فصل ۷

آمار و احتمال

۱.۷ احتمال و اندازه‌گیری شانس

تاریخچه‌ی دقیقی از شروع احتمال در گذر زمان در دسترس نیست. از دوران یونان باستان آنها درباره‌ی شانس صحبت کرده‌اند و به مسئله کمی بعد متافیزیکی داده‌اند. نخستین مطالعه‌ی جدی در باب احتمال در قرن شانزدهم و ابتدای قرن هفدهم توسط جیرولامو کاردانو (۱۵۷۶-۱۵۰۱) ایتالیایی صورت گرفت.

تنها یک مسئله است که آن‌را ریشه‌ی شاخه‌ی احتمالات می‌دانند و به مسئله امتیازها معروف است. در این مسئله چگونگی تقسیم جایزه‌ی بازی شانسی نیمه تمام بین دو بازیکن فرضی هم‌قدرت ، با داشتن امتیازهای دو بازیکن در موقع قطع بازی و تعداد امتیازهای لازم برای بردن بازی خواسته شده است.این مسئله را کاردانو و تارتاگلیا نیز مورد بررسی قرار داده بودند،اما پیشرفت واقعی در سال ۱۹۵۴ رخ داد. یک قمارباز حرفه‌ای زیرک طی نامه ای به بلز پاسکال علت عدم تطبیق تجربه شخصی با واقعیت تئوری این مسئله را جویا شده بود. پاسکال به مسئله علاقمند شد و طی نامه‌ای آن را به اطلاع پی‌یر فرما رساند.از اینجا به بعد مکاتبات زیادی بین این دو بزرگ مرد تاریخ ریاضیات شکل گرفت که شالوده‌ی احتمالات را تشکیل دادند. فرما و پاسکال مسئله را جداگانه حل کردند با این تفاوت که پاسکال مسئله را در حالت کلی حل کرد.

پدیده‌های پیرامون ما در حالت کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

$$\text{پدیده‌ها} \longrightarrow \begin{cases} \text{نتیجه از قبل قابل پیش بینی است} \longrightarrow \text{پدیده‌های قطعی} \\ \text{نتیجه‌از قبل غیرقابل پیش بینی است} \longrightarrow \text{پدیده‌های تصادفی} \end{cases}$$

در بحث احتمال پدیده‌های تصادفی بررسی می‌شوند و با پدیده‌های قطعی کاری نخواهیم داشت. منظور از یک آزمایشی تصادفی در تمام این فصل آزمایشی است که نتیجه‌ی آن از قبل قابل پیش بینی نباشد. در هر آزمایش تصادفی مجموعه‌ای وجود دارد که شامل تمام نتایج ممکنه در آن آزمایش تصادفی است. به چنین مجموعه‌ای فضای نمونه گوییم.

تعریف ۱.۷. در هر آزمایش تصادفی به مجموعه‌ای که شامل تمام حالات ممکنه از آن آزمایش تصادفی باشد فضای نمونه گوییم و آن‌را با حرف S نشان می‌دهیم. همچنین به هر زیرمجموعه دلخواه از S یک پیشامد یا رخداد گوییم. پس A یک پیشامد است هرگاه : $A \subseteq S$ باشد.

مثال ۱.۷. فضای نمونه هر یک از آزمایش‌های تصادفی ذکر شده در موارد زیر را معین کنید.

۱. فضای نمونه پرتاب یک سکه.

۲. فضای نمونه پرتاب دوسکه.

۳. فضای نمونه پرتاب سه سکه.

۴. فضای نمونه پرتاب یک تاس.

۵. فضای نمونه پرتاب دو تاس.

۶. فضای نمونه برای جنسیت فرزندان یک خانواده سه فرزندی.

۷. فضای نمونه پرتاب یک سکه و یک تاس.

۸. فضای نمونه انتخاب ۲ نفر از بین ۵ نفر.

