

فصل دوم

معادله درجه دوم

درس ۱ معادله و مسائل توصیفی

درس ۲ حل معادله درجه ۲ و کاربردها

درس ۳ معادله‌های شامل عبارتهای گویا

معادله‌های توصیفی

معادله‌ی درجه‌ی اول

هر معادله به صورت $ax + b = 0$ که در آن a و b اعداد حقیقی و $a \neq 0$ باشد را یک معادله‌ی درجه‌ی اول می‌نامند.

جواب این معادله برابر $x = \frac{-b}{a}$ است.

مسائل توصیفی

برای حل مسائل و معادلات توصیفی، مراحل زیر باید انجام داد:

- ۱- **تشخیص متغیرها:** پیدا کردن مقداری که مسأله از ما می‌خواهد، اولین قدم در حل مسأله است و در اکثر موارد در انتهای مسأله است. این مقادیر و کمیت‌ها را معمولاً با حرف x ، y و ... نام‌گذاری می‌کنیم.
- ۲- **بیان مسأله به زبان ریاضی:** خواندن چند باره‌ی مسأله و تشریح آن بر حسب متغیرها، بخش مهم دیگر حل مسأله است. در این بخش، اطلاعات مسأله را مرتب می‌کنیم.
- ۳- **ساختن مدل ریاضی:** یافتن رابطه‌ی بین اطلاعات جمع‌آوری شده در بخش (۲) و ساختن معادله از این اطلاعات.
- ۴- **حل معادله و چک کردن جواب:** در این بخش معادله‌ی به‌دست آورده را حل می‌کنیم و جواب را چک می‌کنیم.

مثال

می‌خواهیم محوطه‌ای مستطیل شکل در کنار رودخانه را نرده بکشیم. اگر طول این محوطه به موازات دو برابر عرض نرده‌ی مورد نیاز ۶۴۰ متر باشد، مساحت محوطه چند متر مربع است؟ (کنار رودخانه نرده می‌خواهد)

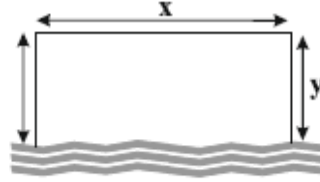
۱- تشخیص متغیرها: مسأله از ما مساحت محوطه را می‌خواهد و چون مساحت مستطیل حاصل ضرب طول در عرض آن است. پس در واقع طول و عرض را هم می‌خواهد.

x : طول مستطیل

y : عرض مستطیل

$S = xy$: مساحت محوطه

۲- بیان مسأله به زبان ریاضی: اطلاعاتی را که مسأله به ما داده است را دسته‌بندی می‌کنیم.



۳- ساختن مدل ریاضی

$$x = 2y \text{ :طول دو برابر عرض}$$

$$x + 2y = 2y + 2y = 4y \text{ :طول نرده}$$

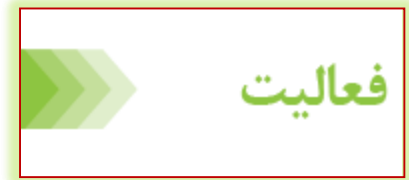
$$S = xy = (2y)(y) = 2y^2 \text{ :مساحت باغ}$$

$$4y = 640 \text{ :طول نرده}$$

۴- حل معادله

$$4y = 640 \Rightarrow y = 160 \text{ متر}$$

$$S = 2y^2 = 2(160)^2 = 51200 \text{ متر مربع}$$



با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بیابید.

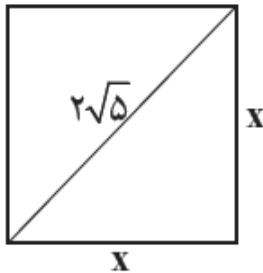


عددی را بیابید که دو برابر آن به علاوه عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.

حل:

↩ فعالیت کتاب نهم صفحه ۷۳ ↪

- محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن $2\sqrt{5}$ باشد.



به کمک رابطه فیثاغورث داریم:

$$\dots + \dots = (2\sqrt{5})^2$$

بنابراین:

$$2x^2 = \dots \Rightarrow x^2 = \dots \Rightarrow x = \dots$$

پس اندازه هر ضلع مربع با در نظر گرفتن اینکه اندازه ضلع مثبت است، برابر $x = \dots$ است و محیط مربع فوق برابر است با:

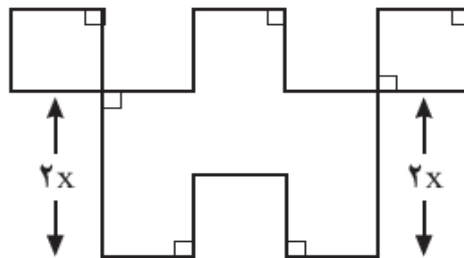
$$p = 4x \Rightarrow p = \dots$$

معادله $2x^2 = 20$ را یک معادله درجه دوم می نامیم.

فعالیت

۱. عددی را بیابید که مربع آن، ۳ برابر خود همان عدد باشد.

۲. در شکل زیر طول تمام پاره خط‌ها به جز دو پاره خط مشخص شده در شکل برابر x است. اگر اندازه مساحت شکل برابر با اندازه محیط آن باشد، مقدار x را به دست آورید.



کار در کلاس

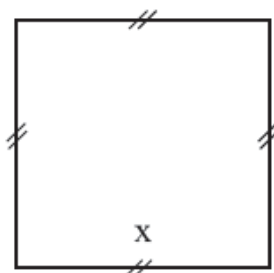
نیما از پسرعمویش کیان، سه سال بزرگ‌تر است. اگر حاصل ضرب سن این دو ۴۰ باشد، پسرعموی کوچک‌تر چند سال دارد؟

۱. هر کدام از عبارت‌های زیر را به یک معادله تبدیل کنید.
- الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن به علاوه دو برابر با سه برابر آن عدد منهای دو باشد.
- ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه عدد یک است.

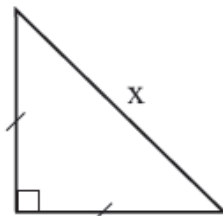
۲. در یک کارخانه، حقوق یک مهندس دو برابر یک فن‌ورز (تکنسین) و $\frac{2}{3}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ فن‌ورز دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۵۵/۵ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک فن‌ورز در این کارخانه ماهیانه چقدر است؟

۳. با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟
- اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟

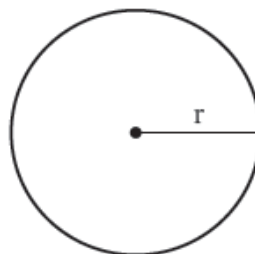
۴. اگر مجموع مساحت‌های سه شکل زیر برابر ۷ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟



شکل (۱)



شکل (۲)



$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x$$

شکل (۳)

بازی با حروف الفبا به کمک مدل‌سازی ریاضی (رمزنگاری)

۵. حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره‌گذاری کرده‌ایم. هر حرف بدون نقطه با شماره آن حرف از ۱ تا ۳۲ مشخص می‌شود. حروف نقطه‌دار به صورت ax^n مشخص شده‌اند که در آن a شماره حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف مورد نظر است. به عنوان مثال حرف «ح» با عدد ۸ مشخص می‌شود؛ زیرا هشتمین حرف الفبای فارسی است و حرف «ت» با عبارت $4x^2$ مشخص می‌شود؛ زیرا چهارمین حرف الفباست ($a=4$) و دارای دو نقطه است ($n=2$).

