فصل ۵

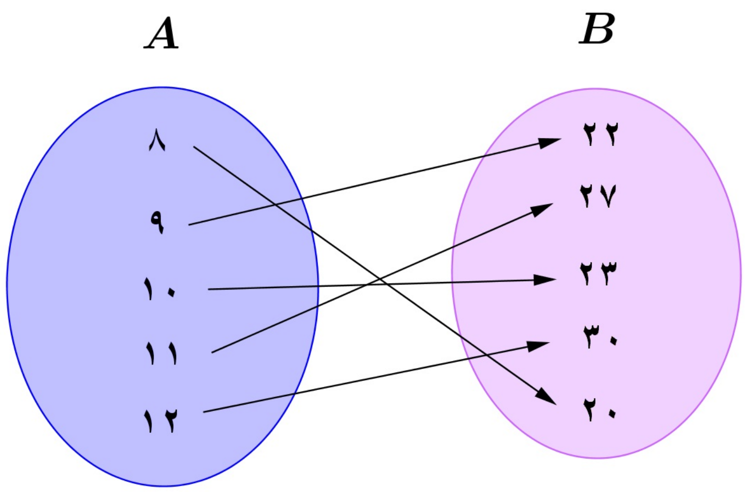
تابع

۱.۵ مفهوم تابع و روش‌های نمایش آن

در این فصل با مفهوم تابع آشنا خواهید شد. مفهومی که نقشی کلیدی در تمام شاخه‌های علوم دارد. در واقع تابع را می‌توان در زیست شناسی،علوم مهندسی،جغرافیا،فیزیک،شیمی و... دید. این دامنه کاربرد نشان از اهمیت تابع دارد. از نظر تاریخی نمی‌توان بطور دقیق پیدایش تابع را بررسی کرد چرا که در کتیبه های به جای مانده از بابلیان می توان تناظر بین اعداد طبیعی و مربع های آن ها و مکعب های آن ها را دید که به تعبیری تابع است. افراد دیگری هم مفهوم تابع را به کار برده‌اند که عبارتند از گالیله، دکارت، جان برنولی، گاتفرید لایبنیتز،اویلر،دالامبر،کوشی، دیریکله، ژوزف فوریه و کارل وارشتراس. شاید از دوره وایرشتراس به بعد مفهوم تابع بی عیب و نقص و کامل مانند آنچه امروز هست معرفی شد. تمامی افراد نامبرده از بزرگان تاریخ ریاضیات هستند و هرکدام در تکمیل مفهوم تابع نقش داشته اند.
اتاقی که در آن نشسته را در نظر بگیرید. راس هر ساعت دمای اتاق را اندازه‌گیری کنید و در یک جدول یادداشت کنید مشخصا در یک لحظه معین دمای اتاق دو مقدار ندارد. فرض کنید جدول زیر نمایش این اعداد باشد.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۲۰	۲۲	۲۳	۲۷	۳۰

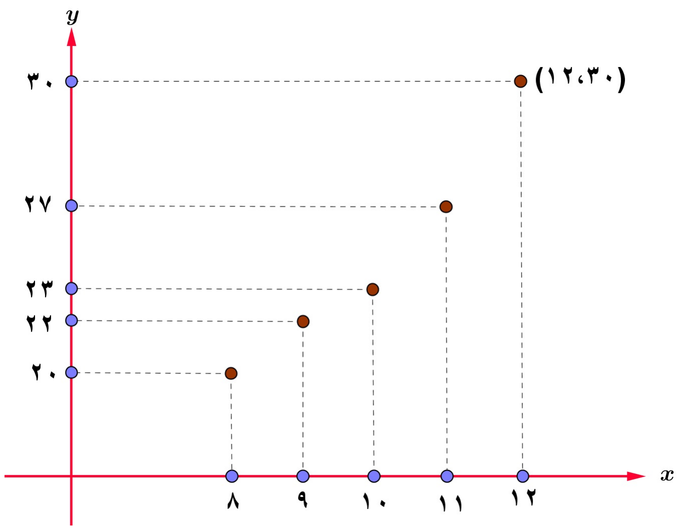
یک راه دیگر نمایش این رابطه‌ی بین زمان و درجه حرارت اتاق استفاده از نمودار ون هست. در شکل زیر این نمایش را می‌بینید. مجموعه A نشان‌دهنده‌ی زمان ، و مجموعه دوم یعنی B نشان دهنده‌ی درجه حرارت هست. رابطه‌ی بین این‌ها با یک پیکان جهت دار نمایش داده شده است. اولا از هر عضو مجموعه‌ی اول یک پیکان خارج شده است و هر پیکان به یک و فقط یک عضو از مجموعه‌ی B نظیر شده است.



یک راه دیگر نمایش رابطه فوق استفاده از زوج مرتب است. منظور ازیک زوج مرتب نمادی بصورت (a, b) است که درآن a را مولفه اول و b را مولفه دوم گوییم. کلمه مرتب اشاره به آن دارد که ترتیب مولفه‌ها مهم است. یعنی در حالت کلی $(a, b) \neq (b, a)$. رابطه‌ی فوق بصورت زوج مرتب در زیر نمایش داده شده است:

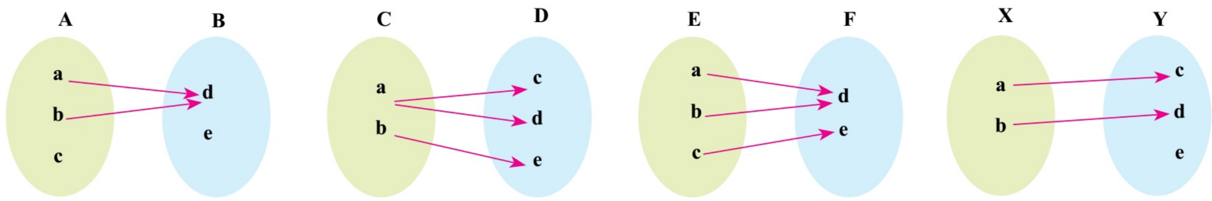
$$f = \Big\{(۸, ۲۰), (۹, ۲۲), (۱۰, ۲۳), (۱۱, ۲۷), (۱۲, ۳۰)\Big\}$$

زمانی که مولفه‌ها عدد حقیقی باشند هر زوج مرتب نشانگر نقطه‌ای روی دستگاه مختصات است. مولفه اول معرف طول و مولفه دوم معرف عرض نقطه است. نمایش رابطه‌ی فوق در دستگاه مختصات را در شکل زیر می‌بینید.

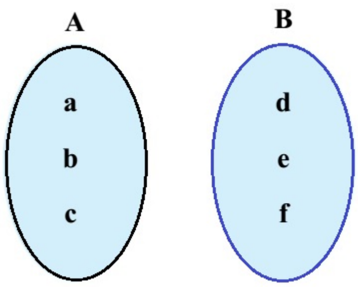


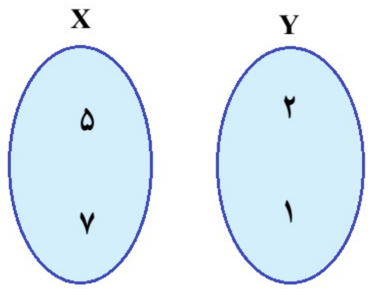
تعریف ۱.۵. یک تابع بین دو مجموعه A و B رابطه‌ای است که به هر عضو از A **دقیقا** یک عضو از B نسبت داده شود.

مثال ۱.۵. از نمودارهای ون زیر کدام تابع است و کدام نیست؟



مثال ۲.۵. پیکان‌های از A به B طوری رسم کنید تا رابطه‌ی ایجاد شده تابع باشد. برای Y, X طوری رسم کنید که رابطه تابع نباشد.





مثال ۳.۵. تابع بودن روابط زیر را بررسی کنید.

۱ . رابطه‌ای که به هر شخصی قد او را نسبت می‌دهد.