مثال ۲.۷. در یک خانواده با ۴ فرزند پیشامد داشتن ۳ پسر را تعیین کنید. پیشامد داشتن حداقل ۳ پسر چیست؟ پیشامد برابر بودن تعداد دختران و پسران چیست؟

مثال ۳.۷. در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی قرمز وجود دارد. دو مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. پیشامد اینکه این دو همرنگ باشند را بنویسید.

مثال ۴.۷. دو تاس را با هم پرتاب کرده‌ایم. پیشامدهای زیر را بنویسید.

۱. اعداد رو شده برابر باشند.

۲. مجموع اعداد روشده ۷ شود.

۳. مجموع اعداد رو شده عددی اول باشد.

عملیات بر پیشامدها

چون پیشامدها زیرمجموعه‌های فضای نمونه هستند ، امکان ترکیب کردن آنها و ساختن پیشامدهای جدید وجود دارد.

اشتراک دو پیشامد: اگر $A, B \subseteq S$ دو پیشامد دلخواه باشند $A \cap B$ پشامد وقوع هردوی A و B بطور همزمان است. مثلا در پرتاب یک تاس اگر A پیشامد آمدن عدد زوج و B پیشامد اینکه عدد اول بیاید باشد

آنگاه $A\cap B$ به معنای زوج و اول آمدن است. و لذا:

$$A\cap B=\{۲\}$$

اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A\cup B$ به معنای وقوع A یا B یا هردوی آنهاست. مانند حالت قبل داریم:

$$A\cup B=\{۲,۳,۴,۵,۶\}$$

تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A-B$ به معنای رخ دادن A و رخ ندادن B است.مانند حالت قبل داریم:

$$A-B=\{۴,۶\}$$

متمم یک پیشامد: پیشامد A' به معنای رخ ندادن A است. مانند حالت قبل داریم:

$$A'=\{۱,۳,۵\}$$

تفاضل متقارن دو پیشامد: می‌دانیم $A\Delta B=(A-B)\cup\ (B-A)$. پس پیشامد $A\Delta B$ به معنای رخ دادن A و رخ ندادن B یا رخ دادنB و رخ ندادن A است. بعبارت دیگر فقط یکی از A یا B رخ دهد. مانند حالت قبل:

$$A\Delta B=\{۳,۴,۵,۶\}$$

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار گوییم هرگاه : $A\cap B=\varnothing$

مثال ۵.۷. دوتیم «الف» و «ب» با دو تیم «ج» و «د» در دو زمین جداگانه بازی می‌کنند. اگر A پیشامد برنده شدن تیم «الف» و B پیشامد برنده شدن «ب» باشد پیشامدهای زیر را تشریح کنید.

$$A\cap B\ ,\ A\cup B\ ,\ A-B\ ,\ B-A\ ,\ A'\cup B'\ ,\ A'\cap B'\ ,\ B\cup A'$$

مثال ۶.۷. دو تاس با رنگ‌های آبی و قرمز را پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای خواسته شده را بنویسید.

۱. پیشامد A:هر دو تاس فرد باشند.

۲. پیشامد B : مجموع دوتاس عدد ۶ باشد.

۳. پیشامد C : تاس آبی مضرب ۳ بیاید.

۴. پیشامد اینکه هر دو تاس فرد و مجموع ۶ آمده باشد.

۵. پیشامد اینکه هردوتاس فرد یا مجموع دوتاس ۶ بیاید.

۶. پیشامد $A-C$ چیست؟

۷. پیشامد $C-B$ را توصیف کنید.

