# فصل اول: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

تعریف گزاره: به هر جمله ی خبری که بتوانیم (در حال حاضر یا در آینده) دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست را به آن نسبت دهیم، یک گزاره گفته می شود.

مثال: هر یک از جملات زیر یک گزاره هستند.

الف) عدد ۷ فرد است.

ب) سعدی یک ریاضیدان است.

ج) شیراز پایتخت ایران است.

د) $۴+۷=۱۱$

هـ) حاصل $۳\times۵$ برابر ۱۶ است.

ت) پروین اعتصامی یک شاعر است.

نکته: جمله های غیرخبری گزاره نیستند.

مثال: جملات زیر به دلیل غیرخبری بودن، گزاره نیستند.

الف) چه هوای خوبی.

ب) شما چند سال دارید؟

ج) به سمت من بیا

نکته مهم: با توجه به تعریف گزاره، جمله های خبری که نتوانیم ارزش آنها (درست یا نادرست) مشخص کنیم، گزاره نیستند.

مثال: جملات زیر گزاره نیستند

الف) ریاضی از عربی آسانتر است.

ب) رنگ قرمز زیباتر از سبز است.

مثال: دو گزاره ی درست و دو گزاره ی نادرست بیان کنید.

گزاره های درست:
- عدد ۴ زوج است.
- $\sqrt{۲}$ گنگ است.

گزاره های نادرست:
- تمام اعداد اول فرد هستند
- $۸-۲\times۳=۱۸$

مثال: دو جمله بنویسید که گزاره نباشد.

الف) پائیز از زمستان زیباتر است.

ب) شما به چه ورزشی علاقه دارید.

نکته: در منطق ریاضی، هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند $p$ یا $q$ یا $r$ یا ... نمایش می دهیم

در جدول زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده اند.

| $p$ |
|---|
| د |
| ن |

| $p$ | $q$ |
|---|---|
| د | د |
| د | ن |
| ن | د |
| ن | ن |

| $p$ | $q$ | $r$ |
|---|---|---|
| د | د | د |
| د | د | ن |
| د | ن | ن |
| د | ن | د |
| ن | د | د |
| ن | د | ن |
| ن | ن | د |
| ن | ن | ن |

نکته مهم: اگر $p$ یک گزاره باشد، نقیض آن را با $\sim p$ نمایش می دهیم و آن را به صورت «نقیض $p$» می خوانیم.

| $p$ | $\sim p$ |
|---|---|
| د | ن |
| ن | د |

نکته: از آنجا که هر گزاره یک جمله ی خبری است (و حتماً دارای فعل است) برای بیان نقیض یک گزاره فقط کافی است که فعل جمله را نفی کنیم
در این صورت اگر ارزش گزاره ی $p$ درست باشد، ارزش گزاره ی $\sim p$ نادرست است
و اگر ارزش گزاره ی $p$ نادرست باشد، ارزش گزاره ی $\sim p$ درست خواهد بود.

مثال: نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

الف) $\sqrt{3}$ عددی گنگ است.

ب) تساوی $8-3=5$ برقرار است.

ج) ۲ عددی اول است

د) عدد صفر زوج است

هـ) تهران پایتخت ایران نیست.

مثال: آیا نقیض عبارت «$x$ مثبت است» را می توانیم به صورت «$x$ منفی است» بنویسیم؟ چرا؟

جواب: خیر

زیرا نقیض «$x$ مثبت است» به صورت «$x$ مثبت نیست» می باشد به این معنی که مقدار $x$ یا منفی است یا صفر است.

## ترکیب گزاره‌ها

**الف) ترکیب عطفی دو گزاره:** اگر بخواهیم دو گزاره، مانند $p$ و $q$ را با لفظ « و » باهم ترکیب کنیم از نماد « $\wedge$ » بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و آن‌را به صورت « $p \wedge q$ » می‌نویسیم و به صورت « $p$ و $q$ » می‌خوانیم.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| د | د | د |
| د | ن | ن |
| ن | د | ن |
| ن | ن | ن |

جدول شماره (۱)

نکته‌ی مهم: ترکیب عطفی دو گزاره فقط هنگامی درست است که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشند، و اگر حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشد، ارزش گزاره‌ی « $p \wedge q$ » نادرست خواهد بود.

مثال: ارزش گزاره‌ی زیر را معلوم کنید.

«عدد ۲ فرد است و پنج فرد است.»

← دقت شود که حرف « و » ترکیب عطفی است.

جواب: فرض می‌کنیم که
$p$ به معنی: عدد ۲ فرد است
$q$ به معنی: پنج فرد است

در این صورت چون ارزش گزاره‌ی $p$ نادرست و ارزش گزاره‌ی $q$ درست است پس با توجه به ردیف سوم جدول بالا ارزش گزاره‌ی « $p \wedge q$ » نادرست می‌باشد.

---

**ب) ترکیب فصلی دو گزاره:** اگر بخواهیم دو گزاره، مانند $p$ و $q$ را با لفظ « یا » باهم ترکیب کنیم از نماد « $\vee$ » بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و آن‌را به صورت « $p \vee q$ » می‌نویسیم و به صورت « $p$ یا $q$ » می‌خوانیم.

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| د | د | د |
| د | ن | د |
| ن | د | د |
| ن | ن | ن |

جدول شماره (۲)

نکته‌ی مهم: ترکیب فصلی دو گزاره فقط هنگامی نادرست است که ارزش هر دو گزاره نادرست باشند، و اگر حداقل یکی از دو گزاره درست باشند، ارزش گزاره‌ی « $p \vee q$ » درست خواهد بود.

مثال: ارزش گزاره‌ی زیر را معلوم کنید.

«عدد ۲ زوج است یا $\sqrt{3}$ گویا است.»

← دقت شود که حرف « یا » ترکیب فصلی است.

جواب: ارزش گزاره‌ی اولی درست و ارزش دومی نادرست است پس ارزش گزاره درست می‌باشد.

