اژدهای دهم

شکار اژدها 10

فصل پنجم (تابع)

سیّد امیر مؤیّد

Telegram: @XY_Riazi

ارائه درسنامه های فصل به فصل و بیان اشتباهات متداول

Instageram: @XY_Riazi

تمرینات و تستهای آموزشی، تمرینی و ارزیابی

تست های آزمون های بین المللی، کنکور داخل و خارج کشور

VERSION DH 9.7

I ♥ MATH

ریاضی دهم

فصل پنجم

مثلثات:

- مفهوم تابع و بازنمایی های آن
- دامنه و برد تابع
- انواع تابع

مقدمه ای کوتاه

پس از حدود ۱۰ سال تدریس ریاضی و دروس مهندسی عمران و معماری در دانشگاه و مدارس و آموزشگاه های برتر و شناخت نقاط ضعف و قوت دانش آموزان کنکوری در درس ریاضی، تصمیم گرفتم با تغییر کتاب های درسی جزوه ای کامل و جامع برای دانش آموزان عزیزم گردآوری نمایم. از آنجا که همواره به برابری آموزشی در کشور عزیزمان ایران اعتقاد داشتم مصمم شدم این جزوه را که انشالله به زودی به کتاب تبدیل خواهد شد از طریق فضای مجازی در دسترس تمام دانش آموزان علاقمند کشورم قرار بدهم.

افتخار من تربیت و همراهی شاگردانی با رتبه های برتر کنکور و همچنین دانشجویانی قوی و تحلیلگر است که همه آنها را اکنون دوستان خود می دانم. امروز نیز هرکسی از این مکتوب استفاده نماید به گروه بزرگ دوستان من اضافه خواهد شد. شما در انتشار و استفاده از این جزوه آزادید چه با نام و چه بی نام و هیچ حقی بر دوش شما نیست...

فقط در صورتی که هرگونه ابهامی در جزوه مشاهده کردید، به تلگرام یا اینستاگرام شماره بنده پیام داده و آنرا مطرح نمایید و به من کمک کنید هر سال کاملتر از سال قبل باشم...

هرگز فراموش نکنید که شما می توانید، فقط باید با تمام وجود بخواهید و تلاش کنید...

سیدامیر میرموید

زمستان ۱۳۹۷

Telegram: @XY_Riazi

۰۹۱۱-۴۳۲-۲۴۲۲

کشاورزی جوان یک اسب پیر داشت یک روز هنگام برگشتن به خانه چون مراقبش نبود داخل چاهی بدون آب افتاد .کشاورز جوان هر چه سعی کرد نتوانست اسب را از چاه در آورد از طرفی دلش هم به حال اسب پیر میسوخت که آن طور درد بکشد پس برای اینکه اسب زجر نکشد فکری به ذهنش رسید با بیلی که در دست داشت خاکهای اطراف چاه را داخل چاه ریخت به این نیت که اسبش زیر خاکها مدفون شود و بمیرد!.

اما اسب پیر هر بار که خاک روی بدنش می ریخت با تکان دادن بدنش خاکها را پایین می ریخت و در عین حال خاکها را روی هم کپه میکرد و چند سانتی متر بالاتر می آمد .این کار همچنان ادامه پیدا کرد تا بالاخره ارتفاع خاک به لبه چاه رسید و اسب پیر در حالی که یک کوزه پر از سکه طلا را به دندان گرفته بود از چاه خارج شد و کشاورز جوان تبدیل به مردی ثروتمند شد.

مشکلات زندگی مانند تلی از خاک بر سر ما میریزند و انسانها نیز دو انتخاب پیش رو دارند:

اول اینکه اجازه دهند مشکلات آنها را زنده به گور کند!

دوم آنکه از مشکلات سکویی بسازند برای رسیدن به خوشبختی!

شما کدام را انتخاب میکنید؟

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی های آن

مفهوم تابع

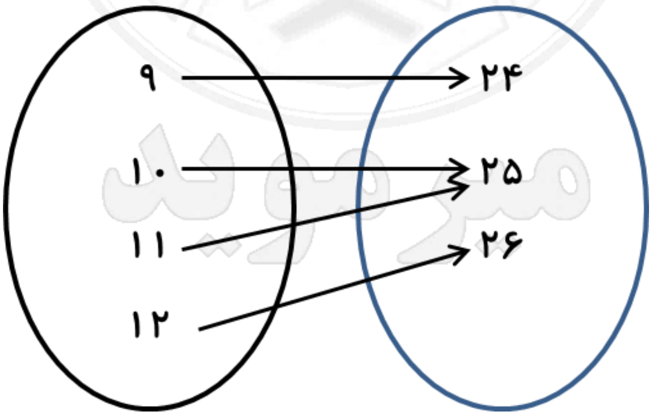
بسیاری از پدیده ها در اطراف ما وجود دارند که به هم ارتباط دارند و به نوعی به هم وابسته اند. مثلا قیمت اجناسی که در یک فروشگاه به هر کالا نسبت داده می شود و یا نمره ای که در کارنامه به هر درس نسبت داده می شود.

اگر دمای یک اتاق را از ساعت ۹ تا ۱۲ هر یک ساعت اندازه گیری و ثبت کنیم در این صورت یک ارتباط ایجاد کرده ایم که برای هر ساعت فقط یک دما داریم:

ساعت	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۲۵	۲۴	۲۴	۲۶

این رابطه را به صورت زوج مرتب و نمودار ون هم میتوان نشان داد.

$$f=\{(۹ \text{ و } ۲۵),(۱۰ \text{ و } ۲۴),(۱۱ \text{ و } ۲۴),(۱۲ \text{ و } ۲۶)\}$$



در برخی از ارتباط هایی که از آنها نام بردیم برای هر عبارتی که چیز به آن وابسته است تنها یک عدد میتوان قرار داد و نمیتوان دو یا چند عدد به آن نسبت داد. مثلا در کارنامه برای هر درس فقط یک نمره نهایی وجود دارد و یک درس همزمان نمی تواند دو نمره داشته باشد. اما ممکن است دو درس متفاوت نمره های یکسانی داشته باشند. به چنین رابطه هایی "تابع" میگویند.

میرموید

مثلا در رابطه ازدواج رسمی در ایران یک مرد حق دارد یک همسر داشته باشد و یا دو همسر مختلف داشته باشد. اما عکس این رابطه وجود نخواهد داشت که البته هیچ کدام از نظر اخلاقی درست نیست.

رابطه رسمی ازدواج ایرانی یک رابطه تابع است. اگر مرد فقط یک همسر داشته باشد رابطه از نوع یک به یک خواهد بود یعنی زن و مرد فقط با همسر خود در ارتباط هستند و این رابطه وفادارانه و پسندیده است.

تعریف ریاضی تابع: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه ای بین این دومجموعه است که در آن به هر عضو از A فقط دقیقا یک عضو از B نسبت داده شده باشد.

مثال: کدامیک از روابط زیر تابع می باشد و کدامیک تابع نمی باشد؟ (ت‌ص ۱۰۰)

الف) رابطه ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می دهد.

ب) رابطه ای که به ضلع یک مربع، مساحت مربع را نسبت می دهد.

ج) رابطه ای که به هر کارمند، همکاران او را نسبت می دهد.

د) رابطه ای که به هر عدد، ریشه ششم آن را نسبت می دهد.

مرد و زن تابع و رابطه بین آنها در نمودار مختصاتی

روش های نمایش تابع

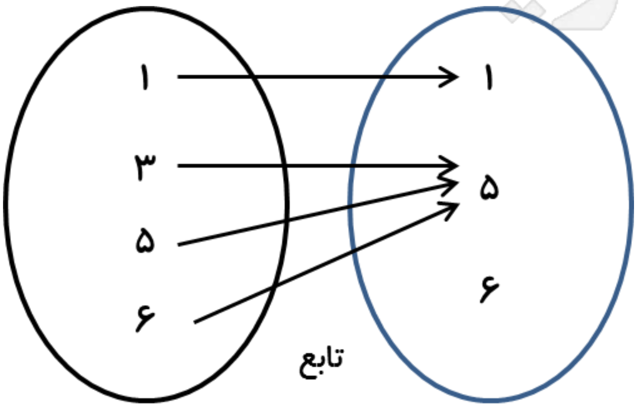
۱- نمایش جدولی

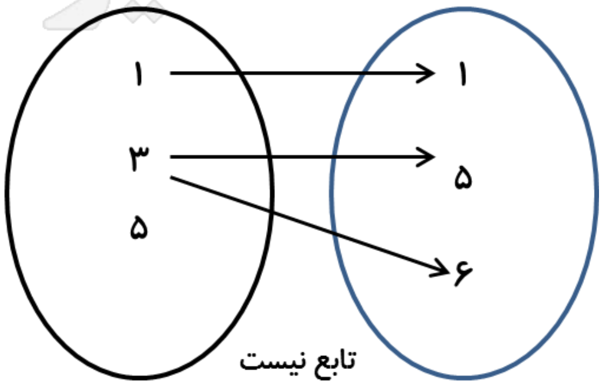
در این نوع نمایش دو ردیف عدد وجود دارد که برای هر عدد بالایی فقط یک عدد در ردیف دوم وجود دارد و هیچ عددی در ردیف بالا به دو عدد مختلف در پایین ارتباط ندارد.