۸. آیا پیشامدهای «مجموع دوتاس ۷ بیاید» و «هردوتاس زوج بیایند» ناسازگارند؟

اندازه‌گیری احتمال

برای اندازه‌گیری شانس در آزمایش تصادفی روش‌های متعددی وجود دارد. یکی از این روش‌ها روش آماری است. به این معنی که آزمایش را به دفعات زیاد انجام می دهیم و نتیجه‌های مشاهده شده و مطلوب را بر تعداد کل دفعات آزمایش تقسیم می‌کنیم و عدد حاصل را شانس آن پیشامد در نظر می‌گیریم. یکی دیگر از روشها ،روش ذهنی است. کارشناس فوتبال بر اساس تجربیات خود حدس میزند که تیم A به احتمال مثلا ۶۰٪ برنده خواهد شد.روش دیگر استفاده از اصول موضوعه احتمال و استخراج مابقی قوانین آن از همان چند اصل ابتدایی است که برای اولین آشنایی در احتمال چندان مناسب نیست. اما یکی از مفیدترین و ساده‌ترین روش‌ها محاسبه احتمال از طریق شمارش تعداد اعضای پیشامد و فضای نمونه و تقسیم آنها بر یک دیگر است.

تعریف ۲.۷. فرض کنید S یک فضای نمونه و $A \subseteq S$ یک پیشامد دلخواه باشد. شانس وقوع پیشامد A را که با نماد $P(A)$ نشان می‌دهیم بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد یا مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات ممکنه}}$$

مثال ۷.۷. فرض کنیم که هر یک از اعداد دورقمی که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می‌توانیم بسازیم را روی کارت‌های مشابه نوشته و در کیسه‌ای قرار می دهیم. سپس یک کارت به تصادف خارج می کنیم. شانس بیرون آمدن عدد زوج بیشتر است یا عدد فرد؟

مثال ۸.۷. در جعبه ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد.اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم چقدر احتمال دارد که:

۱. هر سه مهره آبی باشند؟

۲. هر سه مهره همرنگ باشند؟

۳. دقیقا ۲ مهره همرنگ باشند؟

مثال ۹.۷. اگر حروف کلمه «جهانگردی» را به تصادف کنار هم قرار دهیم،چقدر احتمال دارد که:

۱. حرف «ی» آخر باشد؟

۲. دو حرف «ی» و «د» کنار هم باشند؟

۳. با حرف «ج» شروع و به حرف «ی» ختم شود؟

مثال ۱۰.۷. در یک خانواده سه فرزندی احتمال داشتن حداقل ۲ پسر را بیابید.

مثال ۱۱.۷. در پرتاب دوتاس احتمال اینکه مجموع دوتاس عددی اول باشد را بدست آورید.

ممکن است تا اینجا پرسشی مهم ذهن شما را مشغول کرده باشد. احتمال پیشامدهای مرکب را چگونه محاسبه کنیم. مثلا $P(A-B)$ ویا $P(A\cup B)$ را چگونه می‌توان بر حسب احتمال $P(A)$ و یا عبارات دیگر بیان کرد. در قسمت بعدی با ارائه‌ی اصول کولموگروف به دنبال یافتن پاسخ پرسش‌های بالا هستیم.

در این بخش اشاره‌ای به اصول سه‌گانه کولموگروف [1] و نتایج آن خواهیم داشت.

اصول کولموگروف

فرض کنید S یک فضای نمونه باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد دلخواه . اصول سه‌گانه‌ی کولموگروف عبارتند از:

۱ . همواره $\circ \leq P(A) \leq ۱$.

۲ . همواره $P(S) = ۱$.

۳ . اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند یعنی $A \cap B = \varnothing$ آنگاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

نتایج اصول کولموگروف

قضیه۱ . اگر $C, B, A,$ سه مجموعه دوبدو مجزا باشند یعنی اشتراک هر جفت از آن‌ها تهی باشد ، آنگاه:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

قضیه ۲ . اگر داشته باشیم $B \subseteq A$ آنگاه:

الف . $P(A) \leq P(B)$.

