



درس ۱

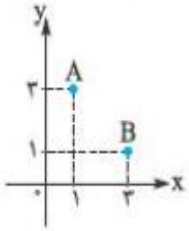
مفهوم تابع

بیان مفاهیم اولیه:

زوج مرتب

اگر دو عدد a و b با ترتیب خاصی کنار هم قرار گیرند زوج مرتب‌های (a, b) و (b, a) ایجاد می‌شوند. هر زوج مرتب در صفحه‌ی مختصات، نمایشگر یک نقطه‌ی منحصر به فرد است.

در زوج مرتب (a, b) عدد a طول و عدد b عرض نقطه است. (به a عضو اول یا مؤلفه‌ی اول و به b عضو دوم یا مؤلفه‌ی دوم هم می‌گویم). در شکل مقابل دو نقطه‌ی $A(1, 2)$ و $B(2, 1)$ نمایش داده شده‌اند. واضح است که A و B بر هم منطبق نیستند. بنابراین $(1, 2) \neq (2, 1)$ ، پس در حالت کلی $(a, b) \neq (b, a)$



شرط مساوی بودن دو زوج مرتب

دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) در صورتی با هم مساوی‌اند که: $a = c$ و $b = d$ ؛ یعنی باید عضوهای اول با هم و عضوهای دوم نیز با هم مساوی باشند.

مثال جواب

مثال اگر دو زوج مرتب $(4x - 2, 5y + 7)$ و $(3x + 1, 8y - 3)$ با هم مساوی باشند، مقادیر x و y را به دست آورید.

جواب

$$\text{تساوی عضوهای اول} \Rightarrow 4x - 2 = 3x + 1 \Rightarrow 4x - 3x = 2 + 1 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{تساوی عضوهای دوم} \Rightarrow 5y + 7 = 8y - 3 \Rightarrow 5y - 8y = -7 - 3 \Rightarrow -3y = -10 \Rightarrow y = \frac{10}{3}$$

مفهوم رابطه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. هر مجموعه شامل زوج مرتب‌هایی به صورت (a, b) که در آن‌ها $a \in A$ و $b \in B$ باشد، یک رابطه از A به B می‌باشد ($A \rightarrow B$). مثلاً اگر $A = \{2, 3, 5, 7\}$ و $B = \{5, 9, 12\}$ باشند، آن‌گاه $R = \{(2, 12), (7, 9), (2, 5)\}$ رابطه‌ای از A به B است، زیرا عضوهای اول زوج مرتب‌ها از A و عضوهای دوم آن‌ها از B انتخاب شده‌اند.

روش‌های نمایش یک رابطه

① روش جدولی: در این روش، عضوهای مجموعه‌ی اول را در یک ردیف و عضوهای مربوط به آن‌ها از مجموعه‌ی دوم را در ردیف زیر آن می‌نویسیم. مثلاً فرض کنید بادکنکی در حال پُرفتن باشد. در ثانیه‌ی اول ۵ متر مکعب، در ثانیه‌ی دوم ۱۵ متر مکعب، در ثانیه‌ی سوم ۴۰ متر مکعب و در ثانیه‌ی چهارم ۷۰ متر مکعب هوا وارد آن می‌شود. رابطه‌ی بین زمان و مقدار هوای ورودی به صورت جدول مقابل است:

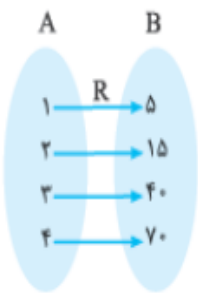
زمان (ثانیه)	۱	۲	۳	۴	$\Rightarrow A = \{1, 2, 3, 4\}$
مقدار هوای ورودی (متر مکعب)	۵	۱۵	۴۰	۷۰	$\Rightarrow B = \{5, 15, 40, 70\}$

با توجه به جدول بالا می‌توان چنین نوشت: $R: A \rightarrow B$ (رابطه، و معمولاً با حرف R نشان می‌دهیم).

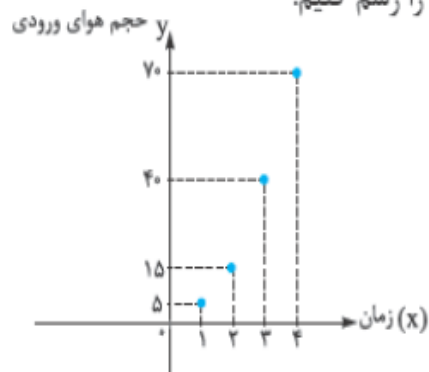
② روش استفاده از زوج مرتب‌ها: در مثال بالا می‌توانیم جدول را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بنویسیم که عضوهای اول این زوج‌ها زمان و عضوهای دوم آن‌ها مقدار هوای ورودی را نشان می‌دهند.

$$R = \{(1, 5), (2, 15), (3, 40), (4, 70)\}$$

③ روش استفاده از نمودار وین (نمودار پیکانی): در این روش از هر عضو مجموعه‌ی اول، یک فلش (پیکان) خارج شده و به عضو مربوط به خود در مجموعه‌ی دوم وارد می‌شود. در مثال بادکنک خواهیم داشت:



④ روش استفاده از نمودار در صفحه‌ی مختصات: در این نوع نمایش، هر زوج مرتب را به عنوان یک نقطه‌ی دوبعدی تصور می‌کنیم که مؤلفه‌ی اول آن، طول نقطه و مؤلفه‌ی دوم آن، عرض نقطه می‌باشد. برای مثال بادکنک، می‌توانیم نمودار زیر را رسم کنیم:



فعالیت

- می‌دانیم مساحت دایره از تساوی $S = \pi \times r^2$ به دست می‌آید. در این رابطه π عددی ثابت است که تقریباً $\pi = 3/14$ در نظر گرفته می‌شود و شعاع دایره است:
۱. آیا متغیر S تابعی از شعاع دایره است؟
 ۲. آیا محیط دایره نیز تابعی از شعاع است؟
 ۳. کدام متغیر، مستقل و کدام متغیر، وابسته است؟
 ۴. جدول زیر را کامل کنید.

r بر حسب سانتی‌متر (شعاع)	۱	۱/۵	۲	۳	۴
S بر حسب سانتی‌متر مربع (مساحت)	π	...	4π
P بر حسب سانتی‌متر (محیط)	6π	...

فعالیت

۱. جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	۲	$y = 3x + 1$
y	-۲	$3\sqrt{2} + 1$...	
(x, y)	$(-1, -2)$	$(..., 1)$	$(\frac{2}{3}, 3)$	$(1, ...)$	$(..., ...)$	$(..., ...)$	

۲. مشابه قسمت ۱ جدولی برای $y = x^2$ تشکیل دهید.

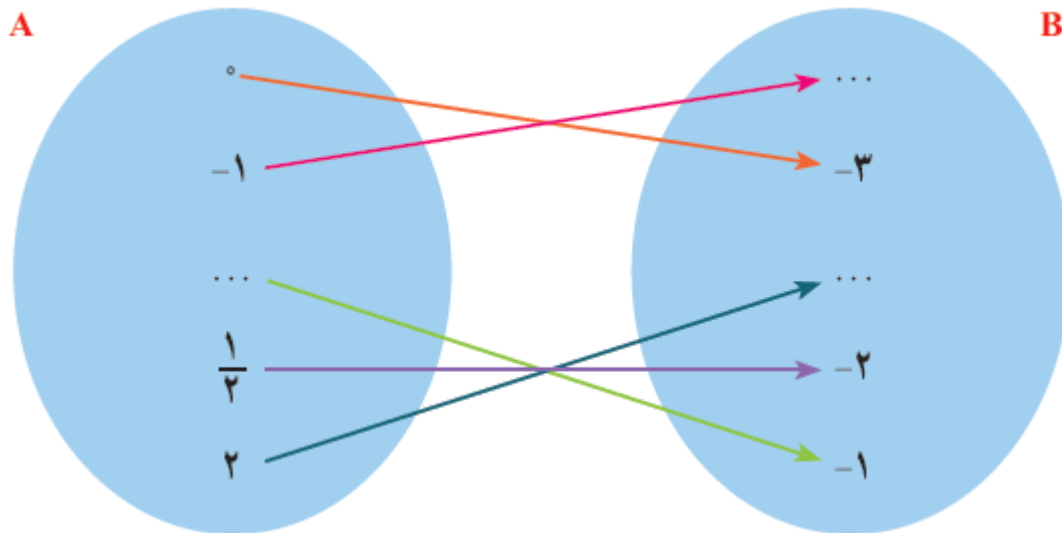
استفاده از نمودار و رسم پیکان‌هایی از طرف متغیر مستقل به سمت متغیر وابسته به درک ارتباط بین این دو متغیر کمک می‌کند. به کار در کلاس زیر توجه کنید:

کار در کلاس

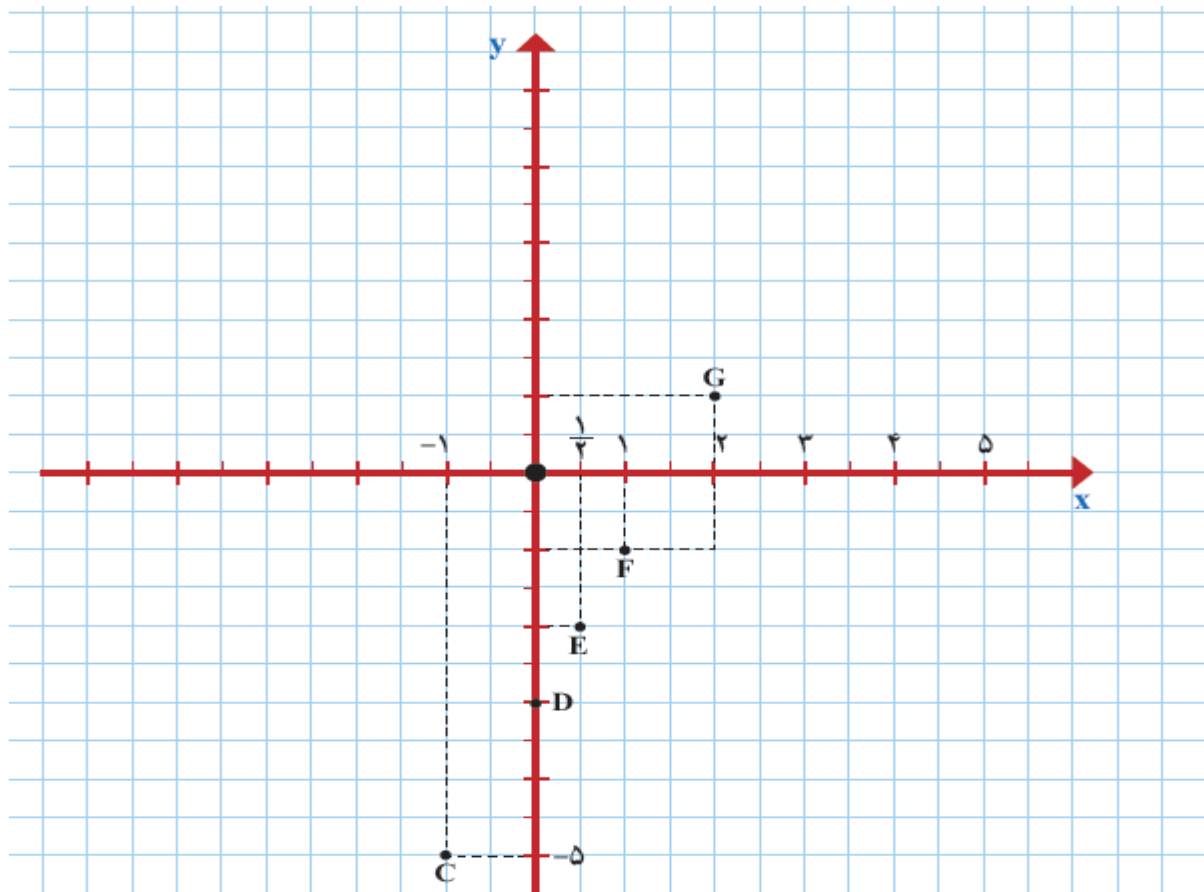
با توجه به رابطه خطی $y = 2x - 3$ ، اگر فرض کنیم، x ها یا متغیرهای مستقل اعضای مجموعه

$A = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}\right\}$ باشند. ابتدا جدول مربوط به این رابطه را مشابه جدول قبل، تشکیل می‌دهیم و سپس نمودار پیکانی آن را رسم می‌کنیم. (جاهای خالی را پر کنید).

x	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۲	$y = 2x - 3$
y	-۵	
(x, y)	(-۱, -۵) C	(۰, ...) D	



اگر هر یک از «زوج مرتب»های جدول قبل را یک نقطه در صفحه فرض کنیم، نمودار مختصاتی رابطه خطی قبل به صورت زیر رسم می شود:



◆ سؤال: برای رابطه $y = x^2$ که $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ مشابه مثال قبل، جدول، نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی را تشکیل دهید.