معارف	ادبیات	انگلیسی	شیمی	فیزیک	ریاضی	درس
۹	۱۸	۱۸	۲۰	۱۹	۲۰	نمره

۲- نمایش تابع با نمودار ون(نمودار پیکانی)

در این نوع نمایش مجموعه های در ارتباط را داخل بیضی های بسته جدا نشان دهیم و آنها را با فلش به هم وصل می نماییم. اما تنها نمودار های ونی تابع را نشان میدهند که از هر عضو مجموعه اول فقط و فقط یک فلش خارج شده باشد. اما اگر به یک عضو از مجموعه دوم چندین فلش ختم شوند بازهم رابطه یک تابع است.





۳-نمایش تابع با زوج مرتب

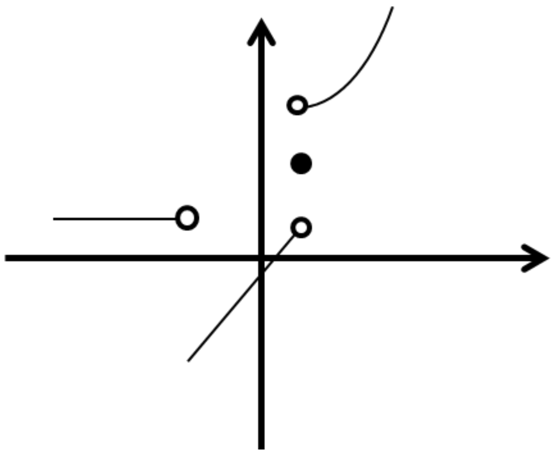
در این نوع نمایش مجموعه های در ارتباط را بصورت مختصات نشان می دهیم بطوری که اعضای مجموعه اول مولفه اول و اعضای مجموعه دوم مولفه دوم را تشکیل میدهند. اما تنها مجموعه زوج مرتب هایی تابع را نشان می دهند که برای هر مولفه اولی فقط و فقط یک مولفه دوم وجود داشته باشد و در آن هیچ دو زوج مرتبی با مولفه اول یکسان وجود نداشته باشد و چنانچه دو مولفه اول یکسان باشند بناچار (برای تابع بودن) مولفه های دوم آن ها نیز یکسان باشند. اما اگر یک مولفه دوم با چند مولفه اول مختلف امده باشد بازهم رابطه یک تابع است.

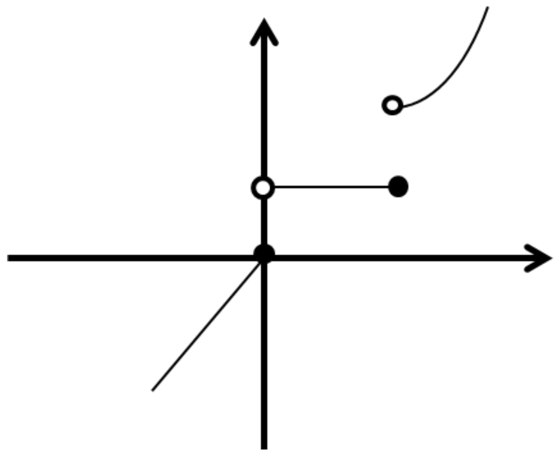
$$f=\{(\text{۱ و ۳}),(\text{۷ و ۶}),(\text{۱۰ و ۶}),(\text{۵ و ۵})\} \rightarrow \text{تابع}$$

$$f=\{(\text{۱ و ۳}),(\text{۵ و ۶}),(\text{۱۰ و ۹}),(\text{۵ و ۵})\} \rightarrow \text{تابع نیست}$$

۴- نمودار مختصاتی (شلیک عمودی)

اگر زوج مرتب ها را بر روی محورهای مختصاتی رسم کنیم به این شیوه نمایش "نمودار مختصاتی" می گویند. این زوج مرتب ها به صورت نقطه یا خط هایی رسم می شوند. در این حالت تنها روابطی تابع محسوب می شوند که همه خطوط عمودی (موازی محور y) یا نمودار ها و نقطه ها را قطع نکند و یا فقط حداکثر در یک نقطه تو پر قطع کند و با هر شلیک عمودی به خانم x فقط یک اقای y کشته شود.





سوالات آموزشی:

۱) با مجموعه $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{a\ ,b\}$ (از A به B) رابطه های به صورت جدولی، نمودار ون، زوج مرتب، و مختصاتی بنویسید که شرایط عنوان بالای ستون را داشته باشند. (ت۲ص۱۰۰)

روش	تابع باشد	تابع نباشد
جدولی		
نمودار ون		
زوج مرتب		
نمودار مختصاتی		

تست کنکور:

۱-در رابطه $R=\{(x,y)|x<y\}$ مولفه هر زوج مرتب از مجموعه $A=\left\{m\middle|m\in Z\,,m^{۲}\le ۴\right\}$ انتخاب می شوند. رابطه R چند عضو دارد؟(ریاضی۸۵)

۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲- رابطه $R=\left\{(x,y)\,\middle|x,y\in Z\,,|x|+|y|=۲\right\}$ چند عضو زوج مرتب دارد؟(ریاضی ۸۸)

۱) ۴ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

۳- رابطه $R=\left\{(x,y)\,\middle|x,y\in N\,,۲x+y\le ۷\right\}$ چند عضو زوج مرتب دارد؟(ریاضی خارج ۸۸)

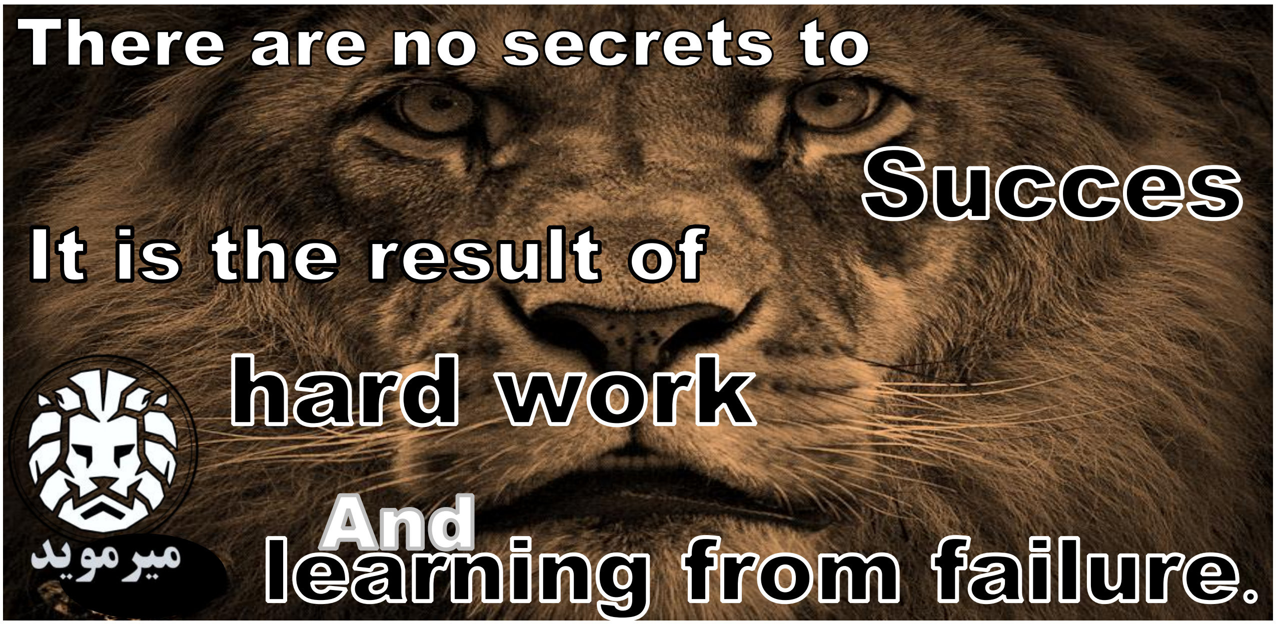
۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۸ ۴) ۹

۴- رابطه $A=\left\{\left(۳,m^{۲}\right),\left(۲,۱\right),\left(-۳,m\right),\left(-۲,m\right),\left(۳,m+۲\right),(m,۴)\right\}$ به ازای کدام مقدار m تابع است؟(تجربی خارج ۸۵)

۱) ۲- ۲) ۱-

۳) ۲ ۴) هیچکدام



پیرمردی تنها در مزرعه ای زندگی می کرد . او می خواست مزرعه سیب زمینی اش راشخم بزند اما این کار خیلی سختی بود. تنها پسرش که می توانست به او کمک کند در زندان بود. پیرمرد نامه ای برای پسرش نوشت و وضعیت را برای او اینگونه توضیح داد:

پسرعزیزم من حال خوشی ندارم چون امسال نخواهم توانست سیب زمینی بکارم. من نمی خواهم این مزرعه را از دست بدهم، چون مادرت همیشه زمان کاشت محصول را دوست داشت. اگر تو اینجا بودی تمام مشکلات من حل می شد .