در این روش برای نوشتن کلمات از علامت جمع به صورت زیر استفاده می‌کنیم.
مثلاً برای معادل ریاضی کلمه «غنچه»:

$$\begin{array}{cccc} \text{غ} & + & \text{ن} & + & \text{چ} & + & \text{ه} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 31 & + & 7x^2 & + & 29x & + & 22x \end{array}$$

$$\text{معادل ریاضی} \xrightarrow{\text{غنچه}} 22x + 29x + 7x^2 + 31$$

حال با توجه به توضیح فوق :

الف) جدول زیر را کامل کنید :

الگوی ریاضی معادل آن	کلمه به زبان فارسی
	آب
$3x^2 + 1$	
	ذرت

ب) الگوی ریاضی معادل کلمه «پیامبر رحمت» را مشخص کنید.

پ) آیا می‌توانید با این روش نام خود را با رمز ریاضی بیان کنید؟

ت) با الگوی فوق یک پیام کوتاه برای دوست خود بنویسید.

۶. اگر در یک قالی با ابعاد $2/80m \times 2/10m$ (که عموماً 2×3 نامیده می‌شود) تعداد گره‌های قالی $5/880/000$ عدد باشد :

الف) این قالی چند رج است؟

ب) اگر برای هر گره $1cm$ نخ قالی یا همان خامه قالی استفاده شود، در این قالی چند متر نخ قالی استفاده شده است؟

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

پ) یک قالی باف حرفه‌ای در یک روز می‌تواند ۶۰۰۰ گره قالی بیافد. اگر این قالی باف ۵ روز در هفته کار کند، برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟

ت) اگر این قالی باف برای خرید مواد اولیه قالی شامل تار و پود، نخ قالی و ... پنج میلیون و شش صد هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آن را به قیمت ۳۵ میلیون تومان بفروشد، این قالی باف برای هر هفته کار خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟

سوالات تستی

۱. جواب x از معادله $2(3x-7) = -(2+4x)$ کدام است؟ (کتاب درسیه مشابه فعالیت ۲- صفحه ۳۶)

- ① $1/2$ ② 6 ③ $7/5$ ④ $0/8$

۲. اگر $a \neq b$ ، جواب معادله $a(x-1) - 2bx + 2b = 0$ کدام است؟ (سراسری انسانی-۷۴)

- ① -1 ② a ③ b ④ 1

۳. معادله‌ی مربوط به عبارت «ثلث مربع یک عدد از قرینه‌ی آن عدد، یک واحد بیشتر است» کدام است؟ (کتاب درسیه مشابه تمرین ۱- صفحه ۳۶)

- ① $x^2 = -3x + 1$ ② $\frac{x^2}{3} = -x - 1$ ③ $x^2 = 3(-x + 1)$ ④ $x^2 = -3x - 1$

۴. معادله‌ی $(1-x+x^2)(x+1) = x(x^2-1)$ ، چند ریشه دارد؟ (وزارتخانه-۷۴)

- ① یک ② دو ③ سه ④ صفر

۵. $\frac{5}{7}$ عددی به اضافه ۱۸، دو برابر آن عدد است. این عدد کدام است؟
 (سراسری تجربیه-۷۲)
- ① ۱۴ ② ۲۱ ③ ۲۸ ④ ۳۶
۶. حاصل ضرب عدد x در ۱۴، به اندازه‌ی ۸۴ واحد از حاصل ضرب عدد x در هفده کم‌تر است x کدام است؟
 (سراسری انسانی-۶۳)
- ① ۲۴ ② ۲۶ ③ ۲۸ ④ ۳۰
۷. تفاضل عددی از ۲۵، ثلث مجموع همان عدد با ۳۵ است. آن عدد کدام است؟
 (سراسری انسانی-۷۶)
- ① ۹ ② ۱۰ ③ ۱۱ ④ ۱۲
۸. اگر به ۳ برابر عددی ۴ واحد اضافه گردد و از نصف حاصل، همان عدد کم شود، باقی مانده ۵ می‌گردد. آن عدد کدام است؟
 (ازادانسانیه-۷۸)
- ① ۱۹ ② ۱۴ ③ ۸ ④ ۶
۹. اکنون پدر علی ۴۰ ساله است و سن او ۵ برابر سن علی به علاوه‌ی ۵ سال است. وقتی علی ۲۰ ساله شود، پدر او چند ساله خواهد شد؟
 (آزمون کنکور-۹۱)
- ① ۵۱ ② ۵۲ ③ ۵۳ ④ ۵۴
۱۰. با افزایش $\frac{12}{5}$ درصد به قیمت، کالایی را به مبلغ ۹۴۵ ریال خریداری کرده‌ایم. قیمت کالا قبل از افزایش چه قدر بوده است؟
 (سراسری انسانی-۷۷)
- ① ۸۱۰ ② ۸۲۰ ③ ۸۴۰ ④ ۸۶۰
۱۱. مجموع ارقام یک عدد دو رقمی ۱۲ و تفاضل ارقام آن ۴ است. حاصل ضرب ارقام این عدد کدام است؟
 (سراسری انسانی-۶۳)
- ① ۲۷ ② ۳۲ ③ ۳۵ ④ ۳۶
۱۲. از حاصل ضرب دو عدد، مجموع همان دو عدد کسر گردیده و تفاضل آن دو عدد به دست آمده است، یکی از آن دو عدد برابر است با:
 (ازادانسانیه-۸۲)
- ① ۲ ② ۱ ③ -۲ ④ -۱
۱۳. $\frac{2}{3}$ عددی برابر $\frac{3}{4}$ عدد دیگر است، اگر مجموع این دو عدد ۱۳۶ باشد، عدد کوچک‌تر کدام است؟
 (سراسری انسانی-۸۸)
- ① ۷۲ ② ۶۰ ③ ۶۴ ④ ۴۰

۱۴. در قلکی، تعدادی سکه‌ی ۵، ۱۰ و ۲۵ تومانی وجود دارد. اگر تعداد هر سه نوع سکه با هم مساوی و در مجموع، ۲۴۰ تومان در

قلک باشد، تعداد سکه‌های ۱۰ تومانی موجود در قلک، کدام است؟ (زمن کنون-۹۳)

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۱۵. محیط یک مستطیل ۸۲ واحد است. اگر از طول آن ۷ واحد کم کنیم باقی مانده یک مربع می‌شود. ضلع کوچک‌تر این مستطیل

کدام است؟ (سواری اسان-۸۲)

- ۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۱۶. نرخ کرایه‌ی نوعی سواری برای هر کیلومتر طی مسافت، مبلغ ۱۵۰۰ ریال به اضافه ورودی ثابت ۶۰۰۰ ریال بوده، با پرداخت

مبلغ ۳۰۰۰۰ ریال، از این نوع سواری «چند کیلومتر» می‌توان استفاده نمود؟ (زادگان-۸۵)

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۱۷. یک شرکت کرایه دهنده‌ی ماشین، برای کرایه‌ی هر روز ماشین‌های خود ۳۰ هزار تومان و برای هر کیلومتر مسافت با آن ۱۵۰

تومان دریافت می‌کند، اگر فردی یکی از ماشین‌های این شرکت را دو روز کرایه کرده باشد و ۱۰۸ هزار تومان پرداخت کرده باشد، با