۲ . رابطه‌ای که به هر شخصی وزن وی را نسبت می‌دهد.

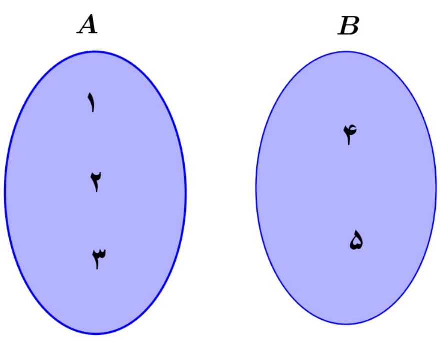
۳ . رابطه‌ای که به هر شخص غذای مورد علاقه‌اش را نسبت می‌دهد.

۴ . رابطه‌ای که به هر چند ضلعی محدب مساحت آن‌را نسبت می‌دهد.

۵ . رابطه‌ای که به هر عدد مقسوم‌علیه‌های آن عدد را نسبت می‌دهد.

۶ . رابطه‌ای که به هر دو عدد طبیعی دلخواه حاصل جمع آنها را نسبت می‌دهد.

مثال ۴.۵. ۵ رابطه‌ی متفاوت بین دو مجموعه‌ی A و B زیر بنویسید که تابع باشند.



مثال ۵.۵. فرض کنید $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ باشد . از رابطه‌های زیر کدام تابع است و کدام نیست؟

۱) $\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۵)\}$

۲) $\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۱)\}$

۳) $\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$

۴) $\{(۲,۱),(۳,۵),(۲,۲),(۱,۳)\}$

۵) $\{(۱,۳),(۲,۴)\}$

۶) $f=\{\}=\varnothing$

در مثال بالا مجموعه‌های A , B کاملا مشخص شده‌اند. چنانچه در مسئله‌ای فقط زوج‌های مرتب نوشته شده باشند شما می‌توانید مجموعه مولفه‌های اول را A و مجموعه مولفه‌های دوم را B می‌گیریم.

مثال ۶.۵. روابط زیر که با زوج مرتب بیان شده‌اند را بررسی کنید. کدام تابع است . کدام نیست.

$$f=\{(۲,-۱),(۳,-۱),(۴,-۱),(۵,-۱)\}$$
$$g=\{(-۱,۲),(۴,۴),(۳,-۱),(۲,۲),(\sqrt{۲},\sqrt{۳}),(۷,-۱),(-۱,\sqrt{۴}),(۱۰,-۱)\}$$
$$h=\{(۱,۱)\}$$
$$m=\{(۲,-۱),(۳,۴),(-۲,\sqrt{۲}),(۳,۷),(۲,\sqrt[۳]{-۱})\}$$

مثال ۷.۵. رابطه‌ی $f=\{(۲,۴),(۳,-۱),(۵,-۱),(۲,a^۲+۳a)\}$ معرف تابع است. مقدار aرا بدست آورید.

تذکر مهم: همان‌طور که در مثال بالا دیده شد یک مجموعه شامل زوج‌های مرتب زمانی تابع است که در آن هیچ دو زوج مرتبی با مولفه اول یکسان وجود نداشته باشدو چنانچه دو مولفه اول یکسان باشند بناچار (برای تابع بودن) مولفه های دوم آن‌ها نیز یکسان باشند.

مثال ۸.۵. مقادیر b,a را طوری بیابید تا رابطه‌ی f زیر تابع باشد.

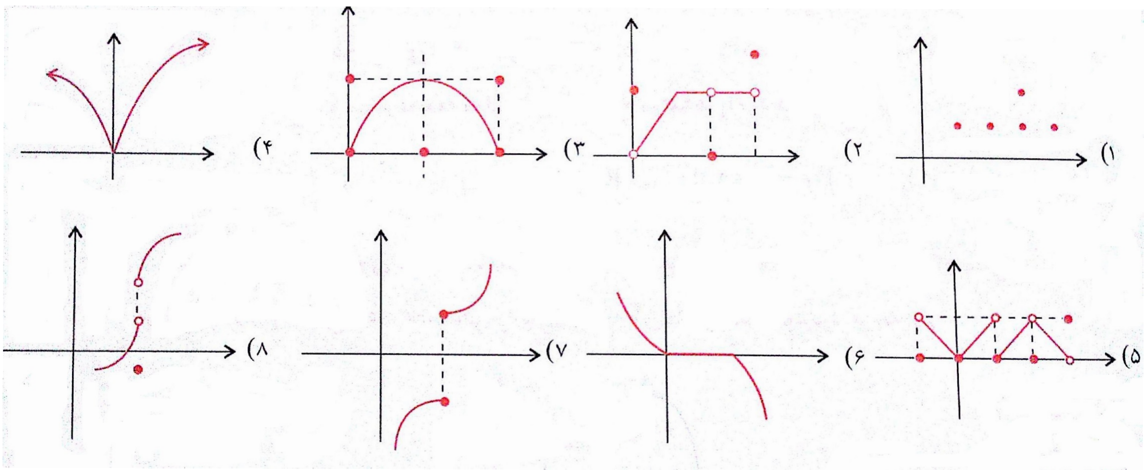
$$f=\Big\{(a^۲+a,۱),(۰,b+۴),(۱,a^۲+۲b),(۰,a^۲+b),(\frac{۲-a}{۴},a-b)\Big\}$$

تشخیص تابع بودن یک رابطه از روی نمودار مختصاتی آن

تاکنون متوجه شده‌اید یک نمودار پیکانی ون زمانی معرف تابع است که از هر عضو مجموعه اول یک و تنها یک پیکان به مجموعه دوم خارج شده باشد. در مورد روابطی که بصورت زوج مرتب بیان می‌شوند نیز متوجه شده‌اید که شرط تابع بودن، نبودن دو زوج مرتب متفاوت با مولفه‌های اول یکسان است. همچنین متوجه شده اید که روابطی که بصورت زوج‌های مرتب بیان می‌شوند و مولفه‌های آن اعداد حقیقی‌اند دارای نموداری در دستگاه مختصات هستند. حال پرسش اینجاست که اگر تنها یک نمودار به ما داده باشند چگونه از روی نمودار تشخیص دهیم که آن نمودار معرف تابع است یا خیر؟

یک نمودار در دستگاه مختصات معرف تابع است هرگاه هر خطی که به موازات محور عرض‌ها رسم شود نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال ۹.۵. کدام نمودار تابع است؟



۲.۵ دامنه و برد توابع

دامنه و برد یک تابع را در مثال‌های بالا دیده و بکاربرده‌ایم ، بدون اینکه متوجه شده باشید. در واقع مولفه‌های اول زوج‌های مرتب در هر تابع را دامنه تابع و مولفه‌های دوم زوج‌های مرتب را برد تابع می‌نامند. دامنه‌ی تابعی چون f را با D_f و برد آنرا با R_f نشان می‌دهیم. در اینجا برای سادگی قراردادی را معرفی می‌کنیم. اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد و عضو $a \in A$ به عضو $b \in B$ نسبت داده شده باشد یعنی $b \longleftarrow a$ اغلب این عبارت را با نماد $f(a) = b$ خلاصه نویسی می‌کنیم. گاهی اوقات هم گوییم تصویر a تحت f برابر b است. مثلا در تابع :

$$f = \left\{(۲, -۱), (\sqrt{۲}, ۱ - \sqrt{۲}), (\pi, \frac{۱}{\pi}), (\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۵})\right\}$$

می‌نویسیم:

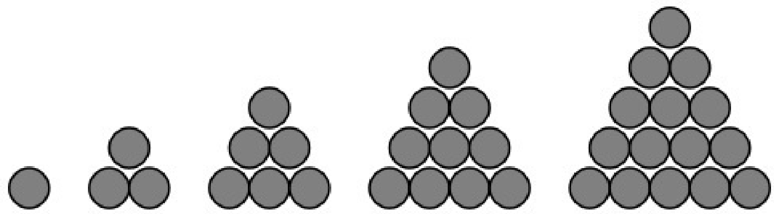
$$f(۲) = -۱ \ , \ f(\sqrt{۲}) = ۱ - \sqrt{۲} \ , \ f(\pi) = \frac{۱}{\pi} \ , \ f(\frac{۱}{۳}) = \frac{۲}{۵}$$

واضح است که در اینجا :

$$D_f = \left\{۲, \sqrt{۲}, \pi, \frac{۱}{۳}\right\} \qquad R_f = \left\{-۱, ۱ - \sqrt{۲}, \frac{۱}{\pi}, \frac{۲}{۵}\right\}$$

مثال ۱۰.۵. در شکل زیر هر قسمت دارای شماره است. در شماره ۱ ما یک دایره داریم و در شکل ۲ ما سه دایره داریم و قس علی‌هذا. تابع f را اینگونه تعریف می‌کنیم که به هر مرحله تعداد دایره‌های سیاه‌رنگ را نسبت دهد. با این حساب :

$$۱ \xrightarrow{f} ۱ \qquad ۲ \xrightarrow{f} ۳ \qquad ۳ \xrightarrow{f} ۶ \ \cdots$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۵

اگر مراحل شکل بالا بی‌وقفه ادامه یابند به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

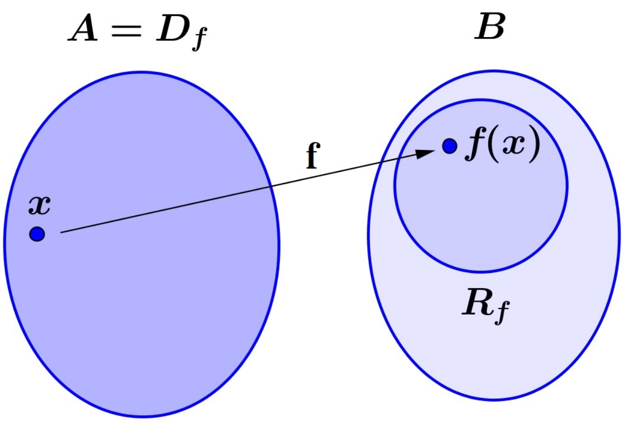
۱ . دامنه تابع را بنویسید و تابع را بصورت زوج‌های مرتب نمایش دهید. آیا نوشتن تمام اعضای تابع شدنی است؟ در حالت کلی عدد $n \in \mathbb{N}$ به چه عددی تصویر می‌شود؟ دستوری برای $f(n)$ بیابید.

۲ . در مرحله دهم چند دایره داریم؟ در مرحله ۲۲ ام چندتا؟

۳ . در چه مرحله‌ای تعداد دایره‌های سیاه‌رنگ به ۶۶۶ می‌رسد؟

۴ . برد این تابع چیست؟

در شکل زیر شناسنامه‌ی یک تابع را نوشته‌ایم.



$$R_f \subseteq B$$

$$f : A \to B$$

$$x \to f(x)$$

قانون‌یاضابطه‌تابع $\leftarrow y = f(x)$

وقتی می نویسیم $\begin{cases} f : A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) \text{ یا } y = f(x) \end{cases}$ منظور از A دامنه تابع است. اما B لزوما برد f نیست

و همان‌طور که از شکل مشخص است همواره $R_f \subseteq B$ است.[1] به $y = f(x)$ ضابطه یا قانون تابع گویند. مجموعه B را اغلب هم دامنه تابع f می‌نامیم.

مثال ۱۱.۵. تابع $\begin{cases} f : \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto x^2 + 4x \end{cases}$ مفروض است. برد این تابع و نمودار مختصاتی آن‌را رسم کنید.

تعریف ۲.۵. به هر تابع به‌صورت $\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax + b \text{ یا } y = ax + b \end{cases}$ یک تابع خطی گوییم.

تذکر: در تابع خطی لزومی ندارد که دامنه تمام اعداد حقیقی باشد. ممکن است دامنه‌ی یک تابع خطی یک مجموعه متناهی، یا مجموعه اعداد طبیعی ویا مجموعه اعداد صحیح باشد.

مثال ۱۲.۵. تابع خطی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان است که $f(1) = 2 \ , \ f(2) = 5$. ضابطه‌ی این تابع را بدست آورید.

مثال ۱۳.۵. تابع خطی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان است که $f(1) \leq f(2) \ , \ f(3) \geq f(4) \ , \ f(5) = 5$. ضابطه‌ی این تابع را بدست آورید.

مثال ۱۴.۵. تابع خطی $f(x) = 2x - 4$ مفروض است. نمودار مختصاتی تابع را در حالاتی که دامنه داده شده است رسم کنید و برد تابع را تعیین کنید.

۱ . اگر دامنه تابع $D_f = \{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\}$ باشد.

۲ . اگر دامنه تابع $D_f = [1, 4]$ باشد.

مثال ۱۵.۵. در مثلث ABC اندازه‌ی زاویه A برابر ۶۰ درجه است و اندازه‌ی دو زاویه‌ی C, B اعداد طبیعی بر حسب درجه هستند. رابطه‌ای بنویسید که اندازه‌ی زاویه C را بر حسب اندازه زاویه B مشخص کند.آیا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد آن را بدست آورید. این رابطه چند عضو دارد؟

مثال ۱۶.۵. طول مستطیلی ۵ واحد بیشتر از عرض آن است. تابعی بنویسید که محیط مستطیل را بر حسب عرض آن نشان دهید. تابع حاصل چه نوع تابعی است؟ حال تابعی بنویسید که مساحت مستطیل را بر حسب عرض آن نشان دهد. ضابطه‌ی تابع آشنا نیست؟

[1] در سالهای بعد خواهید دید به توابعی که در آن‌ها $R_f = B$ رخ می‌دهد تابع پوشا گویند.و دلیل انتخاب این نام هم واضح است.تابع توانسته است تمام مجموعه B را پوشش دهد.

مثال ۱۷.۵. تابع f از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{Z}$ به این صورت تعریف شده است که اگر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ زوج باشد آنرا به نصفش یعنی $\frac{n}{۲}$ نسبت می‌دهد و اگر $n \in \mathbb{N}$ فرد باشد آن‌را به $\frac{۱-n}{۲}$ نسبت می‌دهد. جدول زیر را کامل کنید. دامنه و برد تابع را بنویسید و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...	n	n	...
y								...			...

چنین توابعی را توابع چندضابطه‌ای گویند. در اینجا تابع دوضابطه‌ای است و دستور آن بصورت زیر است.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{۲} & \text{اگر n زوج باشد} \\ \frac{۱-n}{۲} & \text{اگر n فرد باشد} \end{cases}$$

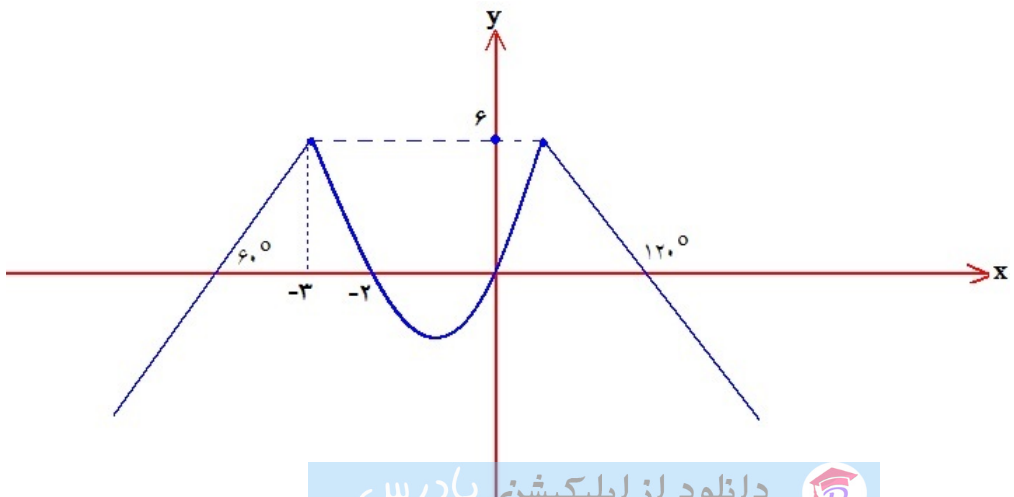
مثال ۱۸.۵. تابع سه ضابطه‌ای زیر مفروض است. نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & x < -۱ \\ -x & -۱ \leq x < ۱ \\ ۲x - ۱ & x \geq ۱ \end{cases}$$

مثال ۱۹.۵. نمودار تابع دوضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x \geq -۲ \\ ۲x + ۸ & x < -۲ \end{cases}$$

مثال ۲۰.۵. نمودار تابعی بصورت زیر است. ضابطه‌ی آن را بنویسید.