مثال: ارزش گزاره های زیر را معلوم کنید

الف) پنج عددی فرد و ۴ عددی اول است

ب) عدد $\sqrt{2}$ گنگ یا ۷ عددی زوج است.

ج) $8=\sqrt{16}$ و صفر عددی اول است.

د) $\sqrt{9}$ گنگ است یا $\sqrt{10}$ گویا است

---

ج) ترکیب شرطی دو گزاره: اگر بخواهیم از گزاره ی $p$ گزاره ی $q$ را نتیجه بگیریم از نماد « $\Rightarrow$ » استفاده می کنیم و آن را به صورت « $p \Rightarrow q$ » می نویسیم و به صورت « اگر $p$ آنگاه $q$ » یا به صورت « $p$ نتیجه می دهد $q$ را » می خوانیم

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| د | د | د |
| د | ن | ن |
| ن | د | د |
| ن | ن | د |

جدول شماره ی (۲)

نکته: در گزاره ی شرطی « $p \Rightarrow q$ » $p$ را مقدم و $q$ را تالی می نامیم.

نکته ی مهم: گزاره ی شرطی « $p \Rightarrow q$ » فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد
(یعنی از یک گزاره ی درست نتیجه ی نادرست حاصل شود)

مثال: ارزش گزاره ی شرطی زیر را مشخص کنید.

« اگر عدد ۷ زوج است آنگاه ۲ عددی اول است»

$$\underbrace{\text{عدد ۷ زوج است}}_{\text{گزاره ی نادرست}}^{p} \Longrightarrow \underbrace{\text{۲ عددی اول است}}_{\text{گزاره ی درست}}^{q}$$

پس با توجه به ردیف سوم جدول بالا
ارزش این گزاره درست می باشد.

---

مثال: ارزش گزاره ی شرطی زیر را مشخص کنید.

« اگر $\sqrt{2}$ گنگ است آنگاه $3^2=6$ »

$$\underbrace{\sqrt{2}\ \text{گنگ است}}_{\text{گزاره ی درست}}^{p} \Longrightarrow \underbrace{3^2=6}_{\text{گزاره ی نادرست}}^{q}$$

پس با توجه به ردیف دوم جدول بالا
ارزش این گزاره نادرست می باشد

مثال: ارزش گزاره ی زیر را مشخص کنید.

« اگر تهران پایتخت ایران است پس ۳ عددی اول است»

نکته ی مهم: با توجه به دو ردیف آخر جدول شماره ی ۳ در گزاره ی شرطی $p \Rightarrow q$ اگر ارزش گزاره $p$ نادرست باشد، درستی یا نادرستی گزاره ی $q$ تأثیری در ارزش گزاره ی $p \Rightarrow q$ ندارد و همواره ارزش $p \Rightarrow q$ درست خواهد بود. و در این حالت می گوئیم:

گزاره ی شرطی $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم دارای ارزش درست است.

مثال: گزاره های زیر را در نظر بگیرید.

« اگر ۳=۲ باشد آنگاه ۷ فرد است.»

$\underbrace{2 = 3}_{p} \Longrightarrow \underbrace{\text{۷ فرد است}}_{q}$

نادرست ، نادرست

ارزش گزاره به انتفای مقدم درست است.

مثال: گزاره ی زیر را در نظر بگیرید.

« اگر $3^2 = 2^3$ باشد، آنگاه $\sqrt{2}$ گنگ است.»

$\underbrace{2^3 = 3^2}_{p} \Longrightarrow \underbrace{\sqrt{2}\ \text{گنگ است}}_{q}$

نادرست ، درست

ارزش گزاره به انتفای مقدم درست است.

سؤال امتحانی: اگر $p$ گزاره ای درست و $q$ گزاره ای نادرست و $r$ گزاره ای دلخواه باشد، ارزش گزاره های مرکب زیر را مشخص کنید.

$(p \Rightarrow q) \wedge r$

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $r$ | $(p \Rightarrow q) \wedge r$ |
|---|---|---|---|---|
| د | ن | ن | د | ن |
| د | ن | ن | ن | ن |

$(p \wedge q) \Rightarrow r$

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $r$ | $(p \wedge q) \Rightarrow r$ |
|---|---|---|---|---|
| د | ن | ن | د | د |
| د | ن | ن | ن | د |

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $r$ | $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ |
|---|---|---|---|---|
| د | ن | ن | د | د |
| د | ن | ن | ن | د |

ارزش گزاره درست می باشد و به ارزش $r$ بستگی ندارد.

$(q \Rightarrow p) \wedge r$

| $q$ | $p$ | $q \Rightarrow p$ | $r$ | $(q \Rightarrow p) \wedge r$ |
|---|---|---|---|---|
| ن | د | د | د | د |
| ن | د | د | ن | ن |

بنابراین ارزش گزاره به $r$ بستگی دارد.

سؤال مهم: اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌ی مقابل را مشخص کنید.

$(p \wedge q) \Rightarrow r$

د) ترکیب دوشرطی: اگر بخواهیم از گزاره‌ی p گزاره‌ی q را نتیجه بگیریم و از گزاره‌ی q گزاره‌ی p را نتیجه بگیریم، از نماد « $\Leftrightarrow$ » استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم « $p \Leftrightarrow q$ » و آن را به صورت « p اگر و تنها اگر q » می‌خوانیم.

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$$

علامت هم‌ارز بودن یا معادل بودن

نکته‌ی مهم: با توجه به جدول مقابل واضح است که ارزش گزاره‌ی $p \Leftrightarrow q$ فقط هنگامی درست است که گزاره‌های p و q هم‌ارزش باشند یعنی اینکه هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند ولی اگر ارزش گزاره‌ها با هم متفاوت باشند (یکی درست و یکی نادرست باشد) ارزش گزاره‌ی $p \Leftrightarrow q$ نادرست خواهد بود.

