function

تابع دهم در ۱۰ صفحه

[قابل استفاده دانش آموزان دهم تجربی و ریاضی]

- تمام رسالت تابع اینست که یک عدد را به عدد دیگری ببرد.
- جهان یک تابع دامنه آن است نه مجموعه اعداد حقیقی R.
- ....

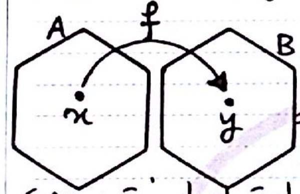
مصطفی حیدری طیب (دبیر ریاضیات شهرستان دلفان)

تابع function

[دهم تجربی / ریاضی]

✓ تابع f از مجموعه A به مجموعه B، قانونی است که هر عضو A را دقیقاً به یک عضو B می‌برد.

– یعنی هیچ عضوی از A را خالی نمی‌گذارد و دو عضو از B هم به آن نمی‌دهد.



توجه! هر رابطه‌ای تابع نیست. مثلاً

۱. رابطه‌ای که به هر فرد، طول قد او را نسبت می‌دهد تابع است زیرا یک فرد مشخص دارای دو طول قد متفاوت نیست.

۲. رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، ورزش مورد علاقه او را نسبت می‌دهد تابع نیست، زیرا یک فرد ممکن است به بیش از یک ورزش علاقه‌مند باشد.

۳. رابطه‌ای که به هر فرد، کد ملی اش را نسبت دهد تابع است، زیرا یک فرد نمی‌تواند دو کد ملی داشته باشد.

۴. رابطه‌ای که به هر عدد مثبت، ریشه دوم آن عدد را نسبت می‌دهد تابع نیست زیرا اگر عدد a مثبت باشد آنگاه به a دو ریشه دوم $\pm\sqrt{a}$ را می‌توان نسبت داد.

۵. رابطه‌ای که به هر کشور، پایتخت آن را نسبت دهد ...

....

– هر تابعی، رابطه است. $\text{function} \underset{\not\leftarrow}{\rightarrow} \text{Relation}$

✓ نمایش‌های مختلف یک رابطه و شرط تابع بودن آن‌ها:

"Table"

I نمایش جدولی: در این نمایش یک جدول دو سطری داریم که شرط تابع بودن آن است که هیچ عضوی در سطر اول جدول به بیش از یک عضو در سطر دوم آن نسبت داده نشود.

مثال. نمایش جدولی یک

فرد	علی	رضا	آرش
روز تولد	یکشنبه	شنبه	یکشنبه

تابع است؛ زیرا سطر اول تکراری نیست.

مثال. نمایش جدولی یک تابع

x	0	1	-1	$\sqrt{2}$
y	0	1	-1	$\sqrt{2}$

است؛ زیرا .... (دقت کنید که هر عضو از سطر اول به همان عضو از سطر دوم جدول نسبت داده شده است !!!)

مثال. نمایش جدولی یک تابع

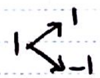
x	-2	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
y	2	2	2	2

است؛ زیرا ... (دقت کنید که هر عضو از سطر اول را به عدد ۲ در سطر دوم می‌برد !!!)

مثال. نمایش جدولی تابع نیست

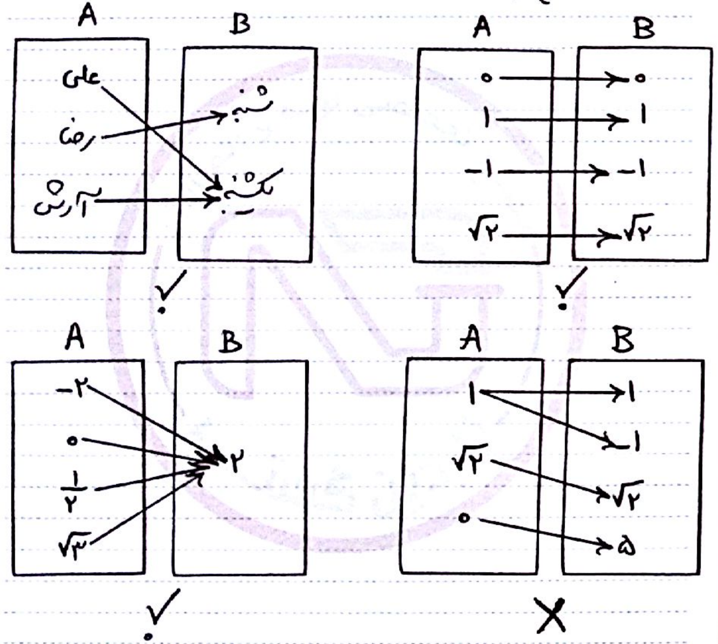
x	1	1	$\sqrt{2}$	0
y	1	-1	$\sqrt{2}$	5

زیرا عضو ۱ از سطر اول به بیش از یک عضو از سطر دوم نسبت داده شده است یعنی



II. نمایش پیکانی (نمودار Venn): در این نمایش، اعضای مجموعه‌های A و B را داخل شکل‌های هندسی مثل بیضی یا دایره یا ... قرار داده و به کمک پیکان‌هایی آن‌ها را به هم مربوط می‌کنیم. شرط آنکه یک نمودار پیکانی تابع باشد آن است که از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان به اعضای B رسم شود.

مثال. کدام یک از نمودارهای پیکانی یک تابع را مشخص می‌کند؟



III. نمایش زوج مرتب:

دوتایی مرتب (a,b) را که در آن ترتیب مورد نظر باشد را زوج مرتب می‌نامیم. a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم می‌نامیم. واضح است که

$$(a,b) \neq (b,a)$$

دو زوج مرتب وقتی مساوی اند که مؤلفه‌های اول آن‌ها با هم و مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز باهم برابر باشند.

$$(a,b)=(c,d) \Longleftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

یک رابطه را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش داد.

مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب زمانی تابع اند که مؤلفه‌های اول هیچ دو زوجی از آن مساوی نباشند، اگر هم احیاناً مؤلفه‌های اول دو زوج مساوی بود (شرط تابع بودن آن‌ها که) مؤلفه‌های دوم آن دو زوج نیز مساوی باشند.

مثال. کدام یک از روابط زیر تابع‌اند؟

$R_1=\{$(یکشنبه، آرش)، (شنبه، رضا)، (یکشنبه، علی)$\}$ ✓

$R_2=\{(0,0),(1,1),(-1,-1),(\sqrt{2},\sqrt{2})\}$ ✓

$R_3=\{(-2,2),(0,2),(\frac{1}{2},2),(\sqrt{3},2)\}$ ✓

$R_4=\{(1,1),(1,-1),(\sqrt{2},\sqrt{2}),(0,5)\}$ ✗

مثال. مقادیر a و b را چنان بیابید که مجموعه

$$f=\{(-1,b+3),(7,1),(-1,4-a),(7,a)\}$$

یک تابع باشد.

$a=1$

$b+3=4-a \xrightarrow[\text{جایگذاری}]{a=1} b+3=4-(1) \rightarrow b=0$

مثال. مقدار m را طوری بیابید که

$$f=\{(3,2),(-1,5),(3,m^2-m),(m,0)\}$$

یک تابع باشد.