۳.۵ انواع توابع

در این بخش پایانی به بررسی چند نوع تابع خاص و پرکاربرد می‌پردازیم.

تابع ثابت

تابع ثابت تابعی است که تمام اعضای دامنه را به یک و فقط یک عضو از برد نظیر کند. توابع ذکر شده در زیر همگی تابع ثابت هستند.

۱) $f=\{(a,a),(b,a),(c,a),(d,a)\}$

۲) $g=\{(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۶,۵),(۷,۵),(۱۰۰,۵)\}$

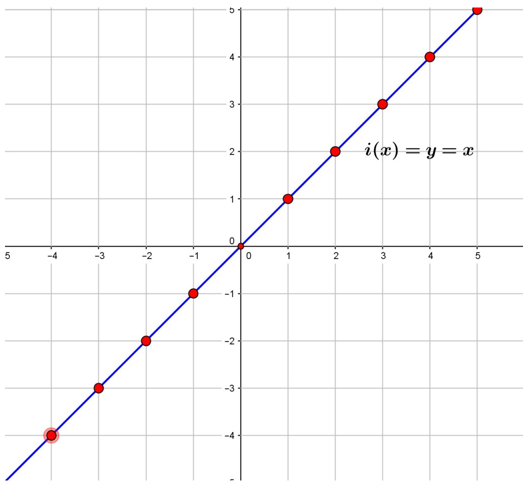
۳) $h:[-۲,۳]\longrightarrow \mathbb{N}\ ,\ h(x)=۳$

۴) $q:\mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ q(x)=\sqrt{۳}$

نمودار چنین توابعی وقتی دامنه بصورت بازه باشد خطی موازی محور طول‌هاست و اگر دامنه زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح باشد بصورت نقاطی در دستگاه مختصات است که همگی روی خطی موازی محور طول‌ها قرار دارند.

تابع همانی

تابع $i:A\longrightarrow A$ را تابع همانی گوییم هرگاه برای هر $x\in A$ داشته باشیم : $i(x)=x$. به عبارت بهتر هر عضو از دامنه به خودش نظیر می‌شود. در حالتی که دامنه $\mathbb{R}$ باشد ، تابع همانی همان خط $y=x$ ،نیم‌ساز ناحیه اول و سوم است.



توابع چندجمله‌ای

فرض کنید مربعی به ضلع x دارید. مساحت این مربع بر حسب ضلع آن برابر است با: $S(x) = x^۲$. همچنین مساحت دایره‌ای به شعاع r برابر است با $S(r) = \pi r^۲$. حجم مکعبی به ضلع x برابر است با $V(x) = x^۳$ و حجم کره‌ای به شعاع r برابر $V(r) = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$. اینها همه نمونه‌هایی از توابع چندجمله‌ای هستند. در حالت کلی توابعی که ضابطه‌ی جبری آن‌ها یک چندجمله‌ای از یک متغیر باشد را تابع چندجمله‌ای گوییم. شکل کلی یک تابع چندجمله ای بصورت زیر است:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰$$

آشناترین توابع چندجمله‌ای تابع دوجمله‌ای درجه اول $f(x) = ax + b$ یا همان تابع خطی است و تابع سه جمله ای درجه دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ است که همان سهمی است. از این توابع در ضابطه‌های توابع چندضابطه‌ای زیاد استفاده می‌کنیم. برای نمونه در تابع سه ضابطه‌ای زیر هر ضابطه به تنهایی یک تابع چندجمله‌ای است.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - x - ۱ & x < ۰ \\ ۲x - ۳ & ۰ \leq x \leq ۲ \\ \frac{۱}{۲}x^۲ + x - \frac{۱}{۳} & x > ۲ \end{cases}$$

در حالت کلی در معرفی یک تابع باید دامنه آن مشخص شده باشد.درغیراین صورت بزرگترین مجموعه ممکن را به عنوان دامنه تابع اختیار می کنیم.توابع چندجمله ای چنانچه دامنه مشخصی نداشته باشند دامنه آن‌ها را برابر $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم.

تابع قدرمطلق

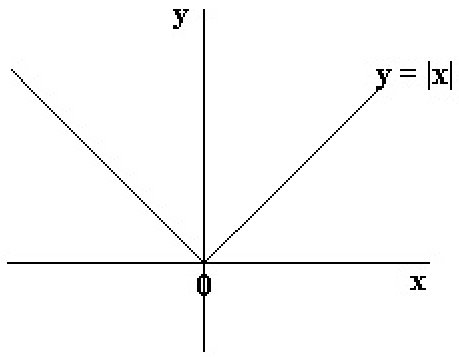
در فصل قبل با قدرمطلق و خواص آن آشنا شدید. در حالت کلی تابع قدرمطلق بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow |x| \ , \ f(x) = |x| \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم که:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x \leq ۰ \end{cases}$$

نمودار تابع $f(x) = |x|$ یکی از مهمترین نمودارهاست و بصورت زیر است:



مثال ۲۱.۵. نمودارتابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}|x| & x\leq ۱\\ ۲-x & x>۱\end{cases}$$

مثال ۲۲.۵. تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases}|x| & x<۰\\ x^{۲}-۲x & ۰\leq x<۱\\ ۱ & x>۱\end{cases}$$

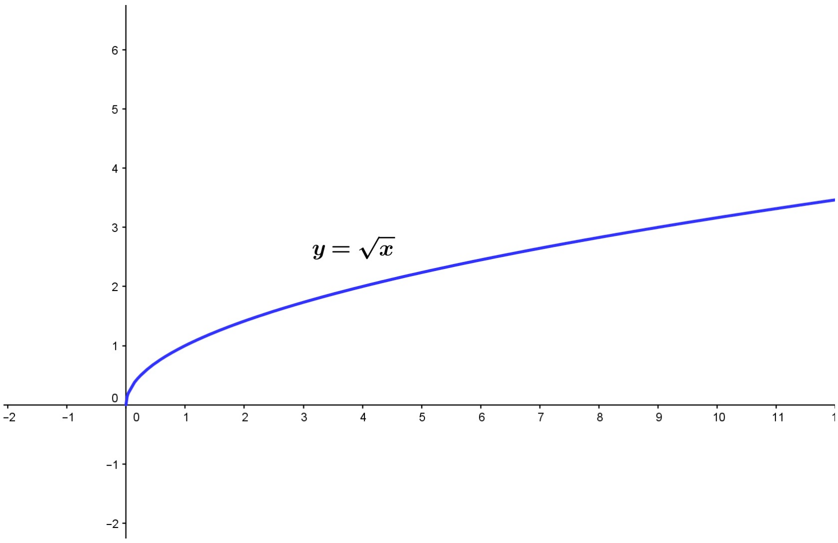
مطلوبست محاسبه‌ی $f\left(\frac{۲+x^{۲}}{۱+x^{۲}}\right), f(\sqrt{۲}-۱), f(-۵)$.