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ |
|---|---|---|---|---|
| د | د | د | د | د |
| د | ن | ن | د | ن |
| ن | د | د | ن | ن |
| ن | ن | د | د | د |

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را معلوم کنید.

« اگر ۲ فرد است، آنگاه ۵ عددی اول است و برعکس »

$\underbrace{\text{۲ فرد است}}_{p} \Longleftrightarrow \underbrace{\text{۵ عددی اول است}}_{q}$

نادرست　　نادرست

ارزش گزاره درست است.

« ۳۹ عددی اول است اگر و فقط اگر $\sqrt{2}$ گنگ باشد. »

$\underbrace{\text{۳۹ عددی اول است}}_{p} \Longleftrightarrow \underbrace{\sqrt{2}\ \text{گنگ است}}_{q}$

نادرست　　درست

ارزش گزاره نادرست است.

سؤال امتحانی: اگر $p$ گزاره‌ای درست و $q$ گزاره‌ای نادرست و $r$ گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های مرکب زیر را مشخص کنید.

$(\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$

| $p$ | $\sim p$ | $q$ | $\sim p \Leftrightarrow q$ | $r$ | $(\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| د | ن | ن | د | د | د |
| د | ن | ن | د | ن | د |

$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|
| د | ن | ن | د | ن |

مثال: اگر ارزش گزاره‌ی $p$ درست و $q$ نادرست و $r$ گزاره‌ای دلخواه باشد در این صورت ارزش گزاره‌ی مقابل؟

$(r \Leftrightarrow p) \Longrightarrow p \wedge q$

الف) درست است

ب) نادرست است

ج) به ارزش $r$ بستگی دارد. ✓

| $r$ | $p$ | $r \Leftrightarrow p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $(r \Leftrightarrow p) \Longrightarrow p \wedge q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| د | د | د | ن | ن | ن |
| ن | د | ن | ن | ن | د |

بنابراین ارزش این گزاره به ارزش گزاره‌ی $r$ بستگی دارد.

مثال: اگر $F$ به معنی نادرست بودن و $T$ به معنی درست بودن باشد، و $p$ گزاره‌ای دلخواه باشد، نشان دهید که؟

الف) $(p \wedge \sim p) \equiv F$

ب) $(p \vee \sim p) \equiv T$

جواب الف)

| $p$ | $\sim p$ | $p \wedge \sim p$ |
|---|---|---|
| د | ن | ن |
| ن | د | ن |

جواب ب)

| $p$ | $\sim p$ | $p \vee \sim p$ |
|---|---|---|
| د | ن | د |
| ن | د | د |

سؤال امتحانی: با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها، درستی هم ارزی‌های زیر را بررسی کنید.

$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \vee q$ | $\sim(p \vee q)$ | $\sim p \wedge \sim q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| د | د | ن | ن | د | ن | ن |
| د | ن | ن | د | د | ن | ن |
| ن | د | د | ن | د | ن | ن |
| ن | ن | د | د | ن | د | د |

واضح است که دو ستون سمت راست جدول دارای ارزش‌های یکسانی هستند.

$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \Rightarrow q$ | $\sim q \Rightarrow \sim p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| د | د | ن | ن | د | د |
| د | ن | ن | د | ن | ن |
| ن | د | د | ن | د | د |
| ن | ن | د | د | د | د |

واضح است که دو ستون سمت راست جدول دارای ارزش‌های یکسانی هستند.

نکته‌ی مهم: گزاره‌ی $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ می‌گوئیم.

قوانین دمورگان

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

تکلیف: نشان دهید که؟

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

سؤال امتحانی: نشان دهید که اگر $p$ و $q$ گزاره های دلخواهی باشند آنگاه

$$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

سؤال امتحانی: نشان دهید که اگر $p$ و $q$ گزاره های دلخواهی باشند آنگاه

$$(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

سؤال امتحانی: ثابت کنید که اگر $n^2$ زوج باشد، آنگاه $n$ زوج است $(n \in N)$

راهنایی: از عکس نقیض استفاده کنید

سؤال امتحانی: ثابت کنید که مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است.

سؤال امتحانی: گزاره های زیر را به کمک نمادهای ریاضی بازنویسی کنید

الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

ب) مجموع معکوس های دو عدد بزرگتر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.

ج) مجموع مکعبات دو عدد بزرگتر مساوی است با مجموع آن دو عدد.

د) مکعب یک عدد از هشت برابر آن عدد به علاوه ی پنج بزرگتر است.

ت) جذر عددی با نصف خودش برابر است.

سؤال امتحانی: درستی یا نادرستی استدلال زیر را مشخص کنید.

« اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم، مساحت آن دو برابر می شود.»

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

سؤال امتحانی: ستون نتیجه‌ی گزاره‌ی $(p\vee q)\Rightarrow[q\Rightarrow(p\wedge q)]$ را بنویسید.

| $p$ | $q$ | $p\vee q$ | $p\wedge q$ | $q\Rightarrow(p\wedge q)$ | $p\vee q\Rightarrow[q\Rightarrow(p\wedge q)]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

سؤال امتحانی: اگر ارزش گزاره‌ی $r$ درست و ارزش گزاره‌ی $(q\vee r)\Leftrightarrow p\Rightarrow q$ نادرست باشد گزاره‌ی $r\Rightarrow q\wedge p$ هم‌ارز با کدام است؟

الف) $T$

ب) $F$

ج) $r\Rightarrow p$

د) نامشخص

تعریف گزاره‌نما: هر جمله‌ی خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل می‌شود را گزاره‌نما می‌گویند.

نکته: گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها، گزاره‌نماهای یک متغیره، دو متغیره یا ... می‌نامیم.

مثال: «$x$ عددی زوج است»، یک گزاره‌نمای یک متغیره می‌باشد که:

الف) اگر به جای $x$ عدد ۲ قرار بگیرد، ارزش جمله‌ی خبری درست است.