این ماشین چه مسافتی را طی کرده است؟ (کتاب درسه مشابه تمرین، ۴-صفحه‌های ۳۱)

- ۱) ۳۲۰ کیلومتر ۲) ۱۸۰ کیلومتر ۳) ۲۰۰ کیلومتر ۴) ۲۴۰ کیلومتر

۱۸. دو شمع هم‌طول را در یک لحظه روشن می‌کنیم، شمع اول در ۴ ساعت می‌سوزد و شمع دوم در ۳ ساعت، با فرض آنکه هر شمع

با سرعت ثابتی بسوزد، پس از گذشت چند ساعت، طول شمع اول دو برابر طول شمع دوم می‌شود؟ (کتاب درسه مشابه تمرین، ۳-صفحه‌های ۳۱)

- ۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $2\frac{2}{5}$ ۳) ۲ ۴) $2\frac{1}{2}$

۱۹. علی و حمید در مدت ۳ دقیقه با سرعتی ثابت از یک نقطه شروع به دویدن در مسیری مستقیم می‌کنند. در انتهای زمان تعیین

شده علی به اندازه‌ی $\frac{1}{4}$ کل مسافتی که حمید در این مدت زمان طی کرده، از او جلوتر است. ۱۵ برابر مسافتی که علی در این

مدت زمان طی کرده از ۱۲ برابر آن ۱۸ واحد بیش‌تر است. مسافتی که حمید در این مدت زمان طی کرده، چند واحد است؟

(زمن کنون-بهمین، ۹۰)

- ۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۱۴ ۴) ۴

۲۰. اگر طول مستطیلی را ۲ سانتی‌متر بیش‌تر و عرض آن را یک سانتی‌متر کمتر کنیم، یا طول آن ۲ سانتی‌متر کمتر و عرض آن را ۲

سانتی‌متر بیش‌تر کنیم، مساحت آن تغییر نمی‌کند. مساحت این مستطیل چند سانتی‌متر مربع است؟ (کتاب درسه مشابه تمرین، ۹-صفحه‌های ۳۳)

- ۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

یادداشت:

یادداشت:

معادله‌ی درجه‌ی ۲

معادله‌هایی به فرم $x^2 = -x + 1$ ، $x^2 - 1 = 0$ و $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x = 0$ را معادله‌ی درجه‌ی دوم گویند.

تعریف: به‌طور کلی هر معادله به شکل کلی $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن a ، b و c اعداد حقیقی باشند و $a \neq 0$ باشد را معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌گویند. در حقیقت اگر در یک معادله بعد از ساده‌سازی بزرگ‌ترین توان x برابر ۲ باشد، معادله‌ی درجه‌ی دوم است.

روش‌های حل معادله‌ی درجه‌ی دوم

منظور از حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، پیدا کردن مقادیری است که به‌ازای آن معادله برقرار شود. معادله‌ی درجه‌ی دوم را به روش‌های زیر می‌توان حل کرد:

۱- روش حدسی ۲- روش تجزیه ۳- روش مربع کامل ۴- روش کلی (روش Δ)

۱- روش حدسی:

در این روش عبارت درجه‌ی دوم را به‌ازای x ‌های مختلف به‌دست می‌آوریم. هرچه به صفر نزدیک‌تر شویم، یعنی به جواب معادله نزدیک‌تر شده‌ایم. اگر به‌ازای دو عدد x_1 و x_2 علامت عبارت درجه‌ی دوم تغییر کرد، جواب معادله بین x_1 و x_2 است. به مثال زیر دقت کنید.

مثال

جواب‌های معادله‌ی $2x^2 - 7x = -3$ را به‌دست آورید.

کله‌پس‌خ: ابتدا تمامی عبارات را به یک سمت تساوی منتقل می‌کنیم.

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

حال به جدول روبه‌رو دقت کنید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$2x^2 - 7x + 3$	۲۵	۱۲	۳	-۲	-۳	۰

علامت عبارت عوض شده است

همان طور که در بالا مشاهده می‌کنید، به ازای $x = 3$ عبارت درجه دوم $2x^2 - 7x + 3$ برابر صفر شده است. پس $x = 3$ یکی از جواب‌های معادله است. از طرف دیگر، به ازای $x = 0$ و $x = 1$ ، علامت عبارت عوض شده است. پس جواب دیگر معادله بین این دو عدد است.

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 3 = 0 \rightarrow \text{جواب دیگر معادله} = \frac{1}{2}$$

۲- روش تجزیه:

در فصل اول با اتحادهای جبری آشنا شدید. بعضی از معادلات درجه‌ی دوم را می‌توان با فاکتورگیری و یا استفاده از اتحادهای جبری تجزیه نمود.

نکته:

اگر $a \times b = 0$ باشد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $a = 0$ یا $b = 0$.

یادآوری: اتحادهای زیر را به یاد داشته باشید:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

مثال

معادلات زیر را حل کنید.

$$1) 2x^2 - 7x = 0$$

$$۲) x^2 - 4x = -4$$

$$۳) 9x^2 - 1 = 0$$

$$۴) x^2 = 6x - 5$$

◀ نکته:

۱- اگر $b = 0$ باشد، معادله را می توان به روش ریشه گیری حل نمود.

۲- در معادله ی درجه ی دوم اگر $c = 0$ باشد، بهتر است از روش فاکتورگیری و اگر $b = 0$ باشد، از روش ریشه گیری معادله را حل کنید.

مثال

معادله ی زیر را حل کنید.

$$x^2 - 16 = 0$$

فعالیت

طرف دوم تساوی های زیر را به کمک اتحادهای خوانده شده کامل کنید:

الف) $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = \dots + \dots + \frac{1}{4}$

ب) $(2 + \dots)^2 = \dots + 12xy + \dots$

پ) $(x - 2y)(\dots + \dots) = x^2 - 4y^2$

ت) $x^2 - \dots + 12 = (x - 6)(x - 2)$

ث) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \dots + \frac{9}{4}$

مطابق نمونه، اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول را که مناسب برای حل معادله درجه دوم در ستون بعدی است، با یک خط به یکدیگر وصل کنید. سپس معادله فوق را در ستون آخر حل کنید.

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم
اتحاد مربع تفاضل دو جمله	$x^2+6x=0$	$x^2+6x=0 \Rightarrow x(x+6)=0$ $\Rightarrow x=0$ یا $x=-6$ پس معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
عامل یابی (فاکتورگیری)	$x^2+6x+9=0$	$x^2+6x+9=(x+3)^2=0 \Rightarrow$ $(x+3)(x+3)=0 \Rightarrow x=-3$ یا $x=-3$
اتحاد جمله مشترک	$x^2-16=0$	روش ۱: $x^2-16=0 \Rightarrow (x-4)(\dots)=0$ $\Rightarrow x= \dots$ یا \dots روش ۲: $x^2-16=0 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow \dots$
اتحاد مربع مجموع دو جمله	$x^2+5x+6=0$	$(x+3)(\dots)=0$
اتحاد مزدوج و روش ریشه گیری	$x^2-10x+25=0$	

۱. با توجه به معادله‌های فوق در حالت کلی در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$:

(الف) اگر $c=0$ از کدام روش بالا استفاده می‌کنید؟

(ب) در چه صورتی از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنید؟

(پ) برای حل معادله درجه دو به کمک اتحاد مزدوج یا ریشه‌گیری، b در چه شرطی صدق می‌کند؟
آیا علامت‌های a و c مهم است؟

(ت) در کدام یک از اتحادهای فوق جواب معادله، ریشه مضاعف محسوب می‌شود؟

۲. آیا می‌توانید معادله درجه دومی بنویسید که جواب نداشته باشد؟ دو نمونه آن را مشخص کنید.