ب . $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

قضیه۳ . در حالت کلی برای هر دو پیشامد دلخواه داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + p(B) - P(A \cap B)$$

یکی دیگر از نتایج مهم اصول سه‌گانه فوق رابطه‌ی بین یک پیشامد و متمم آن است. پیشامد A و متممش A' را در نظر بگیرید. چون $A \cup A' = S$ است پس $P(A \cup A') = ۱$ خواهد بود و لذا:

$$P(A') = ۱ - P(A)$$

مثال ۱۲.۷. اگر $P(B) = \frac{۲}{۳}, P(A') = \frac{۱}{۵}, P(A \cap B) = \frac{۳}{۵}$ باشد مطلوبست محاسبه: $P(A \cup B)$ و $P(A - B)$.

[1] آندره‌ی کولموگروف متولد ۱۹۰۳ در تامبوف روسیه بود. پدرش دانشجوی رشته‌ی کشاورزی بود و در زمان تولد آندره‌ی تبعید شد.مادرش نیز در بدو تولد وی از دنیا رفت و خاله‌ی وی سرپرستی‌اش را به عهده گرفت و آندره‌ی در خانه پدربزرگش بزرگ شد.پس از اتمام دوره‌ی دبیرستان وی مدتی سوزنبان شرکت راه‌آهن شد و در اوقات فراغت رساله‌ای بر مکانیک نیوتنی نوشت. وی در سال ۱۹۲۰ به دانشگاه مسکو رفت و در ۱۹۲۹ دوره‌ی دکترای خود را تحت نظر یکی از بزرگترین ریاضیدانان آن دوره یعنی لوزین به اتمام رسانید.وی تا سال ۱۹۳۰ مجموعا ۱۸ مقاله بین المللی نوشت و باعث شد چهره‌ی سرشناسی در دنیا شود. وی در نظریه احتمالات،توپولوژی،آنالیز ریاضی و ... کار کرده است.کولموگروف جوایز متعددی در زمان حیاتش به واسطه‌ی فعالیت هایش دریافت کرد و سرانجام در سال ۱۹۸۷ در مسکو از دنیا رفت.

مثال ۱۳.۷. احتمال اینکه شخصی در ریاضی قبول شود ٪۵۵ و در شیمی ٪۶۰ است. احتمال اینکه لااقل در یکی از این دو درس قبول شود ٪۷۵ است. احتمال اینکه در هر دو درس قبول شود را بیابید.

مثال ۱۴.۷. عددی به تصادف از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم.احتمال اینکه این عدد بر ۴ بخش‌پذیر باشد اما بر ۷ بخش پذیر نباشد را بیابید.

مثال ۱۵.۷. در یک خانواده سه فرزندی احتمال اینکه ۲فرزند پسریا ۳فرزند دختر باشند را بیابید.

مثال ۱۶.۷. حروف کلمه‌ی $ATAXIA$ را بریده و به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. به چه احتمالی هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

مثال ۱۷.۷. اعداد یک تا شش را روی ۶ کارت یکسان نوشته و به تصادف دو کارت از بین آنها خارج می کنیم. با کدام احتمال جمع این دو کارت زوج است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

مثال ۱۸.۷. از هر ۴ گروه آزمایشی به ترتیب ۳ و۳و۲و۱ نفر داوطلب شرکت در آزمونی هستند. اگر به تصادف ۴ نفر از بین آنها معرفی شوند با کدام احتمال از هر گروه یک نفر معرفی شده‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۱۴}$ ۴) $\frac{۲}{۲۱}$

مثال ۱۹.۷. پنج مهره‌ی سفید با شماره‌های ۱تا۵ و هم‌چنین پنج مهره‌ی سیاه با شماره‌های ۱ تا ۵ که همگی یکسان هستند را در ظرفی قرار می دهیم و سپس به تصادف دو مهره از بین آنها بیرون می‌آوریم. اگر مجموع شماره‌های هر دو مهره ۶ باشد با کدام احتمال هر دو مهره همرنگ هستند؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

تمرین ۱.۷. در پرتاب سه سکه پیشامدهای زیر را بدست آورید.