$m^2-m=2 \rightarrow m^2-m-2=0 \rightarrow (m-2)(m+1)=0$

$m=-1 \rightarrow (m,0)$ و $(-1,5) \in f \Rightarrow$ f تابع نیست

$m=2$ ق ق

- توجه کنید که فقط $m=2$ قابل قبول است زیرا با قرار دادن -1 به جای m در رابطه f و بازآفرینی آن به تناقض می‌رسیم.

مثال. آیا تابعی وجود دارد که تعداد مؤلفه‌های دوم آن از تعداد مؤلفه‌های اول آن بیشتر باشد؟

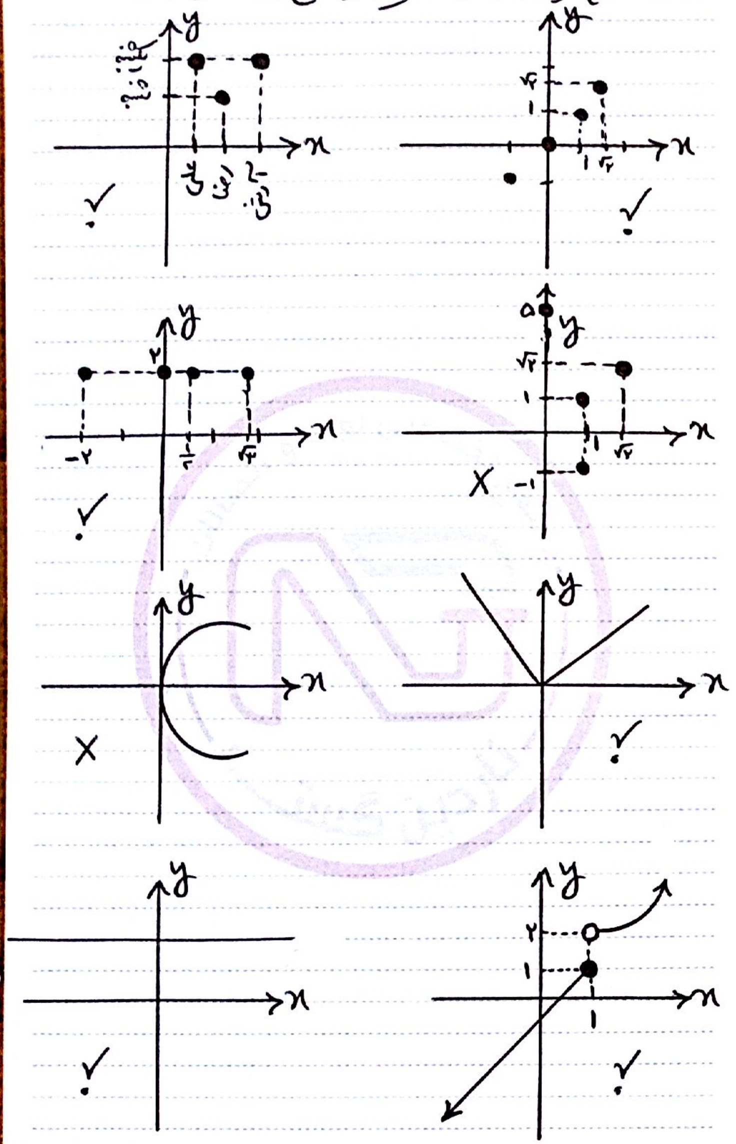
خیر زیرا حتماً باید تعداد عضوهای A مساوی B و یا از تعداد عضوهای B بیشتر باشد.

۱-۷. نمایش مختصاتی (نموداری) Graph:

در این نمایش، دستگاه مختصات ┼ را رسم کرده و نمودار رابطه را رسم می‌کنیم. اگر رابطه به صورت زوج‌های مرتب باشد، آن را به صورت نقاطی در صفحهٔ مختصات مشخص می‌کنیم.

شرط آنکه نمودار یک رابطه بیانگر یک تابع باشد آن است که هر خط عمودی (موازی محور عرض‌ها)، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. [یا در یک نقطه قطع کند و یا اصلاً قطع نکند!]

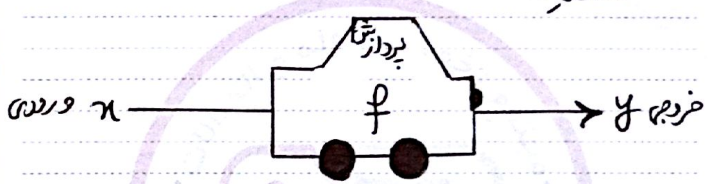
مثال. کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟



"rule"

۳. نمایش ضابطه‌ای (فرمولی) :

تمام رسالت تابع این است که یک عدد را به عددی دیگر ببرد. پس می‌توان تابع را مثل ماشینی در نظر گرفت که به آن یک عدد می‌دهیم و از آن یک عدد می‌گیریم. ما x را وارد ماشین f می‌کنیم و از آن $f(x)$ می‌گیریم. $f(x)$ مقدار تابع به ازای ورودی x است :



$$f(x)=y$$

f : x را به y می‌برد.

y تبعیت‌کننده (تابع) از x .

یعنی توابع ضابطه دارند. به قانون یک تابع، ضابطه آن تابع می‌گوییم. مثلاً $y=f(x)=x^2$ که هر عددی به آن بدهیم، مربع آن را به ما برمی‌گرداند.

وقتی ضابطه یک تابع را داریم می‌توانیم به جای x عدد بگذاریم و مقدار تابع را به ازای آن عدد حساب کنیم. کلاً ورودی هر چه باشد آن را به جای تمام xهای ضابطه می‌گذاریم!!!

مثلاً در مثال فوق $f(x)=x^2$ می‌توانیم به جای x مقدار ۵ را قرار دهیم: $f(5)=(5)^2=25$

یعنی f مقدار ۵ در ورودی را به مربعش یعنی ۲۵ در خروجی نسبت می‌دهد.

$$(x,y)\in f \iff f(x)=y$$

۴. دامنه Domain و برد Range تابع :

مجموعه xهایی که تابع قبول می‌کند (ورودی‌های مجاز!) را دامنه تابع می‌گوییم و با نماد D_f نمایش می‌دهیم. مجموعه خروجی‌های تابع یعنی $f(x)$ را برد f می‌گوییم و با R_f نشان می‌دهیم.

مهم اما واقعی!!! جهان یک تابع، دامنه آن است. ضابطه یک تابع به تنهایی معرف کل تابع نیست و حتماً باید دامنه هم معرفی شود.

- منظور از مقادیر تابع همان اعضای برد تابع می‌باشند.

$$\begin{cases} f: D \longrightarrow R \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

مثال. اگر $f(x)=x^3-2x+1$ هر یک از مقادیر زیر را بیابید: $f(\sqrt2)$ ، $f(\frac12)$

$$f(\tfrac12)=(\tfrac12)^3-2(\tfrac12)+1=\tfrac18-1+1=\tfrac18$$

$$f(\sqrt2)=(\sqrt2)^3-2(\sqrt2)+1=2\sqrt2-2\sqrt2+1=1$$

مثال: اگر f یک تابع و $f(1)=-1$ و $f(2)=0$ و $f(5)=\frac15$ و $f(-1)=1$ و $f(\sqrt2)=0$ باشند f را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید:

$f(1)=-1 \to (1,-1)\in f$ $\qquad$ $f(2)=0 \to (2,0)\in f$

$f(-1)=1 \to (-1,1)\in f$ $\qquad$ $f(5)=\frac15 \to (5,\frac15)\in f$

$f(\sqrt2)=0 \to (\sqrt2,0)\in f$

$$\Rightarrow f=\{(2,0),(1,-1),(5,\tfrac15),(-1,1),(\sqrt2,0)\}$$

مثال. اگر برای تابع f داشته باشیم: $f(0)=1$ ، $f(3)=4$ ، $f(2)=-1$ ، $f(-1)=3$

الف) تابع f را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

ب) دامنه و برد آن را مشخص کنید.