دوستدار تو پدر .

بعد مدتی پیرمرد این تلگراف را دریافت کرد:

پدر، به خاطر خدا مزرعه را شخم نزن ، من آنجا اسلحه پنهان کرده ام .

۴ صبح فردا ۱۲ نفر از مأموران زندان و افسران پلیس محلی آمدند و تمام خاک مزرعه را زیرورو کردند بدون اینکه اسلحه ای پیدا کنند. بعد از مدتی پیرمرد نامه دیگری دریافت کرد با این مضمون:

- پدر برو و سیب زمینی هایت را بکار، این بهترین کاری بود که از اینجا می توانستم برایت انجام بدهم.

درس دوم: دامنه و برد تابع

مقادیر قابل جاگذاری تابع f که می توانیم تغییرش دهیم (خانم x) را دامنه تابع گفته و با D_f نشان می دهیم و مقادیری که در اثر تغییر دامنه نتیجه میگیریم (آقای y) را برد تابع می گوییم و با R_f نشان می دهیم.

دامنه و برد در حالت های مختلف نشان دادن تابع

۱- نمایش جدولی

در این حالت اعداد ردیف بالا را در داخل مجموعه نشان داده و آنرا دامنه میگوییم و اعداد ردیف پایین را در داخل مجموعه ای جداگانه نشان داده و به آن برد می گوییم.

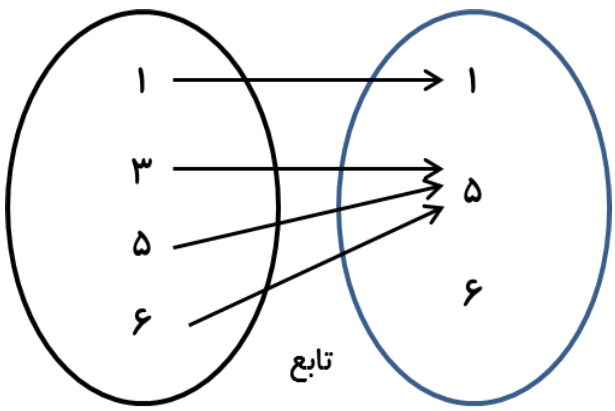
معارف	ادبیات	انگلیسی	شیمی	فیزیک	ریاضی	درس
۹	۱۸	۱۸	۲۰	۱۹	۲۰	نمره

D_f = برد =

R_f = دامنه =

۲- نمایش نمودار ون (نمودار پیکانی)

در این حالت همه اعدادی که در دایره ای وجود دارند که فلش ها از آن خارج می شوند را در داخل مجموعه ای نشان داده و به آن دامنه می گوییم. و فقط اعدادی که انتهای یک فلش به آنها حتما ختم شده را در داخل مجموعه ای نشان داده و به آن برد می گوییم.



D_f = دامنه =

R_f = برد =

میرموید

۳- نمایش زوج مرتب

در این حالت همه اعدادی که مولفه اول (x) می باشند را در داخل یک مجموعه نوشته و به آن دامنه می گوییم و همه اعدادی که مولفه دوم (y) می باشند را در داخل یک مجموعه نوشته و به آن برد می گوییم.

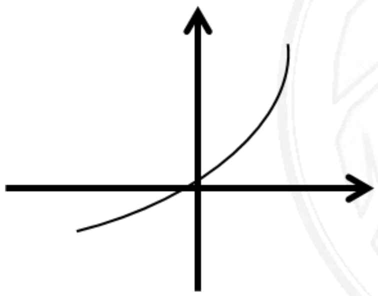
f = {(۱ و ۳) , (۷ و ۶) , (۱۰ و ۶) , (۵ و ۵)}

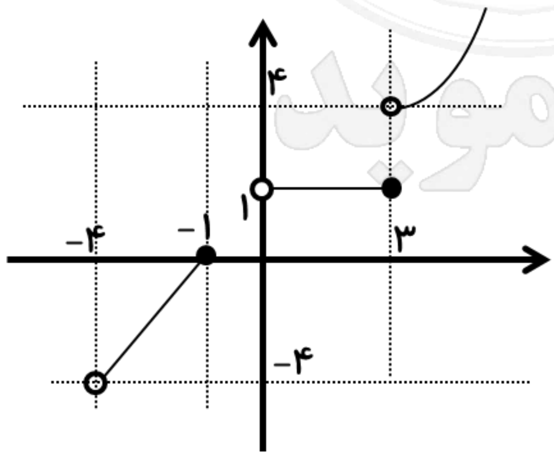
دامنه $= D_f =$ 　　　　　　　　　　 برد $= R_f =$

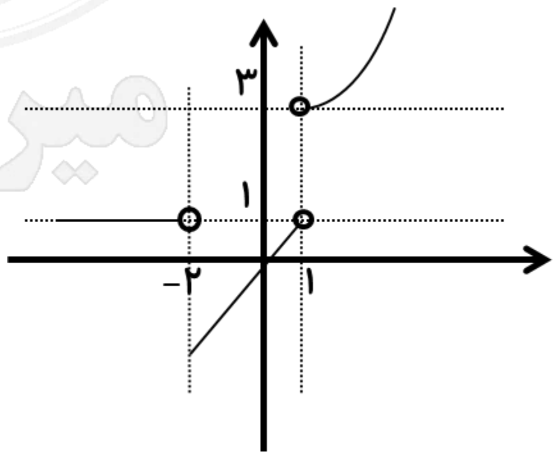
۴- نمایش شکلی (مختصاتی)

در این حالت تصویر هر یک از قطعات نمودارها را روی محور x ها (محور زنانه) انداخته و کل محدوده ای که سایه دارد و رنگی است را دامنه می گوییم.

همچنین تصویر هر قطعه از نمودارها را روی محور y ها (محور مردانه) انداخته و کل محدوده ای که سایه دارد و رنگی است را برد می گوییم.







نمایش ضابطه‌ای (سایت همسریابی)

در مواردی اینقدر نقاط تابع زیاد است که ترجیح می دهیم به جای دانه ای آنرا به صورت یک قانون کلی و یک رابطه بین x و y بنویسیم که به این رابطه منطقی بین x و y ضابطه تابع می گویند. (در پایین، مجموعه اول را دامنه و مجموعه دوم را هم دامنه میگوییم که برد از آن انتخاب می شود و زیر مجموعه آن است.)

x	...	۱/۰۰۱	$-$۱	۰	۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	...
y	...	$-$۱/۰۰۲	$-$۱	۱	۳	۳/۰۰۲	۳/۰۲	۳/۲	...

$$\begin{cases} f: R \to R \\ x \to ۲x+۱ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} f: R \to R \\ y = ۲x+۱ \end{cases}$$

نکته: تعداد اعضای دامنه یک تابع در صورت عددهای صحیح بودن همیشه از تعداد اعضای برد آن بیشتر است.

x	۲	۳/۵	-۵	-۰/۵	۱۰/۷۵	۱۱۰
y	۴	۷	-۱۰	۱	۲۱/۵	

$$\begin{cases} f: \quad \to \\ x \to \end{cases} \quad \text{یا} \quad f(x) =$$

مقدار یک تابع (فدایی داری خانم...)

مقدار یک تابع یعنی اینکه به ازای انتخاب یک عدد (خانم x) از دامنه و جاگذاری آن کدام عدد بدست می آید (آقای y چه کسی می شود).