معرفی دو تابع رادیکالی مهم

اولین تابع رادیکالی که می‌خواهیم بررسی کنیم تابع:

$$\begin{cases}f:\mathbb{R}^{+}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longrightarrow\sqrt{x}\end{cases}$$

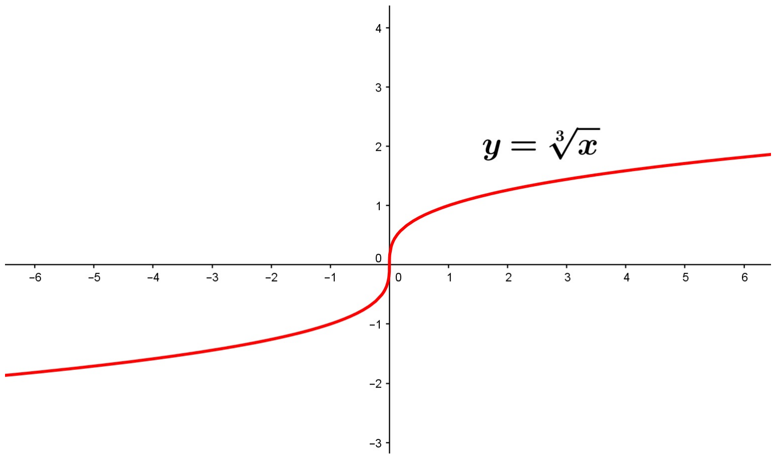
با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ است. این تابع داری دامنه‌ای بصورت $D_f=[۰,+\infty)$ است و برد آن نیز $R_f=[۰,+\infty)$ است. نمودار این تابع را در شکل زیر می‌بینید.



تابع رادیکالی دیگری که قصد معرفی آن را داریم تابع ریشه سوم است:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

ضابطه‌ی این تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ است. نمودار آن‌را در زیر می‌بینید:

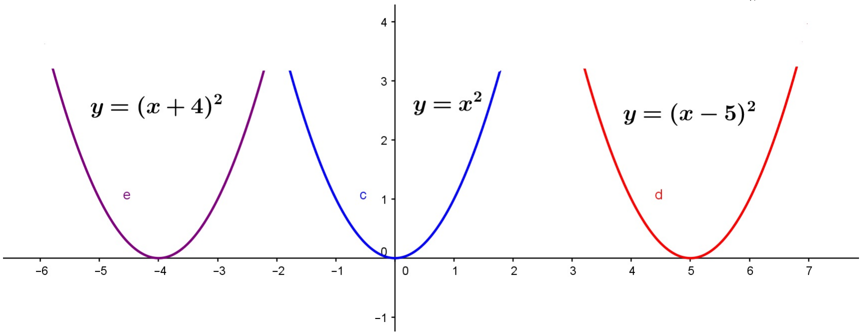


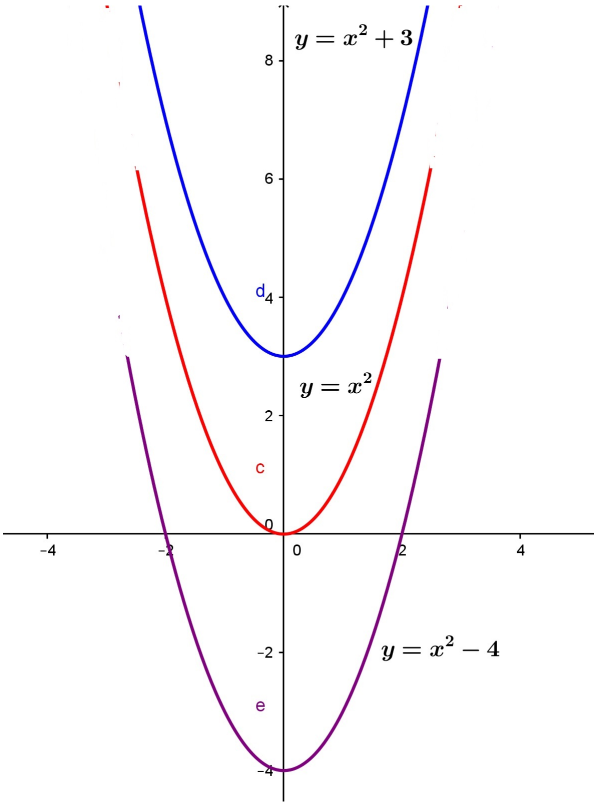
مثال ۲۳.۵. نمودار تابع زیر را رسم کنید

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x} & x < 0 \end{cases}$$

۴.۵ ترسیم با انتقال

در این قسمت می‌خواهیم به کمک انتقال نمودارهای جدیدی را به کمک نمودارهای قبلی رسم کنیم. به دقت به شکل‌های زیر نگاه کنید.





همان‌طور که دیده می‌شود با تبدیل شدن $x \longrightarrow x-۵$ نمودار $y=x^۲$ به اندازه ۵ واحد در جهت مثبت روی محور طول‌ها جابجا شده است و با تبدیل $x \longrightarrow x+۴$ نمودار $y=x^۲$ به اندازه چهار واحد در جهت منفی روی محور طول‌ها جابجا شده است.

همچنین با تبدیل $f(x) \longrightarrow f(x)+۳$ نمودار $y=x^۲$ به اندازه ۳ واحد در جهت مثبت محور عرض‌ها به بالا حرکت کرده و با تبدیل $f(x) \longrightarrow f(x)-۴$ به اندازه‌ی ۴ واحد روی محور عرض‌ها به پایین حرکت کرده است.

در حالت کلی همین روابط درست است. نمودار $a>۰$, $y=f(x-a)$ نسبت به $y=f(x)$ به اندازه a واحد در جهت مثبت محور طول ها حرکت کرده است و $f(x+a)$ همان تغییر منتها در جهت منفی. به همین

ترتیب $a>۰$, $f(x)\pm a$ هم تغییرات روی محور عرض‌هاست.

مثال ۲۴.۵. به کمک انتقال نمودارهای زیر را رسم کنید.

۱)$y=(x+۳)^۲$

۲)$y=x^۲+۳$

۳)$y=(x-۲)^۲+۳$

۴)$y=۴-(x-۲)^۲$

۵)$y=|x-۳|$

۶)$y=|۲+x|$

۷)$y=-|x-۲|$

۷)$y=۱-|۱+x|$

۹)$y=\sqrt{x-۳}$

۱۰)$y=\sqrt{x+۳}+۲$

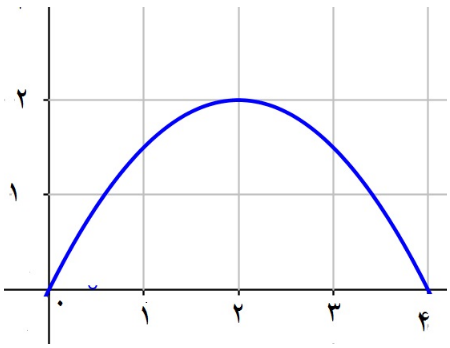
۱۱)$y=\sqrt[۳]{x}+۲$

۱۲)$y=\sqrt{-x}$

۱۳)$y=\sqrt{۲-x}$

۱۴)$y=\sqrt[۳]{x-۲}+۱$

مثال ۲۵.۵. نموادار تابع $y=f(x)$ بصورت مقابل است. نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