⑤ روش نمایش ضابطه‌ای (نمایش جبری): فرض کنید رابطه‌ی R از A به B تعریف شده باشد. همچنین فرض کنید که $x \in A$ و $y \in B$. در این صورت ضابطه‌ی R فرمولی است که نشان می‌دهد هر x چگونه به y مربوط به خود تبدیل می‌شود. (فقط به x متغیر مستقل و به y متغیر وابسته می‌گوییم).

مثلاً فرض کنید رابطه‌ی R به صورت $\begin{cases} R: \{1, 2, 3\} \rightarrow N \\ y = 5x + 6 \end{cases}$ تعریف شده باشد. ضابطه‌ی $y = 5x + 6$ نشان می‌دهد که هر x ابتدا در عدد ۵ ضرب و سپس با عدد ۶ جمع می‌شود تا y مربوط به آن به دست آید. حال به جای x در رابطه‌ی $y = 5x + 6$ اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار می‌دهیم تا مقادیر y نیز به دست آید:

$$y = 5x + 6 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=1} y = 5(1) + 6 = 11 \\ \xrightarrow{x=2} y = 5(2) + 6 = 16 \\ \xrightarrow{x=3} y = 5(3) + 6 = 21 \end{cases}$$

همین جا بگوییم که به مجموعه‌ی x ها دامنه و به مجموعه‌ی y های به دست آمده، برد رابطه می‌گوییم، پس در این سؤال: $\text{دامنه} = \{1, 2, 3\}$ و $\text{برد} = \{11, 16, 21\}$

مثال برای رابطه‌ی $y = x^2 + 1$ که در آن $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ می‌باشد، جدول، زوج مرتب‌ها، نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی را رسم کنید. (مشابه تمرین کتاب)

تعریف تابع

یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شود. در درس‌نامه دیدید که ۵ روش برای نمایش رابطه وجود داشت. چون تابع هم نوعی رابطه است، پس این ۵ روش برای نمایش تابع هم استفاده می‌شوند.

در کل کتاب همیشه فرض می‌کنیم x متغیر مستقل ($x \in A$) و y متغیر وابسته ($y \in B$) است. یعنی با تغییر x ، مقدار y هم تغییر می‌کند. (y به x وابسته است).

تشخیص تابع در حالت‌های مختلف

① تشخیص تابع از روی جدول: یک رابطه که به صورت جدول داده شده، وقتی تابع است که اعداد ردیف بالای جدول (مؤلفه‌های اول یا همون x) مختلف باشند یا این که اگر بعضی از آن‌ها با هم مساوی بودند، اعداد ردیف پایین مربوط به آن‌ها (مؤلفه‌های دوم یا همون y) نیز با هم مساوی باشند. به طور خلاصه: باید برای هر x فقط یک y وجود داشته باشد.

به عنوان مثال تابع بودن یا نبودن روابط زیر را با هم بررسی می‌کنیم:

مثال
$$\begin{array}{c|cccc} x & -2 & 0 & 4 & 5 \\ \hline y & 9 & \frac{1}{3} & \sqrt{2} & -6 \end{array} \Rightarrow$$
 تابع است، چون x ها همگی متفاوت اند.

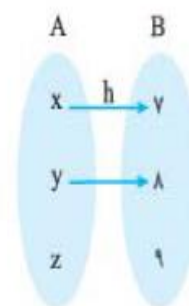
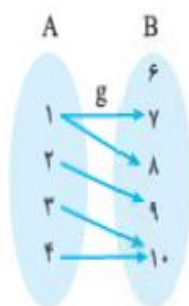
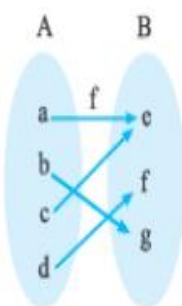
مثال
$$\begin{array}{c|cccc} x & (\sqrt{3})^\circ & -6 & 5 & 1 \\ \hline y & 2 & 3 & 9 & 12 \end{array} \xrightarrow{\text{هر عدد به توان صفر جوابش 1 می‌شود.}}$$
 تابع نیست چون در ردیف بالا دو تا 1 وجود دارد ولی y آن‌ها مساوی نیست.

مثال
$$\begin{array}{c|cccc} x & \frac{\sqrt{2}}{2} & 5 & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline y & \frac{2}{7} & 0 & 2 & \frac{2}{7} \end{array} \xrightarrow{\text{اگر } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ را گویا کنیم، جوابش } \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ زیرا } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ می‌شود.}}$$
 تابع است چون در ردیف بالا دو تا $\frac{\sqrt{2}}{2}$ داریم ولی y آن‌ها مساوی است.

۲) تشخیص تابع از روی زوج مرتب‌ها: اگر رابطه‌ای مثل R به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها داده شود، در صورتی R یک تابع است که تمام عضوهای اول (x ها) مختلف باشند یا اگر دو یا چند زوج مرتب، عضوهای اولشان مساوی بود، عضوهای دومشان هم مساوی باشند. (دقیقاً مانند جدول‌ها) مثلاً رابطه‌ی $f = \{(5,6), (7,8), (9,10)\}$ تابع است، چون عضوهای اول، همگی مختلف‌اند ولی رابطه‌ی $g = \{(3^{-2}, 5), (6, 2), (\frac{1}{9}, 1)\}$ تابع نیست، زیرا $3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$ پس دو تا $\frac{1}{9}$ به عنوان عضوهای اول مشاهده می‌کنیم ولی عضوهای دومشان مساوی نیست. (گفتیم اگر عضوهای اول مساوی باشند، عضوهای دوم هم باید مساوی باشند).

مثال اگر مجموعه‌ی $f = \{(1, a+b), (2, a-b), (1, 3), (2, 5)\}$ معرف یک تابع باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۳) تشخیص تابع از روی نمودار ون: نمودار ون یک رابطه از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B ، وقتی تابع است که از هر عضو مجموعه‌ی A دقیقاً یک فلش (پیکان) خارج شود؛ یعنی اگر از یک عضو A پیکانی خارج نشود یا بیشتر از یک پیکان خارج شود، تابع نخواهیم داشت. به نمودارهای زیر توجه کنید:

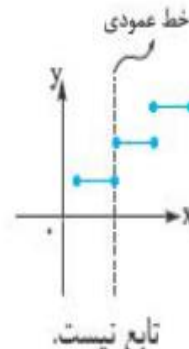
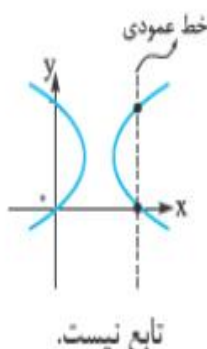
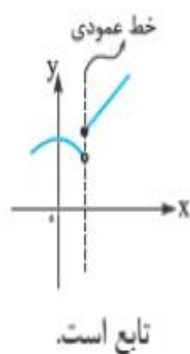


مثال تابع نیست؛ چون از z فلشی خارج نشده. (اشکالی ندارد که به ۶ فلشی وارد نشود) خارج شده.
 مثال تابع نیست؛ چون از عدد ۱ دو فلش خارج شده. (مثال) تابع است؛ چون از هر عضو A یک فلش خارج شده.

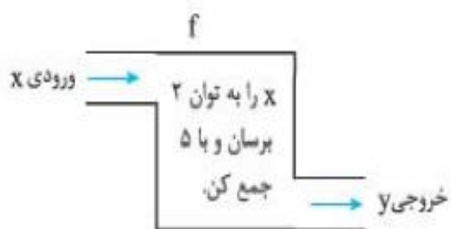
مثال اگر نمودار وین مقابل بیانگر تابع باشد، $(a+b)$ را به دست آورید.



۴ تشخیص تابع از روی نمودار هندسی (مختصاتی): نمودار یک رابطه وقتی تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها (فرد محور y ها) رو هم حساب می‌کنیم. نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. (یعنی یا قطع نکند یا در یک نقطه قطع کند). دقت کنید که منظور از نقطه در این تعریف، نقطه‌ی توپ‌ر است. نه توخالی. به نمودارهای زیر دقت کنید.



۵ تشخیص تابع از روی ضابطه (فرمول جبری): بسیاری از توابع را می‌توانیم مانند یک کامپیوتر



یا ماشین فرض کنیم که روی ورودی x از دامنه، یک سری عملیات جبری انجام داده و خروجی y از بُرد را به ما تحویل می‌دهد. مثلاً در شکل زیر، هر عددی که وارد سیستم تابع f شود، ماشین f آن را به توان ۲ رسانده و با ۵ جمع می‌کند. یعنی ضابطه‌ی تابع f به صورت $y = x^2 + 5$ می‌باشد. البته به جای y می‌توان از $f(x)$ هم استفاده کرده و بنویسیم: $f(x) = x^2 + 5$ مثلاً اگر عدد ۴ ورودی f باشد، خروجی f برابر است با: $y = 4^2 + 5 = 21$ یا می‌توان چنین نوشت: $f(4) = 21$ ، یعنی مقدار تابع f به ازای $x = 4$ برابر ۲۱ است.

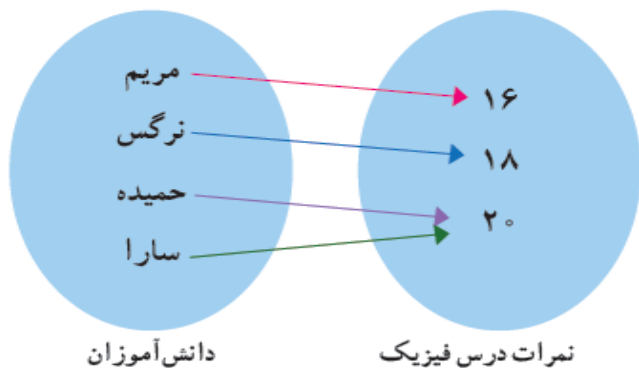
کانال تلگرام: @mathvalizadeh

مثال با فرض $f(x) = x^2 - 6x + 1$ ، حاصل عبارت‌های $f(h)$ و $f(h-1)$ و سپس $\frac{f(h-1) - f(h)}{h - (h-1)}$ را به دست آورید.

مثال قسمتی از تابع f به صورت جدول مقابل است. برای f یک ضابطه بر حسب x بنویسید. سپس به کمک ضابطه‌ای که پیدا می‌شود، مقادیر $f(5)$ ، $f(-1)$ و $f(f(0))$ را به دست آورید.