نکته: یک قرار داد مهم اینست که اگر در تابعی با نام f ، زوج مرتب (**a** و **b**) وجود داشته باشد یا برای a از دامنه یک b از برد وجود داشته باشد در این صورت می توانیم بنویسیم:

$$f_{(a)} = b$$

نکته: در یک تابع مقدار تابع به ازای هر چیز خواسته شده فقط یک جواب باید داشته باشد و اگر دو جواب مختلف بدست آمد آن رابطه، تابع نیست و تنها یک رابطه است.

۱- نمایش جدولی

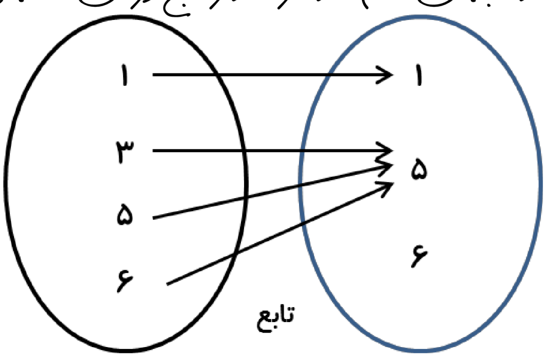
در این حالت عددی از ردیف پایین را که در زیر آن عدد دامنه داده شده قرار دارد مقدار تابع در ان نقطه می گوییم.

۲۰	۱۰	۸	۷	۴	۳	ردیف اول
۱۲	۱۰	۸	۸	۵	۴	ردیف دوم

$f_{(f_{f_{\dots f_{(۷)}}})} =$ $\qquad f_{(f_{(۳)})} =$ $\qquad f_{(۷)} =$

۲- نمایش نمودار ون

در این حالت عددی که انتهای فلش خارج شده از عدد داده شده به آن ختم شده را مقدار تابع در آن نقطه می گوییم.



$f_{(۱)} =$

$f\left(f_{(۳)}\right) =$

$f_{(f_{f_{\dots f_{(۶)}}})} =$

۳- نمایش زوج مرتب

در این حالت مولفه دوم (y) زوج مرتبی که مولفه اول آن (x) عدد داده شده می باشد را مقدار تابع در آن نقطه می گوییم.

$$f = \{(\text{۱ و ۳}),(\text{۲ و ۳}),(\text{۳ و ۵}),(\text{۵ و ۵})\} \qquad f_{\left(f_{(۱)}\right)} =$$

مثال: حاصل $f_{(۶)}$ را بدست آورید و بگویید برای کدام عوض دامنه مقدار تابع ۲۶ می شود.

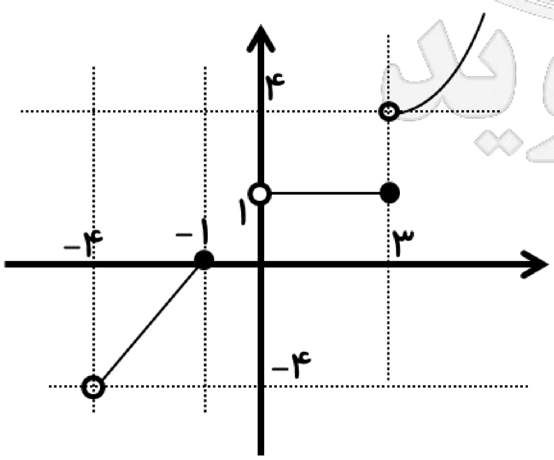
$$f = \{(\text{۵ و ۲۵}),(\text{۱۰ و ۲۴}),(\text{۶ و ۲۴}),(\text{۱۲ و ۲۶})\}$$

$$D_f = \{۵,۱۰,۶,۱۲\} \qquad R_f = \{۲۵,۲۴,۲۶\}$$

$$f_{(۶)} =$$

۴- نمایش شکلی

در این حالت یک خط عمودی در نقطه ای به طول داده شده (x) رسم میکنیم. این خط در صورت قطع کردن فقط یک نقطه را قطع می کند (شرط تابع بودن) که عرض مختصات آن نقطه را مقدار تابع در آن نقطه می گوییم (مختصات نقطه تویر به طول x را در صورت وجود می یابیم).



نکته: همیشه از داخلی ترین f شروع میکنیم و به ترتیب آنها را پیدا می کنیم.

۵-نمایش ضابطه ای

نمایش جبری تابع

همانطور که گفته شد رابطه بین دامنه و برد (y و x) را می توان به صورت یک عبارت ریاضی نوشت که در آن حرف انگلیسی x نشان دهنده دامنه تابع و حرف انگلیسی y نشان دهنده برد تابع می باشد. اینگونه نمایش را نمایش جبری تابع می گویند. برای نشان دادن تابع به صورت جبری باید دامنه و برد آنرا هم نشان داد.

نکته: (اگر دامنه و برد هردو اعداد حقیقی باشند دیگر لازم به نوشتن نیست)

$$f=\{(۱ \text{ و } ۳),(۲ \text{ و } ۵),(۳ \text{ و } ۸),\dots,(n \text{ و } ۲n+۱)\}$$

$$\begin{cases} f: N \to R \\ x \to ۲x+۱ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} f: N \to R \\ y = ۲x+۱ \end{cases}$$

در حالت کلی ضابطه (رابطه) تابع را به شکل زیر نمایش میدهند که در آن A دامنه تابع و B مجموعه ای که برد تابع زیر مجموعه آن می باشد است (هم دامنه). یعنی x فقط باید در محدوده بازه A باشد. در نهایت $f_{(x)}$ را قانون یا ضابطه تابع می گویند که به معنی آنست که تابعی داریم با متغیر x .

$$\begin{cases} f: A \to B \\ x \to f_{(x)} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} f: A \to B \\ y = f_{(x)} \end{cases}$$

درواقع حرف y مثل نام کوچک تابع می باشد. اگر بخواهیم دقیقتر آنرا معرفی کنیم و بگوییم از کدام خانواده است باید از $f_{(x)}$ استفاده کنیم که نشان میدهد از خانواده x است و این حرف در آن خانواده تغییر میکند.

$$f_{(x)} = x^۳ + ۲x^۲ + ۴$$

$$g_{(a)} = a^۲x^۳ + ۲a^۲y + ۴a$$

$$h_{(x)} = y^۲x^۳ + ۲x^۲y + ۴y$$

نکته: برای مقدار دهی تابع، هر مقداری که قرار است به جای متغیر قرار بگیرد به جای x در رابطه $f_{(x)}$ قرار میدهیم بدون اینکه اصلا فکر کنیم که چرا. بنابراین $f_{(۳)}$ یعنی به جای x تابع عدد ۳ بگذاریم.

$$f_{(a)} = a^۲x^۳ + ۲a^۲y + ۴a$$

$$f_{(\text{کلثوم})} = (\text{کلثوم})^۲x^۳ + ۲(\text{کلثوم})^۲y + ۴(\text{کلثوم})$$

تابع خطی

توابعی که بتوان آنها را به صورت $y = ax + b$ نوشت را توابع خطی می گویند که می توان مثل معادله خط با آن رفتار کرد.

مثال: اگر در یک تابع خطی $f_{(۱)} = ۷$ و $f_{(۳)} = ۱۵$ باشد آنگاه ضابطه تابع را بدست آورید.

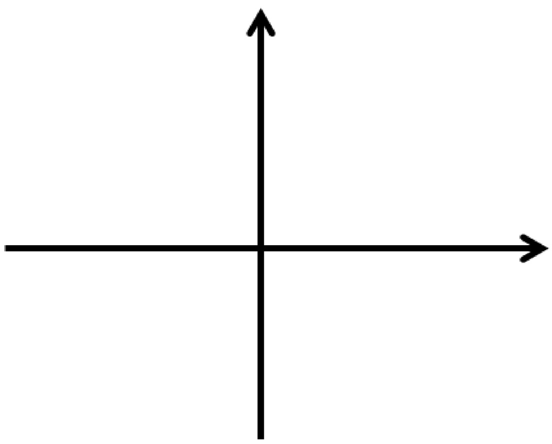
$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} f_{(۱)} = a(\quad) + b = \\ f_{(۳)} = a(\quad) + b = \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = ۷ \\ ۳a + b = ۱۵ \end{cases} \rightarrow$$

رسم تابع خطی با دامنه مشخص

برای رسم توابع خطی که دامنه آنها به صورت تعدادی عدد جدا می باشد هر یک از اعداد را جاگذاری کرده تا برد یا همان عرض نقاط بدست آید اما اگر دامنه به صورت بازه ای باشد اعداد حدود بازه را با توجه به باز یا بسته بودن آن قرار میدهیم .

