x + 1| = 2$ را حل کنید.

مثال ۴۳.۴. نامعادله‌ی $|x^3 - x| \leq x$ را حل کنید.

مثال ۴۴.۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x - 1| + |x + 3| > 2$ را بدست آورید.

تمرین ۲۸.۴. حاصل قدرمطلق‌های زیر را بدست آورید.

۱) $|\sqrt{7} - 3|$

۲) $|\sqrt{2} + \sqrt{3} - \pi|$

۳) $|\sqrt{10} - 3|$

۴) $|\sqrt{2} - 1/41|$

۵) $|\pi - 3/14|$

۶) $|1 - 2^{0/2}|$

تمرین ۲۹.۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $|b(b - 1)| = b$

۲) $|b| + |b - 1| = 0$

۳) $|b - 1| + |b| = b$

۴) $|x^2 - 1| < 1$

۵) $2 \leq |b| \leq 3$

۶) $|x| + x = 2$

تمرین ۳۰.۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$1)\big||x|-x\big|=3$

$2)\big||x|+1\big|=1$

$3)\ \big||x|+x\big|=1$

$4)|x|>x+2$

$5)|x|-|x+1|=1$

$6)|x|+|x+2|=3$

$7)|x|=\frac{1}{x}$

$7)\left|x^2-x\right|<x$

$9)\ \left|a-\frac{1}{a}\right|=|a-1|$

$10)|3x-5|=|x+2|$

تمرین ۳۱.۴. به ازای چه مقدار m همواره رابطه $mx^2-2(m-1)x+1>0$ همواره برقرار است؟

تمرین ۳۲.۴. به کمک تعیین علامت نامساوی بسیار مهم و کلیدی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{cases} x>0 \Longrightarrow x+\dfrac{1}{x}\geq 2 \\ \\ x<0 \Longrightarrow x+\dfrac{1}{x}\leq -2 \end{cases}$$

تمرین ۳۳.۴. به کمک رابطه‌ی تمرین قبل کمترین مقدار عبارات زیر را بیابید.

$$A=\frac{x^4+2x^2+2}{x^2+1} \qquad B=\frac{x^4+2}{\sqrt{x^4+1}}$$

تمرین ۳۴.۴. حل کنید.

$1)\dfrac{1}{x-x^2}>4$

$2)4+x^2>30-x^2$

$3)\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x}+1}$

$4)(x^2+2\sqrt{2}x+2)(x^2-4)\leq 0$

$5)m^3x^2+mx+\dfrac{1}{m}<0\to m=?$

$6)2x^2-(a-3)x+\dfrac{1}{8}>0\longrightarrow a=?$

$7)x^3-4x^2-x+4<0$

$7)x^4-3x^2<4$

$9)\dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}<0$

$10)x(x+1)(x+2)(x+3)\leq 24$