ج) نمودار f را رسم کنید.

حل: الف. می‌دانیم اگر $f(x)=y$ باشد آنگاه زوج مرتب (x,y) در f قرار دارد.

$f(0)=1 \to (0,1)\in f$ $\qquad$ $f(3)=4 \to (3,4)\in f$

$f(2)=-1 \to (2,-1)\in f$ $\qquad$ $f(-1)=3 \to (-1,3)\in f$

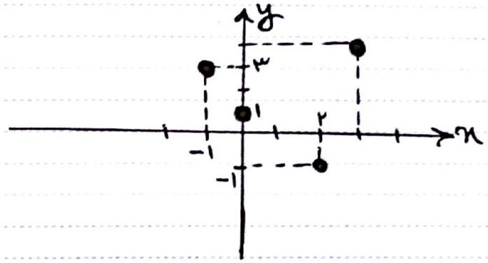
$$\Rightarrow f=\{(0,1),(3,4),(2,-1),(-1,3)\}$$

ب.

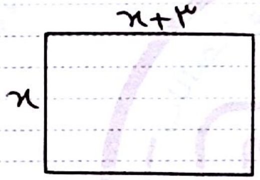
دامنه $D_f=\{-1,0,2,3\}$

برد $R_f=\{-1,1,3,4\}$

ج. نمودار f از چهار نقطه تشکیل می‌شود:



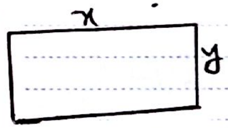
مثال. طول یک مستطیل ۳ واحد از عرض آن بیش‌تر است. ضابطه تابعی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.



حل.

$$P(x)=2(x+x+3)$$
$$=2(2x+3)=4x+6$$

مثال. مساحت یک مستطیل برابر ۱۰ متر مربع است. ضابطه تابعی بنویسید که محیط این مستطیل را به عرض آن وابسته کند.



حل. فرض کنیم طول و عرض این مستطیل به‌ترتیب برابر x و y باشند. بنابر فرض $x\cdot y=10$

و لذا $x=\frac{10}{y}$.

اگر محیط را با P نمایش دهیم، داریم:

$$P=2(x+y)\xrightarrow{x=\frac{10}{y}}2\left(\frac{10}{y}+y\right)=2\left(\frac{10+y^2}{y}\right)$$

$$\Rightarrow P(y)=\frac{20+2y^2}{y}$$

Graph

۷. تعیین دامنه و برد تابع از روی نمودار:

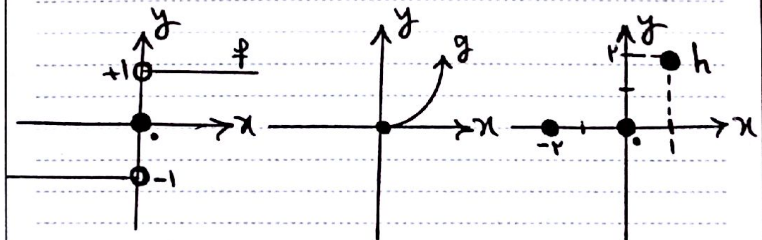
نمودار یک تابع رفتار شفافی از تابع را به ما نشان می‌دهد. خیلی وقت‌ها اگر بتوانیم نمودار تابع را بکشیم راحت‌تر می‌توانیم به مسئله‌ها جواب دهیم [توجه کنید که رسم نمودار تابع، کار ساده‌ای نیست به‌ویژه زمانی که ضابطه تابع پیچیده باشد! یک مثل چینی هست که می‌گه: تعداد توابعی که می‌تونید به راحتی نمودارشان را رسم کنید بیش‌تر از ۱۰ تا نیستند ☹]

این را هم می‌دانیم که نمودار یک تابع، نقاطی را شامل می‌شود که در ضابطه تابع صدق می‌کنند.

اگر نمودار یک تابع را داشته باشیم برای به دست آوردن دامنه تابع، نمودار را روی محور xها تصویر می‌کنیم. محدوده x، دامنه تابع است. اگر نمودار را روی محور yها تصویر کنیم، محدوده y برد تابع است.

- دامنه و برد تابع معمولاً به صورت بازه بیان می‌شوند!!!

مثال. دامنه و برد هر تابع را به دست آورید.



$D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ $D_g=[0,+\infty)$ $D_h=\{-2,0,1\}$

$R_f=\{-1,0,+1\}$ $R_g=[0,+\infty)$ $R_h=\{0,2\}$

انواع تابع:

تابع دارای انواع مختلفی است. در اینجا، توابعی را که با آن‌ها سروکار داریم، دسته‌بندی کرده و ویژگی‌های آن‌ها را بیان می‌کنیم.

I. تابع چندجمله‌ای: "Polynomial"

تابعی که ضابطه جبری آن، چندجمله‌ای جبری از یک متغیر باشد را تابع چندجمله‌ای می‌نامیم. مثل:

$f(x)=2x^3-x^2+3x+5$

$g(x)=x^2-7x+15$

$h(x)=3x-1$

$D(x)=-x$

$K(x)=1$

بطورکلی: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

نمودار یک تابع چندجمله‌ای بستگی به درجه آن یعنی n دارد. مثلاً اگر n=1 نمودار یک خط راست، اگر n=2 نمودار به شکل سهمی است و ...

II. تابع خطی: "Linear"

هر تابع با ضابطه $f(x)=mx+n$ را یک تابع خطی می‌گوییم.

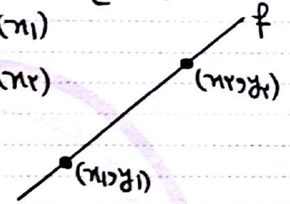
درواقع تابع دوجمله‌ای از درجه ۱ را یک تابع خطی می‌نامیم. دلیل

نام‌گذاری این است که اگر دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن یک خط راست است.

تذکر: از هر دو نقطه فقط یک خط راست (مستقیم) می‌گذرد. بنابراین برای اینکه ضابطه و نمودار یک تابع خطی در اختیار باشد باید دو نقطه از تابع را داشته باشیم.

$(x_1,y_1)\in f \rightarrow y_1=f(x_1)$

$(x_2,y_2)\in f \rightarrow y_2=f(x_2)$



شیب خط $m=\dfrac{\text{اختلاف عرض‌ها}}{\text{اختلاف طول‌ها}}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

فرمول نقطه‌-شیب $\quad y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow f(x)=?$

مثال. در تابع خطی f داریم:

$f(1)=3 \quad , \quad f(2)=5$

الف) نمایش جبری f را بنویسید.