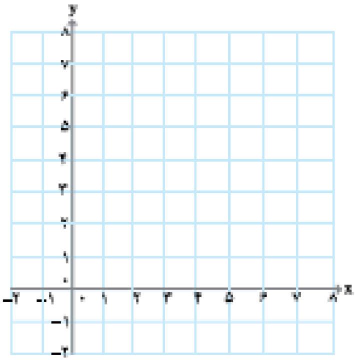
مثال: تابع خطی $f_{(x)} = ۳x - ۴$ با شرط $D_f = (۲, +\infty)$ را رسم نمایید و برد آنرا مشخص نمایید.



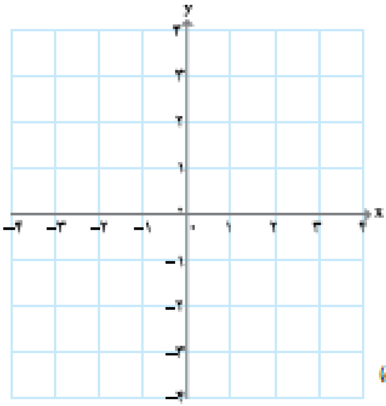
نکته : اگر در تابع خطی دامنه برابر اعداد حقیقی R باشد آنگاه برد هم اعداد حقیقی خواهد بود. در صورتی که دامنه بخشی از اعداد حقیقی باشد آنگاه برد را از قرار دادن حدود دامنه در تابع بدست می اوریم . یعنی اگر دامنه را از هر طرف محدود نماییم برد هم از همان طرف محدود می شود.

مثال: توابع زیر را در دامنه خودشان رسم کنید و برد آنها را مشخص کنید.

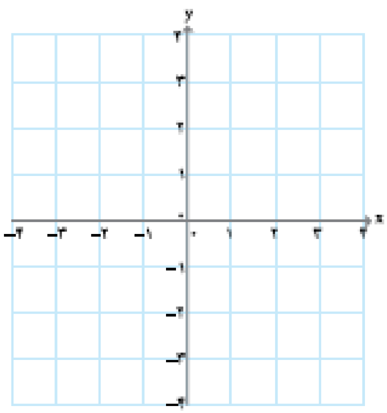
	الف	ب	پ	ت
تابع	$f_{(x)} = ۳x - ۲$	$f_{(x)} = ۳x - ۲$	$f_{(x)} = ۳x - ۲$	$f_{(x)} = ۳x - ۲$
دامنه	$\{۰,۱,۲,۳\}$	R	$[۰,۲)$	اعداد حقیقی نامنفی
برد				



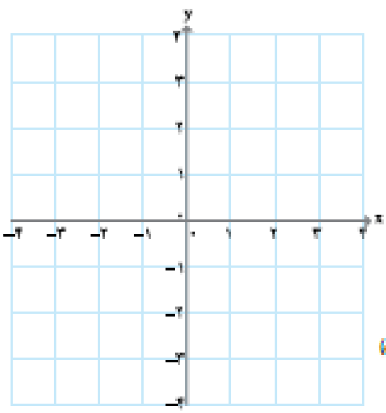
(الف)



(ب)



(پ)



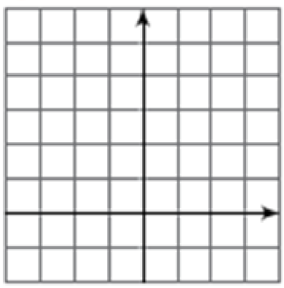
(ت)

میرموید

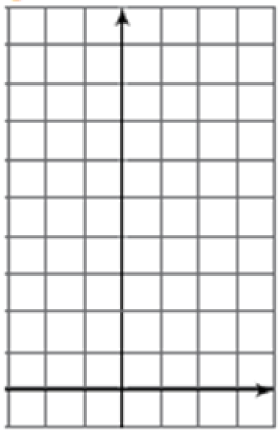
مثال: توابع زیر را در دامنه خودشان رسم کنید و برد آنها را مشخص کنید.

	الف	ب	پ
تابع	$f_{(x)} = x^۲ + ۱$	$g_{(x)} = x^۲ + ۱$	$t_{(x)} = x^۲ + ۱$
دامنه	$\{-۱, ۰, ۱, ۲\}$	R	$[-۱,۲)$
برد			

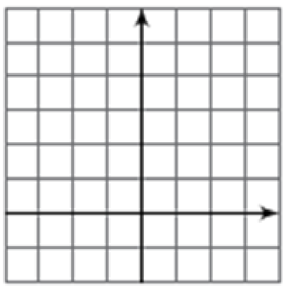
f



g



t



سوالات کنکور:

۱-اگر $f_{(x)} = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(۱,۲),(۵,۴),(۶,۵),(۲,۳)\}$ و $g_{(f_{(a)})} = ۵$ باشد آنگاه عدد a کدامست؟ (سراسری تجربی ۸۶)

۱) ۵ ۲) ۳

۳) ۷ ۴) ۸

۲- اگر $f_{(x)} = |x|$ و $g_{(x)} = x^۲ + ۲x + ۱$ باشد، آنگاه $f(g_{(۱-\sqrt{۲})}) - g(f_{(۱-\sqrt{۲})})$ کدامست؟(سراسری تجربی ۸۹)

۱) $۴\left(۱ - \sqrt{۲}\right)$ ۲) $۴\left(\sqrt{۲} - ۱\right)$

۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۳- اگر $f_{(x)} = \sqrt{x + ۲|x|}$ باشد مقدار $f_{(f_{(-۱۴۴)})}$ کدامست؟ (سراسری تجربی ۸۸)

۱) تعریف نشده ۲) ۶

۳) ۸ ۴) ۱۲

یک سخنران معروف در مجلسی که دویست نفر در آن حضور داشتند، یک اسکناس هزار دلاری را از جیبش بیرون آورد و پرسید: چه کسی مایل است این اسکناس را داشته باشد؟

دست همه حاضرین بالا رفت.

سپس در برابر نگاه های متعجب، اسکناس را مچاله کرد و پرسید: چه کسی هنوز مایل است این اسکناس را داشته باشد؟ و باز هم دست های حاضرین بالا رفت.

این بار مرد، اسکناس مچاله شده را به زمین انداخت و چند بار آن را لگد مال کرد و با کفش خود آن را روی زمین کشید. بعد اسکناس را برداشت و پرسید: خوب، حالا چه کسی حاضر است صاحب این اسکناس شود؟ و باز دست همه بالا رفت. سخنران گفت: دوستان ، با این بلاهایی که من سر اسکناس در آوردم، از ارزش اسکناس چیزی کم نشد و همه شما خواهان آن هستید.

در زندگی واقعی هم همین طور است. ما با مشکلاتی که روبرو می شویم، خم می شویم، مچاله می شویم، خاک آلود می شویم و احساس می کنیم که دیگر پشیزی ارزش نداریم، ولی این گونه نیست و جدا از این که چه بلایی سرمان آمده است هرگز ارزش خود را از دست نمی دهیم و هنوز هم برای افرادی که دوستمان دارند، آدم با ارزشی باشیم و هدف با ارزشی داریم...

میرموید

درس سوم: انواع تابع

با توجه به ارتباط بین مولفه اول و دوم هر تابع (y و x) چند نوع تابع خاص و پرکاربرد وجود دارد که باید آنها را بشناسیم.

۱- توابع چند جمله ای

توابعی را که ضابطه آن ها چندجمله ای های جبری از یک متغیر باشند را توابع چندجمله ای می گویند. بزرگترین توان متغیر را درجه آن تابع می گویند.

$$f_{(x)} = a_۱x^n + a_۲x^{n-۱} + a_۳x^{n-۲} + \dots + a_{n-۱}x + a_n$$

$$f_{(x)} = ۲x^۲ + ۲x + ۱$$

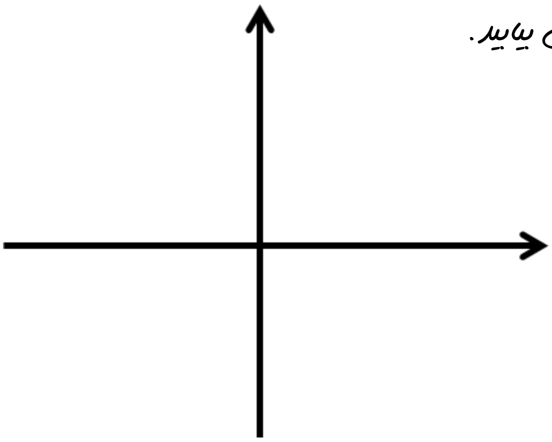
$$f_{(t)} = ۵t + ۷$$

$$y = ۴x^۲ + ۲x + ۵$$

نکته: آشناترین توابع چندجمله ای تابع درجه اول (تابع خطی) و یا تابع درجه دوم (سهمی) می باشد.