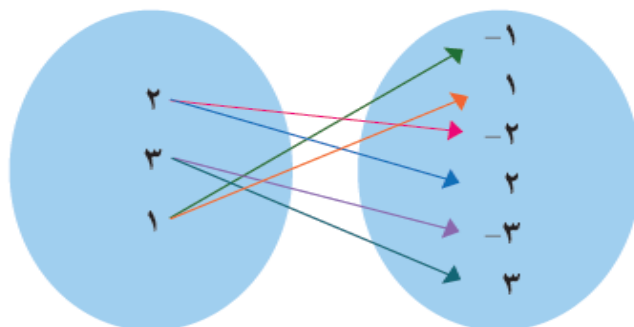
x	0	1	2	3	4
$f(x)$ یا y	5	9	13	17	21

۱. کدام یک از رابطه‌ها که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع اند؟ چرا؟

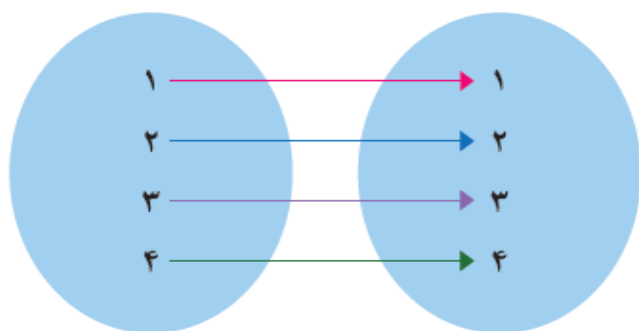


نمرات درس فیزیک دانش‌آموزان

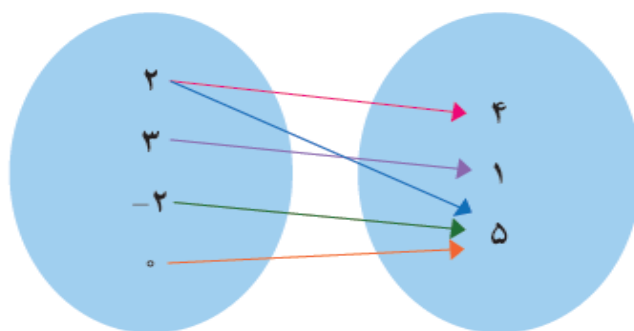
تابع زیرا



تابع زیرا



تابع زیرا



تابع زیرا

۲. کدام مجموعه از زوج مرتب‌ها، نمایش یک تابع است؟

الف) $F = \{(2,3), (3,3), (4,3), (5,3)\}$

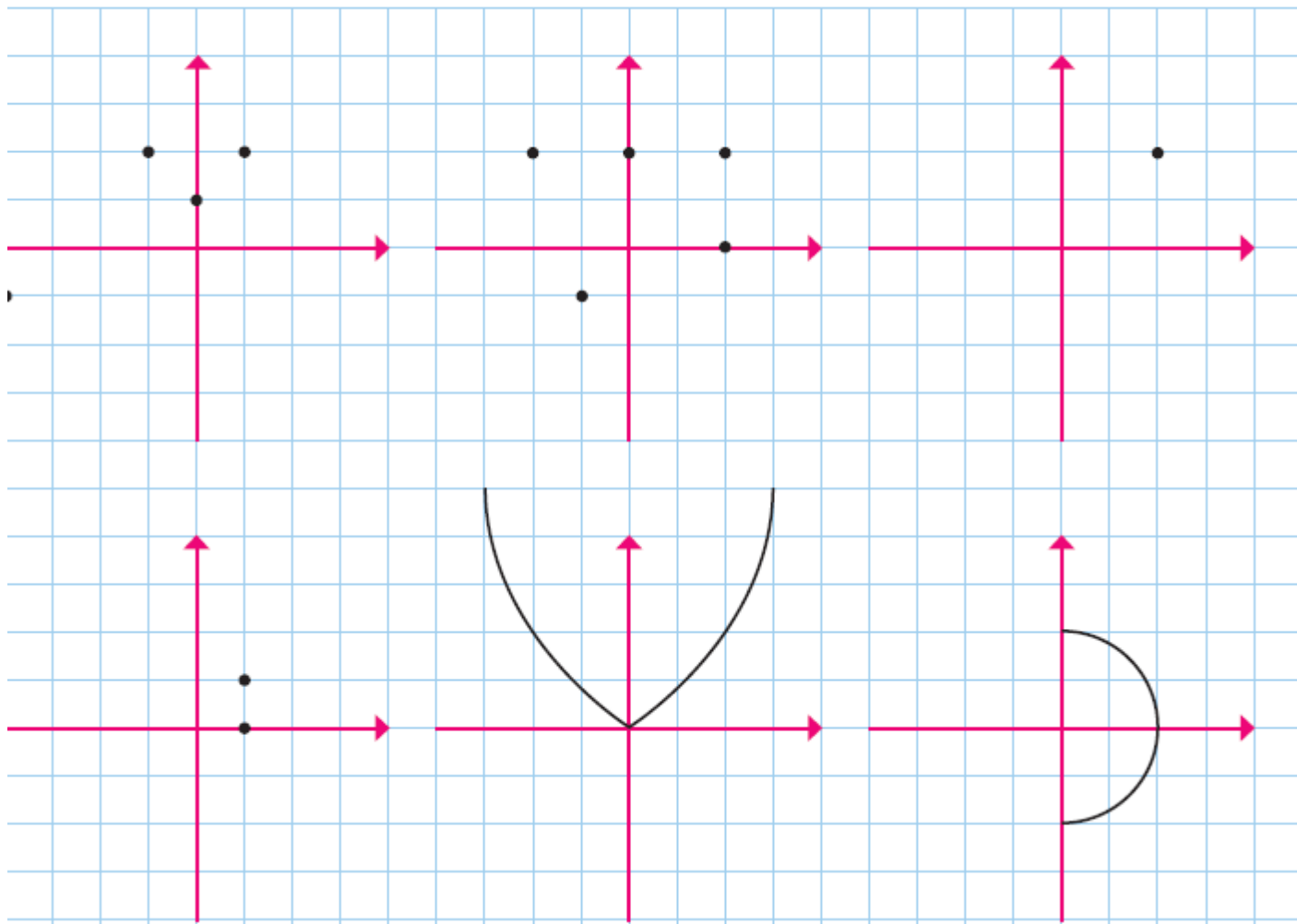
ب) $G = \{(4,1), (2,-1), (1,-1), (4,2)\}$

پ) $H = \{(2,3)\}$

ت) $I = \{(3,3)\}$

ث) $J = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,4)\}$

۳. کدام یک از رابطه‌ها که نمودار مختصاتی آنها رسم شده است، تابع اند؟ چرا؟



۴. کدام یک از رابطه‌های تعریف شده زیر، تابع است و کدام تابع نیست؟ دلایل خود را بنویسید.

الف) رابطه‌ای که به هر شهر در ایران، سوغاتی آن شهر را نسبت می‌دهد.

تابع نیست

تابع است

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، روز تولد او را نسبت می‌دهد.

تابع است تابع نیست

پ) رابطه‌ای که به هر شهر، نماینده آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می‌دهد.

تابع است تابع نیست

ت) رابطه‌ای که به هر مسلمان، قبله او را نسبت می‌دهد.

تابع است تابع نیست

* اگر رابطه بین x و y را (x متغیر مستقل) به صورت جدولی و زوج مرتبی نمایش دهیم، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر در آن وجود نداشته باشد.

* اگر رابطه از مجموعه A به مجموعه B را با نمودار پیکانی نمایش دهیم، در صورتی این رابطه تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

* اگر نمودار مختصاتی یک رابطه رسم شود، در صورتی این رابطه تابع است که هیچ دو نقطه‌ای روی خطی که موازی محور y ها باشد، قرار نگیرند.



۱- در هر قسمت، متغیر مستقل و وابسته را مشخص کنید:

$$f(t) = \frac{3t-4}{5t} \quad \text{ب)} \quad h(x) = 13 - 8\sqrt{x-1} \quad \text{الف)}$$

ج) بهره‌ی هوشی (IQ) دانش‌آموزان، یکی از عوامل مؤثر در پیشرفت تحصیلی آنهاست.

د) مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده‌ی آن.

۲- اگر دو زوج مرتب $(4, 2a - b)$ و $(a - 2b, 8)$ با هم برابر باشند، a و b را به دست آورید.



۳- رابطه‌ی R به صورت $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, y = x + 3\}$ با فرض $x \leq 4$ تعریف شده است. رابطه‌ی R را به شکل مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها نمایش دهید.

۴- رابطه‌ی $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 1\}$ را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بنویسید. *(مفهوم علاقه‌مندان)*

۵- رابطه‌ی R به هر عضو از مجموعه‌ی $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 16 \leq x \leq 18\}$ مقسوم‌علیه‌های مثبت آن را نسبت می‌دهد. زوج مرتب‌های مربوط به این رابطه را مشخص کنید.

جواب سوالات:

توجه:

نوشتن ضابطه‌ی یک تابع به صورت کامل: اگر f یک تابع برحسب x باشد که از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B تعریف شده باشد، برای مشخص کردن ضابطه‌ی f به طور کامل چنین می‌نویسیم: $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$. همان‌طور که در درس‌نامه هم گفتیم A دامنه و B هم‌دامنه است. قبلاً هم گفتیم که معمولاً بُرد تابع زیرمجموعه‌ی B است و لزوماً بُرد با B مساوی نیست. ضمناً دامنه‌ی f را با D_f و بُرد f را با R_f نمایش می‌دهیم.

مثال با فرض آن‌که $\begin{cases} f: A \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x^2 + 3 \end{cases}$ و $A = \{-1, \sqrt{2}, 0\}$ باشد، بُرد تابع f را به دست آورید.

فعالیت

با توجه به ضابطه‌ی هر تابع و مانند نمونه، مجموعه‌ی مقادیر یا بُرد هر تابع را مشخص کنید.

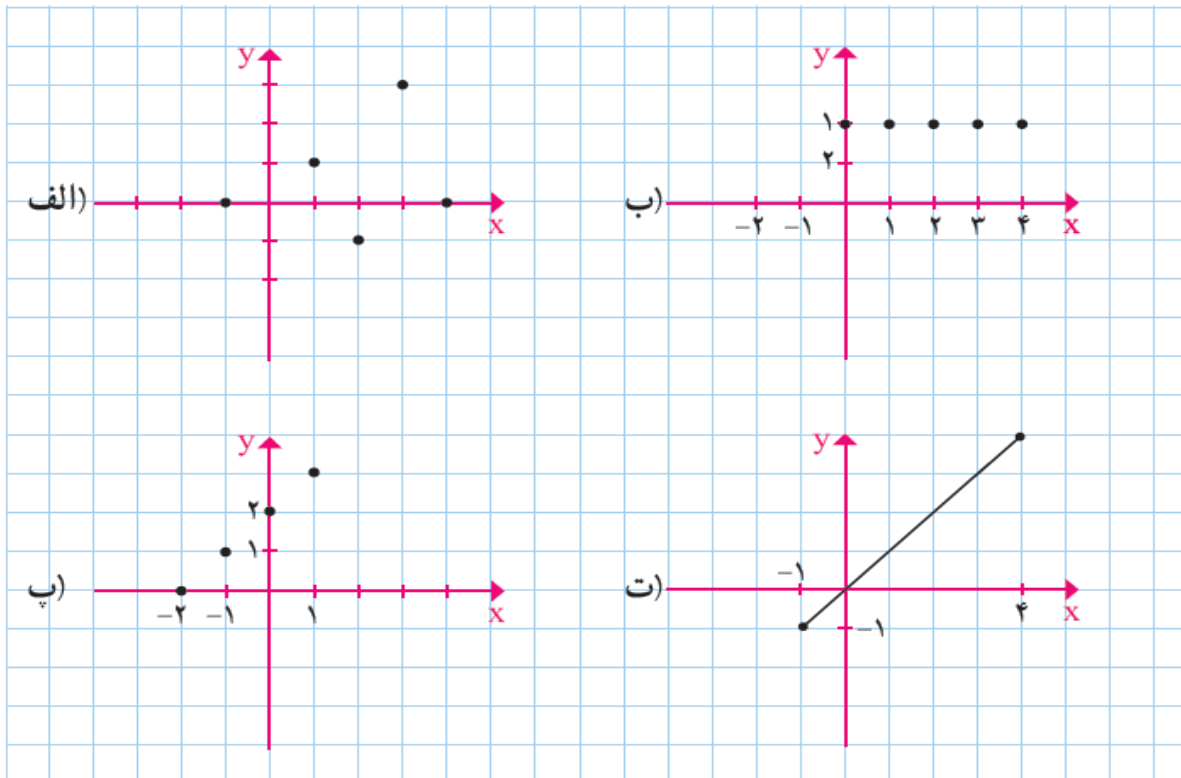
$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x^2 + 1, \quad A = \left\{ -1, \sqrt{2}, 2, 1, 0, \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{الف) } f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^3 - 1, \quad A = \left\{ 1, -1, 0, 4, \sqrt[3]{3}, \frac{1}{3}, 2 \right\}$$

$$\text{ب) } f: A \rightarrow B \\ f(x) = \sqrt{x+1} - 1, \quad A = \{0, -1, 8, 3, 2\}$$

$$\text{پ) } f: A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad A = \left\{ -2, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

۱. برای هریک از توابع زیر، دامنه و بُرد را مشخص کنید و در صورت امکان ضابطه هر تابع را بنویسید.