ب) مقدار $f(10)$ را به دست آورید.

ج) نمودار آن را رسم کنید.

حل: الف. روش اول:

$f(1)=3 \rightarrow \underset{x_1\ y_1}{(1,3)}\in f$

$f(2)=5 \rightarrow \underset{x_2\ y_2}{(2,5)}\in f$

$\rightarrow m=\dfrac{5-3}{2-1}=2$

$y-3=2(x-1) \rightarrow y=2x-2+3 \rightarrow y=2x+1$

$\Rightarrow f(x)=2x+1$

روش دوم:

$$f(x)=mx+n \Rightarrow \begin{cases} f(1)=3 \rightarrow m(1)+n=3 \\ f(2)=5 \rightarrow m(2)+n=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(-1)\times\begin{cases} m+n=3 \\ 2m+n=5 \end{cases} \xrightarrow[\text{جدید}]{\text{دستگاه}} \begin{cases} -m-\cancel{n}=-3 \\ 2m+\cancel{n}=5 \end{cases}$$

$m=2$

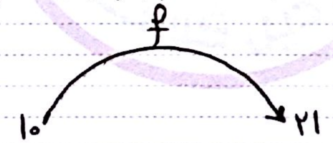
$\xrightarrow[m+n=3]{m=2} (2)+n=3 \rightarrow n=3-2 \rightarrow n=1$

$\xrightarrow[n=1]{m=2} f(x)=2x+1$

به نظر می‌رسد روش اول ساده‌تر باشد ← ☹ ☺

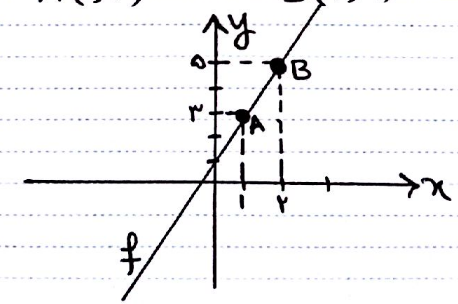
ب. در ضابطهٔ f به جای x مقدار ۱۰ قرار می‌دهیم:

$f(10)=2(10)+1=20+1=21$



ج.

$A(1,3) \qquad B(2,5)$



مثال. نمودار تابع خطی f از مبدأ می‌گذرد و داریم:

$f(2)=7$

الف) ضابطهٔ f را بنویسید.

ب) مقدار $f(4)$ را به دست آورید.

ج) نمودار f را رسم کنید.

حل. الف:

مبدأ $f(0)=0 \xrightarrow{A} (0,0)\in f$

$f(2)=7 \xrightarrow{B} (2,7)\in f$

$m=\dfrac{7-0}{2-0}=\dfrac{7}{2}=3/5$

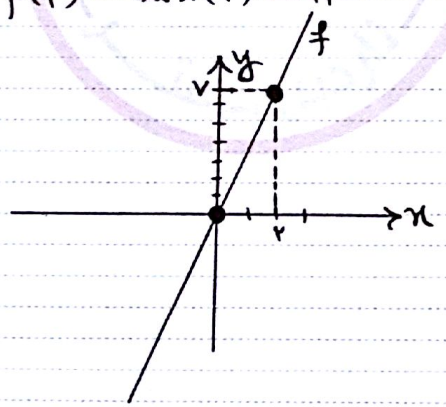
$y-0=3/5(x-0) \rightarrow y=3/5x$

$\Rightarrow f(x)=3/5x$

ب.

$f(4)=3/5\times(4)=14$

ج.

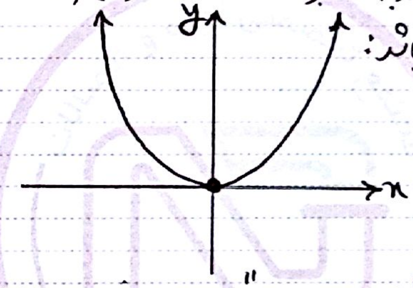


III. تابع سهمی: "Parabola" "degree 2"

هر تابع به فرم $y=f(x)=ax^2+bx+c$ را با شرط $a\neq 0$ یک تابع درجه ۲ می‌نامیم. نمودار این تابع، سهمی نام دارد.

- اگر ضریب x^2 یعنی a عددی مثبت باشد، دهانه سهمی رو به بالا باز می‌شود (چاله) و نمودار کم‌ترین مقدار (min) دارد.
- اگر ضریب x^2 یعنی a عددی منفی باشد، دهانه سهمی رو به پائین باز می‌شود (تپه) و نمودار بیش‌ترین مقدار (Max) دارد.

ساده‌ترین تابع درجه ۲ بصورت $f(x)=x^2$ است که نمودار آن به شکل زیر می‌باشد:



- در مبحث "انتقال نمودارها" از این نمودار بعنوان راهنما استفاده خواهیم کرد.

$D_f=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

$R_f=[0,+\infty)$

- Max و min سهمی در رأس آن اتفاق می‌افتد:

Max یا min سهمی:
- طول رأس: $x=\frac{-b}{2a}$
- عرض رأس: $y=\frac{-\Delta}{4a}$

با این رشته که نام او ریاضیات، چه کلک‌هاست و چه بازی‌هاست

دلتای دلم پر از ملالات $\Delta=b^2-4ac$ زیرا که به زیر رادیکال‌هات

نکته: وقتی ۳ نقطه از یک تابع درجه دوم (سهمی) را داریم و معادله آن را می‌خواهیم، معادله سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ را می‌نویسیم سپس مختصات ۳ نقطه را در این معادله قرار می‌دهیم تا سه معادله بر حسب a و b و c به دست آید. از این معادلات می‌توان مقادیر a و b و c را معلوم کرد.

مثال: نمودار تابع درجه دوم f، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. اگر $f(1)=2$ و $f(-1)=-4$ باشد،

الف) ضابطه تابع f را بنویسید.

ب) $f(2)$ را بدست آورید.

ج) نمودار f را رسم کنید.

حل: الف) شکل کلی تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ است. چون f محور عرض‌ها را در ۱ قطع می‌کند لذا: $f(0)=1$

$\xrightarrow[y=1]{x=0} a(0)^2+b(0)+c=1 \to \boxed{c=1}$

$\xrightarrow{c=1} f(x)=ax^2+bx+1$

همچنین داریم:

$$\begin{cases} f(1)=2 \\ f(-1)=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+1=2 \\ a-b+1=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=-5 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{جمع طرفین دو معادله}} 2a=-4 \to \boxed{a=-2}$

$a+b=1 \xrightarrow{a=-2} -2+b=1 \to \boxed{b=3}$

$\therefore f(x)=-2x^2+3x+1$

ب) در ضابطه f به جای x عدد ۲ قرار می‌دهیم:

$\xrightarrow{x=2} f(2)=-2(2)^2+3(2)+1=-8+6+1=-1$

ج) $f(x)=-2x^2+3x+\underline{1}$ عرض از مبدأ

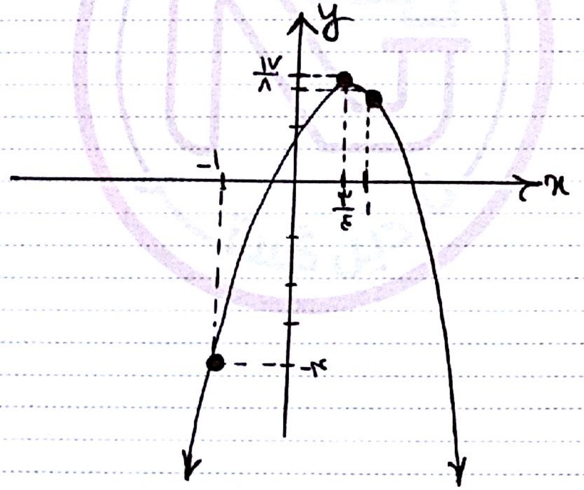
$a=-2 \Rightarrow$ دهانه سهمی رو به پائین

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-3}{2(-2)}=\frac{3}{4}$

$\xrightarrow{x=\frac{3}{4}} f(\frac{3}{4})=-2(\frac{3}{4})^2+3(\frac{3}{4})+1=\frac{17}{8}$

$\Rightarrow$ رأس $S(\frac{3}{4},\frac{17}{8})$

از طرفی $f(-1)=-4$ و $f(1)=2$ لذا:



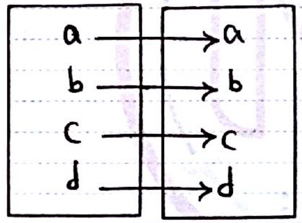
"Identity"

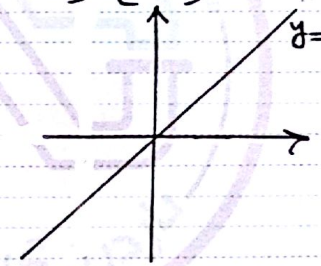
۱۷. تابع همانی:

تابع f را همانی می‌گوییم، هرگاه هر عضو دامنهٔ f دقیقاً بهمان عضو در برد تابع نظیر شود.

ضابطهٔ تابع همانی به‌صورت $f(x)=x$ است.

اگر دامنهٔ تابع همانی برابر $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن همان نیمساز ناحیهٔ اول و سوم و درصورتی‌که دامنه برابر $\mathbb{R}$ نباشد، نمودار این تابع بخشی از نیمساز ناحیهٔ اول و سوم می‌باشد. [توجه کنید که منظور از یک تابع، دامنهٔ آن است نه مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$] به‌طور مثال هر یک از توابع زیر، یک تابع همانی می‌باشند:





$$f=\{(0,0),(-1,-1),(1,1),(\sqrt{2},\sqrt{2})\}$$

- بهترین مثال در زندگی برای تابع همانی، "آینه" است.

مثال. اگر تابع $f=\{(a+b,1-a),(b,a-2)\}$ همانی باشد، مقادیر a و b را پیدا کنید.

حل. چون f تابعی همانی است پس در هر زوج مرتب آن، مؤلفه‌اول و دوم برابرند:

$$\begin{cases}a+b=1-a\\ b=a-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+b=1\\ a-b=2\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a=1,\ b=-1$$

"Constant"

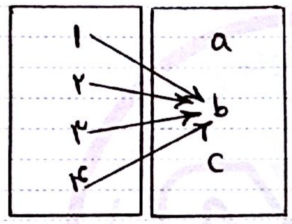
۱۸. تابع ثابت:

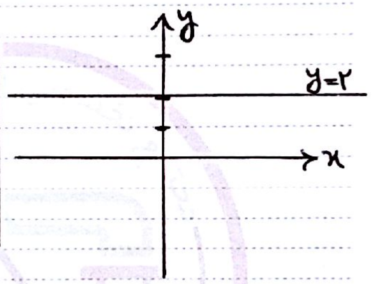
تابع f را ثابت گوییم، هرگاه برد آن تنها شامل یک عضو باشد.

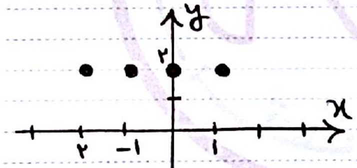
ضابطهٔ تابع ثابت به‌صورت $f(x)=\underset{\text{constant}}{c}$ است که $c\in\mathbb{R}$.

نمودار تابع ثابت، خطی موازی محور xها و یا بخشی از آن است.

به‌طور مثال، هر یک از توابع زیر یک تابع ثابت است:



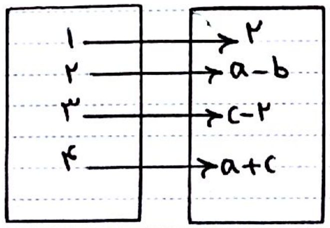




$$f=\{(1,2),(\sqrt{2},2),(-2,2)\}$$

- بهترین مثال در زندگی برای تابع ثابت، دمای داخل بدن انسان‌ها: ۳۷ درجهٔ سانتی‌گراد

مثال. مقادیر a و b و c را طوری تعیین کنید که نمودار پیکانی شکل مقابل، مربوط به یک تابع ثابت باشد.



حل. تابع ثابت، هر عضو دامنه را به یک عضو ثابت در برد نسبت می‌دهد. چون یکی از مؤلفه‌های دوم برابر ۲ می‌باشد، پس باید سایر

مؤلفه‌های دوم نیز برابر ۲ باشند، پس:

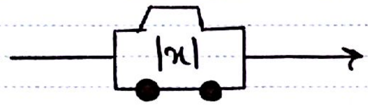
$$c-2=2\rightarrow c=4$$
$$a+c=2\xrightarrow{c=4}a+4=2\rightarrow a=-2$$
$$a-b=2\xrightarrow{a=-2}-2-b=2\rightarrow b=-4$$

توجه! توابع ثابت و همانی، حالت‌های خاصی از تابع خطی $f(x)=mx+n$ هستند (اگر $n=0$ و $m=1$ تابع همانی و اگر $m=0$ تابع ثابت خواهد بود)

۱۹. تابع قدرمطلق: [ماشین مثبت ساز] "absolute value"

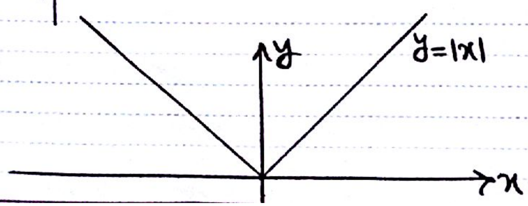
تابع f که به هر مقدار در دامنهٔ خود، قدرمطلق آن در برد را نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق می‌گوییم.

ضابطهٔ تابع قدرمطلق به‌صورت $f(x)=|x|$ می‌باشد.



درصورتی‌که دامنهٔ تابع قدرمطلق برابر $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن به‌صورت زیر خواهد بود:

x	-2	-1	0	۱/۵	$\sqrt{3}$	5
$\lvert x\rvert$	2	1	0	۱/۵	$\sqrt{3}$	5



مثال. اگر $f(x)=|x|-x$ در این صورت مقادیر $f(1)$ و $f(-1)$ را بیابید و به صورت زوج مرتب بنویسید.

حل.