دامنه تابع درجه دوم اعداد حقیقی میباشد ولی برد آن با توجه به مثبت یا منفی بودن a میتواند به ترتیب بیشتر از عرض راس و یا کمتر از عرض نقطه راس سهمی باشد.

مثال: دامنه و برد تابع $f_{(x)} = ۳x^۲ - ۴$ را به کمک رسم شکل بیابید.



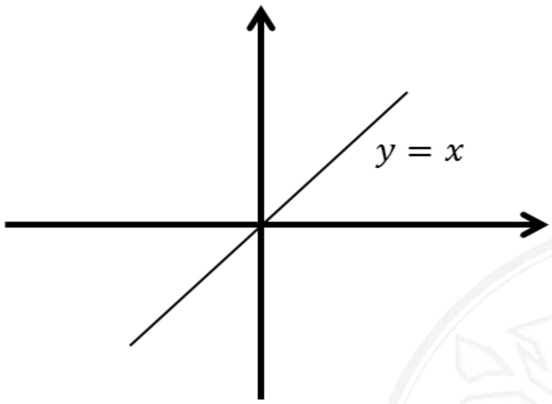
میرموید

۲- تابع همانی (دخترعمو-پسرعمو)

اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می نامند. یعنی مولفه اول و دوم دقیقا یکی باشند.

نکته: اگر دامنه تابع همانی را R درنظر بگیریم، نمودار آن بصورت معادله خطی که نیم ساز ناحیه اول و سوم است خواهد بود. اما در صورتی که دامنه این تابع محدود شود مشابه توابع خطی برد آن نیز محدود می شود.

$$f_{(x)} = y = x$$

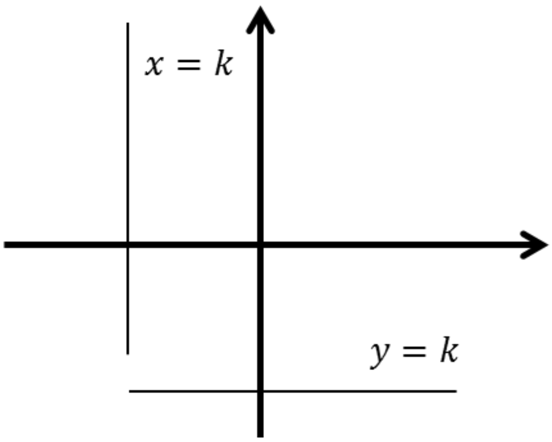


۳- تابع ثابت

تابعی که برد آن تنها شامل یک عضو (عدد) است را تابع ثابت می نامیم. یعنی تمام اعضای دامنه را به یک و فقط یک عضو از برد نظیر کنند. اگر k یک عدد حقیقی باشد آنگاه عبارت زیر یک تابع ثابت است

نکته: نمودار چنین توابعی وقتی دامنه یک بازه باشد خطی موازی محور طول هاست و اگر دامنه زیرمجموعه ای از اعداد صحیح باشد بصورت نقاطی در دستگاه مختصات است که همگی روی یک خط موازی محور طول ها قرار دارند.

$$\mathrm{f}_{(\mathrm{x})} = y = \mathrm{k}$$



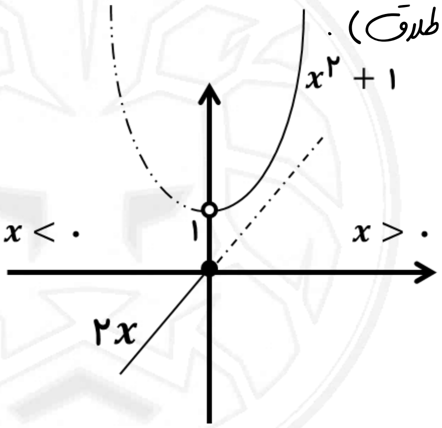
نکته: معادله خط $x = k$ یک تابع نمی باشد. چون در صورتی که نمودار آن را رسم کنیم خطوط عمودی آنرا در بینهایت نقطه قطع می کنند.

۴- تابع چندضابطه (تابع قطعه ای)

بعضی توابع یک ضابطه دارند و فقط دامنه آنها محدود شده است.

اما توابع چند ضابطه دارای قطعاتی از دامنه هستند که هر یک ضابطه خاصی دارند. باید توجه کرد که هریک از ضابطه ها فقط در محدوده دامنه (x) خودش باید اعمال گردد. مثلا هنگام رسم باید شکل ضابطه فقط در محدوده دامنه اش (x) رسم گردد (شکست رابطه و طلاق).

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & , x \geq ۰ \\ x^۲ + ۱ & , x < ۰ \end{cases}$$



نکته: برای رسم این توابع ابتدا ضابطه ها را بدون توجه به دامنه رسم میکنیم و سپس قسمت هایی که جزء دامنه آن ضابطه نیستند را حذف می کنیم.

مثال: تابع زیر را رسم کنید و مقادیر خواسته شده را بدست آورید.

$$f(x) = ۲x \; , \quad -۱ \leq x < ۲$$

$f(-۱) =$ $\qquad$ $f(۰) =$

$f(۲) =$ $\qquad$ $f(۳) =$

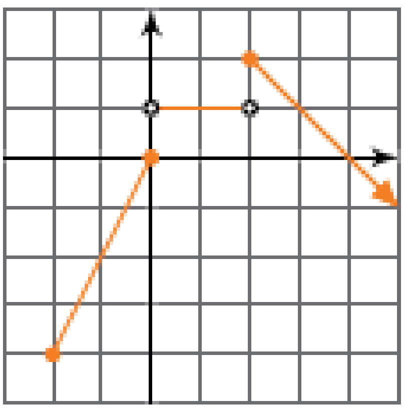
مثال: تابع زیر را رسم کنید و مقادیر خواسته شده را بدست آورید.

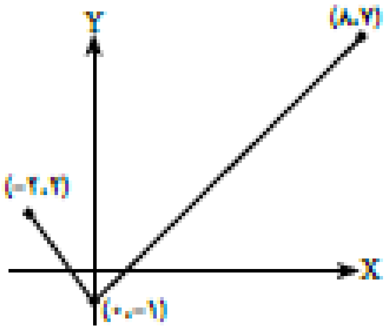
$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & ,-۲\le x<۰ \\ x^{۲}-۲x & ,x\ge ۰ \end{cases}$$

$f(-۲)=$ $\qquad$ $f(۰)=$

$f(-۵)=$ $\qquad$ $f(\sqrt{۳})=$

مثال: ضابطه تابع زیر را بدست آورید





(ج)

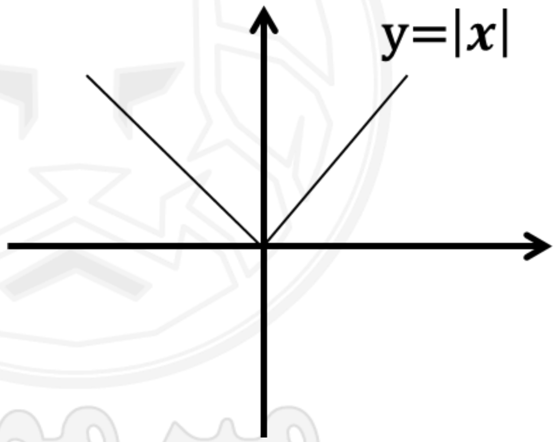
نکته یازدهمی: در سال بعد با اعداد حدی آشنا می شویم که کمی از اعداد داده شده کمترند و یا کمی بیشتر ولی خود عدد نیستند.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & ,-2\leq x<1 \\ 2 & ,1\leq x<0 \\ x^{2}-2 & ,x\geq 0 \end{cases}$$

$f(1^{+})=$ $\qquad$ $f(1)=$ $\qquad$ $f(1^{-})=$

۵- تابع قدرمطلق

تابعی که هرعدد دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می کند، تابع قدرمطلق نامیده می شود.



$$f_{(x)}=y=|x|$$

نکته : دو قانون در مورد قدر مطلق را باید بدانیم

الف) قانون خروج از قدرمطلق: هر چیزی داخل قدرمطلق باشد برای خروج با علامت خودش خارج می شود.

$$|\text{عبارت مثبت}| = +(\text{عبارت مثبت})$$

$$|\text{عبارت منفی}| = -(\text{عبارت منفی})$$

ب) قانون جواب قدرمطلق: بدون توجه به داخل قدرمطلق، جواب آخر قدر مطلق همیشه مثبت است.