۱)$y=f(x+۲)$

۲)$y=f(x-۱)$

۳)$y=۳f(x)$

۴)$y=\frac{۱}{۲}f(x)$

۵)$y=|f(x)-۱|$

۶)$y=f(-x)$

۷)$y=-f(x)$

۷)$y=-f(-x)$

۹)$y=f(|x|)$

۱۰)$y=|f(x+۲)-۲|$

بررسی تابع بودن یک رابطه‌ی جبری

در این قسمت این موضوع مهم را بررسی می‌کنیم که یک ضابطه‌ی جبری به تنهایی چه زمانی معرف تابع است. به عنوان یک مثال ساده فرض کنید هدف بررسی عبارت $x = |y|$ است. آیا این ضابطه می‌تواند معرف یک تابع باشد. یعنی به‌ازای هر مقدار x دقیقا یک مقدار y بدست می‌آید؟ با قرار دادن $x = ۱$ نتیجه می‌شود $|y| = ۱$ و لذا $y = \pm ۱$ و این یعنی هم $۱ \longrightarrow ۱$ و هم $۱ \longrightarrow -۱$ و این یعنی این رابطه نمی‌تواند یک تابع باشد. البته برای اثبات اینکه رابطه‌ای تابع است ، مثال کفایت نمی‌کند و باید ثابت کنید رابطه تابع است. برای این منظور باید گزاره‌ی زیر را در مورد آن رابطه یا ضابطه ثابت کنید.

$$\begin{cases} (x,y) \in f \\ (x,z) \in f \end{cases} \Longrightarrow y = z$$

مثال ۲۶.۵. ثابت کنید رابطه‌ی $x = y + y^۳$ معرف تابع است.

مثال ۲۷.۵. روابط زیر را بررسی کنید. هر کدام که ادعا می‌کنید تابع است ثابت کنید و هرکدام که ادعا می‌کنید تابع نیست با مثال نقض نشان دهید.

$۱) x^۲ + y^۲ = ۵$ $۲) |x| + |y| = ۳$

$۳) x = \sin y$ $۴) y^۲ = x$

$۵) |x - ۲| + |y - ۳| = ۰$ $۶) \sin y + \cos x = ۱$

تمرینات فصل تابع

تمرین ۱.۵. فرض کنید دو مجموعه A , B بصورت زیر تعریف شده باشند:

$$A = \Big\{\text{اصفهان, بندرعباس, رشت, شیراز, مشهد}\Big\}$$

$$B = \Big\{\text{مازندران, گیلان, اصفهان, هرمزگان, فارس}\Big\}$$

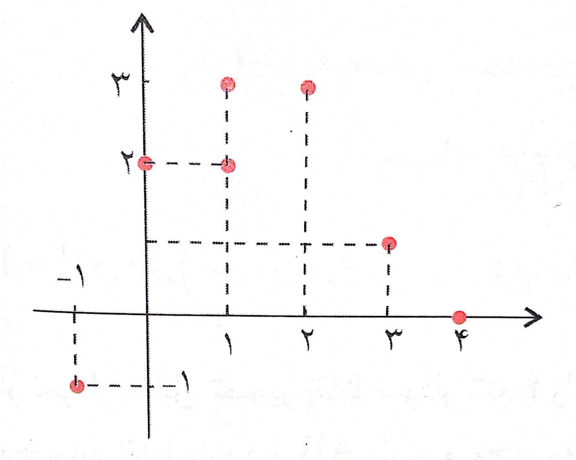
رابطه‌ی $f : A \longrightarrow B$ را اینگونه تعریف می‌کنیم که $a \in A$ مرکز استان $b \in B$ باشد. f را بصورت زوج‌های مرتب بنویسید.

تمرین ۲.۵. اگر دو زوج مرتب $(a^۳ + b, a^۲ + ۲b + ۱)$ و $(۲۰, ۹)$ برابر باشند b, a را بیابید.

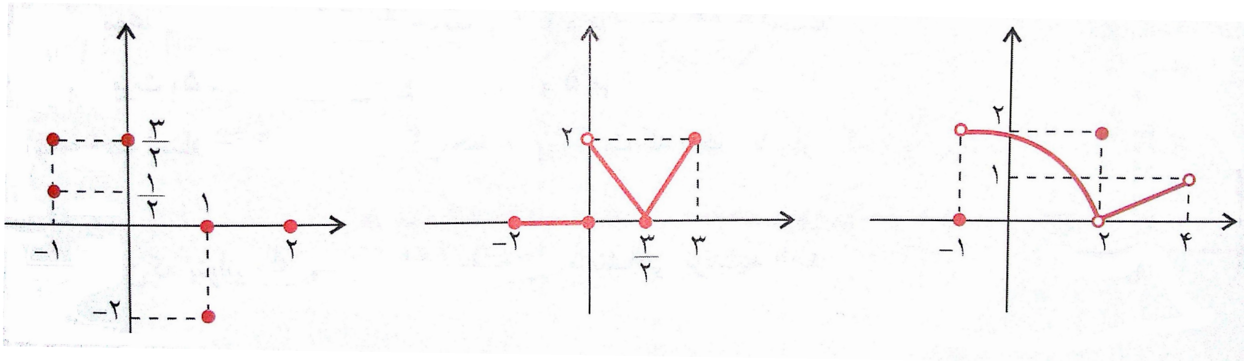
تمرین ۳.۵. اگر رابطه‌ی f زیر تابع باشد مقدار $f(m + ۱۲)$ را بیابید.

$$f = \Big\{(\sqrt{۳}, ۱), (\sqrt{۳} - \sqrt{۲}, ۲), (m^۲, ۳), (\frac{۱}{\sqrt{۳} + \sqrt{۲}}, m - ۲), (۰, m)\Big\}$$

تمرین ۴.۵. نمودار یک رابطه بصورت مقابل است.این رابطه را بصورت زوج مرتب بنویسید. آیا رابطه تابع است؟



تمرین ۵.۵. از نمودارهای زیر کدام تابع است؟ دامنه و برد آن‌ها را بنویسید.



تمرین ۶.۵. رابطه‌های زیر را بصورت زوج مرتب بنویسید. هر کدام تابع است دامنه و بردش را تعیین کنید.

۱) $f_۱ = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N},\ x+y=۱۰\}$

۲) $f_۲ = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N},\ x+y=۱۰, x<y\}$

۳) $f_۳ = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N},\ x<y, xy \leq ۶\}$

تمرین ۷.۵. تابع f یک تابع خطی است و برای هر x داریم $f(x+۲)+f(x-۳) = ۴x+۸$ ضابطه‌ی تابع را بیابید.

تمرین ۸.۵. تابعی مثال بزنید که دامنه آن نامتناهی بوده و برد آن یک عضو داشته باشید و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند.

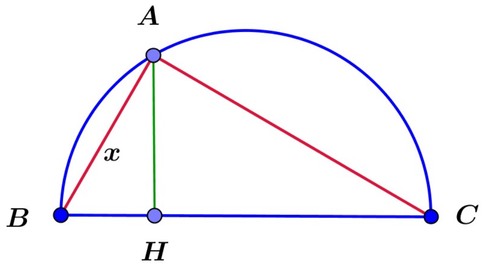
تمرین ۹.۵. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^۲-۹}$ مفروض است.مقادیر $f(\sqrt{۱۰}), f(۳), f(۵)$ را بیابید. به ازای چه مقادیری از x داریم $f(x)=۲$ ویا $f(x)=۳$.آیا می‌توان $f(۰)$ را بدست آورد؟ دامنه تابع

چیست؟

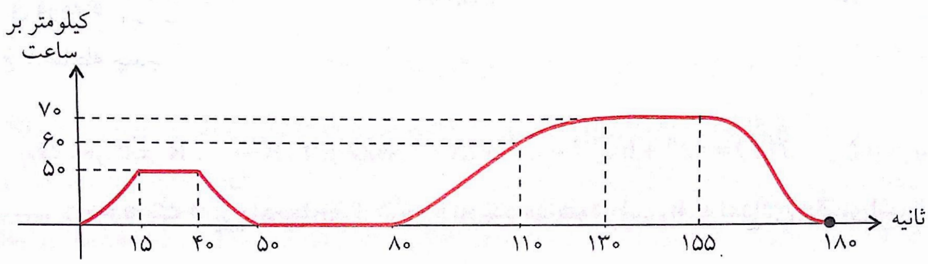
تمرین ۱۰.۵. اگر $f(x) = x^{۲} + x$ باشد و $D_f = \{۰, ۱, -۱, ۲, ۴\}$ باشد ، R_f را بدست آورید.