۱. هر سه سکه یکسان بیایند.
۲. دقیقا دو سکه پشت بیاید.
۳. اقلا دو سکه پشت بیاید.

تمرین ۲.۷. در پرتاب دو تاس پیشامدهای زیر را بیابید.

۱. مجموع شماره‌های رو شده مضرب ۵ باشد.
۲. قدرمطلق تفاضل عددهای روشده مساوی یک باشد.
۳. یکی از دو عدد روشده دوبرابر دیگری باشد.
۴. یکی از دوشماره‌ی روشده از دوبرابر دیگری بیشتر باشد.

تمرین ۳.۷. درکیسه‌ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه وجود دارد.دو مهره به تصادف از کیسه خارج می کنیم.اولا پیشامد اینکه هر دو مهره سیاه باشند را بیابید. ثانیا پیشامد اینکه دو مهره خارج شده همرنگ باشند.

تمرین ۴.۷. درکیسه‌ای ۲۰ کارت با شماره‌های ۱تا۲۰ نوشته شده است. یک کارت را به تصادف خارج کرده‌ایم.پیشامد اینکه کارت مضرب ۲ یا ۳ باشد را بیابید.

تمرین ۵.۷. از مجموعه $\{۱۰۱, ۱۰۲, \cdots, ۶۰۰\}$ یک عدد به تصادف انتخاب کرده‌ایم. به چه احتمالی این عدد مضرب ۵ می‌باشد ولی بر ۶ بخش‌پذیر نیست یا مضرب ۵ نیست ولی به ۶ بخش پذیر است؟

تمرین ۶.۷. برای دو پیشامد B, A داریم $P(A\Delta B) = \frac{۶}{۱۰}$, $P(A) = ۲P(B) = \frac{۸}{۱۰}$است. مطلوبست محاسبه $P(B' \cap A)$.

تمرین ۷.۷. اگر داشته باشیم $P(A') = \frac{۱}{۳}$, $۲P(B) = P(A \cup B)$, $P(A' \cup B') = \frac{۱}{۲}$ باشد،مطلوبست محاسبه $P(B)$.

تمرین ۸.۷. ثابت کنید برای هر دو پیشامد دلخواه: $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - ۱$.

تمرین ۹.۷. برای دو پیشامد B , A داریم: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, $P(B) = ۲P(A) = ۰/۸$ مطلوبست محاسبه $P(A' \cap B')$.

تمرین ۱۰.۷. از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوبست محاسبه:

۱ . احتمال اینکه عدد بر ۳ یا ۵ بخش پذیر باشد.

۲ . احتمال اینکه عدد بر ۳ بخشپذیر نباشد و بر ۵ هم بخشپذیر نباشد.

تمرین ۱۱.۷. در یک خانواده سه فرزندی می دانیم فرزند اول دختر است. با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

تمرین ۱۲.۷. در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می‌شود که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است.اگر ۲ موش از بین آنها به تصادف خارج شود با کدام احتمال لااقل برروی یکی از آن دو آزمون انجام شده است؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۱}$

تمرین ۱۳.۷. بر روی هر یک از چندکارت یکسان اعداد سه رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه اعداد $\{۲, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ را نوشته و به تصادف یک کارت از بین انها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دورقم از اعداد این کارت ها فرد می‌باشند؟

۱) $\frac{۲}{۱۰}$ ۲) $\frac{۲۵}{۱۰۰}$ ۳) $\frac{۳}{۱۰}$ ۴) $\frac{۴}{۱۰}$

تمرین ۱۴.۷. سه تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال اعداد روشده مضرب ۳ **نیستند؟**

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱۹}{۲۷}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

تمرین ۱۵.۷. هریک از اعداد ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ را روی شش گوی یکسان نوشته‌ایم. بطور تصادفی و متوالیا گوی ها را خارج می کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می شوند؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱۲}{۱۰۰}$ ۳) $\frac{۱۵}{۱۰۰}$ ۴) $\frac{۲}{۱۰}$

