

فصل ۲ درس ۴: نمودار تابع درجه ۲

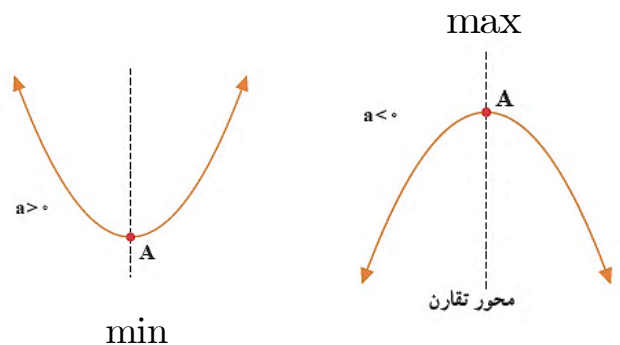
اهداف درس ۴:

- تابع درجه ۲ را تشخیص دهند.
- نمودار تابع درجه ۲ را به کمک نقطه یابی (با داشتن رأس و نقاط کمکی طرفین) رسم کنند.
- طرح وحل مسائل کاربردی از تابع درجه دوم

تابع درجه ۲ (سهمی)

۱. هر تابع به شکل $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

را یک تابع درجه ۲ می نامیم که نمودار آن سهمی است و به یکی از دو صورت زیر است:



۲. در شکل های فوق، نقطه A یا S رأس سهمی می باشد.

۳. اگر در معادله سهمی $a > 0$ باشد دهانه سهمی رو به بالا است و A پائین ترین نقطه سهمی است و سهمی مینیمم (\min) دارد

۴. اگر در معادله سهمی $a < 0$ باشد A بالاترین نقطه سهمی است و سهمی مینیمم (\max) دارد و دهانه سهمی رو به پایین است.

۵. خطی که از رأس سهمی به موازات محور عرض ها رسم می شود، محور تقارن سهمی است. و معادله آن با طول راس سهمی فرقی ندارد

۵. هر سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ رأسی به

مختصات $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ یا $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ و خط تقارنی به معادله $x = -\frac{b}{2a}$ دارد.

۶. هر سهمی به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، رأسی به مختصات (h, k) و خط تقارنی به معادله $x = h$ دارد.

(گاردور گلابی ص ۶۷)

نقاط رأس سهمی هایی را که معادله های آنها داده شده است، مشخص کنید.

✓ حل: ابتدا مقدار a, b را مشخص می کنیم سپس از فرمول

مختصات راس سهمی را می یابیم.

$$\text{الف) } y = x^2 \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(1)} = 0 \\ y &= x^2 \xrightarrow{x=0} y = (0)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow S = (0, 0)$$

$$\text{ب) } y = 4 - x^2 \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(-1)} = 0 \\ y &= 4 - x^2 \xrightarrow{x=0} y = 4 - (0)^2 = 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow S = (0, 4)$$

$$\text{پ) } y = 2x^2 - 4x + 1$$

① نمودار توابع $y = -x^2 + 6x - 10$, $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.

$$y = 2(x - 1)^2 + 1$$

رسم نمودار تابع درجه دو (سهی):

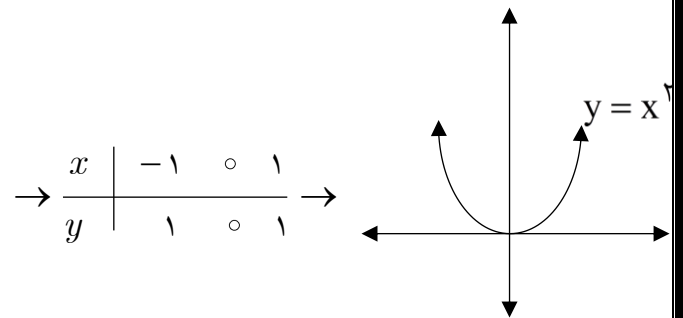
برای رسم معادلات سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ کافیست پس از پیدا کردن مختصات رأس سهمی یک واحد کمتر و یک واحد بیشتر از طول را دوطرف آن قرار داده و عرض نقاط را بیابیم

(گاردوگلاسی هی ۶۶ و ۶۹ و ۶۷)

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2$ را رسم کنید.

$$f(x) = x^2 \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(1)} = 0 \\ y &= x^2 \xrightarrow{x=0} y = (0)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow S = (0, 0)$$



نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4 - x^2$ را رسم کنید.

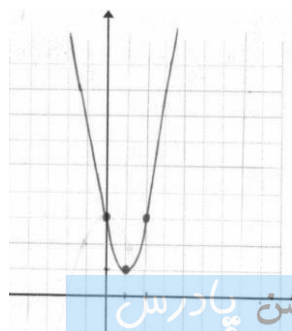
② نمودار توابع $y = -x^2 + 6x + 10$, $y = x^2 + 4x - 2$ را رسم کنید.

