

دردوین این جزوه از تخریبات مؤلفین کتاب های زیر  
نیز استفاده شده و ندرتاً برخی از سوالات که از نظر نگارنده  
غیر قابل چشم پوشی بودند عیناً نقل گردیده است.

۱- نردبام ریاضی دهم خیلی سبز (حسین شفیع زاده -

مهرداد کیوان)

۲- سه سطحی قلم چی دهم

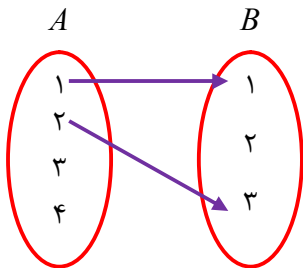
۳- ای کیو گاج دهم

**مفهوم تابع**

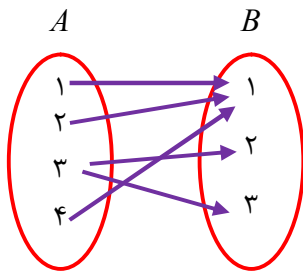
**تعریف تابع :**

یک تابع از مجموعه غیرتهی  $A$  به مجموعه غیرتهی  $B$  رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از  $A$  دقیقاً یک عضو از  $B$  نسبت داده می شود. صورت های مختلفی از نمایش یک تابع وجود دارد که در زیر به برخی از این صورت ها می پردازیم:

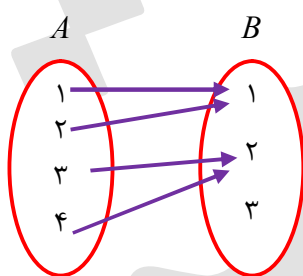
**نمایش تابع به صورت پیکانی :**



شکل مقابل که یک نمایش پیکانی برای روابط است تابع نیست، زیرا از تمام اعضای  $A$  پیکان خارج نشده است.



شکل مقابل تابع نیست، زیرا از عضو ۳ بیش از یک پیکان خارج شده است.



شکل مقابل تابع است، زیرا از هر عضو  $A$  دقیقاً یک پیکان خارج شده است.

**تذکره:** نمایش پیکانی روابط از مجموعه  $A$  به  $B$  زمانی تابع است که از همه اعضای مجموعه  $A$  دقیقاً یک پیکان خارج شود (نه بیشتر نه کمتر)

**تذکره:** ممکن است به برخی اعضای  $B$  پیکان وارد نشود و یا آن که بیش از یک پیکان وارد شود.

**سؤال ۱:** اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{1, 2\}$  چند تابع از  $A$  به  $B$  می توان تعریف کرد؟

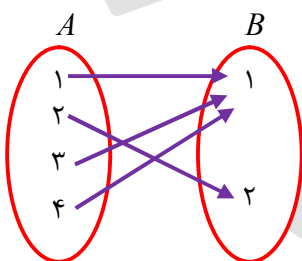
۲۴ (۴)

۴ (۳)

۸ (۲)

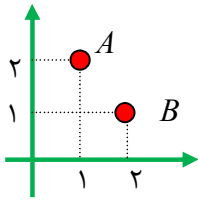
۱۶ (۱)

**پاسخ: گزینه ۱**



از هر عضو  $A$  یک پیکان باید خارج شود اما این پیکان ۲ انتخاب دارد؛ پس تعداد توابع از  $A$  به  $B$  برابر  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  می باشد.

## نمایش تابع به صورت زوج های مرتب :



عبارت  $(a, b)$  یک زوج مرتب است که در آن  $a$  را مؤلفه اول و  $b$  را مؤلفه دوم می نامیم. مشخص است که در زوج های مرتب جابه جایی بین مؤلفه ها، زوج مرتب متمایزی ایجاد می کند، مثلاً نقطه  $A(1, 2)$  و نقطه  $B(2, 1)$  دو نقطه متمایز در صفحه مختصات هستند.

**نکته:** دو زوج مرتب به شرطی با هم برابر هستند که مؤلفه های اول با هم و مؤلفه های دوم با هم برابر باشند.

**سؤال ۲:** اگر  $(a, 5) = (b + 3, -3a + b)$  آنگاه  $(a, b)$  کدام است؟

- (۱)  $(-7, -4)$       (۲)  $(-4, -7)$       (۳)  $(4, 7)$       (۴)  $(7, 4)$

**پاسخ:** گزینه ۲

کافی است مؤلفه ها را نظیر به نظیر برابر قرار دهیم.

$$\begin{cases} b + 3 = a \\ -3a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - a = -3 \\ -3a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b + a = 3 \\ b - 3a = 5 \end{cases} \xrightarrow{+} -2a = 8$$

$$a = -4, b = -7 \Rightarrow (a, b) = (-4, -7)$$

**سؤال ۳:** تابع  $f = \{(m^2 - m, m^2 - 3m), (2, n^2 - 2n + 5), (2, p)\}$  شامل یک زوج مرتب است.

$m + n + p$  کدام است؟

- (۱)  $-2$       (۲)  $2$       (۳)  $4$       (۴)  $-4$

**پاسخ:** گزینه ۳

چون این تابع شامل یک زوج مرتب است پس تمامی مؤلفه های اول با هم و مؤلفه های دوم نیز با هم برابرند:

$$m^2 - m = 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases} \quad \text{مؤلفه های اول:}$$

مؤلفه های دوم:

$$m^2 - 3m = n^2 - 2n + 5 = p$$

$$\text{اگر } m = -1 \Rightarrow m^2 - 3m = 4 = n^2 - 2n + 5 = p \Rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \Rightarrow n = 1, p = 4$$

$$\text{اگر } m = 2 \Rightarrow m^2 - 3m = -2 = n^2 - 2n + 5 = p \Rightarrow n^2 - 2n + 7 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