 کار در کلاس

با استفاده از اتحادهای صفحه قبل معادله‌های زیر را حل کنید:

$$1) x^2 + 3x - 4 = 0$$

از اتحاد یک جمله مشترک، تساوی را تجزیه کنید:

$$\Rightarrow (x \dots)(x \dots) = 0$$

$$\Rightarrow (x - \dots) = 0 \text{ یا } (x \dots) = 0 \Rightarrow x = \dots \text{ یا } x = \dots$$

$$2) 4x^2 - (2-x)^2 = 0$$

با استفاده از اتحاد ... عبارت جبری سمت چپ تساوی را تجزیه می‌کنیم:

$$(2x - (2-x))(2x + (2-x)) = 0 \Rightarrow \dots$$

 تمرین

۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $2x^2 - 8 = 0$

ب) $(x+2)(x-3) = x-3$

پ) $x^4 - 2x^2 = 0$

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

ت) $x^2 = x - \frac{1}{4}$

ث) $2x^2 - 8x = 0$

ج) $x^2 - 5x + 6 = 0$

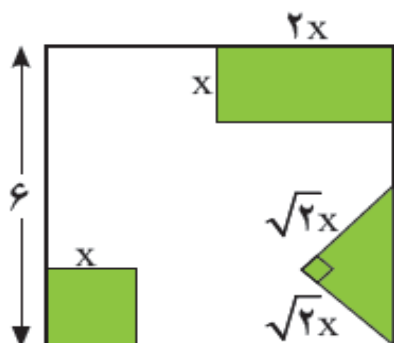
ج) $\frac{x^2}{3} = x$

ح) $x^2 = 5 - x^2$

خ) $x^2 + 4x + 4 = 0$

د) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

ذ) $(x - 3)^2 = 4$



۲. از مربعی به ضلع 6cm سه شکل روبه‌رو بریده شده است. مساحت باقی‌مانده 24cm^2 است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟

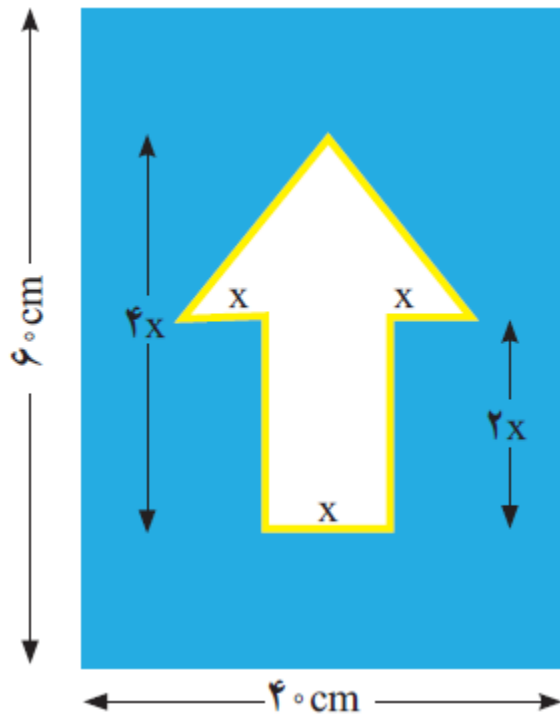
۳. معادله درجه دومی بنویسید که $x=2$ و $x=-3$ جواب‌های آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

۴. معادله درجه دومی بنویسید که $x=1$ ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

۵. در معادله $(x-1)^2 = K$:

- الف) جواب این معادله را در صورت وجود به ازای $K=2$ ، $K=4$ ، $K=0$ ، و $K=-9$ به دست آورید.
- ب) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه مضاعف دارد؟
- پ) به ازای چه مقادیری از k معادله دو ریشه حقیقی دارد؟
- ت) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه (حقیقی) ندارد؟

۶. برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» روی یک پل، مطابق شکل زیر از برچسب‌های آبی و سفید استفاده می‌شود. هزینه 1 cm^2 برچسب سفید 3° تومان و هزینه 1 cm^2 برچسب آبی 1° تومان است. مجموع هزینه برچسب‌های سفید و آبی $27,000^\circ$ تومان شده است.



الف) اندازه x چقدر است؟

ب) اگر در این تابلوی راهنمایی، مطابق شکل روبه‌رو از خطوط برچسب شبرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه 1 cm آن 100° تومان است، هزینه رنگ‌آمیزی تابلو $34,800^\circ$ تومان می‌شود. در این حالت اندازه x چقدر است؟

۳- روش مربع کامل کردن

تبدیل یک معادله‌ی درجه‌ی دوم را به فرم $(x+h)^2 = k$ را مربع کامل کردن می‌گویند. برای حل یک معادله‌ی درجه‌ی دوم به روش مربع کامل کردن، مراحل زیر را طی می‌کنیم.

مثال

معادله‌ی $2x^2 + 7x - 4 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

کسر پاسخ:

۱- ابتدا جمله‌ای که فاقد x است را به سمت راست تساوی منتقل کرده و طرفین معادله را به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم. (ضریب x^2 را یک می‌کنیم):

$$2x^2 + 7x - 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} \frac{2x^2}{2} + \frac{7x}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{7}{2}x = 2$$

۲- به طرفین تساوی «نصف ضریب x به توان ۲» را اضافه می‌کنیم.

$$x^2 + \frac{7}{2}x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{7}{2}x = 2 \xrightarrow{\text{طرفین به اضافه } \left(\frac{7}{4}\right)^2} x^2 + \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

۳- عبارت سمت چپ مربع کامل است. با تبدیل آن به مربع کامل و ریشه‌گیری، معادله را حل می‌کنیم.

$$x^2 + 2\left(\frac{7}{4}\right)x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 2 + \frac{49}{16} \Rightarrow \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} = \left(\frac{9}{4}\right)^2 \Rightarrow x + \frac{7}{4} = \pm \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-7}{4} - \frac{9}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \\ x_2 = \frac{-7}{4} + \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

کار در کلاس

با محاسبه مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادله درجه دو، در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجه به دست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

مسابقه

$$2) 3x^2 - 2 = 6x$$

تمرین

معادله‌های درجه دو زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2 - 5x + 6 = 0$

ب) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

پ) $x^2 + \frac{1}{4} = -x$

ت) $x^2 + 6x + 9 = 0$

سوالات تستی

(آزمون کانون-۹۳)

۲۲. به ازای کدام مقدار m ، معادله $mx^2 + (m-1)x - 4x^2 - 8 = 0$ یک معادله‌ی درجه دوم نخواهد بود؟

- ① -۴ ② صفر ③ ۳ ④ ۴

(آزمون کانون-۹۴)

۲۳. اگر a ، b و c ضرایب استاندارد معادله‌ی درجه‌ی دوم زیر باشند، مقدار a چند برابر مقدار c است؟

$x(3x-2) = 7x+6$

- ① $-\frac{1}{2}$ ② -۲ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ ۱

(کتاب درسی-مشابه تمرین-۱-صفحه‌ی ۳۶)