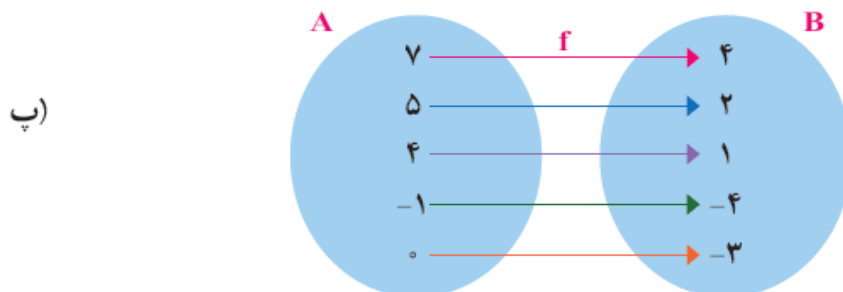


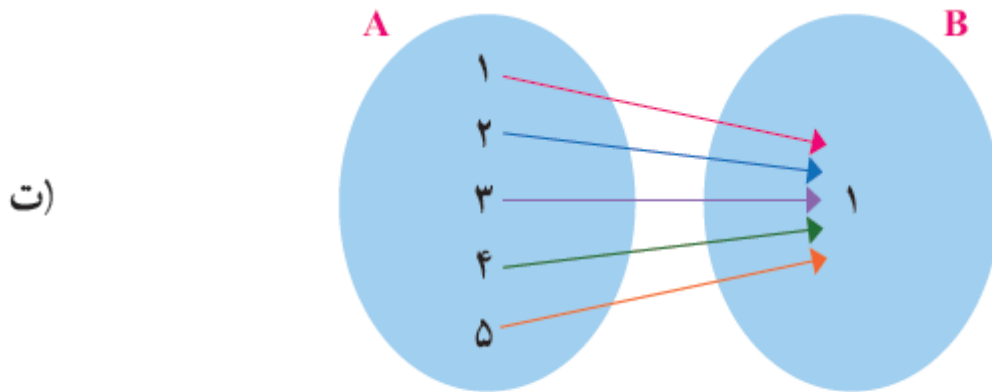
۲. دامنه و برد هریک از تابع‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) $f: A \rightarrow B$ $R = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$

$f(x) = x + 4$ $A = \{2, \dots, \dots, \dots, \dots\}$

(ب) $f = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$

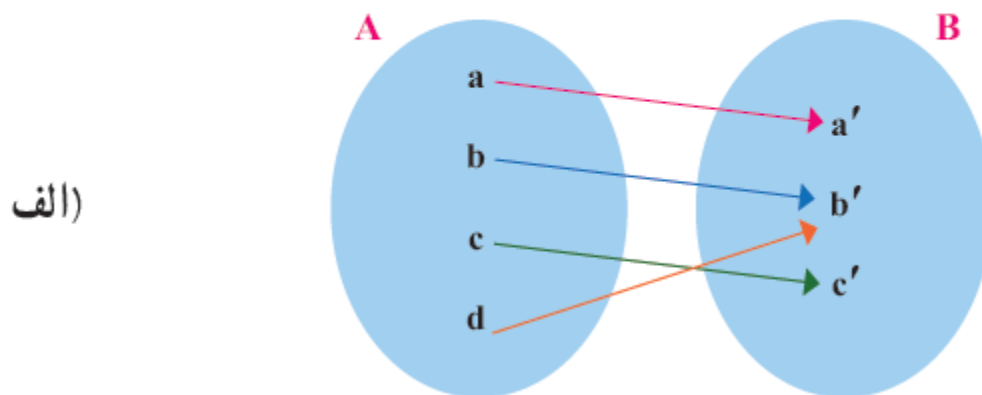


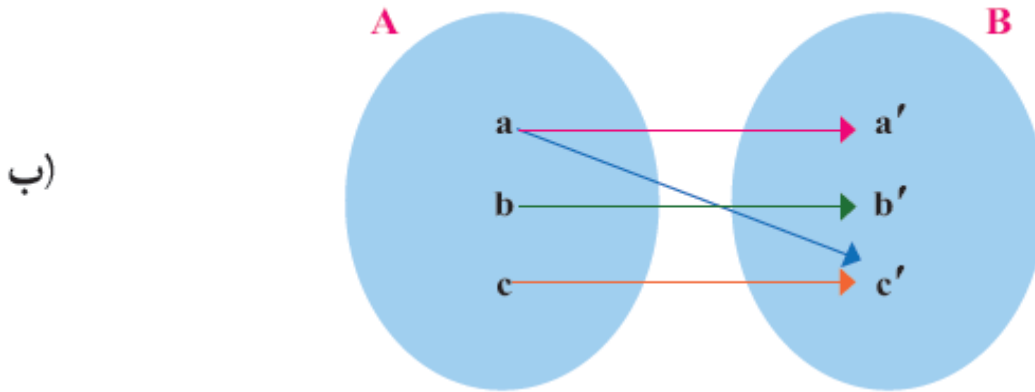


ث) $f = \left\{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 0) \right\}$

تمرین

۱. کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.





پ) $f = \{(2, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (2, 4)\}$

ت) $g = \{(1, 1)\}$

ث) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2x + 1$

ج) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x$

ح) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2$

۲. بُرد هر یک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده، به دست آورید.

الف) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x^2 + x + 1$, $A = \{0, -1, 1, 2, -2\}$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $A = \left\{ \frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2 \right\}$

پ) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \sqrt{x+1}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$

ت) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x$, $A = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

ث) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \circ$, $A = \mathbb{R}$

۳. تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می دهد. f کدام تابع است؟
 حاصل $f(3)$ را بیابید.

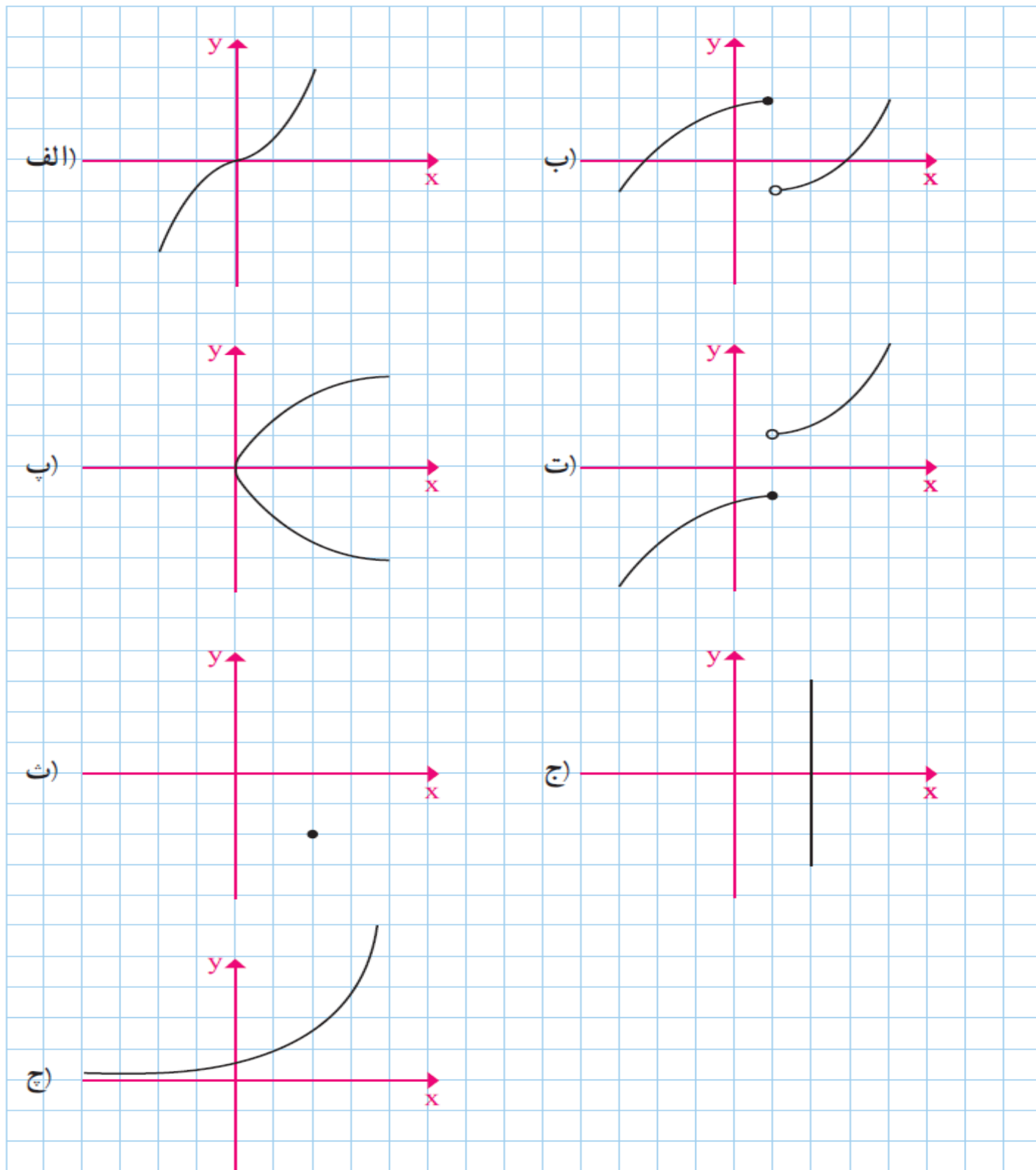
الف) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2(x - 4)^2$

ب) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt[3]{x - 4}$

پ) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x^2 - 4$

ت) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt[3]{x - 4}$

۴. کدام نمودار، نمایش یک تابع می باشد؟ چرا؟



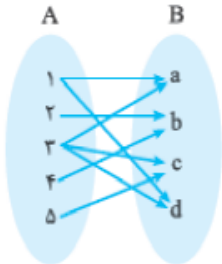


۶- کدام مورد زیر، معرف یک تابع نیست؟ (در هر قسمت از راست به چپ، عبارت‌ها به ترتیب مؤلفه‌های اول و دوم زوج مرتب‌ها هستند.)

- (۱) رابطه‌ی بین شعاع دایره و محیط آن
- (۲) رابطه‌ی بین یک فرد و قد او در زمانی خاص
- (۳) رابطه‌ی بین یک عدد طبیعی و مضرب‌های آن
- (۴) رابطه‌ی بین اعداد اول و مربعات آن‌ها

۷- در نمودار ون مقابل، با حذف چند فلش، یک تابع ایجاد می‌شود؟

(مشابه تمرین کتاب)



۸- درستی یا نادرستی جملات زیر را تعیین کنید.

الف) با توجه به فرمول $BMI = \frac{\text{وزن بر حسب کیلوگرم}}{\text{مربع قد بر حسب متر}}$ (شاخص توده‌ی بدنی)، وزن و قد متغیرهای وابسته و BMI متغیر مستقل است.

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، سه غذای مورد علاقه‌ی او را نسبت می‌دهد، تابع است.

ج) در تابع $g(t) = |3t + 2|$ به t متغیر وابسته و به $g(t)$ متغیر مستقل می‌گوییم.

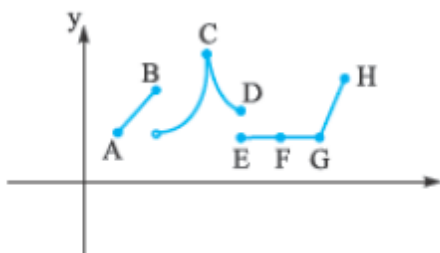
۹- کدام نقطه حذف شود تا شکل مقابل، به یک تابع تبدیل شود؟

C (۲)

B (۱)

F (۴)

D (۳)



۱۰- اگر بُرد تابع $f(x) = x^2 + 4$ برابر $\{5, 13\}$ باشد، دامنه‌ی آن را به دست آورید.

۱۱- بُرد تابع $f(x) = |x^2 - 3x|$ با دامنه‌ی $\{-1, 0, 1\}$ را به دست آورید.

۱۲- با فرض آن که $f(x) = |x^2 - 5x|$ و $g = \{(1, 3), (4, 2), (0, -4), (2, 7)\}$ باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $f(1) + g(1)$

ب) $f(g(0))$

ج) $g(f(0))$

۱۳- در تابع $f(x) = 2x^2 - 4mx + 8$ ، مقدار m را طوری بیابید که زوج مرتب $(-1, -2)$ عضوی از این تابع باشد.