۲.۷ مقدمه‌ای بر آمار،جامعه‌ونمونه

در زندگی روزمره انسان‌ها به کرات و بدون آنکه متوجه باشند از جملات آماری استفاده می کنند. مثلا در محاوره و درباره‌ی این پرسش که در شبانه‌روز چندساعت می‌خوابید و پاسخ « بنده در هر شبانه روز و بطور میانگین حدود ۸ ساعت می خوابم» و یا این جمله‌ی « اگر مدت زمان مطالعه را دوبرابر کنی شانس قبولی در امتحان پایانی شما ۵۰ درصد افزایش می‌یابد» همگی جملاتی هستند که مبین مفاهیم آماری و یا روش آماری هستند. بطورکلی می‌توان علم آمار را مبتنی بر ۴ مرحله زیر در نظر گرفت:

۱. طرح و انجام آزمایش برای دستیابی به اطلاعات عددی و یا هر روشی که منجر به گردآوری داده‌ها شود.

۲. جمع بندی و سازماندهی اطلاعات عددی بدست آمده برای درک و فهم بهتر موضوع.

۳. تحلیل و تفسیر و آنالیز دقیق اطلاعات عددی بدست آمده.

۴. نتیجه‌گیری براساس اطلاعات بدست آمده از قسمت‌های فوق و پیش‌بینی آینده‌ی موضوع مورد بحث.

تعریف ۳.۷. **تعریف آمار و علم آمار:** آمار، مجموعهای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. علم آمار مجموعه روشهایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر دادهها و در نهایت نتیجه گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی میشود.

منظور از پیش‌بینی آینده ، پیشگوئی‌هایی به سبک نوستراداموس نیست. در اینجا براساس یک الگوی بدست آمده از اطلاعات عددی بطور تصادفی و نه لزوما قطعی می توان آینده‌ی موضوعی را بررسی کرد. به عنوان مثال نظرسنجی برای تعیین نتیجه‌ی انتخابات در یک کشور،چنانچه بر اساس موازین علمی و درست انجام شود می‌تواند قبل از روز رای‌گیری نتیجه را مشخص کند و در این مورد نمونه های بسیار زیادی در دنیا و در کشور خودمان وجود دارد که نتیجه نظرسنجی و رای‌گیری واقعی تقریبا تا ۹۵ درصد و گاهی ۱۰۰ درصد منطبق بوده‌اند.

مثال ۲۰.۷. مدیر یک کارخانه‌ی تولید لامپ برای بهبود کیفیت کار تصمیم گرفت که روشی آماری در پیش بگیرد و در چند روز متوالی تعداد لامپ‌های معیوب را شمارش کرده و در جدول زیر گردآوری کرده است.

روز کاری پنجم	روز کاری چهارم	روز کاری سوم	روز کاری دوم	روز کاری اول	روزهای کاری
۱۸۰	۱۲۰	۹۰	۷۰	۵۰	تعداد لامپ‌های معیوب

براساس داده‌های به دست آمده، به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) روند تغییر اعداد و ارقام در این تمرین نشان دهندهٔ چه چیزی است؟

ب) در این تمرین چه چیزی به‌عنوان آمار محسوب می‌شود؟

پ) بهترین تصمیمی که مدیر کارخانه براساس «علم آمار» می‌تواند بگیرد، چیست؟

توقف یا اصلاح خط تولید لامپ‌ها ☐ ادامهٔ خط تولید لامپ‌ها ☐

برای انجام یک کار آماری نیاز به اطلاعات عددی داریم. این اطلاعات عددی چگونه تهیه می‌شوند؟ برای پاسخ به این پرسش نیاز به چند تعریف و اصطلاح داریم،که در زیر به معرفی و بیان آنها می پردازیم.