غ ق ق  $m = 2$  معادله جواب ندارد

$$m + n + p = -1 + 1 + 4 = 4$$

**سؤال ۴:** رابطه  $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, 2x + y \leq 7\}$  چند زوج مرتب دارد؟ (ریاضی خارج ۸۸)

- (۱)  $5$       (۲)  $6$       (۳)  $8$       (۴)  $9$

**پاسخ:** گزینه ۴ قرار است  $x$  و  $y$  اعداد طبیعی باشند و در نامعادله  $2x + y \leq 7$  صدق کنند. پس:

$$x = 1 \Rightarrow 2 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 5 \Rightarrow y = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4 \text{ یا } 5 \Rightarrow (1, 1), (1, 2), \dots, (1, 5)$$

$$x = 2 \Rightarrow 4 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow y = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \Rightarrow (2, 1), (2, 2), (2, 3)$$

$$x = 3 \Rightarrow 6 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (3, 1) \text{ زوج مرتب}$$

$$x = 4 \Rightarrow 8 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq -1 \Rightarrow \text{مقداری طبیعی برای } y \text{ وجود ندارد.}$$

پس کلاً ۹ زوج مرتب داریم.

سؤال ۵: رابطه  $R = \{(x, y) \mid x, y \in Z, |x| + |y| = 2\}$  چند عضو زوج مرتب دارد؟ (ریاضی داخل ۸۸)

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

قرار است  $x$  و  $y$  اعداد صحیح باشند و مجموع قدرمطلق هایشان مساوی ۲ شود پس:

$$|x| = 0, |y| = 2 \Rightarrow x = 0, y = -2, 2 \Rightarrow (0, -2), (0, 2) \in R \text{ زوج مرتب}$$

$$|x| = 1, |y| = 1 \Rightarrow x = -1, 1, y = -1, 1 \Rightarrow (-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1) \in R \text{ زوج مرتب}$$

$$|x| = 2, |y| = 0 \Rightarrow x = -2, 2, y = 0 \Rightarrow (-2, 0), (2, 0) \in R \text{ زوج مرتب}$$

در نتیجه  $R$  کلاً ۸ عضو زوج مرتب دارد.

اگر  $f$  و  $g$  رابطه به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب داده شده باشد هنگامی این رابطه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایز دارای مؤلفه اول برابر نباشند. به عبارت دیگر اگر در یک رابطه مؤلفه های اول با هم برابر باشند، زمانی تابع است که مؤلفه های دوم نیز با هم برابر باشند.

سؤال ۶: رابطه  $f = \{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$  به ازای کدام مقدار  $m$  تابع است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

برای آنکه رابطه فوق تابع باشد باید زوج های مرتب متمایز با مؤلفه اول برابر نداشته باشیم.

$$\left. \begin{array}{l} (3, m^2) \in f \\ (3, m+2) \in f \end{array} \right\} \Rightarrow m^2 = m + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = -1 \Rightarrow \{(3, 1), (2, 1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\} \\ m = 2 \Rightarrow \{(3, 4), (2, 1), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تابع است}}$$

$$m = 2: \begin{cases} (2, 1) \in f \\ (2, 4) \in f \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

$$\text{پس: } f = \{(3, 1), (2, 1), (-2, -1), (-1, 4)\}$$

سؤال ۷: اگر  $f = \{(1, 4a-1), (2, a+3), (1, a^2+3), (2, b-4)\}$  تابع باشد مقدار  $a+b$  کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

می دانیم در هر تابع هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه های اول یکسان وجود ندارد و اگر دو زوج مرتب با مؤلفه های اول یکسان باشند مؤلفه های دوم آنها نیز باید برابر باشد پس:

$$\begin{cases} (1, 4a-1) \in f \\ (1, a^2+3) \in f \end{cases} \Rightarrow a^2+3=4a-1 \Rightarrow a^2-4a+4=0 \Rightarrow (a-2)^2=0 \Rightarrow a=2$$

$$\begin{cases} (2, a+3) \in f \\ (2, b-4) \in f \end{cases} \Rightarrow a+3=b-4 \xrightarrow{a=2} b-4=5 \Rightarrow b=9$$

در نتیجه  $a+b=11$  است.

**سؤال ۸:** تابع  $f$  به صورت  $f = \{(1, 2), (m, 1), (1, m^2+m), (m^2-2, m+1)\}$  مفروض است. کدام زوج

مرتب عضو تابع  $f$  نیست؟

- (۱)  $(2, -1)$       (۲)  $(1, 2)$       (۳)  $(-2, 1)$       (۴)  $(1, -2)$

پاسخ: گزینه ۴

برای آنکه رابطه ای تابع باشد هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفه های اول برابر داشته باشند. در صورت برابر بودن مؤلفه های اول باید مؤلفه های دوم آن ها نیز برابر باشد.

$$\begin{cases} (1, 2) \in f \\ (1, m^2+m) \in f \end{cases} \Rightarrow m^2+m=2 \Rightarrow m^2+m-2=0$$

$$\Rightarrow (m+2)(m-1)=0 \Rightarrow m=-2 \text{ یا } m=1$$

اگر  $m=1 \Rightarrow f = \{(1, 2), (1, 1), (-1, 2)\}$  تابع نیست

اگر  $m=-2 \Rightarrow f = \{(1, 2), (-2, 1), (2, -1)\} \Rightarrow (1, -2) \notin f$

**سؤال ۹:** با استفاده از زوج های مرتب رابطه  $R = \{(2, -1), (2, 2), (0, -1), (0, 2)\}$  چند تابع دارای زوج مرتب

می توان تعریف کرد؟

- (۱) ۲      (۲) ۴      (۳) ۶      (۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴

په‌ار تابع که هر کدام فقط یک زوج مرتب دارند:

$$\{(2, -1)\}, \{(2, 2)\}, \{(0, -1)\}, \{(0, 2)\}$$

په‌ار تابع که هر کدام فقط دو زوج مرتب دارند:

$$\{(2, -1), (0, 2)\}, \{(2, 2), (0, -1)\}, \{(2, 2), (0, 2)\}, \{(2, -1), (0, -1)\}$$

پس در مجموع ۸ تابع می توان تعریف کرد.