۱۴- ضابطه‌ی تابع $y = f(x)$ مربوط به جدول زیر را نوشته و سپس با توجه به آن مقادیر زیر را محاسبه کنید.

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۵	۷	۹	۱۱	۱۳

الف) $f(x-3)$

ب) $f(1+a)$

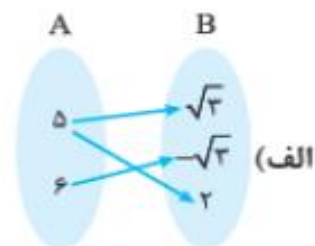
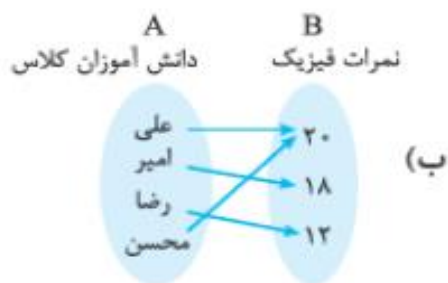
$$f = \left\{ (3, 6), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 5 \right), (\sqrt{9}, \dots), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \dots \right) \right\}$$

$$g = \left\{ \left(1, \frac{5}{6} \right), (3, 7), (\dots, 8), (\dots, \dots) \right\}$$

۱۵- الف) در رابطه‌ی مقابل، در جاهای خالی طوری عدد بگذارید که f تابع باشد.

ب) در رابطه‌ی مقابل، در جاهای خالی طوری عدد بگذارید که g تابع نشود.

۱۶- تابع بودن یا نبودن روابط، نمودارها و جدول‌های زیر را بررسی کنید.



x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۲	۳	۴	۵	۶

(د)

$$f = \left\{ (4^0, 2), (2, 5^{-2}), (0, 2), \left(2, \frac{1}{25} \right) \right\} \text{ (ج)}$$

۱۷- برای هر یک از توابع زیر، یک ضابطه‌ی مناسب بنویسید.

الف) $f = \{(2, 21), (3, 31), (4, 41), (5, 51)\}$

ب) $g = \{(1, 1), (-2, 4), (3, 9), (-4, 16)\}$

ج) $h: \begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 5 & 6 & 9 & 14 \end{array}$

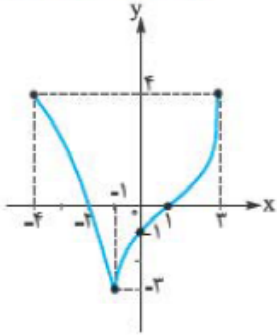
۱۸- اگر $f(x) = |-x - 5|$ و $g(x) = \sqrt{-1 - 2x}$ باشند، حاصل $\frac{f(4)}{g(-5)}$ را به دست آورید.

۱۹- اگر $f(x) = 4x + 3$ باشد، حاصل $\frac{f(-2+h) - f(-2)}{3h}$ را به دست آورید.

۲۰- با فرض آن که $f = \{(-1, 5), (2, -1), (3, 4), (4, 7)\}$ و $g = \{(5, 3), (3, 0), (0, -2), (-2, 8)\}$ باشد، حاصل $\frac{2f(4) - [g(0)]^2}{\frac{1}{4}f(g(5))}$ را به دست آورید.
(مثنویس علاقه‌مندان)

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

(مفهوم علاقه‌مندان)



۲۱- با توجه به شکل تابع $f(x)$ که داده شده، حاصل $\frac{f(-1) + \sqrt{f(2)}}{[f(0)]^2 - 2f(-2)}$ را به دست آورید.

۲۲- ماشین (تابع) مقابل را در نظر بگیرید. مقادیر خروجی این ماشین را به دست آورید.

$$\boxed{x = -2, 2} \xrightarrow{\text{ورودی}} \boxed{y = |x^2 - 10x|} \xrightarrow{\text{خروجی}} \boxed{?}$$

۲۳- اگر $f(x) = |x - 2|$ و $f(\square) = |x - 3|$ باشد، آن گاه \square برابر با کدام عبارت زیر است؟

$-x + 2$ (۴)

$1 - x$ (۳)

$x - 1$ (۲)

$x + 2$ (۱)

۲۴- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$ باشد، حاصل $f(3 + 2\sqrt{6})$ را به دست آورید.

۲۵- اگر $f(x) = \frac{-2x^2 + 5x}{x - 2}$ باشد، حاصل $f(1 - \sqrt{2})$ را محاسبه کنید.

محاسبه‌ی مقدار تابع در یک نقطه و محاسبه‌ی دامنه و برد تابع در حالت‌های مختلف

حالت (۱): اگر تابع f به صورت جدول باشد، در هر ستون جدول، مقدار تابع به ازای عدد بالایی (x) برابر با عدد پایین همان ستون (y) است. مثلاً در جدول مقابل:

$$f: \begin{array}{c|ccc} x & -5 & 0 & 4 \\ \hline y & 11 & 3 & -2 \end{array} \Rightarrow f(-5)=11, f(0)=3, f(4)=-2$$

ضمناً در این مثال دامنه و برد عبارت‌اند از:

$$\begin{array}{l} \text{اعداد ردیف بالا} \\ \uparrow \\ \text{دامنه } D_f = \{-5, 0, 4\} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{اعداد ردیف پایین} \\ \uparrow \\ \text{برد } R_f = \{11, 3, -2\} \end{array}$$

حالت (۲): اگر تابع f به صورت زوج مرتب باشد، در هر زوج، مقدار تابع به ازای مؤلفه‌ی اول (x) برابر با مؤلفه‌ی دوم همان زوج مرتب (y) است. مثلاً:

$$f = \{(3, 6), (0, 9), (6, 12)\} \Rightarrow f(3)=6, f(0)=9, f(6)=12 \text{ و } f(f(3))=f(6)=12$$

ضمناً در این مثال دامنه و برد عبارت‌اند از:

$$\begin{array}{l} \text{دامنه (عضوهای اول)} \\ \uparrow \\ D_f = \{0, 3, 6\} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{برد (عضوهای دوم)} \\ \uparrow \\ R_f = \{6, 9, 12\} \end{array}$$

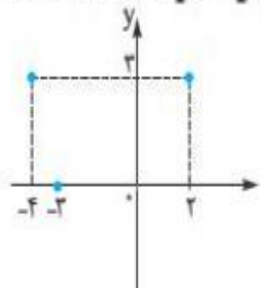
حالت (۳): اگر f به صورت نمودار ون بیان شود، در هر فلش (پیکان) مقدار تابع به ازای عدد ابتدای فلش (x) برابر است با عدد انتهای فلش (y). مثلاً:

$$\begin{array}{c} A \qquad B \\ \begin{array}{ccc} \frac{1}{5} & & -3 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 0 & 4 \\ & \nearrow & \searrow \\ \sqrt{2} & & 20 \end{array} \end{array} \Rightarrow f\left(\frac{1}{5}\right)=20, f(0)=4, f(\sqrt{2})=-3$$

$R_f = \{-3, 4, 20\}$ (برد انتهای فلش‌ها) $D_f = \{\frac{1}{5}, 0, \sqrt{2}\}$ (دامنه ابتدای فلش‌ها)

حالت (۴): اگر f به صورت نمودار، داده شده باشد، در هر نقطه از نمودار، مقدار تابع به ازای طول آن نقطه (x) برابر عرض همان نقطه (y) است.

به عنوان مثال در شکل مقابل که مربوط به تابع f است خواهیم داشت:



$$\Rightarrow f(2) = 3, f(-3) = 0, f(-4) = 3, f(0) = -4$$

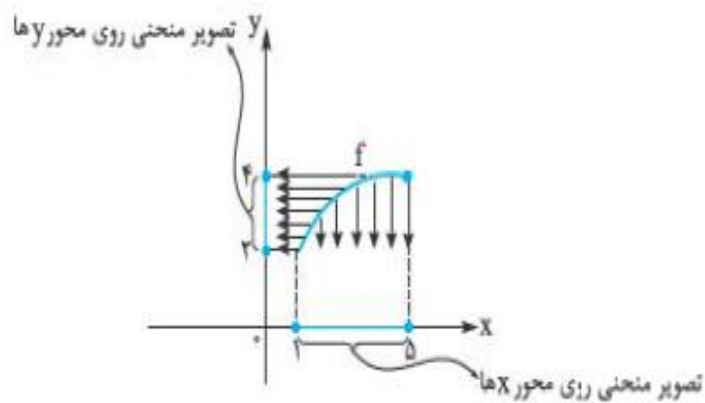
$$D_f = \{2, 0, -3, -4\} \text{ (طول نقاط)}$$

$$R_f = \{-4, 0, 3\} \text{ (عرض نقاط)}$$

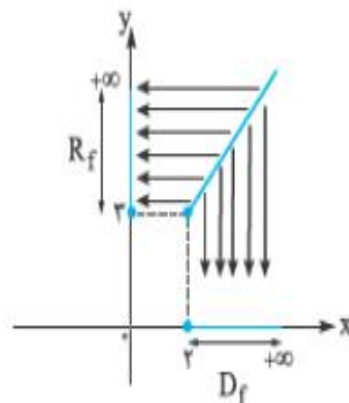
سوال:

حالا اگر نمودار به صورت خط یا منحنی باشد، دامنه و برد چه چوری به دست میار استر؟

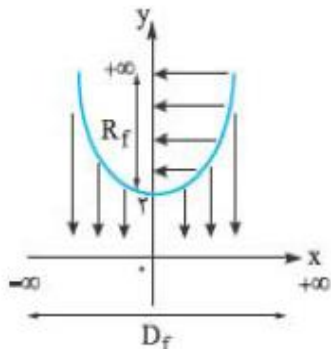
اون وقت تصویر نقاط، روی محور x ها دامنه و تصویر نقاط، روی محور y ها برد تابع خواهد بود. به مثال های زیر خوب نگیار کن تا مفهوم تصویر کردن رو متوجه بشی.



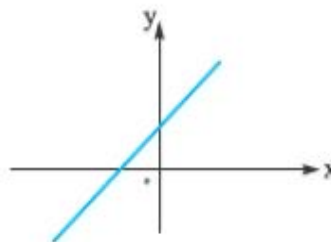
$$D_f: 1 \leq x \leq 5 \quad R_f: 2 \leq y \leq 4$$



$$D_f: x \geq 2 \quad R_f: y \geq 3$$



$$\begin{cases} D_f: -\infty < x < +\infty \text{ یا } \mathbb{R} \text{ مجموعه‌ی اعداد حقیقی } \mathbb{R} \\ R_f: y \geq 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \mathbb{R} \end{cases} \text{ (دامنه و برد خط‌های مایل همیشه } \mathbb{R} \text{ هستند.)}$$

درس ۳

نمودار تابع خطی

تعریف تابع خطی

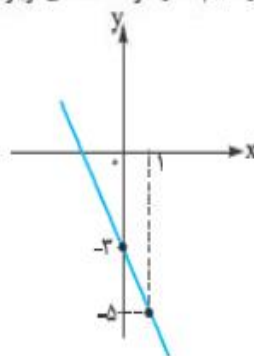
هر تابع که بتوان آن را به شکل $f(x) = y = ax + b$ نشان داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود ($a, b \in \mathbb{R}$). ضمناً اگر $a \neq 0$ باشد، دامنه و برد این توابع برابر \mathbb{R} است.

می‌دانید که در خط $y = ax + b$ ، عدد a شیب و عدد b عرض از مبدأ خط است. مثلاً در خط $y = -\frac{3}{4}x + \sqrt{3}$ ، شیب برابر $-\frac{3}{4}$ و عرض از مبدأ برابر $\sqrt{3}$ است.