ب) اگر به جای $x$ عدد ۳ قرار بگیرد، ارزش جمله‌ی خبری نادرست است.

مثال: «$2x+y=7$» یک گزاره‌نمای دو متغیره می‌باشد که در آن:

الف) اگر $x=1$ و $y=5$ باشد، آنگاه $2(1)+5=7$ می‌باشد که یک گزاره‌ی درست می‌باشد.

ب) اگر $x=3$ و $y=4$ باشد، آنگاه $2(4)+3=11$ می‌باشد که یک گزاره‌ی نادرست می‌باشد.

دامنه‌ی متغیر گزاره نما: در هر گزاره نما، به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای گزاره نما قرار داد تا این که گزاره نما تبدیل به گزاره شود را دامنه‌ی متغیر گزاره نما می‌گوییم و آن را با حرف D نمایش می‌دهیم.

مثال: در گزاره نمای «$2x-4=6$» دامنه‌ی متغیر گزاره نما (همان $x$) برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد. یعنی به جای $x$ هر عدد حقیقی را می‌توانیم قرار دهیم تا یک گزاره حاصل شود.

مجموعه‌ی جواب گزاره نما: در هر گزاره نما به مجموعه‌ی عضوهایی از دامنه‌ی متغیر که به ازای آن‌ها گزاره نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود را مجموعه جواب گزاره نما می‌گوییم و آن را با حرف S نشان می‌دهیم.

نکته: $S\subseteq D$

مثال: در گزاره نمای «$5x^2+7x-12=0$»

الف) دامنه‌ی متغیر گزاره نما اعداد حقیقی است، یعنی ($D=\mathbb{R}$)

ب) مجموعه جواب آن $S=\{1,\frac{-12}{5}\}$ می‌باشد.

نکته: همانطور که قبلاً گفته شد، اگر $p$ یک گزاره باشد، نقیض آن را با $\sim p$ نشان می‌دهند و:

الف) $\sim(p\wedge q)\equiv \sim p\vee \sim q$

ب) $\sim(p\vee q)\equiv \sim p\wedge \sim q$

ج) $\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge \sim q$

د) $\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv(\sim p\Leftrightarrow q)\equiv(p\Leftrightarrow \sim q)$

با توجه به قسمت (د)، برای نقیض کردن یک گزاره‌ی دوشرطی فقط باید یکی از گزاره‌ها را نقیض کنیم.

مثال: نقیض «اگر $a$ عددی منفی باشد، آنگاه مربع آن مثبت است» را بنویسید.

جواب: با توجه به قسمت (ج)، نقیض این گزاره‌ی شرطی به این صورت می‌باشد.

$$\sim[\overbrace{\text{a عددی منفی باشد}}^{p}\Rightarrow\overbrace{\text{مربع a مثبت است}}^{q}]\equiv(\overbrace{\text{a عددی منفی است}}^{p})\wedge(\overbrace{\text{مربع a مثبت نیست}}^{\sim q})$$

که به صورت خلاصه نقیض عبارت است از: «$a$ عددی منفی است و مربع $a$ مثبت نیست»

مثال: نقیض گزاره ی «یک چهارضلعی متوازی الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر باشند» را بنویسید.

نقیض این گزاره را به دو صورت مختلف می توانیم بنویسیم:

الف) یک چهارضلعی متوازی الاضلاع نیست اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر باشند.

ب) یک چهارضلعی متوازی الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر نباشند.

عبارتهای «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سور معروف هستند. که این عبارتها می توانند قبل از گزاره نماها قرار بگیرند و گزاره هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

نکته:

الف) به جای استفاده از عبارت «به ازای هر» از نماد $\forall$ استفاده می کنیم.

ب) به جای استفاده از عبارت «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد $\exists$ استفاده می کنیم.

در این صورت:
- $\forall$ : نماد سور عمومی است.
- $\exists$ : نماد سور وجودی است.

مثال: گزاره های زیر را به زبان ریاضی بیان کنید.

الف) مربع هر عدد حقیقی نامنفی است. $\forall x\in R : x^2\geq 0$

ب) نصف هر عدد صحیح، از خود آن عدد کوچکتر است. $\forall x\in Z : \frac{x}{2}<x$

ج) بعضی از اعداد اول زوج هستند. $\exists x\in P : x=2k \ , (k\in N)$

د) جذر بعضی از اعداد طبیعی از خودشان بزرگتر است. $\exists x\in N : \sqrt{x}>x$

نکته ی مهم: گزاره های با سور عمومی وقتی درست می باشند که مجموعه ی جواب آنها با دامنه ی متغیر آنها یکسان باشد، به عبارت دیگر: هیچ مثال نقض نداشته باشند.

نکته ی مهم: گزاره های با سور وجودی زمانی درست هستند که مجموعه جواب آنها تهی نباشد.

مثال: گزاره های زیر را به زبان ریاضی بیان کنید و سپس ارزش آنها را معلوم کنید.

الف) بعضی از اعداد اول زوج هستند. $\exists x\in P: x=2k, (k\in N)$

این گزاره درست است زیرا عدد ۲ در آن صدق می کند و مجموعه جواب $=\{2\}$ که تهی نیست

ب) مربع هر عدد طبیعی از خود آن عدد بزرگتر است. $\forall x\in N: x^2>x$

این گزاره غلط است زیرا عدد ۱ (که طبیعی است) در آن صدق نمی کند و در واقع عدد ۱ مثالی نقض برای آن می باشد.

سؤال امتحانی: درستی یا نادرستی گزاره های سوری زیر را مشخص کنید.