۲۴. مجموعه جواب معادله $(2x-1)(x+3) = 0$ کدام است؟

- ① $\left\{3, \frac{1}{2}\right\}$ ② $\left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$ ③ $\left\{3, -\frac{1}{2}\right\}$ ④ $\left\{-3, -\frac{1}{2}\right\}$

(کتاب درسی-مشابه تمرین-۱-صفحه‌ی ۳۶)

۲۵. مجموعه‌ی جواب معادله $x^2 + 10x + 25 = 0$ کدام است؟

- ① $\{-5\}$ ② $\{-5, 5\}$ ③ $\left\{\frac{1}{5}\right\}$ ④ $\left\{-\frac{1}{5}, +\frac{1}{5}\right\}$

(آزمون کانون-۹۴)

۲۶. معادله $-1 + 6x - 9x^2 = 0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

- ① دو ریشه‌ی متمایز و هم‌علامت ② دو ریشه مختلف‌العلامت
③ یک ریشه ④ ریشه ندارد

کتاب درسی - مشابه تمرین ۱ - صفحه ۳۶

۲۷. مجموع جواب‌های معادله $3x^2 - 6x = 0$ کدام است؟

- ① -۲ ② ۲ ③ ۶ ④ -۶

کتاب درسی - مشابه تمرین ۱ - صفحه ۳۶

۲۸. حاصل ضرب جواب‌های معادله $9x^2 - 1 = 0$ کدام است؟

- ① ۹ ② -۹ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$

آزمون کنون - ۹۳

۲۹. اگر $a - 2 \neq 0$ باشد، معادله $ax^2 + 6 = 2x^2 + 3a$ چند جواب دارد؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ جواب ندارد.

سراسری (نسله ۶۷)

۳۰. ریشه‌های معادله $7x^2 + 6x + 4 = 3x^2 + 6x + 5$ کدام‌اند؟

- ① $\frac{1}{2}, -1$ ② $-\frac{1}{2}, 1$ ③ $\frac{1}{2}, 1$ ④ $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

آزمون کنون - ۹۳

۳۱. به ازای کدام مقدار m ، معادله $x^2 - (m-1)x - m = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی فرینه دارد؟

- ① صفر ② ۱ ③ -۱ ④ ۲

آزمون کنون - ۹۳

۳۲. ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله $9(x-2)^2 - 16 = 0$ کدام است؟

- ① $\frac{2}{3}$ ② ۲ ③ $\frac{10}{3}$ ④ ۶

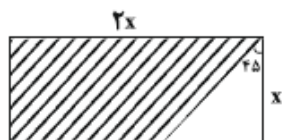
آزمون کنون - ۹۳

۳۳. طول مستطیلی ۲ برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۳۲ باشد، محیط این مستطیل کدام است؟

- ① ۱۶ ② ۳۰ ③ ۲۵ ④ ۲۴

کتاب درسی - مشابه تمرین ۲ - صفحه ۳۷

۳۴. اگر مساحت قسمت هاشور خورده برابر ۱۵۰ سانتی‌متر مربع باشد، x کدام است؟



- ① ۶ ② ۸ ③ ۱۰ ④ ۱۲

(آزمون کلون-۹۳)

۳۵. یکی از جواب‌های معادله‌ی $(2x+1)^2 - 5 = 0$ کدام است؟

- ① $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ② $\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$ ③ $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ ④ $\frac{1-\sqrt{2}}{5}$

(آزمون کلون-۹۴)

۳۶. نسبت دو عدد مثبت برابر $\frac{3}{7}$ و مجموع مربع‌های آن دو ۵۲ است. مجموع دو عدد کدام است؟

- ① ۱۰ ② ۲۴ ③ ۶ ④ ۵

(کتاب درسی مشابه تمرین ۲-صفحه‌های ۳۶)

۳۷. جواب معادله‌ی $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ کدام است؟

- ① $\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

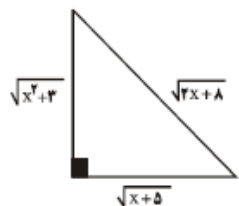
(کتاب درسی مشابه تمرین ۱-صفحه‌های ۳۶)

۳۸. مجموع جواب‌های معادله‌ی $(2x-1)^2 - 5(2x-1) = 0$ کدام است؟

- ① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $-\frac{7}{2}$ ④ $-\frac{5}{2}$

(آزمون کلون-۹۳)

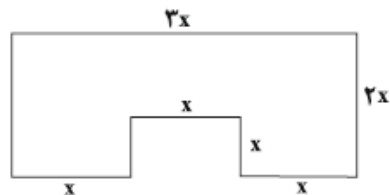
۳۹. مساحت مثلث روبه‌رو چند واحد مربع است؟



- ① $\sqrt{6}$ یا $\frac{\sqrt{15}}{2}$ ② ۵ یا ۳ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ یا $\sqrt{15}$ ④ $2\sqrt{6}$ یا $\sqrt{15}$

(کتاب درسی مشابه فعالیت ۲-صفحه‌های ۲۹)

۴۰. محیط شکل زیر با مساحت آن برابر است. x کدام است؟



- ① $2/4$ ② $1/2$ ③ ۲ ④ $0/6$

(سوالاتی انسانی-۷۳)

۴۱. حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $(x+1)(x-5) + 12(x+1) = 0$ کدام است؟

- ① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

(آزمون کلون-۹۴)

۴۲. جواب کوچک‌تر معادله‌ی زیر کدام است؟

$$(50x+28)^2 = (27x+2)^2$$

- ① ۲ ② -۲ ③ $-\frac{30}{87}$ ④ $\frac{87}{30}$

(کتاب درسی مشابه تمرین ۱-صفحه‌های ۳۶)

۴۳. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(\frac{x}{3}-1)^4 - 25(\frac{x}{3}-1)^2 = 0$ کدام است؟

- ① ۹ ② ۲۲ ③ ۲ ④ -۳

۴- روش کلی (روش Δ)

در روش کلی معادله‌ی درجه‌ی دوم، با استفاده از مربع کامل کردن، جواب‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به صورت زیر است:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

عبارت زیر رادیکال را دلتا یا مبین (Δ) می‌نامند. ($\Delta = b^2 - 4ac$)

شرایط وجود جواب

۱- اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله ۲ جواب متمایز دارد.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

۲- اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله یک جواب دارد و معادله دارای ریشه‌ی مضاعف است.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

۳- اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله جواب ندارد.