مثال در مستطیل‌هایی که طول آن‌ها ۸ واحد بیشتر از عرض آن‌هاست، ضابطه‌ی محیط و مساحت را برحسب عرض آن‌ها نوشته و بررسی کنید کدام ضابطه، یک تابع خطی است؟
(مشابه کار در کلاس کتاب)

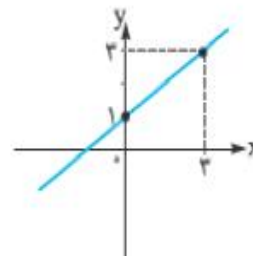
رسم نمودار خط

برای رسم نمودار یک خط کافی است به x دو مقدار دلخواه نسبت داده و y مربوط به این دو x را پیدا کنیم. به این ترتیب ۲ نقطه از خط به دست می‌آید که با وصل کردن آن‌ها به هم و امتداد دادن از دو طرف، نمودار خط به دست می‌آید. البته قبل از این که به x عدد بدهیم، بهتر است خط را به شکل استاندارد خود یعنی $y = ax + b$ تبدیل کنیم. (y بایر در سمت پمپ، تنها بشه.)
به عنوان مثال می‌خواهیم نمودار خط‌های زیر را رسم کنیم:



$$\text{مثال } y = -2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y = -2(0) - 3 = -3 \Rightarrow A(0, -3) \\ x=1 \rightarrow y = -2(1) - 3 = -5 \Rightarrow B(1, -5) \end{cases}$$

چون در $y = -2x - 3$ مخرجی وجود نداشت، به x صفر و یک دادیم. 🔍



$$\text{مثال } y = \frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y = \frac{2}{3}(0) + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow A(0, 1) \\ x=3 \rightarrow y = \frac{2}{3}(3) + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow B(3, 3) \end{cases}$$

چون در $y = \frac{2}{3}x + 1$ مخرج ۳ وجود داشت، به x صفر و ۳ دادیم. 🔍

$$\text{مثال } \frac{2y-3}{5} = x+1 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2y-3 = 5x+5 \Rightarrow 2y = 5x+5+3$$

فرمول شیب خط و معادله‌ی خط

اگر دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از یک خط را داشته باشیم شیب این خط از رابطه‌ی $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ به دست می‌آید. ضمناً معادله‌ی این خط برابر است با:
 $y - y_1 = m(x - x_1)$ یا $y - y_2 = m(x - x_2)$

مثال معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط $A(3, 4)$ و $B(5, -2)$ بگذرد، سپس نمودار آن را رسم کنید.

مثال در تابع خطی f داریم: $f(0) = 1$ و $f(-2) = 4$. مقادیر $f(8)$ و $f(f(0))$ را محاسبه کنید، سپس مقدار $\frac{|f(8)| \times \sqrt{f(0)}}{2f(f(0))}$ را به دست آورید.
 (مشابه تمرین کتاب)

کاربرد تابع خطی در حل مسائل

بسیاری از متغیرها به صورت خطی به هم وابسته هستند. مثلاً وقتی یک گلوله را از بالای ساختمان رها می‌کنیم، سرعت گلوله در هر لحظه، از رابطه‌ی خطی $V = -10t$ به دست می‌آید. (V سرعت و t زمان است.) در حل مسائل این بخش، همیشه به دنبال دو نقطه مثل $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ هستیم. سپس شیب خط و معادله‌ی خط را به کمک نقاط A و B می‌نویسیم. ضمناً همیشه بهتر است برای حل راحت‌تر، از نام‌های x و y به جای اسم‌های داده‌شده در متن سؤال استفاده کنیم.

مثال با افزایش ارتفاع از سطح زمین، دمای هوا کاهش می‌یابد. اگر دمای هوا در سطح زمین 20° درجه‌ی سانتی‌گراد و دمای هوا در ارتفاع 1 کیلومتری 10° درجه‌ی سانتی‌گراد باشد و فرض کنیم رابطه‌ی بین دما (T) و ارتفاع (h) خطی باشد، رابطه‌ی خطی آن‌ها کدام است؟

$$T = -10h - 20 \quad (4)$$

$$T = 10h + 20 \quad (3)$$

$$T = -10h + 20 \quad (2)$$

$$T = 10h - 20 \quad (1)$$

مثال یک آژانس املاک 50 آپارتمان در اختیار دارد. وقتی اجاره‌ی هر واحد 400 هزار تومان در ماه باشد، همه‌ی آپارتمان‌ها پُر می‌شوند ولی وقتی اجاره 500 هزار تومان می‌شود، تعداد آپارتمان‌های اجاره‌شده 40 تا خواهد بود. اگر رابطه‌ی بین اجاره‌ی ماهانه (p) برحسب هزار تومان و تعداد آپارتمان‌ها (x) خطی باشد، معادله‌ی خطی آن کدام است؟

$$P = 10x + 900 \quad (4)$$

$$p = -10x + 900 \quad (3)$$

$$p = 10x - 900 \quad (2)$$

$$p = -10x - 900 \quad (1)$$

کار در کلاس

در یک تابع خطی $f(0)=2$ و $f(2)=3$ با توجه به معادله خط که در کتاب ریاضیات نهم دیده‌اید، ابتدا m و سپس به کمک آن $f(x)$ را مشخص و نمودار تابع را رسم کنید.

کار در کلاس

جدول زیر رابطه بین عمق و دمای سنگ‌ها را در زیر زمین نشان می‌دهد. x معرف عمق (بر حسب کیلومتر) و y معرف دما (بر حسب سانتی‌گراد) است.

x	۲	۴
y	۷۵	۱۸۵

اگر دمای سنگ‌ها تابع خطی بر حسب عمق باشد، ابتدا جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن تابع $y=f(x)$ را مشخص نموده سپس تعیین کنید در چه عمقی دما به ۴۴° درجه سانتی‌گراد می‌رسد؟

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$: شیب خط	$y=f(x)=mx+h$: معادله خط یا ضابطه تابع	$f(1)$	$f(2)$

کار در کلاس

ضابطه تابع محیط مستطیل هایی را که طول آنها ۴ واحد بیشتر از عرض آنها است، بر حسب عرض آن بنویسید و نشان دهید یک تابع خطی است.
- آیا تابع مساحت آنها نیز یک تابع خطی است؟

کار در کلاس

اگر نمودار تابع خطی f از مبدأ عبور کرده و $f(-1)=2$ باشد، نمودار و ضابطه تابع f را مشخص کنید.

تمرین

۱. مقادیر m و n را چنان بیابید تا در تابع با ضابطه $f(x)=mx+n$ داشته باشیم: $f(2)=4$ و $f(1)=1$.

۲. ضابطه تابع خطی f را که از نقاط $(2, 3)$ و $(4, 1)$ می‌گذرد، مشخص کنید و نمودار آن را رسم نمایید.

۳. در تابع خطی f داریم $f(1) = 5$ و $f(2) = 8$ ، مقادیر $f(-3)$ و $f(5)$ را بیابید.

۴. نمودار تابعی خطی را رسم کنید که دامنه آن برابر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ و از نقطه $A \left| \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right.$ بگذرد.

۵. نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و $f(2) = 7$ است. در این صورت اختلاف $f(0/1)$ و $f(-0/1)$ را به دست آورید.

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

۶. رابطه بین درجه دما برحسب سانتی گراد و فارانهایت به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ است. دمای یک جسم 20° درجه سانتی گراد بالا رفته است. دمای آن برحسب فارانهایت چقدر افزایش داشته است؟

۷. یک شرکت برای تولید x کالا، $C(x) = 3000 + 50x$ تومان هزینه می کند و هر کالا را 70 تومان می فروشد.

الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟



۴۸- کدام یک از ضابطه های زیر، نشان دهنده ی یک تابع خطی است؟

ج) $\frac{y-3}{5} = \frac{x-1}{6}$

ب) $y = \sqrt{x} + 3x^2 - 1$

الف) $(y-x)^2 - (y+x)^2 = 1$

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

۵۳- یک کارخانه‌ی تولید لوله‌های آبیاری در هر ساعت $0/4$ کیلومتر لوله تولید می‌کند. اگر متراژی که این کارخانه پس از x ساعت تولید می‌کند را برحسب متر با $f(x)$ نمایش دهیم، اولاً ضابطه‌ی $f(x)$ را بنویسید. ثانیاً پس از 10 ساعت چند کیلومتر لوله تولید می‌شود؟ ثالثاً نمودار $f(x)$ را رسم کنید.
(مشابه فعالیت کتاب)

۵۴- طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه‌ای آویزان نشده، 10 سانتی‌متر است و به ازای هر کیلوگرم وزنه‌ای که به آن آویزان شود، نیم سانتی‌متر به طول آن افزوده می‌شود. ضابطه‌ی تابع خطی f (طول فنر) برحسب وزن جسم (x) را بنویسید. سپس مقادیر $f(4)$ و $f(h-1)$ را به دست آورده و نمودار تابع f را رسم کنید.
(مشابه فعالیت کتاب)

(مشابه کار در کلاس کتاب)

x عمق برحسب کیلومتر	۳	۵
y یا $f(x)$ دما برحسب سانتی‌گراد	۸۰	۱۴۰

۵۵- جدول زیر، رابطه‌ی خطی بین عمق و دمای سنگ‌های درون زمین را نشان می‌دهد.

الف) ضابطه $f(x)$ را تشکیل دهید.ب) در چه عمقی دما به 300 درجه‌ی سانتی‌گراد می‌رسد؟ج) در عمق 10 کیلومتر، دما چه قدر خواهد بود؟۵۶- نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و $f(1) = 10$ می‌باشد. در این صورت اختلاف $f(0/2)$ و $f(-0/2)$ را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب)

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

۵۷- نمودار تابع خطی f را طوری رسم کنید که دامنه‌ی آن برابر $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$ و بُرد آن برابر $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 6\}$ باشد و از نقطه‌ی $A(3, 4)$ بگذرد.
(مشابه تمرین کتاب)

۵۸- رابطه‌ی بین دما برحسب سانتی‌گراد (C) و فارنهایت (F) به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ است. دمای یک جسم 30° درجه‌ی سانتی‌گراد بالا رفته است. دمای آن برحسب فارنهایت چه قدر افزایش داشته است؟
(مشابه تمرین کتاب)

۵۹- یک شرکت برای تولید x کالا دارای تابع هزینه‌ی $C(x) = 200 + 10x$ می‌باشد و هر کالا را 60 تومان می‌فروشد.
(الف) تابع سود را تعیین کنید و نمودار آن را رسم کنید.
(ب) حداقل چه تعداد کالا باید به فروش برسد تا سوددهی آغاز شود؟
(مشابه تمرین کتاب)

۶۰- معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(4, 4)$ گذشته و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض 3 قطع کند.

۶۱- معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(1, 2)$ گذشته و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول -4 قطع کند.

۶۲- اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل باشد، $f(2)$ را به دست آورید.



۶۳- یک شرکت نقاشی ساختمان، قیمتی که برای رنگ آمیزی x متر مربع از دیوار ساختمان در یک روز دریافت می کند، برابر با $(100000 - 2x)$ تومان می باشد. ضمناً هزینه های جانبی مثل رفت و آمد، روزانه ۱۵۰۰۰ تومان می باشد و برای هر متر مربع ۱۰۰ تومان هزینه ی رنگ وجود دارد.

(مشابه فعالیت کتاب)

الف) قیمت دریافتی شرکت برای رنگ آمیزی ۲۰۰ مترمربع در یک روز چه قدر است؟

ب) هزینه ی شرکت برای رنگ آمیزی ۲۰۰ متر مربع در یک روز چه قدر است؟

ج) سود شرکت به ازای رنگ آمیزی ۲۰۰ متر مربع در یک روز چه قدر است؟

د) جدول روبه رو را کامل کنید و نمودار سود بر حسب x را رسم کنید.

متر از رنگ شده در یک روز x	۱۰	۲۰	۱۰۰	۸۰۰
سود $P(x)$				

ه) نقاطی که پایین محور x ها هستند چه چیزی را نشان می دهند؟ آیا هر چه متر از بیشتری رنگ شود، شرکت سود بیشتری کسب می کند؟

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

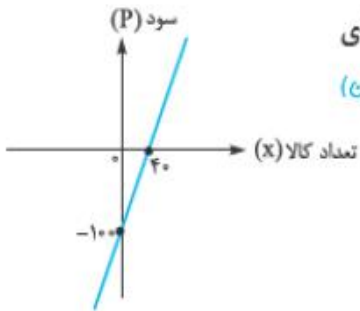
۶۴- سودی که از تولید x کالا توسط یک کارخانه به دست می‌آید، از معادله $y = -300 + 10x$ محاسبه می‌شود. (y سود برحسب میلیون تومان است):

الف) نمودار خط $y = -300 + 10x$ را با فرض $x \geq 0$ رسم کنید.