**سؤال ۱۰:** اگر رابطه  $R = \{(6, 4^{x+y}), (5, x^2-y^2), (6, 64), (5, 15)\}$  یک تابع باشد مقدار  $x^y$  برابر کدام

است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{1}{4}$       (۳) ۱      (۴) -۱

پاسخ: گزینه ۲

برای اینکه رابطه  $R$  یک تابع باشد باید مؤلفه های زوج مرتب هایی که مؤلفه های اول یکسان دارند با هم برابر باشند بنابراین:

$$I) (6, 4^{x+y}) = (6, 64) \Rightarrow 4^{x+y} = 64 = 4^3 \Rightarrow x + y = 3$$

$$II) (5, x^r - y^r) = (5, 15) \Rightarrow x^r - y^r = 15 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 15 \xrightarrow{x+y=3} x - y = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = -1 \Rightarrow x^y = (4)^{-1} = \frac{1}{4}$$

سؤال ۱۱: اگر رابطه  $f = \left\{ (1, 3), (m, 2), (1, m^r - 2m), \left(-1, \frac{1}{m}\right) \right\}$  یک تابع باشد آنگاه معادله

$$x^3 - 6x^2 + m^2x = 0$$

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱) صفر

پاسخ: گزینه ۳

برای اینکه رابطه داده شده یک تابع باشد باید:

$$(1, 3) = (1, m^r - 2m) \Rightarrow m^r - 2m = 3 \Rightarrow m^r - 2m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 3)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$$

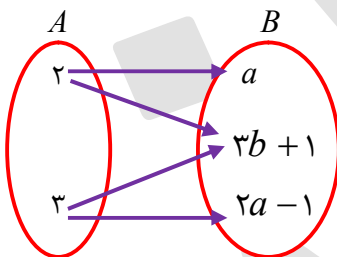
پس برای  $m$  دو جواب متفاوت  $m = 3$  و  $m = -1$  به دست می آید که  $m = -1$  غیر قابل قبول است چون در این صورت

$$m = -1 \text{ که با هم برابر نیستند پس تنها جواب } m = 3 \text{ قابل قبول است.} \quad \left(-1, \frac{1}{m}\right) = (-1, -1), (m, 2) = (-1, 2)$$

$$x^3 - 6x^2 + m^2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + m^2) = 0 \xrightarrow{m=3} x(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

سؤال ۱۲: نمودار پیکانی یک تابع به صورت مقابل است. حاصل  $a - b$  کدام است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

-۱ (۳)

-۲ (۴)

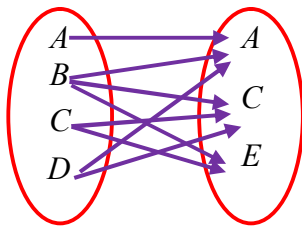
پاسخ: گزینه ۱

در یک نمودار پیکانی که مشخص کننده یک تابع باشد از هر عضو مجموعه اول ( $A$ ) دقیقاً باید یک پیکان به مجموعه دوم ( $B$ ) خارج شود. چون ۲ به  $a$  و  $۳b + ۱$  متناظر شده است پس لازم است  $a = ۳b + ۱$  باشد و از طرفی چون ۳ به  $۳b + ۱$  و  $۲a - ۱$  متناظر شده است پس باید  $۳b + ۱ = ۲a - ۱$  باشد در نتیجه:

$$\begin{cases} a = ۳b + ۱ \\ ۲a - ۱ = ۳b + ۱ \end{cases} \Rightarrow a = ۲a - ۱ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = ۰$$

در نتیجه  $a - b = ۱$  است.

سؤال ۱۳: چند پیکان از نمودار ون زیر حذف کنیم تا رابطه حاصل یک تابع باشد؟



۲ (۱)

۳ (۲)

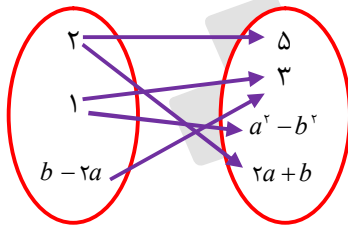
۴ (۳)

۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

باید دو تا از مجموعه پیکان های  $\{BE, BC, BA\}$  یکی از مجموعه پیکان های  $\{CE, CC\}$  و یکی از مجموعه پیکان های  $\{DC, DA\}$  حذف شود تا نمودار ون مربوط به یک تابع شود. پس در مجموعه باید ۴ پیکان حذف شود.