تمرین ۱۱.۵. اگر $f(x) = \sqrt{x^{۲} + ۴}$ باشد و $R_f = \{۲, ۲\sqrt{۲}, ۱, ۰\}$ باشد دامنه تابع را بدست آورید.

تمرین ۱۲.۵. دایره‌ای به قطر ۶ مفروض است. راس A از مثلث قایم‌الزاویه ABC روی نیم‌دایره تغییر می‌کند. اگر اندازه ضلع $AB = x$ باشد تابعی بنویسید که اندازه‌ی ضلع AC را بر حسب x بیان کند.همچنین ضابطه‌ی تابعی را بیابید که اندازه‌ی ارتفاع AH را بر حسب x نشان دهد. دامنه این دو تابع چیست؟



تمرین ۱۳.۵. خانمی برای خرید از منزل با اتومبیل خارج شده است. نمودار زیر



نمودار سرعت زمان $v(t)$ او را از لحظه حرکت نشان می‌دهد زمان شروع را O مبدأ در نظر می‌گیریم. او پس از حرکت و مدت زمانی که در شکل نشان داده شده به یک چراغ قرمز می‌رسد و پس از سبز شدن چراغ دوباره به حرکت ادامه می‌دهد تا این‌که پس از ۱۸۰ ثانیه در پارکینگ فروشگاه توقف می‌کند.

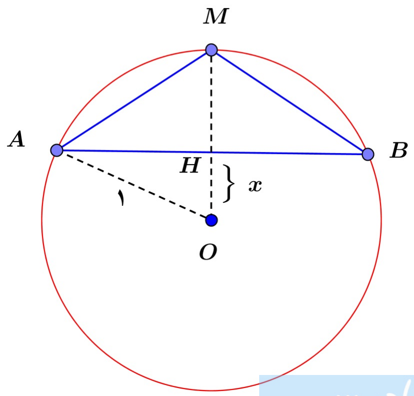
۱. آیا نمودار $y = v(t)$ یک تابع است؟ آیا می‌توانید دامنه و برد آن را پیدا کنید.

۲. در چه زمان‌هایی سرعت او ثابت است. چه مدت او پشت چراغ قرمز می‌ایستد؟

۳. پس از ۴۵ ثانیه و همچنین ۱۲۰ ثانیه پس از حرکت سرعت آن تقریباً چقدر است؟

۴. $v(۶۰)$ و $v(۴۰)$ و $v(۱۳۰)$ و $v(۱۸۰)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۱۴.۵. در شکل زیر تابعی بیابید که مساحت $\triangle ABC$ رابر حسب x بیان کنید.(MH ارتفاع)



تمرین ۱۵.۵. کدام رابطه بیان‌گر یک تابع است؟

۱) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=۲$ ۲) $y^۲+|x^۳-۴x|=۰$ ۳) $|y|+x=۰$ ۴) $y^۲-۲xy-۱=۰$

تمرین ۱۶.۵. ضابطه‌های زیر را بررسی کنید. نمودار آنها را رسم کنید و تعیین کنید کدام‌ها تابع است؟

$$g(x)=\begin{cases}۱ & x\geq ۰\\ ۲ & x<۰\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۰\\ x & x<۰\end{cases}$$

$$k(x)=\begin{cases}x & x\geq ۲\\ ۱ & ۰<x<۲\\ -x & x\leq ۰\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}|x| & -۱<x<۱\\ ۲ & |x|\geq ۱\end{cases}$$

تمرین ۱۷.۵. به ازای چه مقادیر b, a تابع $f(x)=\dfrac{x^۲+ax+b}{bx^۲+۲x+۴}$ به تابعی ثابت تبدیل می‌شود؟

تمرین ۱۸.۵. به ازای چه مقادیری از b, a تابع $f(x)=\dfrac{bx+a^۲-۴}{(a-۲)x+۳}$ به تابع همانی تبدیل می‌شود؟

تمرین ۱۹.۵. به ازای چه مقدار b, a تابع $f(x)=ax^۳+(b-۱)x+۲$ به تابع ثابت صفر تبدیل می‌شود؟

تمرین ۲۰.۵. اگر $I=\{(۱,a^۲),(a+۱,b),(b^۲,c-۲),(d^۲,d+c)\}$ تابع همانی باشد d را بیابید.

تمرین ۲۱.۵. نمودار تابع $y=|x-۲|$ را در بازه‌ی $[-۱,۵]$ رسم کرده و برد آن‌را بیابید.

تمرین ۲۲.۵. برد تابع $y=|x+۵|-۳$ را در هریک از حالات زیر رسم کرده و برد آن‌را بیابید.

۱) $D_f=\mathbb{R}$ ۲) $D_f=[-۶,۱۰]$ ۳) $D_f=[-۴,۱۰]-\{۵\}$ ۴) $D_f=[-۴,۰]$

تمرین ۲۳.۵. نمودار توابع زیر را رسم کرده و برد هر یک را مشخص کنید.

۱) $f(x)=x^۲-۴$

۲) $f(x)=x^۲-x$

۳) $f(x)=۴x-x^۲$

۴) $f(x)=-۲x^۲+۸x-۳$

۵) $f(x)=|x^۲-۴x|$

۶) $f(x)=|x^۳-۱|$

۷) $f(x)=\sqrt{|x|}$

۸) $f(x)=x^۲-۲|x|$

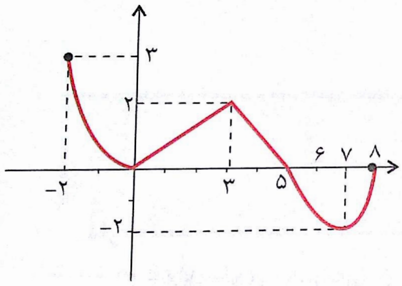
۹) $f(x)=||x|-۱|$

۱۰) $f(x)=|x-۱|+|x+۱|$

۱۱) $f(x)=|x-۱|-|x+۱|$

۱۲) $f(x)=|x+۱|+|x|+|x-۱|$

تمرین ۲۴.۵. نمودار تابع f بصورت مقابل است.دامنه و برد تابع را بیابید و توابع خواسته شده در زیر را رسم کرده و دامنه و برد هر کدام را بدست آورید.



$$g(x)=f(۲x) \quad , \quad h(x)=\frac{۳}{۲}f(x-۲) \quad , \quad u(x)=|f(x)|$$

$$v(x)=۳f(x-۲)+۲ \quad , \quad k(x)=-f\left(\frac{x}{۲}\right)$$

تمرین ۲۵.۵. نمودارهای زیر را رسم کنید.

$۱)|y| = x$ $\qquad$ $۲)|y| = x+۲$

$۳)|y| = x^۲-۱$ $\qquad$ $۴)|y-۱| = x$

بیشتر بدانیم

۱. **توابع گویا :** به هر تابعی کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد، یک تابع گویا گوییم. اگر دامنه تعریف چنین توابعی در تعریف تابع مشخص نشده باشد، باید بزرگترین مجموعه ممکن را به عنوان دامنه آن در نظر بگیریم. چنین توابعی در تمام $\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند الا در جاهایی که مخرج صفر می‌شود. مثلا تابع $f(x) = \dfrac{x^۲+x+۱}{x^۲+x-۲}$ دارای دامنه‌ای بصورت $D_f = \mathbb{R} - \{۰, -۲\}$ است.