$f(-1)=|-1|-(-1)=1+1=2$

$f(1)=|1|-(1)=1-1=0$

$\Rightarrow f=\{(-1,2),(1,0)\}$

VII. تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای):

تا اینجا با توابعی سروکار داشتیم که فقط یک ضابطه داشتند، یعنی برای به دست آوردن مقدار $f(x)$ در تمام نقاط دامنه، از یک ضابطه استفاده می‌کردیم. اما همهٔ توابع تک ضابطه‌ای نیستند. بعضی وقت‌ها ضابطهٔ تابع برای همهٔ xهای دامنه یکسان نیست، یعنی دامنه به چند زیرمجموعه تقسیم شده است و روی هر مجموعه یک ضابطه تعریف می‌شود. مثلاً تابع قدر مطلق $f(x)=|x|$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد که تابعی دو ضابطه‌ای با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است و دامنه‌اش به بازه‌های $[0,+\infty)$ و $(-\infty,0)$ تقسیم شده است:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

- برای رسم نمودار توابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای)، نمودار هر ضابطه را جداگانه رسم می‌کنیم و محدودیت دامنهٔ آن ضابطه را اعمال می‌کنیم.

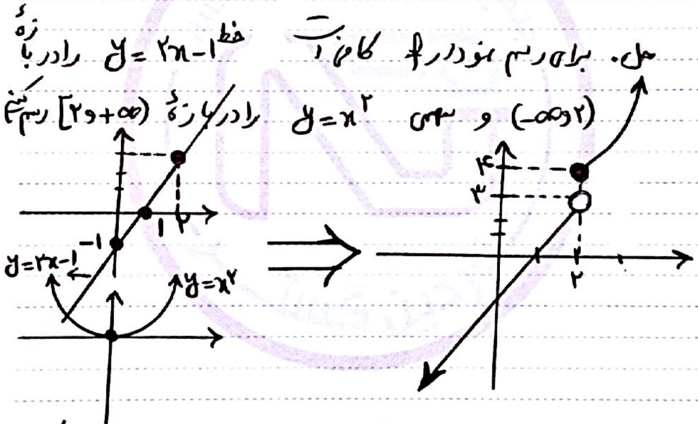
✓ روش یافتن مقدار تابع در یک نقطه در توابع قطعه‌ای:

برای این منظور باید ببینیم نقطهٔ داده شده در دامنهٔ کدام ضابطه قرار دارد، سپس آن نقطه را در آن ضابطه قرار داده و مقدار تابع را به دست آوریم.

توجه کنید! که اگر $x=a$ نقطهٔ مرزی دو ضابطهٔ دلخواه f باشد، مشخص کردن مقدار هر دو ضابطه در a ضروری خواهد بود.

مثال. نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<2\\ x^2 & x\geq 2\end{cases}$ را رسم کنید و مقادیر $f(0)$ و $f(1)$ و $f(\sqrt{5})$ را به دست آورید.

حل. برای رسم نمودار f کافی است خط $y=2x-1$ را در بازهٔ $(-\infty,2)$ و سهمی $y=x^2$ را در بازهٔ $[2,+\infty)$ رسم کنیم.



چون $0<2$ و $1<2$ پس باید از ضابطهٔ اول استفاده کنیم:

$f(0)=2(0)-1=-1$ ، $f(1)=2(1)-1=1$

چون $\sqrt{5}\simeq 2.2>2$ پس باید از ضابطهٔ دوم استفاده کنیم:

$f(\sqrt{5})=(\sqrt{5})^2=5$

مثال. تابع $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x<0\\ 0 & 0\leq x\leq 2\\ x-2 & x>2\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

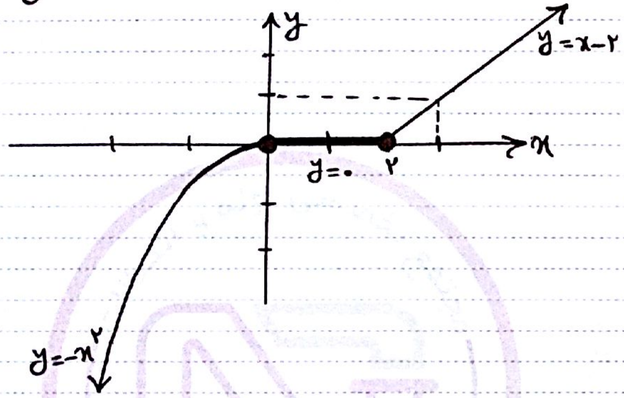
الف) نمودار f را رسم کنید. ب) مقدار $f(\frac{1}{2})$ را بیابید.

حل: الف.

$y=-x^2$ $(-\infty,0)$

$y=0$ $[0,2]$

$y=x-2$ $(2,+\infty)$



چون $0<\frac{1}{2}<2$ پس باید از ضابطهٔ دوم استفاده کنیم:

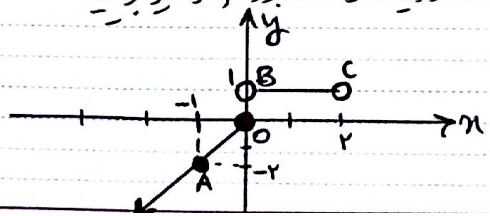
$f(\frac{1}{2})=0$

✓ با داشتن نمودار یک تابع قطعه‌ای می‌توان ضابطهٔ آن را به دست آورد.

به عبارتی می‌توان از "سخت افزار" به "نرم افزار" رسید.

هندسه ↓ جبر ↓

مثال. نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطهٔ آن را به دست آورید. دامنه و برد f را نیز بنویسید.



حل. کافیست ضابطه نیم‌خط گذرنده از نقاط $O(0,0)$ و $A(-1,-2)$ را در بازهٔ $(-\infty,0]$ ، ضابطه پاره‌خط گذرنده از $B(0,1)$ و $C(2,1)$ را در بازهٔ $(0,2)$ بنویسیم:

$$m_{OA}=\frac{y_A-y_0}{x_A-x_0}=\frac{-2-0}{-1-0}=\frac{-2}{-1}=2$$

$$y-0=2(x-0)\rightarrow y=2x \quad on \quad (-\infty,0]$$

معادله پاره‌خط BC: $y=1 \quad on \quad (0,2)$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}2x & x\leq 0\\ 1 & 0<x<2\end{cases}$$

از روی شکل واضح است که:

$D_f=(-\infty,2)$ $\qquad$ $R_f=(-\infty,0]\cup\{1\}$

مثال. اگر رابطه $y=\begin{cases}mx-x^2 & x\geq -1\\ 1-\frac{1}{x} & x<-1\end{cases}$ تابع باشد مقدار m را به دست آورید.