عبارت مثبت = |هرعبارتی|

رسم توابع قدرمطلقی

با توجه به آنچه در مورد قدرمطلق فرا گرفتیم هر تابع قدر مطلق را میتوان به تابع چندضابطه تبدیل کرد. این روش برای رسم این توابع بسیار کاربردی است.

گام اول: داخل قدر مطلق را در دو حالت بزرگتر از صفر و کوچکتر از صفر تعیین علامت میکنیم تا شرط دو ضابطه بدست بیاید.

گام دوم: حال با توجه به شرط عبارت داخل قدر مطلق را با علامت منفی یا مثبت از قدر مطلق خارج میکنیم.

گام سوم: رابطه ها و شرط را ساده می نماییم.

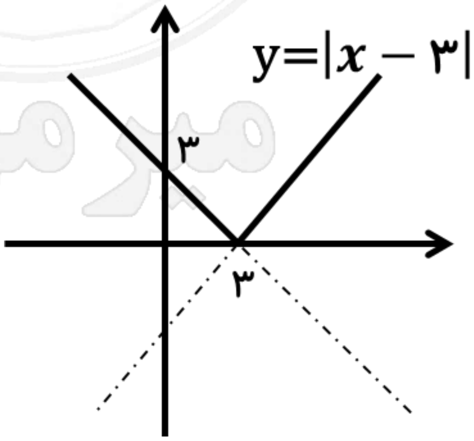
گام چهارم: نمودار هر ضابطه را رسم کرده و سپس قسمتهایی که جزء شرط هستند را قبول میکنیم.

مثال: تابع قدرمطلقی زیر را رسم کنید.

$$f_{(x)} = y = |x - ۳|$$

$$\begin{cases} y = +(\qquad) & , x - ۳ \geq ۰ \\ y = -(\qquad) & , x - ۳ < ۰ \end{cases}$$

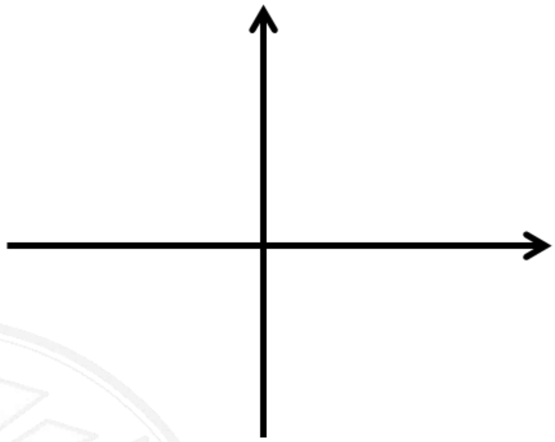
$$f_{(x)} \begin{cases} \qquad & , x \geq \\ \qquad & , x < \end{cases}$$



نکته: برای رسم توابع قدرمطلق که همه عبارت داخل قدرمطلق باشد، میتوانیم ضابطه داخل آنرا رسم کنیم و سپس قسمت های بالای محور x را نگه داشته و قسمت پایین محور را نسبت به آن قرینه کنیم.

مثال: تابع قدرمطلق زیر را رسم کنید.

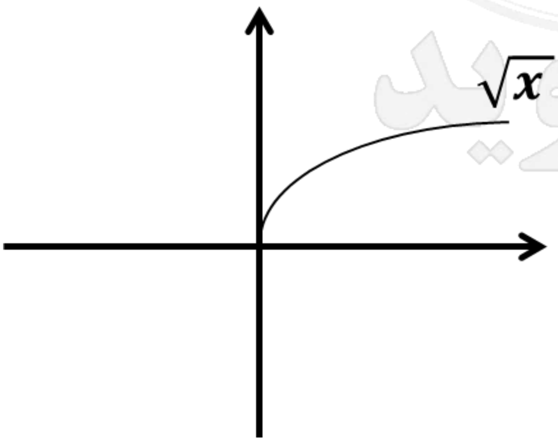
$$f_{(x)} = \left|x^{۲} + ۲x - ۳\right|$$



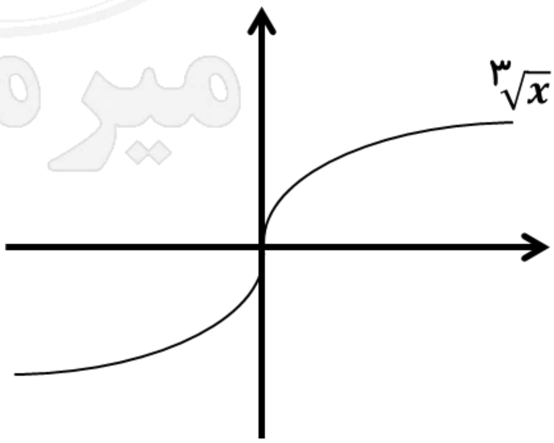
توابع رادیکالی

دانستن شکل توابع زیر بسیار مفید است.

$$f_{(x)} = \sqrt{x}$$



$$f_{(x)} = \sqrt[۳]{x}$$



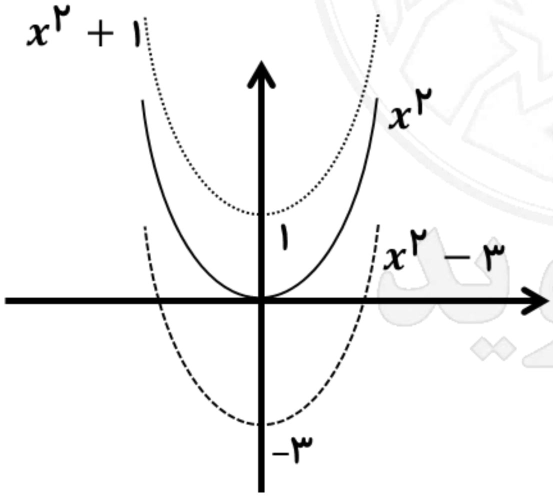
رسم توابع به کمک انتقال (x لجوج، y چشمگو)

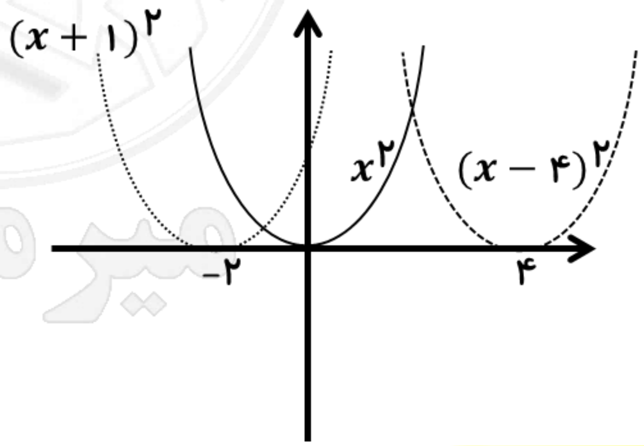
در این قسمت می خواهیم به کمک انتقال نمودارهای جدیدی را به کمک نمودارهای قبلی رسم کنیم.

نکته: این قوانین فقط در مواردی درست است که به خود تابع یا x آن عدد کم یا زیاد شده باشد نه اینکه توانی از X.

الف) با داشتن نمودار تابعی مانند $\mathbf{f_{(x)}}$ نمودار تابع $\mathbf{f_{(x)} + k}$ را با انتقال نمودار $\mathbf{f_{(x)}}$ به اندازه k واحد به سمت بالا (جهت مثبت) میکشیم. اما نمودار تابع $\mathbf{f_{(x)} - k}$ را با انتقال نمودار $\mathbf{f_{(x)}}$ به اندازه k واحد به سمت پایین (جهت منفی) رسم میکنیم.

ب) با داشتن نمودار تابعی مانند $\mathbf{f_{(x)}}$ نمودار تابع $\mathbf{f_{(x+k)}}$ را با انتقال نمودار $\mathbf{f_{(x)}}$ به اندازه k واحد به سمت چپ (جهت منفی) میکشیم. اما نمودار تابع $f_{(x-k)}$ را با انتقال نمودار $\mathbf{f_{(x)}}$ به اندازه k واحد به سمت راست (جهت مثبت) رسم میکنیم.