الف) $\exists x\in N: x^2-1=0$

ب) $\forall x\in R: |x|\geq 0$

ج) $\exists x\in P: x=2k$

د) $\forall x\in E: x\notin P$

ه) $\exists x\in R: x^2+1=0$

ت) $\exists x\in Z: x^2=x$

ه) $\forall x\in R, x^2>0$

ت) $\exists y\in R: y<0, y^2>3$

س) $\exists m\in R: \frac{2m-8}{5}=0$

ش) $\forall n\in N: (2^n+1)\in P$

ر) $\exists x\in R: x^2-3x+2=0$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

سؤال امتحانی: هرگاه $A=\{x\in \mathbb{Z} \mid 0< x\le 5\}$ دامنه‌ی متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را معلوم کنید.

الف) $\exists x\in A;\ x+4=10$

ب) $\exists x\in A;\ x+3\le 4$

ج) $\forall x\in A,\ x+2\le 9$

د) $\forall x\in A;\ (x-1)\in \mathbb{N}$

نمونه‌ی سؤالات امتحانی:

۱- الف) مجموعه‌ی توانی $A=\{3,0,2\}$ را بنویسید.

ب) مجموعه‌ی $A$ چهار عضو بیشتر از مجموعه‌ی $B$ دارد. و همچنین ۱۲۰ زیرمجموعه بیشتر از $B$ دارد. مشخص کنید که مجموعه‌ی $B$ چند عضو دارد.

تعریف: فرض کنید $A$ یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد. در این صورت می‌گوییم:
$A$ به $n$ ($n\in\mathbb{N}$) زیرمجموعه‌ی $A_1$ ، $A_2$ و $A_3$ و ..... و $A_n$ افراز شده است، اگر سه شرط زیر را داشته باشد.

الف) $A_i \neq \emptyset$ ، $1\leq i\leq n$ (هیچ یک از زیرمجموعه‌ها تهی نباشند.)

ب) برای هر $i\neq j$ ، $A_i\cap A_j=\emptyset$ (زیرمجموعه‌ها دو به دو جدا از هم باشند)

ج) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n = A$ (اجتماع همه‌ی زیرمجموعه‌ها برابر خود مجموعه‌ی اصلی باشد)

مثال: می‌دانیم که اعداد اول کمتر از ۱۵ عبارتند از: $A=\{2,3,5,7,11,13\}$

یک افراز دلخواه از این مجموعه عبارتست از: $A_1=\{2,5\}$ ، $A_2=\{3,7,11\}$ ، $A_3=\{13\}$

زیرا:

الف) هیچ کدام از این زیرمجموعه‌ها تهی نیستند.

ب) هیچ کدام از آنها با هم اشتراک ندارند.

ج) $\{2,5\}\cup\{3,7,11\}\cup\{13\}=\{2,3,5,7,11,13\}=A$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

سؤال امتحانی: اگر $A_n = \{n, n+1, \dots, 2^n\}$ باشد، مجموعه‌ی $\left(\bigcup_{n=1}^{3} A_n\right) - A_1$ چند عضو دارد.

$A_1 = \{1, 2\}$ ، $A_2 = \{2, 3, 4\}$ ، $A_3 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{3} A_n\right) - A_1 = (A_1 \cup A_2 \cup A_3) - A_1$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{1, 2\}$$
$$= \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

---

نکته: دو زوج مرتب $(a, b)$، $(c, d)$ زمانی باهم برابرند که مؤلفه‌های اول آنها باهم، و مؤلفه‌های دوم آنها نیز باهم برابر باشند.

مثال: اگر دو زوج مرتب $(32, 4x+y)$ و $(2^{x-y}, 10)$ باهم برابر باشند، زوج مرتب $(x, y)$ کدام است؟

الف) $(2, 2)$

ب) $(3, -2)$

ج) $(6, 1)$ ✓

د) $(4, -1)$

$$2^{x-y} = 32 = 2^5 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 5 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$$
$$5x = 15$$
$$x = \frac{15}{5} = 3$$

$$4x + y = 10$$
$$12 + y = 10$$
$$y = 10 - 12 = -2$$

$$(x, y) = (3, -2)$$

---

نکته‌ی مهم: ضرب دکارتی مجموعه‌ی $A$ در مجموعه‌ی $B$ را با $A \times B$ نمایش می‌دهیم که:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

یعنی $A \times B$ مجموعه‌ی تمام زوج مرتب‌های $(x, y)$ است که در آن مؤلفه‌ی اول عضو $A$ و مؤلفه‌ی دوم عضو $B$ می‌باشد.

مثال: اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{-1, 0\}$ باشد. $A \times B$ و $A^2$ را با اعضا مشخص کنید.

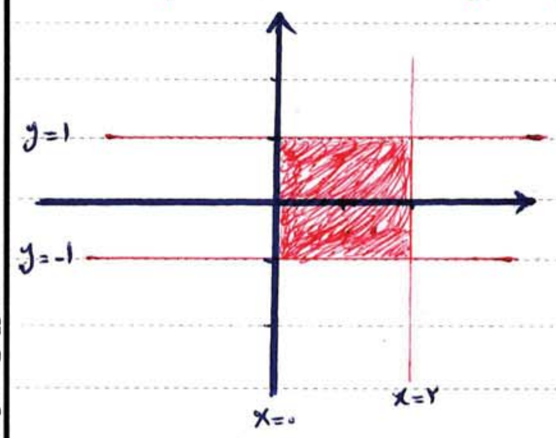
$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, x \in B\} = \{(x, y) \mid x \in \{1, 2\} \wedge y \in \{-1, 0\}\}$$
$$= \{(1, -1), (1, 0), (2, -1), (2, 0)\}$$

$$A^2 = A \times A = \{(x, y) \mid x \in A, x \in A\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: اگر $A=[0,2]$ و $B=[-1,1]$ باشد نمودار مجموعه‌های $A\times B$ و $B\times A$ را در صفحه نمایش دهید.