سؤال ۱۴: اگر نمودار ون زیر نمایش یک تابع باشد  $a + b$  کدام می تواند باشد؟



$\frac{1}{3}$  (۲)

$\frac{5}{2}$  (۱)

$\frac{2}{3}$  (۴)

۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

اگر نمودار ون را به صورت زوج مرتبی بنویسیم باید شرط های زیر برقرار باشد تا نمودار مربوط به یک تابع باشد:

$$\{(۲, ۵) = (۲, ۲a + b) \Rightarrow ۲a + b = ۵ \Rightarrow b = ۵ - ۲a \quad (۱)$$

$$\{(۱, ۳) = (۱, a^2 - b^2) \Rightarrow a^2 - b^2 = ۳$$

$$a^2 - b^2 = ۳ \xrightarrow{(۱)} a^2 - (۵ - ۲a)^2 = ۳ \Rightarrow a^2 - (۲۵ + ۴a^2 - ۲۰a) = ۳$$

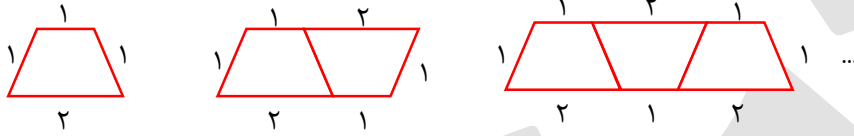
$$\Rightarrow -۳a^2 + ۲۰a - ۲۸ = ۰ \Rightarrow (-۳a + ۱۴)(a - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \xrightarrow{(۱)} b = ۱ \\ a = \frac{۱۴}{۳} \xrightarrow{(۱)} b = -\frac{۱۳}{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۳ \\ a + b = \frac{۱۴}{۳} - \frac{۱۳}{۳} = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

که فقط  $a + b = \frac{۱}{۳}$  در گزینه ها می باشد.

سؤال ۱۵: در الگوی زیر محیط شکل  $n$  ام تابعی از تعداد دوزنقه های آن شکل ( $k$ ) است. ضابطه این تابع کدام است؟

(تمرین ۱۱ صفحه ۱۱۷ کتاب)



(۱)  $4k + 1$

(۲)  $3k + 2$

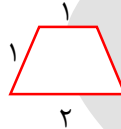
(۳)  $k^2 + k + 3$

(۴)  $2k^2 + k + 2$

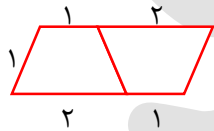
پاسخ: گزینه ۲

مطابق الگوی زیر می توان نشان داد در هر مرحله به اندازه جمع دو قاعده دوزنقه اولیه به محیط اضافه می شود:

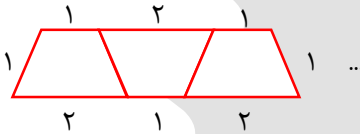
$$p_1 = 1 \times (1 + 2) + 2 = 1 \times 3 + 2$$



$$p_2 = 2 \times (1 + 2) + 2 = 2 \times 3 + 2$$



$$p_3 = 3 \times (1 + 2) + 2 = 3 \times 3 + 2$$



در نتیجه در شکل  $k$  ام محیط به صورت زیر است:  $p_k = k \times 3 + 2 = 3k + 2$

تذکره: در واقع محیط های اشکال یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۳ و جمله اولیه ۵ می سازند.

$$5, 8, 11, \dots \Rightarrow p_k = 5 + (k - 1) \times 3 = 3k + 2$$

سؤال ۱۶: با فرض تابع بودن  $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \geq a \\ 3x - 1 & x \leq a \end{cases}$  مقدار  $a$  کدام است؟

(۴) -۲

(۳) -۱

(۲) ۲

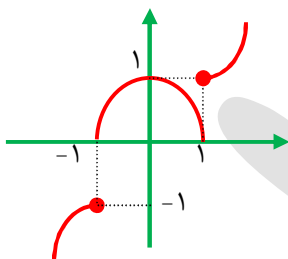
(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به آنکه ورودی  $a$  هم وارد ضابطه  $y = x^2 + a$  و هم وارد ضابطه  $y = 3x - 1$  می شود پس لازم است این دو فروبی یکسان باشند تا  $f$  تابع باشد:

$$\begin{cases} f(a) = a^2 + a \\ f(a) = 3a - 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + a = 3a - 1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

سؤال ۱۷: نمودار زیر با حذف حداقل چند نقطه به یک تابع تبدیل می شود؟



(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳



پاسخ: گزینه ۲

باید حداقل دو نقطه از نمودار حذف گردد تا به یک تابع تبدیل شود زیرا در نقاطی به طول های ۱ و -۱ دو مقدار برای تابع تعریف شده است.

سؤال ۱۸: کدامیک از روابط زیر معرف یک تابع نیست؟

- (۱) رابطه بین مساحت دایره و شعاع آن  
 (۲) رابطه بین افراد و وزن آنها در یک زمان معین  
 (۳) رابطه بین افراد و سال تولدشان  
 (۴) رابطه بین اعداد طبیعی و مقسوم علیه های آن

پاسخ: گزینه ۴

به جز عدد یک هر عدد طبیعی حداقل دو مقسوم علیه متمایز دارد پس رابطه بین عدد طبیعی و مقسوم علیه های آن تابع نیست.

سؤال ۱۹: چه تعداد از رابطه های زیر یک تابع است؟

- (الف) رابطه ای که هر عدد مثبت را به ریشه دوم آن نسبت می دهد.  
 (ب) رابطه ای که ضلع مربع را به مساحت آن نسبت می دهد.  
 (پ) رابطه ای که هر فرد را به پدر او نسبت می دهد.  
 (ت) رابطه ای که هر عدد را به ریشه سوم آن نسبت می دهد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

رابطه های (ب)، (پ) و (ت) تابع هستند زیرا به ازای هر ورودی تنها یک خروجی برای آن وجود دارد اما در مورد رابطه (الف)، از آنجایی که هر عدد مثبت دو ریشه دو قرینه هم دارد پس این رابطه تابع نیست.

