

## درس دوم: جایگشت (جای کشت)

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالتی چندین آنها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم به طوری که تکرار مجاز نباشد. به عنوان مثال سه نفر به چند صورت متفاوت می‌توانند در یک ردیف کنار هم ایستاده و عکس بگیرند؟ اگر این سه شخص را با حروف لاتین  $a$  و  $b$  و  $c$  نمایش دهیم، تمام حالات ممکنه در زیر آمده است:

$abc$  و  $acb$  و  $bca$  و  $bac$  و  $cba$  و  $cab$

هر یک از این ۶ حالت را یک جایگشت از سه حرف  $\{a, b, c\}$  می‌گویند. به کمک اصل ضرب می‌توان تعداد جایگشت‌ها را بدون رسم کردن بدست آورد. تعداد جایگشت‌های ۳ شیء برابر است با

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

### فرمول جایگشت:

در حالت کلی اگر  $n$  شیء متمایز داشته باشیم در این صورت تعداد جایگشت‌های این  $n$  شیء برابر است با

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

که این حاصل ضرب چند عدد متوالی را به صورت  $n!$  (می‌خوانیم  $n$  فاکتوریل) نشان می‌دهند

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

**نکته:** اگر  $n$  برابر با صفر باشد در این صورت:

$$0! = 1$$

**نکته:** با توجه به مفهوم فاکتوریل یک عدد طبیعی می‌توان نوشت که:

$$n \times (n-1)! = n!$$

## ساده کردن فاکتوریل های کسری

برای ساده کردن فاکتوریل های کسری آن فاکتوریل که بزرگتر است را با نوشتن عدد های قبلیش انقدر کوچک میکنیم تا با کم فاصله ترین فاکتوریل در صورت یا مخرج مابقی شود. سپس فاکتوریل های مابقی را ساده کرده و عددهای باقی مانده را ضرب می کنیم.

## تبدیل چند عدد متوالی به فاکتوریل کسری

اگر چند عدد که متوالی هستند را بخواهیم به فاکتوریل تبدیل کنیم آن اعداد را در کسری که کمبود این عددها را برای فاکتوریل شدن جبران میکند ضرب می نماییم و سپس آن فاکتوریل را کامل می نویسیم

**مثال:** عبارت های زیر را با نماد فاکتوریل نمایش دهید.

$4 \times 3! =$	$(3!)! =$
$5 \times 24 =$	$8 \times 7 \times 6 \times 5 =$
$n \times (n-1) =$	$8 =$

میر مویک

**مثال:** کسری های زیر را ساده کنید

$$\frac{9!}{7!} =$$

$$\frac{(k+2)!}{(k-4)!} =$$

$$\frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!} =$$

$$\frac{100! \times 99!}{98! \times 101!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)! \times n!} =$$

**مثال:** چند عدد شش رقمی بدون تکرار ارقام با اعداد ۱ تا ۶ می توان نوشت که در آنها ارقام ۲ و ۳ کنار هم نباشند؟

## جایگشتهای r تایی (ترتیب)

تعداد جایگشتهای r تایی از n شیء متمایز یا به عبارت دیگر تعداد انتخابهای r شیء از بین n شیء متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن (جلو یا عقب بودن) مهم باشد (مثلا در اعضای مجموعه ترتیب مهم نیست ولی در اعداد مهم است) با  $P(n, r)$  نمایش می دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می شود

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثلا عدد ۲۸ و ۸۲ که با عددهای ۲ و ۸ ساخته شده اند با هم فرق میکنند و موقع شمارش دوتا شمرده می شود اما زیر مجموعه های  $\{1, 2\}$  و  $\{2, 1\}$  که با همان اعداد ساخته شده اند با هم فرق نمیکنند و موقع شمارش یکی حساب میشود. فرمول تبدیل به درد حالت اول میخورد.