ب) محل برخورد نمودار خط با محور x ها چه موضوعی را نشان می‌دهد؟

ج) به ازای تولید ۵۰۰ کالا مقدار سود چه قدر است؟

د) اگر سود ۲۴۰ میلیون تومان باشد، چه تعداد کالا تولید شده است؟



۶۵- نمودار سود و زیان یک شرکت برحسب کالاهای فروخته شده به صورت مقابل است. این شرکت برای دستیابی به سودی بیشتر از ۶۰۰ میلیون تومان، حداقل باید چه تعداد کالا به فروش برساند؟ (مفهوم علاقه مندان)

۲۷۸ (۱)

۲۷۹ (۲)

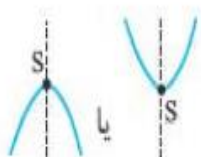
۲۸۰ (۳)

۲۸۱ (۴)

درس ۴

نمودار تابع درجه ۲

آشنایی با سهمی



هر تابع که به شکل $y = ax^2 + bx + c$ باشد ($a \neq 0$)، یک تابع درجه دوم یا سهمی نام دارد. نمودار هر سهمی به شکل S یا S می باشد. به نقطه S در هر دو نمودار، رأس سهمی می گوئیم. ضمناً خط چین رسم شده در این دو شکل، محور تقارن سهمی است. یعنی اگر سهمی را روی این خط، دو قسمت سهمی دقیقاً روی هم قرار می گیرند. در هر دو شکل، طول رأس سهمی برابر $x = \frac{-b}{2a}$ است. برای یافتن عرض S هم کافی است در تابع سهمی به جای x ها عدد به دست آمده از فرمول $x = \frac{-b}{2a}$ را قرار دهیم. (ضمناً معادله‌ی محور تقارن هم $x = \frac{-b}{2a}$ است.)

در تابع $y = ax^2 + bx + c$ اگر ضریب x^2 یعنی عدد a منفی باشد، سهمی ماکزیمم دارد؛ یعنی نمودار آن به شکل S خواهد بود. در این حالت عرض S از عرض بقیه‌ی نقاط سهمی بیشتر است. همچنین اگر ضریب x^2 یعنی عدد a مثبت باشد، سهمی مینیمم دارد؛ یعنی نمودار آن به شکل S خواهد بود. در این حالت عرض S از عرض بقیه‌ی نقاط سهمی کم‌تر است.

مثال مختصات رأس سهمی‌های زیر را به دست آورده و بگوئید هر سهمی ماکزیمم دارد یا مینیمم؟

الف) $y = x^2 - 4x - 3$

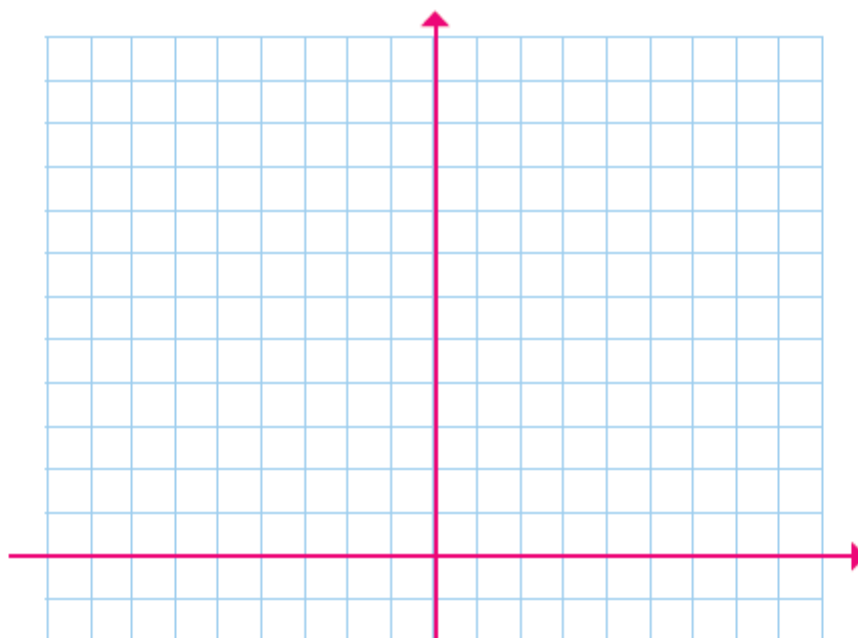
ب) $y = -2x^2 + 5$

ج) $y = -(x - 3)^2 + 1$

فعالیت

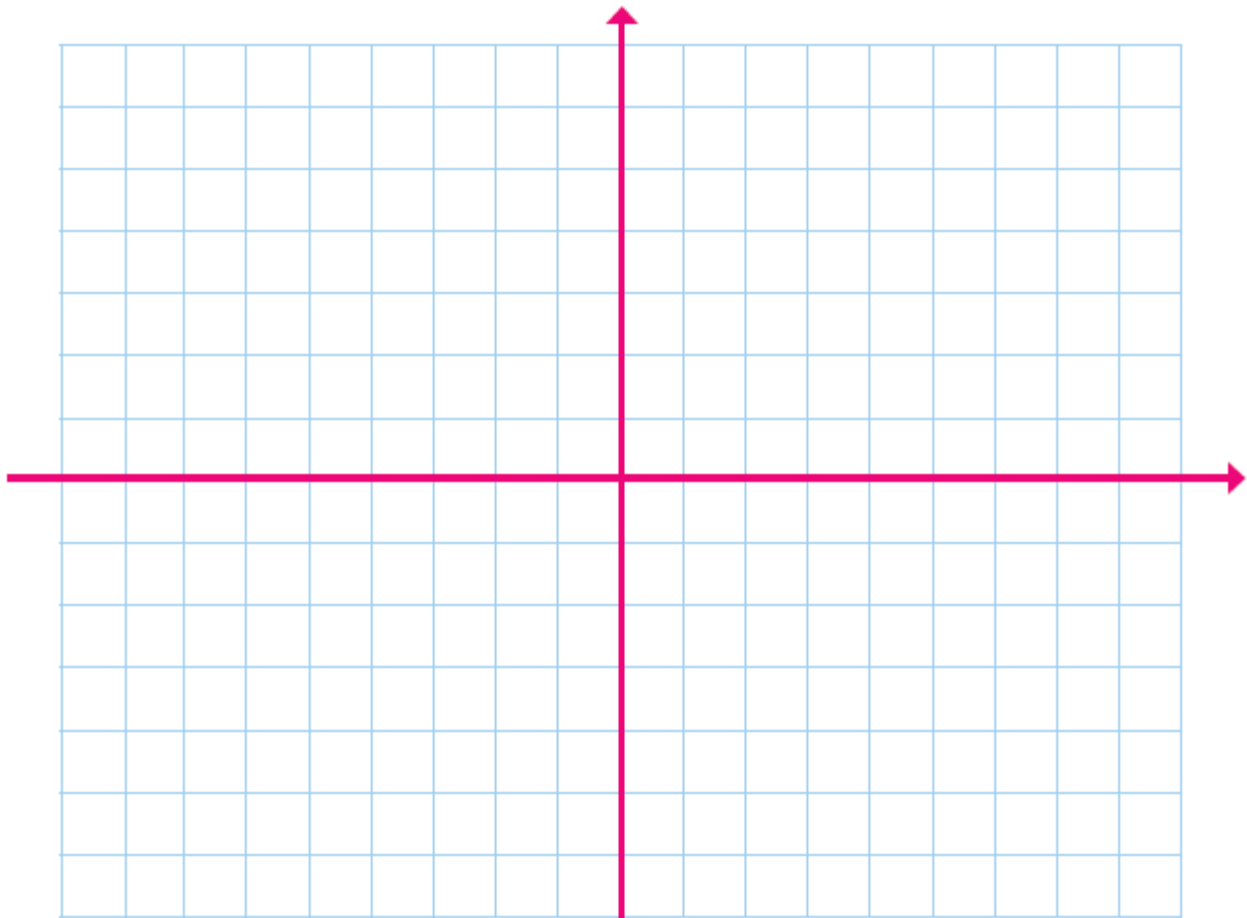
ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2$ را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...		9			0					...



جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4 - x^2$ را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	3	4	...
y	...		9			0				...



نقاط رأس سهمی هایی را که معادله های آنها داده شده است، مشخص کنید.

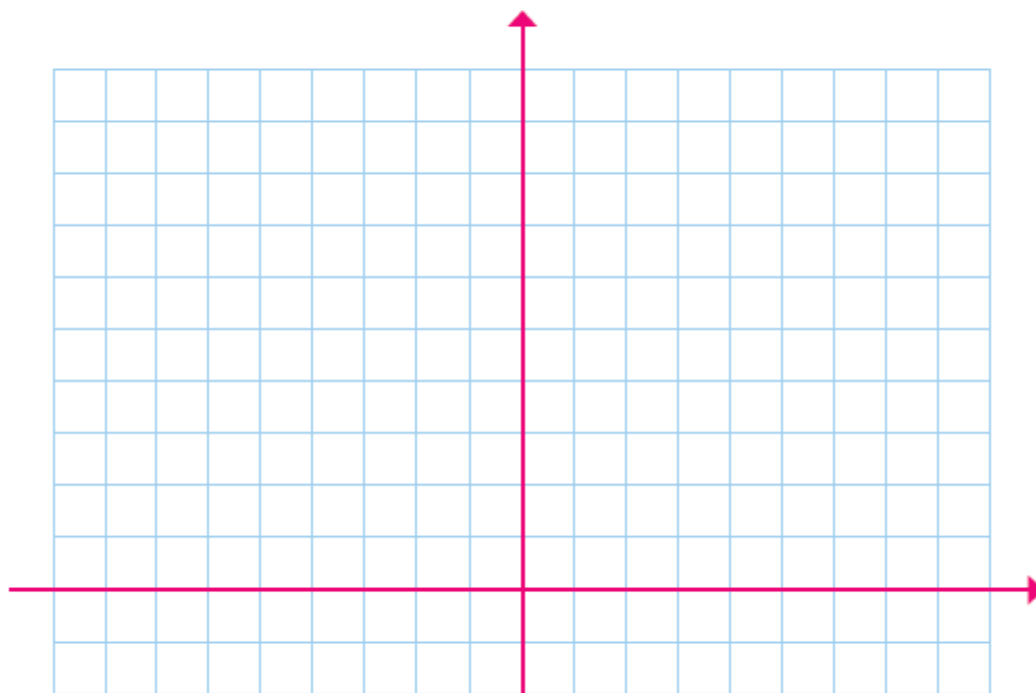
الف) $y = x^2$

$$\text{ب) } y = 4 - x^2$$

$$\text{پ) } y = 2x^2 - 4x + 1$$

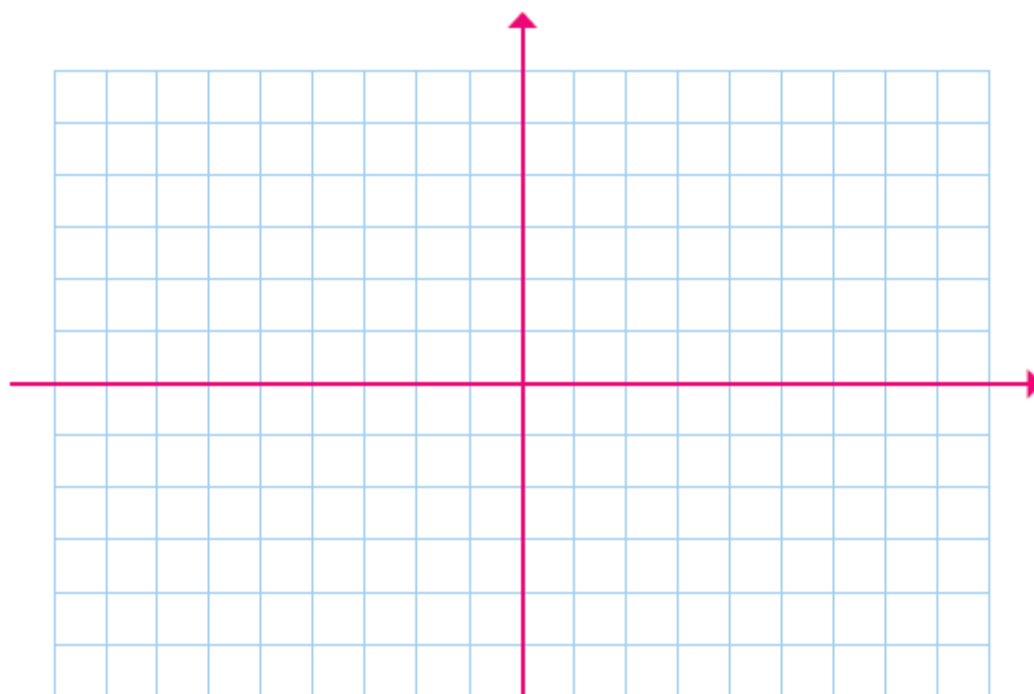
$$\text{ت) } y = 2(x-1)^2 + 1$$

الف) رأس سهمی به معادله $y = 2(x-1)^2 + 1$ را مشخص کنید به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید.