اجازه دهید یک کاربرد پزشکی آمار را معرفی کنیم. شاخص توده بدنی یا BMI برای تعیین سلامت وزنی افراد توسط آدولف کوتله بلژیکی در سال ۱۸۵۰ بصورت زیر معرفی شده است:

$$BMI = \frac{W_{kg}}{(h_m)^۲} = \frac{\text{وزن به کیلوگرم}}{\text{مربع قد به متر}}$$

نتیجه بدست آمده طبق جدول زیر معین می کند که سلامت وزنی شخص چگونه است.

شاخص تودهٔ بدن	طبقه‌بندی
کمتر از ۱۸/۵	کم وزن
۱۸/۵ تا ۲۴/۹	وزن طبیعی
۲۵ تا ۲۹/۹	اضافه وزن
۳۰ تا ۳۴/۹	چاقی درجه یک
۳۵تا۳۹/۹	چاقی درجه دو
بیشتر از ۴۰	چاقی درجه سه

شما می توانید با این دستور جالب می‌توانید شاخص توده بدنی خود و اعضای خانواده را بدست آورید. همچنین می توانید در کلاس درس شاخص توده بدنی بچه های کلاس را بدست آورید. اما پیدا کردن شاخص توده بدنی کل مدرسه شدنی اما کمی وقت گیرتر است و نهایتا یافتن شاخص توده بدنی شیرازی ها تقریبا غیرممکن است.(چرا؟) پس اگر هدف بررسی میزان سلامت وزنی افراد ساکن شهر شیراز باشد تکلیف چیست؟ در اینجا می توان بجای بررسی اطلاعات تمام شیرازی‌ها فقط اطلاعات تعدادی از شیرازی ها را بررسی کرد. بر مبنای ضرب المثل مشت نمونه خروار است می‌توان اطلاعات همان تعداد شیرازی محدود را به جای تمام شیرازی ها در نظر گرفت. آن تعداد محدود شیرازی را نمونه و ساکنان شیراز را جامعه گوییم. توجه داشته باشید که انتخاب نمونه خود آداب مفصلی دارد. هر چه نمونه را با دقت بیشتری انتخاب کنیم اطلاعات بهتر و دقیق تری عایدمان می شود.

مثال ۲۱.۷. در هریک از موارد نمونه مناسب و جامعه را تعیین کنید.

تعریف ۴.۷. تعریف جامعه یا جمعیت: مجموعه تمام افراد یا اشیایی که دربارهٔ یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده میشود و هریک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه مینامند.

تعریف ۵.۷. تعریف اندازه یا حجم جامعه تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه یا حجم جامعه گویند. به عنوان مثال، دانش‌آموزان یک مدرسه میتوانند یک جامعه باشند و هریک از دانش‌آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.

تعریف ۶.۷. تعریف نمونه بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه گویند و هریک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه گویند.

تعریف ۷.۷. تعریف اندازه یا حجم نمونه تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه یا حجم نمونه گویند. به عنوان مثال دانش‌آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش‌آموزان مدرسه هستند و هریک از دانش آموزان کلاس، عضو نمونه محسوب میشوند.

نمونه باید اولا تصادفی انتخاب شود به این معنی که هر عضو جامعه شانس حضور در نمونه را داشته باشد و تعداد اعضای نمونه هم باید به درستی انتخاب شود تا بیانگر ویژگی های جامعه باشد. مثلا در یک کلاس ۳۰ نفری می توان یک نمونه ۸ نفری انتخاب کرد ولی نمونه ۸ نفری برای یک مدرسه ۵۰۰ نفری نمونه‌ی خوبی به حساب نمی‌آید.

مثال ۲۲.۷. در هر یک از موارد زیر جامعه و نمونه مناسب را تعیین کنید.

۱. تعیین وزن دانش‌آموزان دبیرستان غزال.