سؤال ۲۰: کدام تابع قطعاً وجود ندارد؟

- (۱) تابعی که دامنه آن تک عضوی باشد.  
 (۲) تابعی که فقط برد آن تک عضوی باشد.  
 (۳) تابعی که تعداد اعضای دامنه آن بیشتر از تعداد اعضای برد آن است.  
 (۴) تابعی که تعداد اعضای برد آن بیشتر از تعداد اعضای دامنه آن است.

پاسخ: گزینه ۴

برای گزینه (۱) می توان تابع  $f = \{(1,2)\}$  را مثال زد و برای گزینه های (۲) و (۳) می توان تابع  $f = \{(1,2), (2,2)\}$  را مثال زد اما تابعی مطابق گزینه (۴) نمی توان یافت؛ زیرا در تابع هیچ دو زوج مرتب متمایزی که دارای مؤلفه های اول یکسان باشند نمی تواند وجود داشته باشد یعنی تعداد اعضای برد تابع نمی تواند بیشتر از تعداد اعضای دامنه آن باشد.

سؤال ۲۱: به ازای چه مقادیری از  $a$  و  $b$  رابطه  $R = \left\{ (-1, 32), \left( 3, 9^{\frac{a+b}{2}} \right), \left( -1, \sqrt[3]{2\sqrt{3^{a-b}}} \right), \left( 3, \frac{1}{27} \right) \right\}$  تابع

است؟

- (۱)  $a = \frac{25}{3}, b = \frac{-59}{3}$   
 (۲)  $a = \frac{25}{3}, b = \frac{59}{3}$   
 (۳)  $a = \frac{-25}{3}, b = \frac{59}{3}$   
 (۴)  $a = \frac{-25}{3}, b = \frac{-59}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

$$9^{\frac{a+b}{2}} = \frac{1}{27} \Rightarrow (3^2)^{\frac{a+b}{2}} = 3^{-3} \Rightarrow 3^{2a+b} = 3^{-3} \Rightarrow 2a+b = -3$$

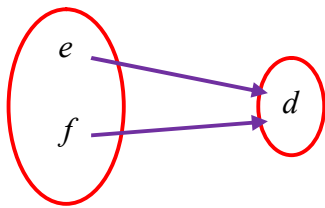
$$\sqrt[3]{2\sqrt{2^{a-b}}} = 32 \Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{2^2} \times 2^{(a-b)}} = 2^5 \Rightarrow 2^{\frac{a-b+2}{6}} = 2^5 \Rightarrow \frac{a-b+2}{6} = 5$$

$$\begin{cases} 2a+b = -3 \\ \frac{a-b+2}{6} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{25}{3} \\ b = \frac{-59}{3} \end{cases}$$

سؤال ۲۲: نمودار ون تابع  $R = \{(2a, 3c), (4a-9c, 2b), (d^2+1, a)\}$  مطابق شکل زیر است. مقدار  $e+f$

کدام است؟ (a مقداری حقیقی و مثبت است.)

- ۱ (۱)      ۲ (۲)  
۳ (۳)      ۴ (۴)



پاسخ: گزینه ۳

با توجه به رابطه و نمودار مفروض سوال داریم:

$$3c = 2b = a = d \Rightarrow \begin{cases} (2a, 3c) = (2a, a) \\ (4a-9c, 2b) = (4a-3a, a) = (a, a) \\ (d^2+1, a) = (a^2+1, a) \end{cases}$$

$$R = \{(2a, a), (a, a), (a^2+1, a)\}$$

برای آنکه دامنه تابع  $R$  دارای ۲ عضو باشد سه حالت زیر را در نظر می گیریم:

(طبق فرض سوال،  $a$  مثبت است.)

I)  $2a = a \Rightarrow a = 0$  غ ق

II)  $a^2 + 1 = a \Rightarrow a^2 - a + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0}$  معادله جواب حقیقی ندارد. غ ق

III)  $a^2 + 1 = 2a \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow R = \{(2, 1), (1, 1), (2, 1)\}$

$$= \{(1, 1), (2, 1)\} \Rightarrow \begin{cases} e = 2 \\ f = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} e = 1 \\ f = 2 \end{cases} \Rightarrow e + f = 3$$

## تست دامنه و برد تابع

سؤال ۱: اگر زوج مرتب  $(2a+5b, 2a+1)$  با زوج مرتب  $(3a, 5)$  برابر باشد زوج مرتب  $(a, b)$  برابر کدام گزینه است؟

(۱)  $(2, -\frac{2}{5})$  (۲)  $(\frac{2}{5}, 2)$  (۳)  $(-\frac{2}{5}, 2)$  (۴)  $(2, \frac{2}{5})$

سؤال ۲: رابطه  $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, 0 < y \leq -x + 3\}$  چند عضو دارد؟

(۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

سؤال ۳: در رابطه  $R = \{(x, y) \mid x < y\}$  مؤلفه های هر زوج مرتب از مجموعه  $A = \{m \mid m \in \mathbb{Z}, m^2 \leq 4\}$

انتخاب می شوند. رابطه  $R$  چند عضو دارد؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

سؤال ۴: رابطه  $\{(2a, b), (1, a), (2, a-b), (1, 3-2a)\}$  یک تابع است. مقدار  $a+2b$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۱

سؤال ۵: اگر  $f = \{(a, -1), (2, 3), (4, b), (2, a-1), (b, 2)\}$  یک تابع باشد مجموع اعضای دامنه  $f$  کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

سؤال ۶: رابطه  $f = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$  به ازای چند مقدار  $m$  یک

تابع است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) بی شمار (۴) هیچ مقدار  $m$