حل. دامنهٔ ضابطه‌ها در $x=-1$ مشترک هستند (مرز مشترک) بنابراین لازم است به ازای $x=-1$ مقدار دو ضابطه با یکدیگر برابر باشند (تا تابع بودن y زیر سؤال نرود!!!)

$$m(-1)-(-1)^2=1-\frac{1}{-1}\Rightarrow -m-1=1+1$$

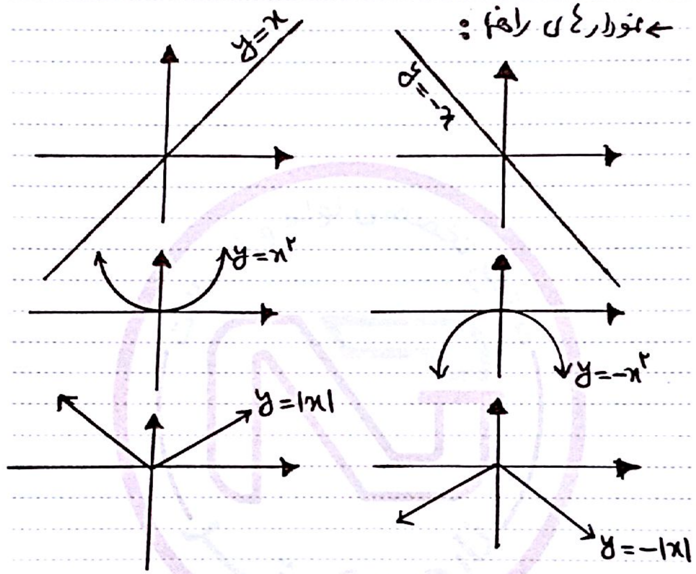
$$\Rightarrow m=-3$$

"Translation"

✓ انتقال (رسم برخی توابع به کمک انتقال):

فرض کنید نمودار تابع $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم در این قسمت می‌خواهیم روش‌هایی را بررسی کنیم که بتوانیم نمودار توابع دیگری که از تابع $y=f(x)$ به دست می‌آیند را رسم نماییم.

← نمودارهای راهنما:



← برای رسم نمودار $y=f(x)+k$ ، کافیست نمودار f را k واحد در جهت مثبت محور yها (به بالا) انتقال دهیم. "آسانسوری"

← برای رسم نمودار $y=f(x)-k$ ، کافیست نمودار f را k واحد در جهت منفی محور yها (به پایین) انتقال دهیم. "آسانسوری"

← برای رسم نمودار $y=f(x-k)$ ، کافیست نمودار f را k واحد در جهت مثبت محور xها (به سمت راست) منتقل کنیم. (در واقع چون k را از x کم شده ما باید آن k واحد را برگردانیم، به عبارتی رفتار x عوضی است!!! "قطاری"

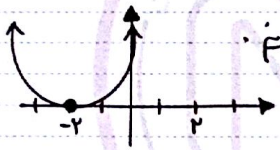
← برای رسم نمودار $y=f(x+k)$ ، کافیست نمودار f را k واحد در جهت منفی محور xها (به سمت چپ) منتقل کنیم. "قطاری"

مثال. به کمک انتقال و با استفاده از نمودار توابع $f(x)=x^2$ و $f(x)=|x|$ نمودار توابع زیر را رسم کنید. دامنه و برد را نیز بنویسید.

الف) $y=(x+2)^2$ $\qquad$ ب) $y=|x-2|$

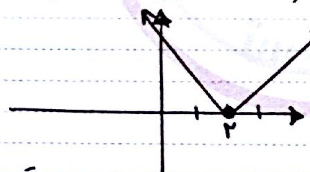
ج) $y=(x+1)^2-1$ $\qquad$ د) $y=|x|+1$

حل: الف. کافیست نمودار $f(x)=x^2$ را دو واحد در راستای محور xها به چپ منتقل کنیم.



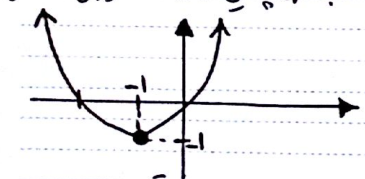
$D=\mathbb{R}$ ، $R=[0,+\infty)$

ب. کافیست نمودار $f(x)=|x|$ را دو واحد در راستای محور xها به سمت راست انتقال دهیم.



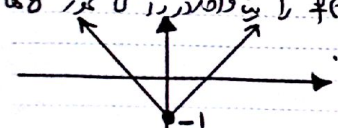
$D=\mathbb{R}$ ، $R=[0,+\infty)$

ج. کافیست نمودار $f(x)=x^2$ ابتدا یک واحد به سمت چپ در راستای محور xها و سپس یک واحد به سمت پایین در راستای محور yها منتقل کنیم.



$D=\mathbb{R}$ ، $R=[-1,+\infty)$

د. کافیست نمودار $f(x)=|x|$ را یک واحد در راستای محور yها به سمت پایین انتقال دهیم.



$D=\mathbb{R}$ ، $R=[-1,+\infty)$

25/

حل. کافیست ضابطه نیم‌خط گذرنده از نقاط $O(0,0)$ و $A(-1,-2)$ را در بازهٔ $(-\infty,0]$ و ضابطه پاره‌خط گذرنده از $B(0,1)$ و $C(2,1)$ را در بازهٔ $(0,2)$ بنویسیم:

$$m_{OA}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{-2-0}{-1-0}=\frac{-2}{-1}=2$$

$$y-0=2(x-0)\rightarrow y=2x \quad on \quad (-\infty,0]$$

معادله پاره‌خط BC: $y=1$ on $(0,2)$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}2x & x\le 0\\ 1 & 0<x<2\end{cases}$$

از روی شکل واضح است که:

$D_f=(-\infty,2)$ $R_f=(-\infty,0]\cup\{1\}$

مثال. اگر رابطه $y=\begin{cases}mx-x^2 & x\ge -1\\ 1-\frac{1}{x} & x\le -1\end{cases}$ تابع باشد، مقدار m را به دست آورید.

حل. دامنهٔ ضابطه‌ها در $x=-1$ مشترک هستند (مرز مشترک) بنابراین لازم است به ازای $x=-1$ مقدار دو ضابطه با یکدیگر برابر باشند (تا تابع بودن y زیر سؤال نرود!!!)

$$m(-1)-(-1)^2=1-\frac{1}{-1}\Rightarrow -m-1=1+1$$

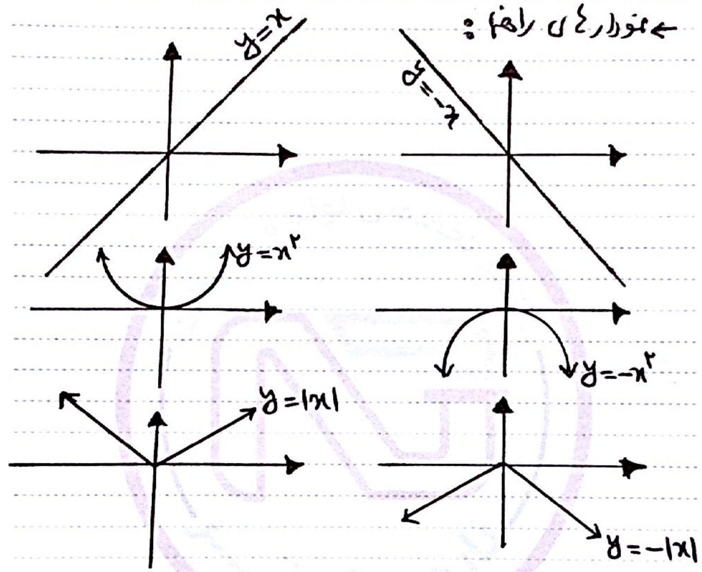
$$\Rightarrow m=-3$$

26/ "Translation"

۷. انتقال (رسم برخی توابع به کمک انتقال):

فرض کنید نمودار تابع $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم در این قسمت می‌خواهیم روش‌هایی را بررسی کنیم که بتوانیم نمودار توابع دیگری که از تابع $y=f(x)$ به دست می‌آیند را رسم نماییم.