۲. تعیین میزان تحصیلات والدین دانش‌آموزان شهر شیراز.

۳. تعیین میزان انتظار بیماران در ملاقات با یک پزشک خاص.

۴. بررسی میزان موالید در ماه های مختلف سال در استان فارس.

۵. تعیین میزان درآمد مشاغل آزاد در اصناف حاضر در شهر شیراز.

۳.۷ متغیر و انواع آن

در مثال تعیین قد دانش‌اموزان صفت قد از یک محصل به محصل دیگر تغییر می کند و لذا بی مورد نیست که آنرا متغیر بنامیم. اعدادی که نشان دهنده‌ی قد هستند را مقادیر متغیر گوییم.

تعریف ۸.۷. متغیر، ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه میشود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر میکند. عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده میشود، مقدار متغیر میگویند.

برخی متغیرها قابل اندازه‌گیری‌اند مثل قد و وزن و ... و برخی غیرقابل اندازه‌گیری مثل رنگ ماشین، کیفیت یک میوه،گروه خونی و ... . بر این اساس باید متغیرها را طبقه بندی کنیم. جدول زیر انواع متغیرها را نشان می دهد.

متغیرها →
- **کیفی**
  - **اسمی** → **دارای هیچ ترتیب طبیعی نیست**
  - **ترتیبی** → **دارای نوعی ترتیب طبیعی است**
- **کمی**
  - **گسسته** → **اگر دو مقدار گرفت بین آنها را نمی تواند بگیرد**
  - **پیوسته** → **اگر دو مقدار گرفت بین انها را نیز می تواند بگیرد**

تعریف ۹.۷. تعریف متغیرهای کمی: متغیرهایی را که قابل اندازه گیری اند، «متغیرهای کمی» گویند. به عنوان مثال تعداد فرزندان خانواده و وزن افراد متغیرهای کمی‌اند.

تعریف ۱۰.۷. تعریف متغیرهای کیفی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند، «متغیرهای کیفی» گویند. به عنوان مثال گروه خونی افراد و پاسخ سؤال «میزان لذت بردن از آشپزی» متغیرهای کیفی‌اند.

تعریف ۱۱.۷. تعریف متغیر پیوسته: متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند. به عنوان مثال وزن یک دانش آموز میتواند ۴۶کیلوگرم، ۴۷کیلوگرم یا هر عددی بین این دو رقم باشد.

تعریف ۱۲.۷. تعریف متغیر گسسته: متغیر گسسته، متغیری است که پیوسته نباشد. به عنوان مثال تعداد فرزندان یک خانواده متغیر گسسته است.

مثال ۲۳.۷. نوع متغیرهای زیر را بررسی کنید.

۱. مراحل رشد یک انسان(نوزادی-کودکی-نوجوانی...).

۲. نژاد افراد (زردپوست-سفیدپوست-سیاهپوست).

۳. رنگ موی افراد.

۴. میزان محصول برنج کامفیروز.

۵. طول عمر یک ترانزیستور.

۶. تعداد نامه های یک صندوق پستی.

۷. میزان تحصیلات افراد.

مثال ۲۴.۷. جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	نوع متغیر
۱ـ میزان بارندگی برحسب سانتی‌متر در یک شهر	
۲ـ نوع بارندگی (باران، برف)	
۳ـ تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند	
۴ـ میزان دمای هوا	
۵ـ شدت آلودگی هوا(زیاد، متوسط، کم)	
۶ـ انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)	
۷ـ شدت بارندگی (زیاد،متوسط، کم)	

تمرین ۱۶.۷. جدول زیر را کامل کنید.

متغیرهای دانش‌آموزان	متغیر کمّی	متغیر کیفی	متغیر گسسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن	×			×		
نمرهٔ ریاضی نهم						
جنسیت (دختر و پسر)						
قد						
وزن						
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)		×			×	
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)						
شاخص تودهٔ بدن						