مثال:

معادلات زیر را با فرمول کلی حل کنید.

$$x^2 - x + 1 = 0 \text{ (الف)}$$

$$\text{ب) } -2x^2 + x + 3 = 0$$

$$\text{پ) } -x^2 + 4x - 4 = 0$$

خواندنی:

با استفاده از روش مربع کامل برای حل معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ روش کلی برای حل معادله به دست می‌آید. با مرور پله‌های گفته شده در بخش قبل:

۱- قرینه عدد ثابت معادله را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم:

$$ax^2 + bx = -c \quad (1)$$

۲- دو طرف معادله را به ضریب x^2 یعنی a تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (2)$$

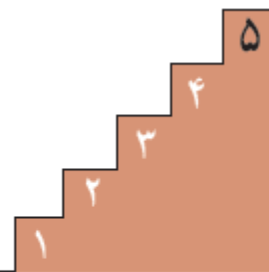
۳- ضریب $\frac{b}{a}$ را در عدد ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم و مربع عدد به دست آمده؛ یعنی $\frac{b}{2a}$ را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می‌کنیم:

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad (3)$$

۴- عبارت سمت چپ تساوی (۳) را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$



با شرط $b^2 - 4ac > 0$ و با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



۱. جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

۲. جواب‌های معادله $4x^2 + 7x - 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

۳. جواب‌های معادله $3x^2 + x + 7 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

روابط بین جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

اگر $\Delta > 0$ باشد، یعنی معادله دارای دو جواب x_1 و x_2 باشد، آنگاه بین این دو جواب و ضرایب a ، b و c روابط زیر برقرار است.

$$\text{مجموع جواب‌ها: } S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\text{حاصل ضرب جواب‌ها: } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{تفاضل جواب‌ها: } D = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

نکات:

۱- اگر $S = 0$ باشد، آنگاه معادله دو جواب قرینه دارد. (در صورت وجود جواب)

۲- اگر $P = 1$ باشد، آنگاه معادله دو جواب معکوس دارد. (در صورت وجود جواب)

۳- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله باشند، آنگاه روابط زیر را می‌توان به دست آورد.

$$1) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$

$$2) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P}$$

۴- تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم: با داشتن S و P ، معادله‌ی درجه‌ی دوم به صورت $x^2 - sx + P = 0$ را می‌توان تشکیل داد.

مثال

معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که جواب‌های آن $-3 \pm \sqrt{7}$ باشد.

کار در کلاس

معادله‌های زیر را حل کنید و با به دست آوردن ریشه‌های معادله، x_1 و x_2 حاصل $x_1 + x_2$ را به دست آورید.
آیا ارتباطی میان مجموع ریشه‌ها و ضرایب a, b و c در معادله درجه دو گفته شده وجود دارد؟

الف) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

ب) $4x^2 + 3x - 7 = 0$

طرح و حل چند مسئله کاربردی از معادله درجه دوم

مقدمه: در هر مسئله اقتصادی اگر x مقدار یا تعداد محصول باشد، سه تابع مهم زیر تعریف می‌شوند:

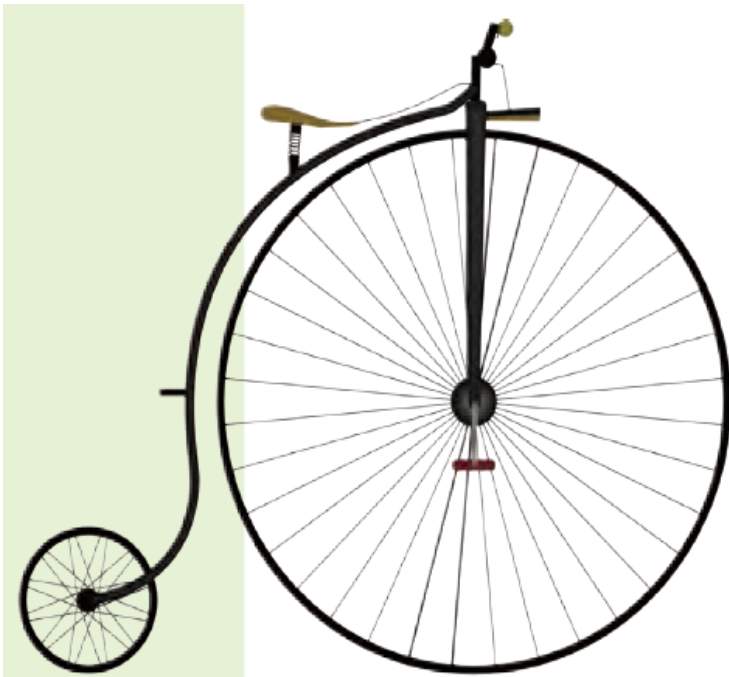
تابع هزینه (cost) یا $C(x)$: هزینه تولید x واحد کالا

تابع سود (profit) یا $P(x)$: سود حاصل از فروش x واحد کالا

تابع درآمد (Revenue) یا $R(x)$: درآمد حاصل از فروش x واحد کالا

رابطه میان ۳ تابع فوق به صورت زیر است:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow \text{هزینه} - \text{درآمد (فروش)} = \text{سود}$$



فرض کنید، شما یک دوچرخه جدید طراحی کرده‌اید و پس از آزمایش‌ها و تأییدهای اولیه می‌خواهید آن را به صورت انبوه تولید کنید. هزینه‌های شما شامل ۲ بخش‌اند:

۱. هزینه اولیه شامل ۷ میلیون تومان برای خرید دستگاه‌های کارخانه و تبلیغات.
۲. هزینه تولید که عبارت است از ۱۱۰ هزار تومان برای ساخت هر دوچرخه.

اگر ۷ قیمت یک دوچرخه باشد و تعداد فروش دوچرخه از رابطه $2000 - 70000x$ به دست آید:

الف) تابع سود کارخانه را به دست آورید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند دوچرخه حاصل می شود؟

مسئله دوم :

در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش x چتر از رابطه $p(x) = -0.00405x^2 + 8.15x - 100$ به دست می آید.

الف) اگر این کارگاه چتری نفروشد، چقدر از دست می دهد؟



ب) نقطه سر به سر (break-even) میزانی از تولید یک بنگاه اقتصادی را نشان می دهد که در آن میزان هزینه ها با میزان درآمدها برابر می شود و بنگاه در این سطح از تولید نه سود می کند و نه ضرر. اگر تولید بیشتر از نقطه سر به سر باشد، بنگاه سود خواهد برد و اگر کمتر باشد، زیان خواهد دید.

در مثال بالا به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سر به سر خود می رسد؟ چندمین تولید چتر

تمرین

۱. معادله‌های درجه دوم زیر را حل کنید.

$$۱) x^2 - x + 5 = 0$$

$$۲) 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$۳) 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$۴) x^2 + 17x - 18 = 0$$

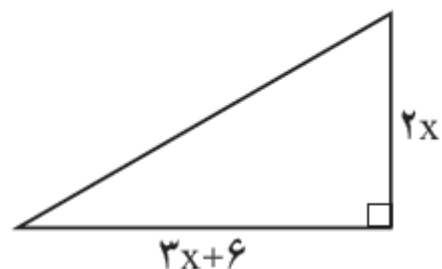
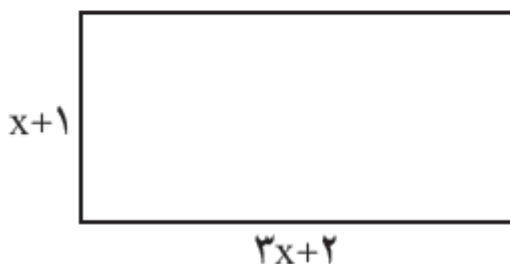
$$۵) 3x^2 - x + 4 = 0$$

$$۶) x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$$

۲. معادله $2x^2 - 3x - 5 = 0$ را به روش Δ حل کنید. با محاسبه ریشه‌های x_1 و x_2 حاصل ضرب آنها را به دست آورید.

۳. اگر یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر -4 باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

۴. مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی‌اند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟



۵. کدام یک از معادله‌های زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

الف) $x^2 + ax - 1 = 0$

ب) $x^2 - x + a = 0$

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

*۶. نشان دهید در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $a+c=b$ باشد. یکی از ریشه‌های معادله برابر $x=-1$ و دیگری $x=-\frac{c}{a}$ است.