۲. **توابع یک به یک:** برخی توابع دارای ویژگی‌های خاصی هستند. همان‌طورکه می‌دانید هر عضو دامنه تنها به یک عضو هم‌دامنه نظیر می‌شود. با این‌حال ممکن است دو عضو دامنه به یک عضو هم‌دامنه نظیر شود. چنانچه این اتفاق برای تابعی چون f رخ ندهد یعنی هر عضو برد متناظر به یک و فقط یک عضو دامنه باشد تابع f را یک به یک گوییم.به زبان ریاضی تعریف تابع یک به یک چنین است:

تعریف تابع یک به یک $\longleftarrow$ $\quad f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$

به عنوان یک مثال ساده تابع $f(x) = x^۲$ یک به یک نیست چراکه $f(-۱) = f(۱) = ۱$ است در حالی‌که $۱ \neq -۱$ است.

از طرفی تابع گویای $f(x) = \dfrac{۲x-۱}{۳x-۶}$ دارای دامنه $D_f = \mathbb{R} - \{۲\}$ است و یک به یک است چرا که

داریم:

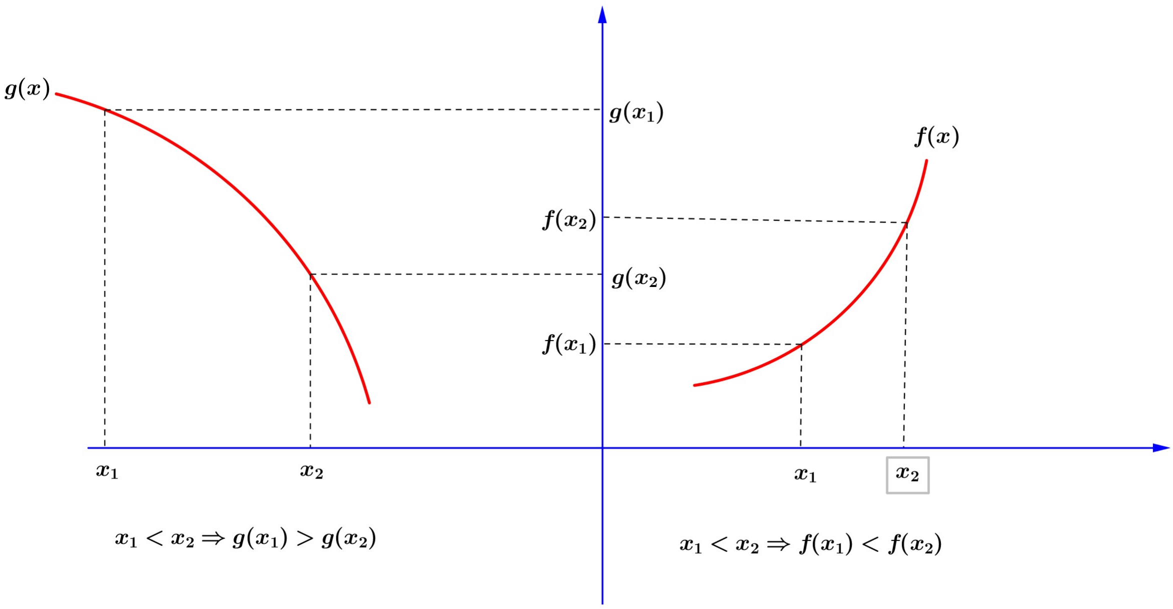
$$\begin{aligned} f(a)=f(b) &\Longleftrightarrow \frac{۲a-۱}{۳a-۶}=\frac{۲b-۱}{۳b-۶} \\ &\Longleftrightarrow ۶ab-۱۲a-۳b+۶=۶ab-۳a-۱۲b+۶ \\ &\Longleftrightarrow ۹a=۹b \\ &\Longleftrightarrow a=b \end{aligned}$$

۳. **توابع پوشا:** قبلا دیدیم که برای هر تابع f همواره $R_f \subseteq B$ است که در آن $f : A \longrightarrow B$ است. حال اگر داشته باشیم $R_f = B$ گوییم تابع f پوشاست. پس پوشا بودن ارتباط زیادی با هم‌دامنه دارد. دو تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longrightarrow \sqrt{x}\ ,\ g(x)=\sqrt{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \sqrt{x}\ ,\ f(x)=\sqrt{x} \end{cases}$$

می‌دانیم که $\sqrt{x} \geq ۰$ است پس $R_f = R_g = [۰, +\infty)$ است.حال $R_f \subsetneq \mathbb{R}$ است و $R_g = \mathbb{R}^+$ است. یعنی g پوشاست در حالیکه f پوشا نیست اگر چه ضابطه و دامنه هر دو تابع یکسان است.

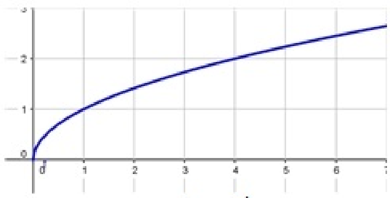
۴. **توابع یکنوا** : ابتدا به شکل زیر دقت کنید.



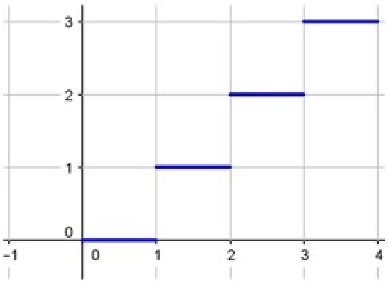
در شکل ۱ با افزایش مقدار x مقدار تابع یا همان $f(x)$ هم مرتبا افزایش می‌یابد. چنین توابعی را اکیدا صعودی گوییم. در شکل ۲ اما داستان برعکس است. با افزایش x مقدار تابع یا $f(x)$ مرتبا کاهش می‌یابد. چنین توابعی را اکیدا نزولی گوییم. چنانچه با افزایش تابع مقدار $f(x)$ کاهش نیابد ، تابع را صعودی گوییم و چنانچه با افزایش x مقدار تابع افزایش نیابد تابع را نزولی گوییم.

تابعی که اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی باشد را اکیدا یکنوا گوییم. تابعی که صعودی یا نزولی باشد را یکنوا

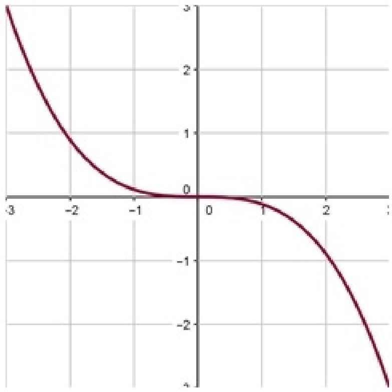
گوییم. در شکل زیر چند تابع با این ویژگی‌ها رسم شده‌اند.



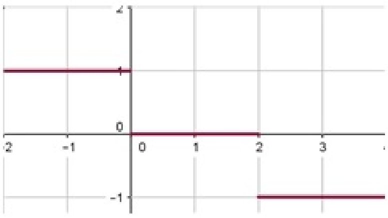
اکیدا صعودی



صعودی



اکیدا نزولی



نزولی

۵. **یافتن دامنه توابع از روی ضابطه:** گاهی اوقات دامنه یک تابع در زمان معرفی تابع معین نمی‌شود. در این حالت باید بزرگترین دامنه ممکن را به عنوان دامنه تابع در نظر گرفت. برای این منظور توجه به دو نکته ، اساسی است اول: توابعی که کسری هستند نباید مخرجشان صفر شود. دوم: توابع رادیکالی با فرجه زوج زمانی تعریف شده هستند که زیر رادیکال مثبت باشد. به مثال زیر دقت کنید:

مثال. دامنه توابع زیر را بیابید.

$$۱)f(x)=\frac{۲+x^{۲}}{x^{۲}+x-۲} \qquad ۲)g(x)=\frac{\sqrt{۹-x^{۲}}}{x^{۲}-۴}$$

$$۳)h(x)=\sqrt[۳]{\frac{۲x}{x^{۲}-۱}} \qquad ۴)\ell(x)=\frac{۱}{\sqrt{۴-۳x-x^{۲}}}$$