سؤال ۷: اگر رابطه  $R = \{(-1, a^2-5a), (6, b^3-1), (6, 7), (-1, -6), (-\frac{b}{2}, -3a)\}$  یک تابع باشد

$a+b$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

سؤال ۸: اگر رابطه  $f = \{(1, 3), (2, 2), (1, x-2y), (2, x^2-y), (3, 2)\}$  تابع باشد حاصل  $x^2+y$  برابر با

کدام گزینه می تواند باشد؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳)  $-\frac{3}{2}$  (۴) ۲

سؤال ۹: رابطه  $f = \{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$  به ازای کدام مقدار  $m$  یک تابع است؟

(تجربی خارج ۸۵)

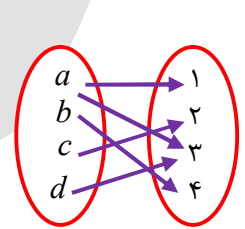
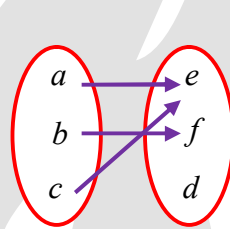
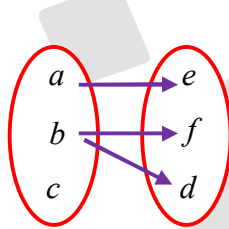
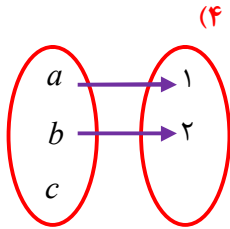
(۴) هیچ مقدار  $m$

(۳) ۲

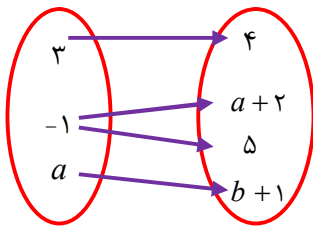
(۲) -۱

(۱) -۲

سؤال ۱۰: کدام گزینه نمایش یک تابع است؟



سؤال ۱۱: اگر نمودار پیکانی در شکل مقابل، مربوط به یک تابع باشد مقدار  $a^2b$  چقدر است؟



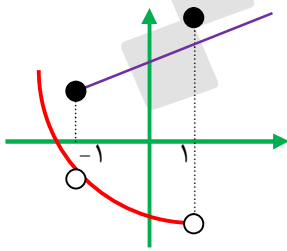
(۱) -۳۶

(۲) -۴۵

(۳) ۴۵

(۴) ۳۶

سؤال ۱۲: نمودار زیر مربوط به رابطه  $R$  است کوچکترین بازه ای از مقادیر  $x$  ها که با حذف آن رابطه  $R$  به یک تابع تبدیل می شود کدام است؟



تبدیل می شود کدام است؟

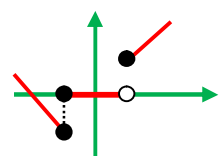
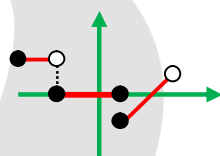
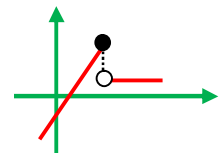
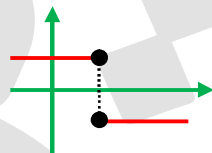
(۱)  $[-1, 1)$

(۲)  $(-1, +\infty)$

(۳)  $(-1, 1]$

(۴)  $(-\infty, 1]$

سؤال ۱۳: کدامیک از شکل های زیر مربوط به یک تابع است؟ (بر تابعی بر حسب  $x$  است.)



سؤال ۱۴: با حذف حداقل چند زوج مرتب از رابطه زیر می توان یک تابع به دست آورد؟

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x+y| < 2, |x| \leq 1\}$$

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

سؤال ۱۵: تابع  $f$  به صورت  $f = \{(2, k^2 - 1), (2, 3), (k+1, 4), (3, 5)\}$  می باشد. مقدار  $k$  چقدر است؟

- (۱) فقط ۲ (۲) فقط -۲ (۳) ۲، -۲ (۴) ۳، -۱

سؤال ۱۶: اگر رابطه  $F = \{(2a-b, 3), (2, -1), (5, 3), (3, 5), (5, a-b)\}$  یک تابع باشد  $(a, b)$  کدام

گزینه می تواند باشد؟

- (۱)  $(1, -3)$  (۲)  $(-4, -7)$  (۳)  $(-1, -4)$  (۴)  $(0, -3)$

سؤال ۱۷: اگر دو زوج مرتب  $(3a, 2b - 1)$  و  $(a + 4, 2a - 3)$  نمایش یک نقطه باشند  $a + 3b$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۶

سؤال ۱۸: اگر  $A = \{2, 3, 4\}$  و  $B = \{1, 2, 6\}$  باشند رابطه  $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x \neq 2y\}$  چند زوج

مرتب دارد؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۵

## پاسخنامه تست دامنه و برد تابع

۱- پاسخ: گزینه ۴

$$(2a + 5b, 2a + 1) = (3a, 5) \Rightarrow \begin{cases} 2a + 5b = 3a \\ 2a + 1 = 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$$2a + 5b = 3a \xrightarrow{a=2} 2(2) + 5b = 3(2) \Rightarrow 5b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{5}$$

بنابراین زوج مرتب  $(a, b)$  به صورت  $(2, \frac{2}{5})$  می باشد.