(گاردوگلاسی هی ۶۸)

الف) نمودار تابع با ضابطه $y = 2(x - 1)^2 + 1$ را رسم کنید.

$$y = 2(x - 1)^2 + 1 \rightarrow S(h, k) = (1, 1)$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 3 & 1 & 3 \\ \hline & \searrow & & \swarrow \\ & & a+k & \end{array}$$



محاسبه ماکزیمم (بیشترین) و مینیمم (کمترین) سهمی:

برای یافتن ماکزیمم (بیشترین) و مینیمم (کمترین) سهمی

کافیست عرض راس سهمی (y) را بیابیم که برای به دست

آوردن آن، باید طول راس سهمی ($x = -\frac{b}{2a}$) را در ضابطه

سهمی ($y = ax^2 + bx + c$) قرار دهیم یا مقدار

$$y = \frac{-\Delta}{4a}$$

بیابیم.

✓ نکته: ماکزیمم (کمترین) و مینیمم (بیشترین) سهمی

به شکل $y = a(x - h)^2 + k$ برابر k می باشد.

(تمرین ۳ و ۴ ص ۷۰)

③ محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع

آن را با x و مساحت آن را با S نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع

مساحت را بر حسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار

مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل

ماکسیمم می شود.

✓ حل:

$$2(x + y) = 26 \Rightarrow x + y = 13 \Rightarrow S = xy = x(13 - x) = 13x - x^2$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-13}{-2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

$$f\left(\frac{13}{2}\right) = \frac{169}{4} = 42.25$$

x	6	6.5	7
P(x)	42	42.25	42

$$x = 6.5$$



④ اگر $2x + a = 100$ باشد x, a را طوری بیابید که

$$y = xa \text{ ماکسیمم شود}$$

$$a = 100 - 2x$$

$$y = xa = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$$

✓ حل:

$$x = \frac{-b}{2a} = 25$$

$$a = 100 - 2(25) = 50$$

ب) نمودار تابع با ضابطه $y = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 + 5$ را رسم کنید.

تمرین ۱ ص ۷۰: Homework

① نمودار سهمی های به معادله های

$$y = -(x - 1)^2 + 1, y = x^2 + 4x + 1, y = x^2 - 2x$$

را رسم کنید.

طرح و حل مسائل کاربردی از تالیف درجه دوم:

رابطه مهم در حل مسائل بازار یابی:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow \text{هزینه} - \text{درآمد (فروش)} = \text{سود}$$

۱. نقطه سر به سر یعنی میزان هزینه بامیزان درآمد برابر میشود و بنگاه در این سطح از تولید نه سود می کند و نه ضرر.
۲. برای آغاز سود دهی (نقطه سر به سر) باید $P(x) = 0$ یا $R(x) = C(x)$ را به دست آوریم
۳. اگر تولید بیشتر از نقطه سر به سر شود، بنگاه سود می کند و اگر کمتر باشد، بنگاه ضرر می کند.

(مسئله ص ۳۱)

در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش x چتر از

$$p(x) = -0.00405x^2 + 8/15x - 100$$

رابطه به دست می آید

الف) اگر این کارگاه چتری نفروشد، چقدر از دست می دهد؟

$$\square \text{ حل: چتری نفروشد یعنی } (x = 0)$$

$$p(x) = -0.00405x^2 + 8/15x - 100$$

$$\xrightarrow{x=0} p(0) = -0.00405(0)^2 + 8/15(0) - 100$$

$$\rightarrow p(0) = -100$$

۱۰۰ واحد از دست می دهد.

ب) به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سر به سر خود می رسد؟

$$\square \text{ حل: نقطه سر به سر یعنی } P(x) = 0$$

$$p(x) = -0.00405x^2 + 8/15x - 100 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = 64/8.25} \begin{cases} x = 200 \\ x = 12/3 \end{cases}$$

(تمرین ۷ ص ۶۲)

⑦ یک شرکت برای تولید x کالا، $C(x) = 3000 + 50x$

تومان هزینه می کند و هر کالا را ۷۰ تومان می فروشد.

الف) تابع سود را تعیین کنید.

ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سود دهی آغاز شود؟

(تمرین ۲ و ۵ ص ۷۰)

② اگر تابع درآمد به صورت $y = -\frac{1}{2}x^2 + 30x$ و

تابع هزینه به صورت $y = 18x + 40$ باشد، ماکسیم سود را مشخص کنید.

⑤ یک کارخانه تولیدی، هر لامپ را ۲۰۰ تومان می فروشد. اگر

در هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد. و تابع هزینه آن

$$C(x) = x^2 + 40x + 100 \text{ باشد:}$$

الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.

ب) این کارخانه چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود

را به دست آورد؟

پ) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