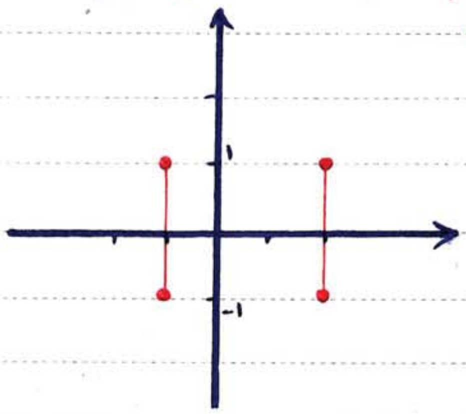
$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 2\ ,\ -1\leq y\leq 1\}$$




که با رسم خطوط $x=0$ و $x=2$ و $y=1$ و $y=-1$ نمودار $A\times B$ به صورت مقابل خواهد بود.

مثال: اگر $A=[-1,1]$ و $B=\{-1,2\}$ باشد نمودار $B\times A$ را رسم کنید.

$$B\times A=\{(x,y)\mid x\in B\wedge y\in A\}=\{(x,y)\mid x\in\{-1,2\}\wedge y\in[-1,1]\}$$
$$=\{(x,y)\mid (x=-1\vee x=2)\wedge -1\leq y\leq 1\}$$



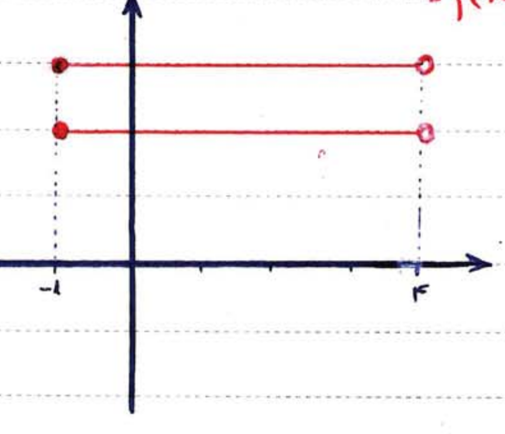

که با رسم خطوط $x=-1$ و $x=2$ قسمت‌هایی را در نظر می‌گیریم که مقدار $y$ بین ۱ و ۱- باشد.

مثال: فرض کنید $A=\{2,3\}$ و $B=[-1,4)$ باشد

الف) ابتدا مجموعه‌ی $B\times A$ را تشکیل دهید.

ب) نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

$$B\times A=\{(x,y)\mid x\in B\wedge y\in A\}=\{(x,y)\mid x\in[-1,4)\wedge y\in\{2,3\}\}$$
$$=\{(x,y)\mid -1\leq x<4\wedge (y=2\vee y=3)\}$$




که باید ابتدا خطوط $y=2, y=3$ را رسم کنیم و سپس قسمت‌هایی را در نظر می‌گیریم که در آنها $-1\leq x<4$ باشد.

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

نکته: برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه $A$ و $B$ از مجموعه‌ی مرجع $U$ تساوی‌های زیر برقرارند که به آنها قوانین دمورگان گفته می‌شود.

قوانین دمورگان
$$\begin{cases}(A\cup B)'=A'\cap B'\\ (A\cap B)'=A'\cup B'\end{cases}$$

مثال: با استفاده از روش عضوگیری و تعریف تساوی دو مجموعه نشان دهید که:

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

$$\forall x;\ x\in(A\cup B)'\Rightarrow x\notin(A\cup B)\Rightarrow x\notin A\wedge x\notin B$$
$$\Rightarrow x\in A'\wedge x\in B'$$
$$\Rightarrow x\in(A'\cap B')$$

بنابراین: $(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$ (۱)

$$\forall x;\ x\in(A'\cap B')\Rightarrow x\in A'\wedge x\in B'\Rightarrow x\notin A\wedge x\notin B$$
$$\Rightarrow x\notin(A\cup B)$$
$$\Rightarrow x\in(A\cup B)'$$

بنابراین: $(A'\cap B')\subseteq(A\cup B)'$ (۲)

$$(1),(2)\Rightarrow(A\cup B)'=A'\cap B'$$

نکته: دو مجموعه‌ی $A,B$ هنگامی مساوی هستند که $A\subseteq B, B\subseteq A$ باشد.

مثال: مجموعه‌های $A=\{1,2\}, B=\{2,1\}$ با هم مساویند زیرا: $A\subseteq B,\ B\subseteq A$

مثال مهم: با استفاده از جبر مجموعه‌ها، تساوی زیر را ثابت کنید.

$$(A\cap B)-(A\cap C)=A\cap(B-C)$$

اثبات:

$$\begin{aligned}(A\cap B)-(A\cap C)&=(A\cap B)\cap(A\cap C)'\\&=(A\cap B)\cap(A'\cup C')\\&=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']\\&=[(A\cap A')\cap B]\cup[A\cap(B\cap C')]\\&=[\varnothing\cap B]\cup[A\cap(B-C)]\\&=\varnothing\cup[A\cap(B-C)]\\&=A\cap(B-C)\end{aligned}$$

نکته: $A-B=A\cap B'$

$(A\cap B)'=A'\cup B'$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

دانستن این نکات برای اثبات مسأله لازم است.

فصل دوم:

قسمت اول: مبانی احتمال

فضای نمونه ای: مجموعه ی همه ی حالتهای ممکن در به وقوع پیوستن یک پدیده یا آزمایش تصادفی را فضای نمونه ای آن پدیده یا آزمایش تصادفی می گوئیم.

نکته: فضای نمونه ای را معمولاً با حرف S نشان می دهند.

مثال: در پرتاب همزمان یک سکه و یک تاس، فضای نمونه ای را مشخص کنید.

S = {(پ،۱)،(پ،۲)،(پ،۳)،(پ،۴)،(پ،۵)،(پ،۶)،(ر،۱)،(ر،۲)،(ر،۳)،(ر،۴)،(ر،۵)،(ر،۶)}

تعریف برآمد: به هر عضو فضای نمونه ای یک برآمد می گوئیم

مثال: فضای نمونه ای مربوط به یک تاس عبارتست از S = {۱،۲،۳،۴،۵،۶}
که به هرکدام از این اعداد یک برآمد گفته می شود.