۲- پاسخ: گزینه ۴

$x, y$  اعداد طبیعی هستند و در نامعادله  $0 < y \leq -x + 3$  صدق می کنند پس داریم:

$$x = 1 \Rightarrow 0 < y \leq 2 \Rightarrow y = 1 \text{ یا } 2 \Rightarrow (1, 1), (1, 2)$$

$$x = 2 \Rightarrow 0 < y \leq 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (2, 1)$$

$$x = 3 \Rightarrow 0 < y \leq 0 \Rightarrow \text{مقداری طبیعی برای } y \text{ وجود ندارد.}$$

بنابراین رابطه  $R$  کلاً ۳ عضو دارد.

۳- پاسخ: گزینه ۳

با توجه به اینکه  $A = \{m \mid m \in Z, m^2 \leq 4\}$  می باشد پس  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  است. از طرفی در هر عضو از رابطه  $R$  باید مؤلفه اول از مؤلفه دوم کوچکتر باشد (یعنی  $x < y$ ) پس خواهیم داشت:

$$R = \{(-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$$

بنابراین رابطه  $R$  شامل ۱۰ عضو است.

۴- پاسخ: گزینه ۲

می دانیم هر تابع مجموعه ای از زوج های مرتب است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه های اول یکسان وجود ندارد. در نتیجه اگر دو زوج مرتب با مؤلفه های اول یکسان عضو تابع باشند لازم است مؤلفه های دوم آنها نیز برابر باشند. در نتیجه اگر رابطه داده شده را  $f$  بنامیم داریم:

$$\begin{cases} (1, 3 - 2a) \in f \\ (1, a) \in f \end{cases} \Rightarrow 3 - 2a = a \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1$$

پس اگر  $a = 1$  تابع  $f$  به صورت زیر است:

$$f = \{(2, b), (1, 1), (2, 1 - b)\}$$

$$\begin{cases} (2, b) \in f \\ (2, 1 - b) \in f \end{cases} \Rightarrow b = 1 - b \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

در نتیجه  $a + 2b = 2$  است.

## ۵- پاسف: گزینه ۱

چون  $f \in (2, 3), (2, a-1)$  است پس:

$$a - 1 = 3 \Rightarrow a = 4$$

اگر  $a = 4$  باشد داریم:  $f \{(4, -1), (2, 3), (4, b), (b, 2)\}$

حال چون  $f \in (4, -1), (4, b)$  است پس باید  $b = -1$  باشد در نتیجه تابع  $f$  به صورت زیر است:

$$f = \{(4, -1), (2, 3), (-1, 2)\}$$

$$D_f = \{4, 2, -1\} \Rightarrow \text{مجموعه اعضای دامنه} = 4 + 2 - 1 = 5$$

## ۶- پاسف: گزینه ۱

$$(3, m^2) \in f, (3, m+2) \in f$$

برای آن که  $f$  تابع باشد فروبی  $f$  به ازای  $x = 3$  باید با هم برابر باشند.

$$m^2 = m + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

اگر  $m = -1$  باشد داریم:

$$f = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (3, 1), (-1, 4)\}$$

پس به ازای  $f$  تابع است اگر باشد:

$$f = \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\}$$

به ازای  $m = 2$ ،  $f$  تابع نیست زیرا به ازای ورودی  $x = 2$  دو فروبی وجود دارد. پس گزینه (۱) صحیح است یعنی فقط به ازای

یک مقدار  $m$ ، رابطه  $f$  تابع است.

## ۷- پاسف: گزینه ۳

برای تابع بودن باید داشته باشیم:

$$\Rightarrow (-1, a^2 - 5a) = (-1, -6) \Rightarrow a^2 - 5a = -6 \Rightarrow a^2 - 5a + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 3)(a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$(6, b^2 - 1) = (6, 7) \Rightarrow b^2 - 1 = 7 \Rightarrow b^2 - 1 = 7 \Rightarrow b^2 = 8 \Rightarrow b = 2$$

$$\text{اگر: } a = 3, b = 2$$

$$\Rightarrow R = \{(-1, -6), (6, 7), (-1, -6), (-1, -9)\}$$

$$\text{اگر: } a = 2, b = 2$$

به علت وجود  $(-1, -6), (-1, -9)$  تابع نیست پس  $a = 3$  غیر قابل قبول است.

$$\Rightarrow R = \{(-1, -6), (6, 7), (-1, -6), (-1, -6)\}$$

تابع است پس داریم:  $a + b = 2 + 2 = 4$

۸- پاسخ: گزینه ۳

$$\left\{ \begin{array}{l} (2, 2) \in f \Rightarrow x^2 - y = 2 \\ (2, x^2 - y) \in f \\ (1, 3) \in f \Rightarrow x - 2y = 3 \\ (1, x - 2y) \in f \Rightarrow x = 3 + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow (3 + 2y)^2 - y = 2$$

$$\Rightarrow 9 + 4y^2 + 12y - y = 2 \Rightarrow 4y^2 + 11y + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x^2 + y = 0 \\ y = -\frac{7}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + y = \frac{1}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

۹- پاسخ: گزینه ۲

دو زوج مرتب  $(3, m+2), (3, m^2)$  متعلق به رابطه  $f$  هستند. قرار شده که این رابطه یک تابع باشد پس باید  $m^2 = m + 2$  در نتیجه:

$$m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0 \Rightarrow m = 2 \text{ یا } m = -1$$

با جایگزینی این دو مقدار به جای  $m$  داریم:

$$m = 2 \Rightarrow f = \{(2, 3), (2, 1), (-2, 2), (2, 4)\} \Rightarrow \text{تابع نیست}$$

$$m = -1 \Rightarrow f = \{(3, 1), (2, 1), (-2, -1), (-1, 4)\} \Rightarrow \text{تابع است}$$

پس فقط  $m = -1$  قابل قبول است.