*۷. با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ برابر $\frac{c}{a}$ است.

*۸. نشان دهید در هر معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد ($a+b+c=0$) یکی از ریشه‌های معادله $x=1$ و دیگری $x=\frac{c}{a}$ است.

سوالات تستی

۶۳. مبین معادله $6x^2 - x - 12 = 0$ برابر کدام است؟

(آزمون کنون-۹۳)

- ۱) ۷۳ ۲) ۲۸۹ ۳) -۷۱ ۴) -۲۸۷

۶۴. ریشه‌ی بزرگتر معادله $6x^2 - x - 35 = 0$ کدام است؟

(کتاب درسیه کلان کلاس - صفحه‌های ۴۳)

- ۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{7}{3}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{3}$

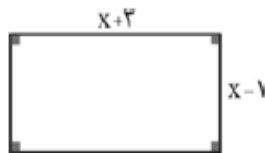
۶۵. معکوس ریشه‌ی کوچکتر معادله $x^2 - 2\sqrt{5}x + 3 = 0$ کدام است؟

(آزمون کنون-۹۴)

- ۱) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$ ۴) $\frac{-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$

۶۶. اگر مساحت مستطیل زیر ۷ واحد مربع باشد، محیط آن چند واحد است؟

(آزمون کنون-۹۵)



- ۱) $\sqrt{11}-1$ ۲) $4\sqrt{11}$ ۳) $8\sqrt{11}$ ۴) $2\sqrt{11}$

۶۷. معادله $x^2 + ax - 5 = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟

(کتاب درسیه کلان کلاس - صفحه‌های ۴۴)

- ۱) دو جواب ۲) معادله جواب ندارد.
۳) یک ریشه ۴) بستگی به مقدار a دارد.

۶۸. معادله $(a^2 + 1)x^2 - 2ax - 1 = 0$ همواره ...

(آزمون کنون-۹۶)

- ۱) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه دارد. ۲) دو ریشه‌ی مثبت دارد.
۳) ریشه‌ی مضاعف دارد. ۴) ریشه ندارد.

۶۹. به ازای کدام مقادیر a ، معادله $3x^2 + ax - 3 = 0$ دو جواب حقیقی و متمایز دارد؟

(آزمون کنون-۹۷)

- ۱) هر مقدار a ۲) هیچ مقدار a ۳) فقط $a = \pm 6$ ۴) فقط $a > 6$

۷۰. برای آن که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 - 3x + 1 = 0$ دو جواب حقیقی متمایز داشته باشد، محدوده‌ی a کدام است؟

(آزمون کنون-۹۴)

- ① $a > \frac{9}{4}$ ② $a > -\frac{9}{4}$ ③ $a < \frac{9}{4}$ ④ $a < 3$

۷۱. معادله‌ی $x^2 + 3x - k = 0$ در چه شرایطی همواره دو جواب حقیقی متمایز دارد؟

(آزمون کنون-۹۳)

- ① $k \geq \frac{-9}{4}$ ② $k \leq \frac{9}{4}$ ③ $k > \frac{-9}{4}$ ④ $k < \frac{9}{4}$

۷۲. معادله‌ی درجه‌ی دوم $x(2x - 5) = a$ به ازای یک مقدار a ریشه‌ی مضاعف دارد، مقدار ریشه‌ی مضاعف کدام است؟ (سواری آسان-۹۳)

- ① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$

۷۳. اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 - 12x + 9 = 0$ تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد، یک ریشه‌ی این معادله کدام است؟ (خارج کشور-۸۸)

- ① $-\frac{3}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 3

۷۴. به ازای کدام مقدار k ، معادله‌ی $2x^2 + 3x - k + 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی مساوی است؟ (آزمون کنون-۹۳)

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{8}$ ④ $-\frac{3}{5}$

۷۵. به ازای چه مقدار a ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 4x - a - 1 = 0$ مساوی اند؟ (سواری آسان-۹۷)

- ① -5 ② -3 ③ 1 ④ 2

۷۶. به ازای کدام مقدار m معادله‌ی $x^2 + (m-1)x + 1 = 0$ ریشه‌ی مضاعف دارد؟ (آزمون کنون-۹۴)

- ① -3 ② 1 ③ 3 ④ 0

۷۷. به ازای چه مقدار a ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2 = 0$ با هم برابرند؟ (سواری آسان-۹۸)

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3

(آزمائشنامه-۸۰)

۷۸. ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $mx^2 - mx + 1 = 0$ (که $m \neq 0$) کدام است؟

- ① ۴ ② ۱ ③ $\frac{1}{2}$ ④ صفر

(آزمائشنامه-۸۲)

۷۹. به ازای چه مقدار n معادله‌ی $m^2x^2 - 6mx + 2m + n = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف $\frac{3}{4}$ است؟

- ① ۴ ② ۳ ③ ۲ ④ ۱

(آزمائشنامه-۷۸)

۸۰. دو ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $x^2 - 2mx + 3m = 0$ با هم مساوی بوده، ریشه‌ی معادله‌ی کدام قدر است؟

- ① ۳ ② ۴ ③ ۶ ④ ۹

(آزمون کنکور-۹۳)

۸۱. کدام یک از معادلات زیر دارای ریشه‌ی حقیقی نیست؟

① $-3x^2 - 5x + 4 = 0$ ② $x^2 + 9x + 11 = 5x - 2$

③ $x^2 - 4x + 3 = 3x^2 - 1$ ④ $x^2 + 3x - 5 = x^2 + 7$

(آزمون کنکور-۹۴)

۸۲. اگر معادله‌ی $x^2 - x + 2m - 1 = 0$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، حدود m کدام است؟

- ① $m < \frac{5}{8}$ ② $m < -\frac{1}{2}$ ③ $m > \frac{5}{8}$ ④ $m > -\frac{1}{2}$

(آزمائشنامه-۷۸)

۸۳. معادله‌ی $(x+2)(x+1) = x(1-x)$ دارای ...

- ① دو ریشه‌ی متمایز منفی است ② یک ریشه است.
③ ریشه‌ی حقیقی نیست ④ دو ریشه‌ی مختلف علامه است.

(آزمون کنکور-۹۳)

۸۴. در کدام یک از معادلات زیر مجموع ریشه‌ها از حاصل ضرب آن‌ها بزرگ‌تر است؟

① $2x^2 = 13 - 7x$ ② $x^2 + 4x = 3$ ③ $-x^2 - 6x = -3$ ④ $x^2 + 4 = 2x$

(سراسری آزمون-۷۷)

۸۵. یکی از جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2 + kx - 10 = 0$ برابر ۵ است. جواب دیگر این معادله کدام است؟

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$

۸۶. اگر مجموع ریشه‌های یک معادله‌ی درجه‌ی دوم ثلث حاصل ضرب آن‌ها و یک ریشه برابر ۴ باشد، ریشه‌ی دیگر کدام است؟

(سراسری آزمون-۷۴)

- ① ۶ ② ۸ ③ ۱۰ ④ ۱۲

(آزمون کنکور-۹۳)

۸۷. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x(7-4x) = 1-2x^2$ باشند، حاصل $\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$ کدام است؟