---

سؤال امتحانی: تاسی را پرتاب می کنیم، اگر عدد کمتر از ۳ ظاهر شود، دو سکه را می اندازیم و اگر عدد بزرگتر از ۳ ظاهر شود، سه سکه را می اندازیم، فضای نمونه ای چند عضو دارد.

الف) ۳۳　　ب) ۳۲　　ج) ۳۱　　د) ۳۰

جواب: واضح است که در پرتاب تاس سه حالت ممکن است بوجود آید:

الف) عدد ظاهرشده کمتر از ۳ باشد
یعنی اعداد ۲ یا ۱ ظاهر شوند
در این صورت باید دو سکه بیاندازیم

$\boxed{۲} \times \boxed{۲} \times \boxed{۲} = ۸$

اعداد تاس　سکه اولی　سکه دومی

ب) عدد ظاهرشده بیشتر از ۳ باشد
یعنی اعداد ۶ یا ۵ یا ۴ ظاهر شود
در این صورت باید سه سکه بیاندازیم

$\boxed{۳} \times \boxed{۲} \times \boxed{۲} \times \boxed{۲} = ۲۴$

ج) عدد ۳ ظاهر شود. ← ۱ حالت خاص

$n(S) = ۸ + ۲۴ + ۱ = ۳۳$ یعنی تعداد اعضای فضای نمونه ای S

پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای $S$ را یک پیشامد تصادفی می‌گوئیم که پیشامدهای تصادفی را با حروف $A$ یا $B$ یا ... نشان می‌دهیم.

مثال: در پرتاب یک تاس فضای نمونه‌ای به صورت $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ می‌باشد که $A=\{2,3,5\}$ را یک پیشامد از این فضای نمونه‌ای می‌گوئیم زیرا $A\subseteq S$

پیشامد غیرممکن: می‌دانیم که $\varnothing\subseteq S$ می‌باشد، پس تهی یک پیشامد از فضای نمونه‌ای $S$ است که به آن پیشامد نشدنی یا غیرممکن می‌گوئیم

پیشامد قطعی: می‌دانیم که $S\subseteq S$ می‌باشد، پس $S$ یک پیشامد از فضای نمونه‌ای $S$ است که به آن پیشامد قطعی می‌گوئیم.

مثال: در پرتاب یک تاس:

الف) اگر $A$ پیشامد رو آمدن عدد صفر باشد، آنگاه $A=\varnothing$ پس: $A$ پیشامد غیرممکن است.

ب) اگر $B$ پیشامد ظاهر شدن عددی طبیعی باشد، آنگاه $B=S$ پس: $B$ پیشامد قطعی است.

نکته: اگر $A$ و $B$ دو پیشامد از فضای نمونه‌ای $S$ باشند، آنگاه

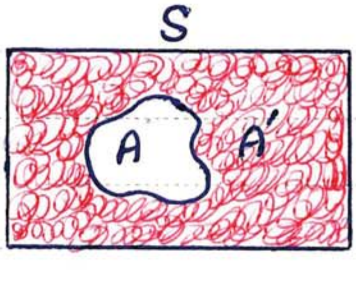
الف) پیشامد $A\cup B$ زمانی رخ می‌دهد که: پیشامد $A$ یا پیشامد $B$ یا هر دو رخ دهند.

ب) پیشامد $A\cap B$ زمانی رخ می‌دهد که: هم پیشامد $A$ و هم پیشامد $B$ رخ دهند.

ج) پیشامد $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که: پیشامد $A$ رخ دهد ولی پیشامد $B$ رخ ندهد.

نکته: اگر $S$ فضای نمونه‌ای یک پدیده‌ی تصادفی و $A$ پیشامدی از آن باشد در این صورت متمم $A$ را با $A'$ نشان می‌دهند و زمانی رخ می‌دهد که پیشامد $A$ رخ ندهد. درواقع دو پیشامد $A$ و $A'$ کل فضای نمونه‌ای $S$ را تشکیل می‌دهند.

نکته:




$A'=S-A$　　$A\cup A'=S$

$A\cap A'=\varnothing$　　$n(A')=n(S)-n(A)$

نکته: اگر $A$ و $B$ دو پیشامد از فضای نمونه ای $S$ باشند، آنگاه $A-B=A\cap B'$

نکته: اگر $A$ و $B$ دو پیشامد از فضای نمونه ای $S$ باشند و $A\cap B=\varnothing$ باشد، در این صورت به پیشامدهای $A$ و $B$ دو پیشامد ناسازگار می گوئیم، در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچ وقت باهم رخ نمی دهند.

مثال: همواره هر پیشامد تصادفی مانند $A$ و متمم آن یعنی $A'$ دو پیشامد ناسازگارند زیرا: $A\cap A'=\varnothing$

---

احتمال رخ دادن پیشامد $A$ در فضای نمونه ای $S$ $= P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد حالات ممکن}}$

مثال: سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم. با چه احتمالی

الف) فقط یک بار سکه «رو» می آید.

ب) حداکثر دو بار سکه «رو» می آید.

سکه اول    سکه دوم    سکه سوم

جواب: $\boxed{2}\times\boxed{2}\times\boxed{2}=8 \rightarrow$ فضای نمونه ای $S$ دارای ۸ عضو است.

$A$: از ۳ بار پرتاب فقط یک بار «رو» می آید. $\Rightarrow n(A)=\binom{3}{1}=3 \Rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{8}$

$B$: حداکثر دو بار سکه «رو» بیاید $\Rightarrow n(B)=\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=1+3+3=7$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{7}{8}$$

---

نکته: در حل مسائل مربوط به خارج کردن $k$ مهره از درون جعبه ای با $n$ مهره.