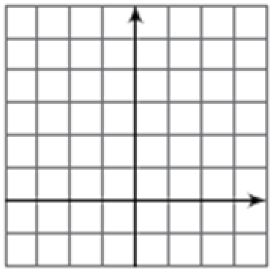
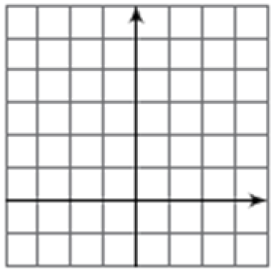
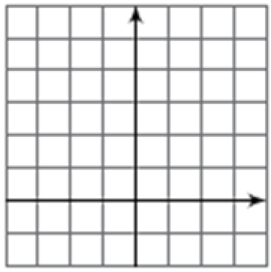
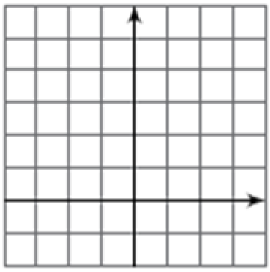
پ) برای داشتن نمودار تابعی مانند $\mathbf{f_{(|x|)}}$ نمودار تابع را در سمت چپ (طول های منفی) حذف می کنیم و سپس هرچه قسمت مثبت هاست قرینه میکنیم به قسمت منفی ها می کشیم. (هرچی طول مثبت بگه همون)

ت) با داشتن نمودار تابعی مانند $|\mathbf{f_{(x)}}|$ نمودار تابع در قسمت پایین را به سمت بالا قرینه میکنیم (y باشخصیت همه مثبت میشوند).

نکته: اگر پشت یک ضابطه تابع منفی قرار بگیرد هنگام رسم آنرا نسبت به محور طولها قرینه میکنیم.

نکته: اگر پشت x منفی قرار گیرد، تابع نسبت به محور عرض ها قرینه می شود.

مثال: دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید.

مثال: تعداد ریشه های معادله زیر را بدست آورید.

مثال: جفت توابع زیر یکدیگر را در چند نقطه قطع می کنند.

بررسی تابع بودن یک رابطه ی جبری

مهم است بدانیم که یک ضابطه ی جبری به تنهایی چه زمانی معرف تابع است. معمولا در تست ها از **مثال** نقض استفاده میشود تا تابع نبودن یک عبارت جبری را ثابت کنند. به این صورت اگر x پیدا شود که با جاگذاری آن برای y دوجواب یافته شود در این صورت آن عبارت جبری تابع نیست.

مثال: آیا عبارت جبری $x = y^۲$ یک تابع است؟

اگر $x = ۴ \rightarrow y^۲ = ۴ \rightarrow y = \pm ۲ \rightarrow \{(۴,۲),(۴,-۲)\}$ پس تابع نیست

تغییرمتغیرتابع

گاهی با داشتن $f(g_{(x)})$ میتوانیم $f_{(x)}$ را بدست اوریم. برای اینکار:

گام اول: $g_{(x)}$ را t در نظر می گیریم.

گام دوم: x را برحسب t بدست می اوریم.

گام سوم: $f_{(g_{(x)})}$ را برحسب t به دست می اوریم.

گام چهارم: $f_{(t)}$ را برحسب t بدست می آوریم.

گام پنجم: به جای متغیر t متغیر x را قرار میدهیم.

مثال: اگر $f_{(x+1)} = x^۲ - x + ۳$ باشد آنگاه $f_{(x)}$ را بیابید.

جمع بندی فصل:

سوالات کنکور:

۱-نمودار تابع $f_{(x)} = \left|\frac{۱}{۲}x\right| - ۲$ ، ۴ واحد به سمت x های منفی و یک واحد به سمت y های مثبت انتقال داده می شود. نمودار جدید و نمودار قدیم با کدام طول متقاطعند؟ (تجربی ۹۳)

۱) ۳/۵ ۲) -۳ ۳) -۲/۵ ۴) -۲

۲-مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای توابع $y = |x|$ و $x + ۳y = ۱۲$ کدام است؟(تجربی ۹۰)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۳- در کدام بازه از مقادیر X نمودار تابع $f_{(x)} = ۵ - |x - ۱|$ بالاتر از نمودار تابع $g_{(x)} = |۲x|$ قرار دارد؟(ریاضی خارج ۹۳)

۱) $\left(\frac{-۴}{۳}, ۱\right)$ ۲ $\left(\frac{-۲}{۳}, ۱\right)$ ۳) $\left(\frac{-۴}{۳}, ۲\right)$ ۴) $\left(\frac{-۲}{۳}, ۲\right)$

۴- نمودار تابع با ضابطه $f_{(x)} = ax^۲ + bx + c$ ، محور x ها را در نقطه ای به طول ۱ و محور y ها را در نقطه ای به عرض ۶- قطع کرده و از نقطه $(-۲, -۶)$ می گذرد. $f_{(-۱)}$ کدامست؟ (تجربی خارج۸۹)

۱) -۸ ۲) -۷ ۳) -۵ ۴) -۴

۵- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، هر نقطه از نمودار تابع $f_{(x)} = (a-۱)x^۲ + ۲\sqrt{۲x + a}$ بالای محور x ها است؟(ریاضی خارج ۸۹)

۱) $a < -۱$ ۲) $a > ۱$ ۳) $a > ۲$ ۴) $a < ۲$

۶- اگر منحنی به معادله $f_{(x)} = ۲x^۲ - ۴x + m - ۳$ محورهای x ها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ (ریاضی۸۷)

۱) $m > ۳$ ۲) $۳ < m < ۴$ ۳) $۳ < m < ۵$ ۴) $۴ < m < ۵$

۷- به ازای کدام مقدار a منحنی به معادله $ay = x^۲ - ۵x + ۴$ بر نیمساز ناحیه اول مماس است؟(ریاضی ۸۵)

۱) ۱   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۹

۸-به ازای کدام مقادیر m، خط به معادله $y = ۲x - ۴$ بر منحنی به معادله $y = (m+۳)x^۲ - mx$ مماس است؟(ریاضی ۹۰)

۱) ۱۸ و ۲-   ۲) ۲۲ و ۲   ۳) ۲۲ و ۲-   ۴) ۱۱ و ۴

۹- مقادیر تابع $y = -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x + ۶$ در بازه (a, b) بزرگتر از $\frac{۷}{۲}$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟(تجربی ۸۹)

۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۵/۵   ۴) ۶

۱۰-منحنی به معادله $y = (۲x+۱)(x+۸)$ با خط $y = mx$ نقطه مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m کدام است؟(ریاضی۸۸)

۱) $۹ < m < ۲۵$ ۲) $۱۵ < m < ۲۳$ ۳) $۷ < m < ۱۵$ ۴) $۵ < m < ۱۳$

۱۱-نمودار تابع با ضابطه $y = x^۲ - ۳x - ۱۰$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها غیرمنفی باشد؟(تجربی خارج۹۳)

۱) ۱   ۲) ۱/۵   ۳) ۲   ۴) ۳

۱۲-در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+۴} & ,x > ۳ \\ ۲x + ۳ & ,x \leq ۳ \end{cases}$ مقدار $f(f(۵)) + f(f(۱))$ کدام است؟(تجربی ۹۰)

۱) ۶   ۲) ۷   ۳) ۸   ۴) ۹

۱۳-در تابع با ضابطه $f(x) = x^۲(۲-x)^۲$ حاصل $f(۱+x) + f(۱-x)$ کدام است؟(تجربی۸۵)

۱) صفر   ۲) $۴x$ ۳) $۲x^۲$ ۴) $۴x^۲$

۱۴-نمودار تابع با ضابطه $x > -۱$ ، $y = x^۳ - ۴x^۲ - x + ۴$ در بازه (a, b) زیر محور xها است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

۱) ۵   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۲

۱۵-نمودار تابع با ضابطه $y = x^۳ - ax + b$ و خط با معادله $y + ۲x = b$ در نقطه ای به طول ۱ روی محور x ها متقاطع هستند. طول دو نقطه تقاطع دیگر این منحنی و خط کدام است؟(تجربی ۸۹)

۱) ۲ و ۱-   ۲) ۳ و ۱-   ۳) ۱- و ۰   ۴) ۲ و ۰

۱۶- اگر نمودار تابع $y = ۲x^۳ - ۵x^۲ - x + m$ ، محور xها را در نقطه ای به طول ۲ قطع کند، طول های دو نقطه تلاقی دیگر آن با محور xها کدامند؟(ریاضی خارج۸۹)

۱) ۱− و $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ و $\frac{-۱}{۲}$ ۳) ۱− و $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳ و $\frac{-۱}{۲}$

۱۷-اگر $f\left(x - ۳\right) = x^۲ - ۴x + ۵$ آنگاه $f(۱ - x)$ کدام است؟(تجربی ۹۰)

۱) $x^۲ + ۱$ ۲) $x^۲ + ۳$ ۳) $x^۲ + ۴x + ۵$ ۴) $x^۲ - ۴x + ۵$