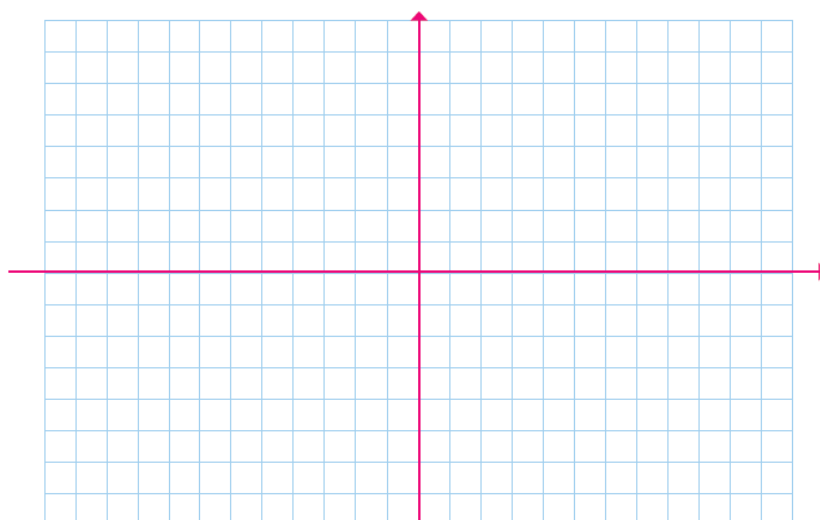


ب) جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار سهمی به معادله $y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 5$ را رسم کنید.

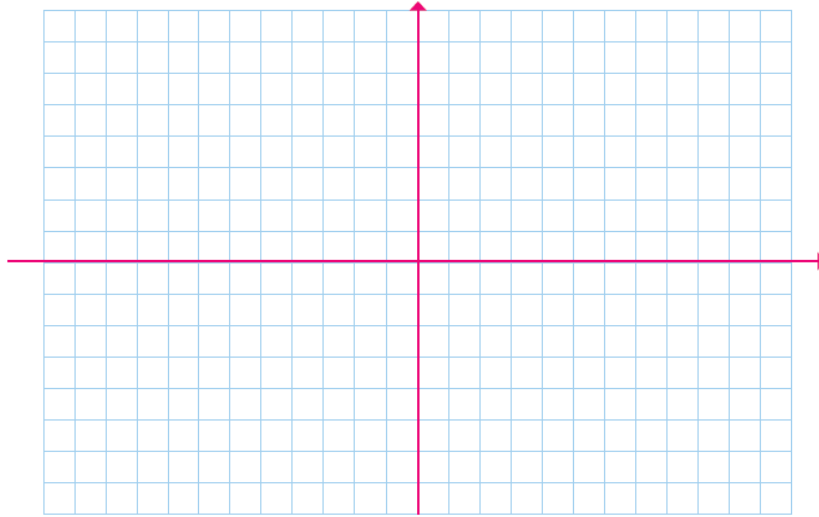
x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	...				0				...



۱. نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 6x - 1$ و $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.



۲. نمودار توابع $y = -x^2 + 6x - 10$ و $y = x^2 + 4x - 2$ را رسم کنید و در ادامه، مختصات برخورد این دو خم را مشخص کنید.



ماکزیم کردن عبارت‌های درجه دوم (بهینه‌سازی)

در فصل (۲) گفتیم که در تابع سود که معمولاً سهمی است، اگر تعداد کالاها برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ باشد شرکت بیشترین سود را کسب خواهد کرد. پس الان دیگر نمی‌خواهیم در مورد مسائل سود صحبت کنیم. (به انتهای فصل (۲) مراجعه کنید).

در بعضی از سوالات رابطه‌ای داده می‌شود که شامل ۲ متغیر است (رابطه‌ی فرعی) سپس از ما خواسته می‌شود این ۲ متغیر را طوری پیدا کنیم که عبارتی شامل ضرب آن‌ها (رابطه‌ی اصلی) ماکزیم شود. در این گونه مسائل که به بهینه‌سازی معروف‌اند، ابتدا از رابطه‌ی فرعی، یکی از متغیرها را به دلخواه انتخاب کرده برحسب متغیر دیگر به دست می‌آوریم، سپس در عبارت اصلی، به جای این متغیر، مقدارش را جای‌گذاری کرده تا به یک تابع درجه دوم (سهمی) برسیم، سپس از فرمول $(\frac{-b}{2a} = \text{متغیر})$ استفاده می‌کنیم تا یکی از متغیرها پیدا شود (نوشتم $x = \frac{-b}{2a}$ چون ممکنه به جای x هر اسم دیگری هم مطرح بشه). با جای‌گذاری جواب در رابطه‌ی فرعی، متغیر دیگر هم پیدا می‌شود.

مثال اگر $x + 2y = 12$ باشد، مقادیر x و y را طوری بیابید که عبارت $5xy$ ماکزیم شود. (دارای بیشترین مقدار شود).

(مشابه تمرین کتاب)

مثال در مستطیل‌هایی با محیط ۷۲ مترمربع، بیشترین مقدار مساحت چه قدر است؟

مثال در یک شرکت اگر تابع درآمد به صورت $y = \frac{-1}{4}x^2 + 20x$ و تابع هزینه به صورت $y = 10x + 40$ باشد، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

(مشابه تمرین کتاب)

الف) تابع سود را تشکیل دهید.

ب) به ازای تولید چه تعداد کالا، سود شرکت ماکزیمم خواهد شد؟ (به حداکثر مقدار خود می‌رسد.)

ج) مقدار سود ماکزیمم را محاسبه کنید.

تمرین

۱. نمودار سهمی‌های به معادله‌های $y = x^2 - 2x$ و $y = -(x-1)^2 + 1$ و $y = x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

۲. اگر تابع درآمد به صورت $y = -\frac{1}{2}x^2 + 30x$ و تابع هزینه به صورت $y = 18x + 40$ باشد، ماکسیم مقدار سود را مشخص کنید.

۳. محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با s نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع مساحت را بر حسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکسیم می شود.

۴. اگر $2x + a = 100$ باشد x و a را طوری بیابید که $y = xa$ ماکسیم شود.

۵. در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پزشکی تولید می شود. این تولیدی هریک از لامپ ها را می تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر $c(x) = x^2 + 40x + 100$ باشد:

الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.

ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

پ) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟



۶۷- اگر داشته باشیم $2x + y = 40$ ، بیشترین مقدار (ماکزیمم) حاصل ضرب x و y را به دست آورید.
(مشابه تمرین کتاب)

۶۸- اگر عدد حقیقی x بین دو عدد 0 و 3 تغییر کند، بیشترین مقدار اختلاف 3 برابر آن عدد با مربعش را به دست آورید.
(مفهوم علاقه مندان)

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

۶۹- بیشترین مقدار تفاضل مربع عددی از خود آن عدد کدام است؟

$$\frac{1}{16} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{8} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۱)}$$

۷۰- بین قاعده (a) و ارتفاع (h) مثلثی رابطه‌ی $a + 2h = 20$ برقرار است. بیشترین مقدار مساحت مثلث چه قدر است؟ (ماکزیمم مساحت چه قدر است؟)

۷۱- نمودار سهمی‌های زیر را رسم کنید.

$$y = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 1 \text{ (ج)}$$

$$y = -2(x-1)^2 + 3 \text{ (ب)}$$

$$y = x^2 - 4x \text{ (الف)}$$

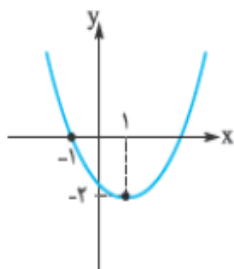
$$y = x^2 + 3 \text{ (ه)}$$

$$y = 5 - 2x^2 \text{ (د)}$$

۷۲- بیشترین مساحت مستطیلی که می‌توان به کمک یک طناب به طول ۴۸ متر در حاشیه‌ی یک رودخانه از سه طرف محصور نمود، چند متر مربع است؟ (به ضلع چهارم مستطیل دسترسی نداریم.)

۷۳- اگر نقطه‌ی S به طول ۱ رأس سهمی $y = (x - m)^2 - 4$ باشد، مقدار m را به دست آورید. سپس مقدار مینیمم تابع را به دست آورید.

۷۴- نقطه‌ی S(-۱, -۴) رأس سهمی $y = 2x^2 + ax + b$ است. مقادیر a و b را به دست آورید.



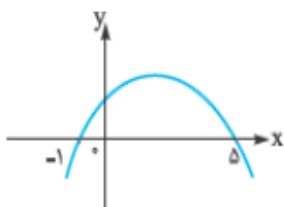
۷۵- معادله‌ی سهمی شکل مقابل کدام است؟

(۱) $y = x^2 - x - 2$

(۲) $y = 2x^2 + x - 1$

(۳) $y = \frac{-1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

(۴) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$



۷۶- معادله‌ی سهمی شکل مقابل کدام است؟

(۱) $y = x^2 - 2x + 5$

(۲) $y = x^2 - 4x + 5$

(۳) $y = -x^2 + 4x + 5$

(۴) $y = -x^2 - 4x + 5$

۷۷- اگر خط $x = \frac{3}{4}$ محور تقارن سهمی $y = (k + 1)x^2 - 4kx - 2$ باشد، مقدار k را به دست آورید.



کانال تلگرام: @mathvalizadeh

۷۸- عرض رأس (کمترین مقدار) سهمی $y = 2x^2 - 8x + m$ برابر ۵- است. m را به دست آورید.

۷۹- اگر تابع $y = (1-m)x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ در نقطه‌ای به طول (-1) دارای ماکزیمم باشد، مقدار m را به دست آورید.

۸۰- اگر طول رأس نمودار $y = -x^2 - kx + 3$ برابر (-1) باشد، ماکزیمم این تابع (بیشترین مقدار تابع) چه قدر است؟

۸۱- محور عرض‌ها محور تقارن کدام سهمی زیر است؟

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x \quad (۴)$$

$$y = -5x^2 + 3 \quad (۳)$$

$$y = 3 + 8x - x^2 \quad (۲)$$

$$y = x^2 - 6x + 2 \quad (۱)$$

۸۲- نمودار تابع $y = -3(x-2)^2 + 2$ از کدام نواحی محورهای مختصات عبور می‌کند؟

(۴) اول، سوم، چهارم

(۳) دوم، سوم، چهارم

(۲) اول، دوم، سوم

(۱) هر چهار ناحیه

کانال تلگرام: @mathvalizadeh

۸۳- در یک کارخانه نوعی لامپ تولید می‌شود و هر لامپ به قیمت ۳۰۰ تومان به فروش می‌رود. اگر کارخانه هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و معادله‌ی هزینه‌ی آن $C(x) = x^2 + 200x + 30$ باشد:

الف) معادله‌ی سود روزانه‌ی این کارخانه را بنویسید.

ب) این کارخانه چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را به دست آورد؟

ج) بیشترین مقدار سود روزانه چه قدر است؟

۸۴- محیط مستطیلی ۴۰ متر است. اگر اندازه‌ی یکی از اضلاع را با x و مساحت را با S نمایش دهیم، ابتدا تابع مساحت را برحسب x به دست آورده و نمودار آن را رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکزیمم می‌شود؟

$$R(x) = 21x - x^2, C(x) = 20 + x$$

۸۵- تابع درآمد و هزینه‌ی هفتگی شرکتی به صورت مقابل است:

الف) معادله‌ی (تابع) سود را تشکیل دهید.

ب) چند واحد کالا تولید شود تا بیشترین سود عاید شرکت شود؟

ج) ماکزیمم سود شرکت چه قدر است؟