← نمودارهای راهنما:



← برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، کافی است نمودار f را k واحد در جهت مثبت محور yها (به بالا) انتقال دهیم. "آسانسوری"

← برای رسم نمودار $y=f(x)-k$، کافیست نمودار f را k واحد در جهت منفی محور yها (به پایین) انتقال دهیم. "آسانسوری"

← برای رسم نمودار $y=f(x-k)$، کافیست نمودار f را k واحد در جهت مثبت محور xها (به سمت راست) منتقل کنیم. (در واقع چون k واحد از x کم شده ما باید آن k واحد را برگردانیم، به عبارتی رفتار x عوض است!!!)

"قطاری"

27/

← برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، کافیست نمودار f را k واحد در جهت منفی محور xها (به سمت چپ) منتقل کنیم.

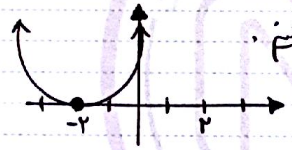
"قطاری"

مثال. به کمک انتقال و با استفاده از نمودار توابع $f(x)=x^2$ و $f(x)=|x|$ نمودار توابع زیر را رسم کنید. دامنه و برد را نیز بنویسید.

الف) $y=(x+2)^2$ ب) $y=|x-2|$

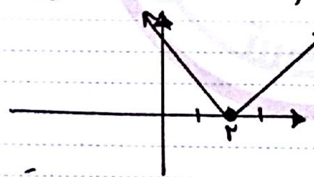
ج) $y=(x+1)^2-1$ د) $y=|x|+1$

حل: الف. کافیست نمودار $f(x)=x^2$ را دو واحد در راستای محور xها به چپ منتقل کنیم.



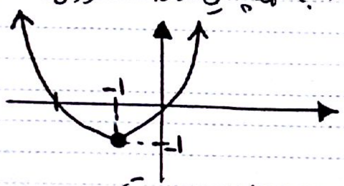
$D=\mathbb{R}$ ، $R=[0,+\infty)$

ب. کافیست نمودار $f(x)=|x|$ را دو واحد در راستای محور xها به سمت راست انتقال دهیم.



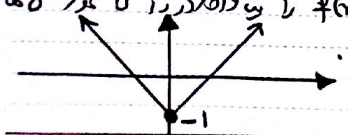
$D=\mathbb{R}$ ، $R=[0,+\infty)$

ج. کافیست نمودار $f(x)=x^2$ ابتدا یک واحد به سمت چپ در راستای محور xها و سپس یک واحد به سمت پایین در راستای محور yها منتقل کنیم.



$D=\mathbb{R}$ ، $R=[-1,+\infty)$

د. کافیست نمودار $f(x)=|x|$ را یک واحد در راستای محور yها به سمت پایین انتقال دهیم.

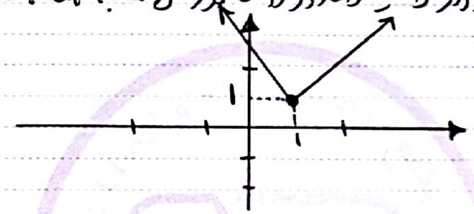


$D=\mathbb{R}$ ، $R=[-1,+\infty)$

مثال. نمودار تابع $f(x)=|x-1|+1$ را با دامنه‌های زیر رسم کنید.

الف) $D_1=\mathbb{R}$ ب) $D_2=[0,+\infty)$ ج) $D_3=\{-1,1\}$

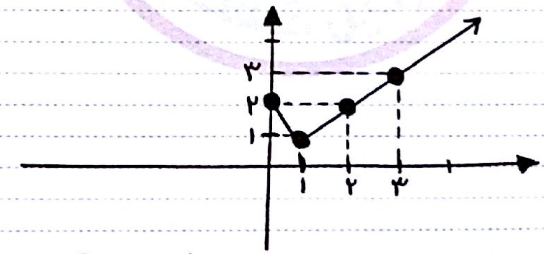
حل: الف. چون دامنه $\mathbb{R}$ است کافی است نمودار $f(x)=|x|$ را یک واحد در راستای محور x ها به سمت راست انتقال دهیم سپس نمودار را یک واحد در راستای محور y ها به سمت بالا ببریم.



ب. در اینجا فقط می‌توانیم از اعداد نامنفی به عنوان ورودی استفاده کنیم:

x	۰	۱	۲	۳
y	۲	۱	۲	۳

$f(1)=|1-1|+1=|0|+1=0+1=1$



ج. نمودار تابع فقط از ۲ نقطه تشکیل شده است.

x	-1	۱
y	۳	۱

$f(-1)=|-1-1|+1=|-2|+1=2+1=3$

"Exercise" تمرینات:

1. کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ (دلیل کافی بیاورید)

الف) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت، جذر آن عدد را نسبت می‌دهد.

ب) رابطه‌ای که به هر مسلمان، قبله او را نسبت می‌دهد.

2. مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که رابطه

$$A=\{(1,a+b),(2,5),(1,3),(2,a-b)\}$$

یک تابع باشد.

3. اگر برای تابع f داشته باشیم:

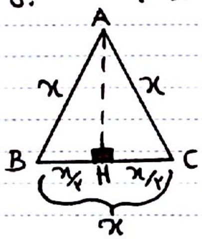
$$f(0)=2 \quad , \quad f(-1)=2 \quad , \quad f(\sqrt{2})=2 \quad , \quad f(\tfrac{1}{2})=2$$

الف) تابع f را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

ب) دامنه و برد f را مشخص کنید.

ج) نمودار f را رسم کنید.

4. اگر مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع S باشد، تابعی بنویسید که S را به ضلع مثلث وابسته کند.



5. در تابع f روابط

$$f(x+3)=f(x)+2 \quad \text{و} \quad f(2)=5$$

برقرار است. $f(1)$ را به دست آورید.

6. نمودار تابع چندجمله‌ای از درجه دوم f، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -2 و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. اگر $f(-1)=2$ باشد، ضابطه f را نوشته و $f(2)$ را به دست آورید.

7. اگر f یک تابع ثابت و g تابع همانی با دامنه $\mathbb{R}$ باشند و داشته باشیم $f(2)=g(-2)$. حاصل $f(1)+g(1)$ را به دست آورید.

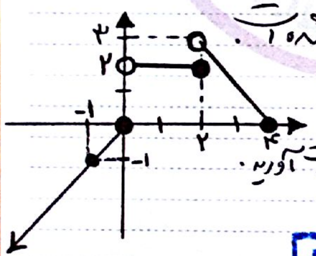
8. به کمک انتقال و با استفاده از نمودار توابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=|x|$ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$y=-|x+1|+2$ $\qquad$ $y=(x-2)^2-2$

9. نمودار تابع قطعه‌ای زیر را رسم کنید. دامنه و برد تابع را نیز بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} 1+x^2 & x\geq 0 \\ 1-\frac{x}{2} & x<0 \end{cases}$$

10. نمودار تابع چندضابطه‌ای f داده شده است.



الف) ضابطه f را بنویسید.

ب) مقادیر $f(2)$ و $f(\sqrt{2})$ را به دست آورید.