**مثال:** تعداد کلمات سه حرفی که با ۷ حرف کلمه «خوزستان» تشکیل می شوند، کدام است؟

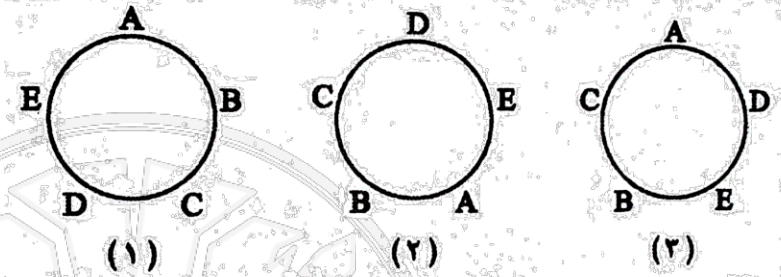
میر مویک

## بایگشت دوری:

بهر روش قرار گرفتن  $n$  شیء دور یک دایره یک جایگشت دوری آن شیء گوئیم. با این ویژگی که اگر یک آرایش از دوران یک آرایش دیگر بدست آید این دو آرایش را هم ارز گوئیم که فقط یکی از آنها در این عدد بدست آمده حساب خواهد شد. در شکل زیر آرایش های ۱ و ۲ از جایگشت های دوری **A** و **B** و **C** و **D** و **E** هم ارزند اما این دو با ۳ هم ارز نیست. پس هنگام شمارش از این سه شکل فقط دو تایش حساب می شود.

تعداد جایگشت های دوری  $n$  شیء برابر است با

$$\text{جایگشت دوری} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$



**مثال:** با حروف کلمه جهانگردی و بدون تکرار حروف:

**الف)** چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها به "سی" ختم می شود؟

**ب)** چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف "د" و "سی" کنار هم قرار داشته باشند؟

**پ)** چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها به "گردی" ختم می شوند؟

**ت)** چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه "جهان" چهار حرف اول باشد؟

**ث)** چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه "جهان" کنار هم باشند؟

**ج)** چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

## سوال کنکور:

۱- چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد که بزرگتر از ۳۰۰۰ است وجود دارد؟ (تجربی ۹۰)

۷۲ (۱)                      ۸۴ (۲)                      ۹۶ (۳)                      ۱۰۸ (۴)

۲- در یک همایش ۵ نفر سخنرانی می کنند. چند روش ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد به طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر **a** و **b** از آنان فقط یک نفر سخنران کند؟ (ریاضی ۸۷)

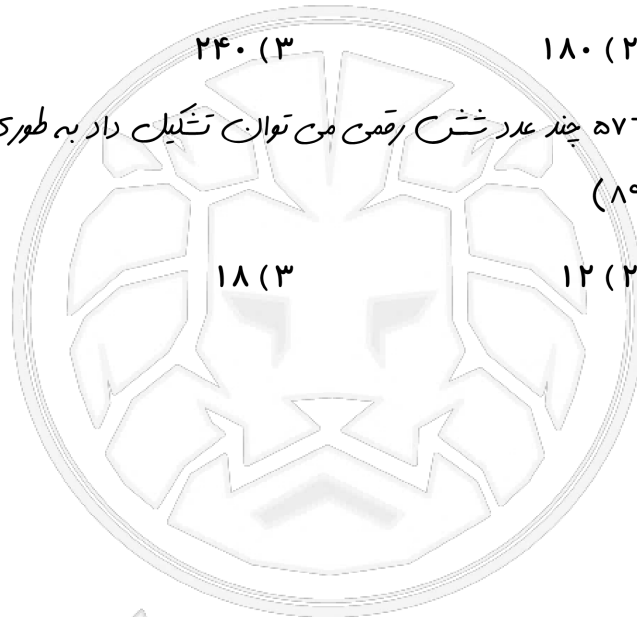
۲۰ (۱)                      ۲۴ (۲)                      ۳۶ (۳)                      ۴۰ (۴)

۳- تعداد جایگاهت حروف کلمه **SYSTEM** به طوری که **S** ها کنار هم نباشند کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱۲۰ (۱)                      ۱۸۰ (۲)                      ۲۴۰ (۳)                      ۳۶۰ (۴)

۴- با جایابی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می توان تشکیل داد به طوری که رقم های ۲ یک در میان قرار بگیرد. (ریاضی خارج ۱۹)

۹ (۱)                      ۱۲ (۲)                      ۱۸ (۳)                      ۲۴ (۴)



میر مویک