- ① ۲۶ ② $\frac{1}{26}$ ③ ۷ ④ $\frac{1}{7}$

۸۸. در معادله ی $x^2 + (1-m)x + 2m = 0$ مجموع ریشه ها برابر حاصل ضرب ریشه هاست. m کدام است؟ (سوالاتی استانی-۶۳)

- ① -۲ ② -۱ ③ ۱ ④ ۲

۸۹. اگر $x = -\frac{1}{4}$ یکی از ریشه های معادله ی $4x^2 - 2ax + a = 1$ باشد، حاصل ضرب ریشه های این معادله کدام است؟ (آزمون کلون-۹۴)

- ① $2/5$ ② $-1/5$ ③ $1/4$ ④ $-1/8$

۹۰. به ازای یک مقدار m ، ریشه های معادله ی $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ ، معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه، کدام است؟ (خارج کشور-۹۵)

- ① $-1/5$ ② $1/5$ ③ ۲ ④ ۳

۹۱. یکی از جواب های معادله ی $(m-1)x^2 - 7x + 2m = 0$ برابر با ۲ بوده، جواب دیگر این معادله چه قدر است؟ (آلاتانی-۷۸)

- ① $3/2$ ② ۳ ③ $7/2$ ④ ۱

۹۲. در معادله ی درجه دوم $4x^2 + kx = 21$ ، اگر مجموع دو ریشه، برابر ۲- باشد، ریشه ی بزرگتر کدام است؟ (خارج کشور-۸۷)

- ① $3/4$ ② $3/2$ ③ $7/4$ ④ $7/2$

۹۳. در معادله ی درجه ی دوم $2x^2 + kx + 1 - k = 0$ ، اگر حاصل ضرب دو ریشه برابر ۵ باشد، ریشه ی بزرگتر، کدام است؟ (خارج کشور-۹۴)

- ① $2/5$ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

۹۴. در معادله ی درجه دوم $2x^2 + ax + 4 = 0$ ، به ازای یک مقدار a مجموع دو ریشه ی حقیقی معادله $\frac{-9}{2}$ است. ریشه ی بزرگتر کدام است؟ (خارج کشور-۹۵)

- ① $-3/2$ ② $-1/2$ ③ $1/2$ ④ $3/2$

۹۵. در معادله ی درجه دوم $x^2 - (b-2)x + 2b = 0$ مجموع ریشه ها برابر ۱۰ است. ریشه ی بزرگتر کدام است؟ (سوالاتی استانی-۸۴)

- ① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

یادداشت:

یادداشت:

درس ۳

معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

معادله‌هایی که در آنها عبارت‌های گویا وجود داشته باشند، معادلات شامل عبارت‌های گویا می‌نامند.

برای حل این معادلات، ابتدا همه‌ی عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله منتقل می‌کنیم، سپس با مخرج مشترک گیری و ساده کردن عبارت‌های جبری به دست آمده به معادله‌ای نظیر معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

از قبل می‌دانیم کسری برابر صفر است که صورتش برابر صفر باشد، در نتیجه معادله‌ی زیر را حل می‌کنیم:

$$P(x) = 0 ; Q(x) \neq 0$$

جواب‌های بدست آمده از این معادله، نباید مخرج کسر را صفر کند، بنابراین بین جواب‌های به دست آمده، آنهایی را قبول می‌کنیم که مخرج

هیچ یک از کسرهای صفر نکند.

مثال

هریک از معادله‌های زیر را حل کنید:

$$1) \frac{2x+4}{x+2} = 1$$

حل:

$$\frac{2x+4}{x+2} = 1 \Rightarrow 2x+4 = (1) \times (x+2)$$

$$\Rightarrow 2x+4 = x+2$$

$$\Rightarrow 2x-x = 2-4$$

$$\Rightarrow x = -2$$

$x = -2$ مخرج کسر $\frac{2x+4}{x+2}$ را صفر می‌کند و جواب قابل قبول نیست. این معادله جواب ندارد.

$$2) \frac{x+5}{3x+15} = \frac{1}{3}$$

حل:

$$\frac{x+5}{3x+15} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3 \times (x+5) = (1) \times (3x+15)$$

$$\Rightarrow 3x+15 = 3x+15$$

$$\Rightarrow 3x = 3x$$

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، تساوی $3x = 3x$ برقرار است، این معادله بی‌شمار (بی‌نهایت) جواب دارد.

$$3) \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5 &\Rightarrow \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} - 5 = 0 \\ &\Rightarrow \frac{(x+3)(3x-2) + x(2x+5) - 5(x)(x+3)}{x(x+3)} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{(3x^2 - 2x + 9x - 6) + (2x^2 + 5x) - 5x^2 - 15x}{x(x+3)} = 0 \end{aligned}$$

کسری مساوی صفر است که صورتش مساوی صفر باشد.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3x^2 + 7x - 6 + 2x^2 + 5x - 5x^2 - 15x &= 0 \\ \Rightarrow -3x - 6 &= 0 \\ \Rightarrow -3x &= 6 \\ \Rightarrow x &= -2 \end{aligned}$$

 $x = 2$ مخرج کسر را صفر نمی کند، پس جواب معادله است.

$$4) \frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2}$$

$$5) \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$$

$$6) \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = 3x \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \right)$$

کار در کلاس

معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } 1 + \frac{8}{x^2} = \frac{4}{x}$$

$$\text{ب) } \frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$$

$$\text{پ) } \frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$$

$$\text{ت) } \frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$$

ث) به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است؟

چند مسئله کاربردی از معادله‌هایی که عبارت‌های گویا دارند

۱. گلدانی نقره داریم که نسبت وزن نقره خالص به وزن مس خالص آن، برابر با ۸ است. استاد قلمکار آن را ذوب و ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرد و گلدان جدیدی ساخت. می‌دانیم $\frac{۴}{۵}$ وزن گلدان جدید، نقره است. این گلدان قبل از ذوب شدن چه وزنی داشته است.

۲. دو شیر آب A و B به یک استخر متصل اند. شیر A استخر را ۱۰ ساعت زودتر از شیر B پُر می‌کند. چنانچه دو شیر را با هم باز کنیم، آنگاه استخر در ۱۲ ساعت پُر می‌شود. اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پُر می‌شود.



۳. یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هریک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آن اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هریک به اندازه $\frac{1}{6}$ کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده اند؟^۱

تمرین

۱. معادله های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \frac{3x-5}{x+3} = 1$$

$$\text{ب) } \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$$

$$\text{پ) } \frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$$

$$\text{ت) } \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\text{ث) } \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$$

$$\text{ج) } \frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$$

۲. مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۳. هنگامی که دو چاپگر با هم کار می کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می شود. اگر چاپگر قدیمی تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می کنند؟

۴. به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t=-3$ است.

یادداشت:

تمرینات تکمیلی:

معادلات کسری زیر را حل کنید.

$$7) \frac{x}{x-3} = \frac{x+1}{x-4} ; x \neq 3, 4$$

$$8) \frac{3x-7}{4x+2} - \frac{3x-14}{4x-13} = 0 ; x \neq \frac{1}{2}, \frac{13}{4}$$

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

$$9) \frac{x-1}{x-2} + \frac{x}{x+2} - \frac{x^2+2x-4}{x^2-4} = 0 ; x \neq 2, -2$$

$$10) \frac{5}{x-2} - \frac{3}{2x+4} = \frac{3x-1}{x^2-4} ; x \neq 2, -2$$