۱۰- پاسخ: گزینه ۲

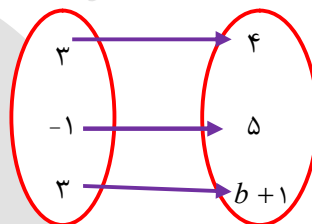
یک تابع از مجموعه  $A$  به  $B$  رابطه ای بین دو مجموعه است که در آن به هر عضو از  $A$  دقیقاً یک عضو از  $B$  نسبت داده شود. بنابراین تنها گزینه (۲) یک تابع است. توجه کنید که در گزینه (۴) از عضو  $C$  در مجموعه اول هیچ پیکانی خارج نشده است پس این گزینه تابع نیست.

۱۱- پاسخ: گزینه ۲

هواستان باشد گفته اند این نمودار پیکان یک تابع است، پس از هر عضو دامنه باید دقیقاً یک پیکان خارج شود در نتیجه  $a + 2 = 5$  یا  $a = 3$  حالا داریم:

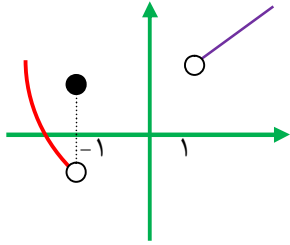
$$\Rightarrow -4 = b + 1 \Rightarrow b = -5$$

$$\Rightarrow a^2 b = 9 \times (-5) = -45$$





۱۲- پاسخ: گزینه ۳



با توجه به نمودار صورت سوال ملاحظه می شود که در فاصله بین ۱ و -۱ و در نقطه ا هر فط موازی محور  $y$  ها، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می کند، بنابراین با حذف فقط بازه  $[-1, 1]$  از مقادیر  $x$  رابطه مذکور به یک تابع تبدیل می شود. در این صورت نمودار تابع به صورت بالا می باشد.

۱۳- پاسخ: گزینه ۱

برای آن که یک نمودار مربوط به یک تابع باشد باید هر فط موازی محور  $y$  ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در نتیجه تنها نمودار گزینه (۱) این ویژگی را دارد و مربوط به یک تابع است.

۱۴- پاسخ: گزینه ۳

$$R = \{(x, y) \mid x = 0, 1, -1, |x + y| < 2, y \in Z\}$$

$$\Rightarrow R = \{(0, y) \mid |y| < 2, y \in Z\} \cup \{(1, y) \mid |1 + y| < 2, y \in Z\} \cup \{(-1, y) \mid |-1 + y| < 2, y \in Z\}$$

$$\Rightarrow R = \{(0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, -2), (1, 0), (-1, 1), (-1, 0), (-1, 2)\}$$

پس حداقل ۶ زوج مرتب باید حذف شود تا به یک تابع برسیم.

۱۵- پاسخ: گزینه ۲

دو زوج مرتب  $(2, k^2 - 1)$ ،  $(2, 3)$  متعلق به رابطه  $f$  هستند پس برای اینکه این رابطه یک تابع باشد  $k^2 - 1 = 3$  در نتیجه:

$$k^2 = 4 \Rightarrow k = 2 \text{ یا } k = -2$$

به جایگزاری این دو مقدار به جای  $k$  داریم:

$$k = 2 \Rightarrow f = \{(2, 3), (3, 4), (3, 5)\} \Rightarrow \text{تابع نیست}$$

$$k = -2 \Rightarrow f = \{(2, 3), (-1, 4), (3, 5)\} \Rightarrow \text{تابع است}$$

۱۶- پاسخ: گزینه ۲

هر چهار گزینه را امتحان می کنیم:

$$\text{گزینه ۱ } (a, b) = (1, -3) \Rightarrow a - b = 1 + 3 = 4 \Rightarrow (5, 3) \in F, (5, 4) \in F$$

$$\text{گزینه ۲ } (a, b) = (-4, -7) \Rightarrow \begin{cases} a - b = -4 + 7 = 3 \\ 2a - b = -8 + 7 = -1 \end{cases} \Rightarrow F = \{(-1, 3), (2, -1), (5, 3), (3, 5)\}$$

$$\text{گزینه ۳ } (a, b) = (-1, 4) \Rightarrow \begin{cases} a - b = -1 + 4 = 3 \\ 2a - b = -2 + 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow (2, 3) \in F, (2, -1) \in F$$

$$\text{گزینه ۴ } (a, b) = (0, -3) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 + 3 = 3 \\ 2a - b = 0 + 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow (3, 3) \in F, (3, 5) \in F$$

۱۷- پاسخ: گزینه ۲

دو زوج مرتب  $(3a, 2b - 1)$ ،  $(a + 4, 2a - 3)$  نمایش یک نقطه هستند پس این دو زوج مرتب با هم برابر بوده و در نتیجه مؤلفه های اولشان با هم و مؤلفه های دومشان هم با هم برابرند:

$$\begin{cases} 3a = a + 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ 2b - 1 = 2a - 3 \Rightarrow 2b - 1 = 2(2) - 3 = 1 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + 3b = 2 + (1) = 5$$

۱۸- پاسخ: گزینه ۱

گفته شده  $x \in \{2, 3, 4\}$ ,  $y \in \{1, 2, 6\}$  پس زوج مرتب های که می توان نوشت عبارتند از:

$$\{(2, 1), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 6)\}$$

حال زوج مرتب های که  $x = 2y$  می باشد را شناسایی کرده و آن ها را حذف می نماییم که در این صورت رابطه  $R$  به صورت زیر فواید شد:

$$R = \{(2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 6), (4, 1), (4, 6)\}$$

بنابراین رابطه  $R$  دارای ۷ زوج مرتب است.