الف) اگر $k$ مهره را باهم خارج کنیم، در این حالت ترتیب مهره ها برای ما مهم نیست: $\binom{n}{k}=$ فضای نمونه

ب) اگر $k$ مهره را یکی یکی و بدون جایگذاری خارج کنیم، در این حالت ترتیب مهم است.

فضای نمونه $= n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$

ج) اگر $k$ مهره را یکی یکی و با جایگذاری خارج کنیم، در این حالت ترتیب مهم است.

فضای نمونه $=\underbrace{n\times n\times\dots\times n}_{k\text{ بار}}=n^k$

مثال: از جعبه‌ای که شامل پنج مهره‌ی سبز و چهار مهره‌ی آبی و دو مهره‌ی زرد می باشد، سه مهره به تصادف و با هم خارج می کنیم مطلوبست احتمال آنکه

| |
|---|
| ۲= تعداد مهره‌های زرد |
| ۴= تعداد مهره‌های آبی |
| ۵= تعداد مهره‌های سبز |

الف) هر سه مهره سبز باشند.

ب) هر سه مهره، همرنگ باشند.

ج) فقط دو مهره آبی باشد.

جواب:

$$n(S)=\binom{11}{3}=\frac{11!}{(11-3)!\,3!}=\frac{11!}{8!\,3!}=\frac{11\times10\times9\times\cancel{8!}}{\cancel{8!}\times 6}=165$$

پیشامد سبز بودن هر سه مهره : $A \Rightarrow n(A)=\binom{5}{3}=10 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{165}=\frac{2}{33}$

پیشامد هم رنگ بودن هر سه مهره : $B \Rightarrow n(B)=\binom{5}{3}+\binom{4}{3}=14$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{14}{165}$$

C: پیشامد انتخاب دو مهره آبی و ۱ مهره‌ی غیرآبی

$\Rightarrow n(C)=\binom{4}{2}\times\binom{7}{1}=42$

یک مهره‌ی دیگر را از بین ۷ مهره‌ی باقیمانده انتخاب کنیم (غیرآبی‌ها)

$$\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{42}{165}=\frac{14}{55}$$

---

مثال: دو جعبه‌ی A و B داریم که در جعبه‌ی A سه مهره سفید و چهار مهره سیاه و در جعبه‌ی B دو مهره‌ی سفید و پنج مهره‌ی سیاه وجود دارد، از هر جعبه یک مهره به تصادف خارج می کنیم، احتمال همرنگ بودن دو مهره چقدر است.

جواب: فضای نمونه ای این پدیده تصادفی شامل تمام حالات انتخاب ۱ مهره از ۷ مهره‌ی جعبه‌ی A و یک مهره از ۷ مهره‌ی جعبه‌ی B می باشد. پس:

$$n(S)=\binom{7}{1}\times\binom{7}{1}=49$$

اکنون اگر C پیشامد هم رنگ بودن دو مهره باشد در این صورت باید یک مهره از A سفید و یک مهره از B نیز سفید باشد یا اینکه یک مهره از A سیاه و یک مهره از B نیز سیاه باشد، بنابراین

$$n(C)=\binom{3}{1}\binom{2}{1}+\binom{4}{1}\binom{5}{1}=26 \Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{26}{49}$$

مثال: ۳ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک را به تصادف در یک ردیف قرار می دهیم. احتمال آن که همه کتابهای ریاضی در سمت چپ قرار بگیرند، چقدر است؟

$n(S)=7!$

| ۳ کتاب ریاضی | ۴ کتاب فیزیک |

$\Rightarrow n(A)=3!\times 4! \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3!\times 4!}{7!}=\frac{1}{35}$

مثال: از بین ۵ مرد و ۴ زن، سه نفر را به ترتیب انتخاب می کنیم. احتمال آنکه فقط نفر اول و آخر از یک جنس باشند چقدر است؟

$n(S)=9\times 8\times 7$

الف) $\frac{7}{18}$　　ب) $\frac{5}{18}$

ج) $\frac{4}{18}$　　د) $\frac{1}{18}$

A: (مرد، زن، مرد) یا (زن، مرد، زن)

$n(A)=5\times 4\times 4+4\times 5\times 3=5\times 4\times 7$

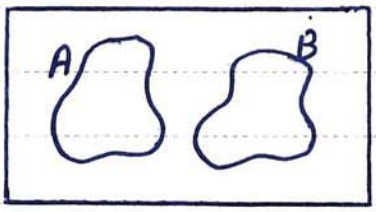
$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5\times 4\times 7}{9\times 8\times 7}=\frac{5}{18}$

نکته: برای هر پیشامد مثل A، احتمال رخ دادن آن را با $P(A)$ نمایش می دهیم که عددی حقیقی در بازه ی $[0,1]$ می باشد. در واقع اگر A پیشامدی دلخواه از فضای نمونه ای S باشد، آنگاه:

$0\leq P(A)\leq 1$　　　$P(\emptyset)=0$

$P(S)=1$　　　$P(A)=1-P(A')$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار ($A\cap B=\emptyset$) باشند آنگاه:




$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

نکته: برای هر دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه‌ای S داریم:

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

سؤال: نشان دهید که اگر $A$ پیشامدی دلخواه از فضای نمونه‌ای $S$ باشد، آنگاه:

الف) $P(A)=1-P(A')$

ب) $P(\emptyset)=0$

اثبات: چون $A$ و $A'$ دو پیشامد ناسازگارند

پس: $(1)\quad P(A\cup A')=P(A)+P(A')$

از طرفی می‌دانیم که $(2)\quad A\cup A'=S \Rightarrow P(A\cup A')=P(S)=1$

که از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$1=P(A)+P(\ )\Rightarrow P(A)=1-P(A')$$

برای اثبات اینکه $P(\emptyset)=0$ است. می‌دانیم $\emptyset$ و $S$ متمم یکدیگرند پس

$$P(\emptyset)=1-P(\emptyset')\Rightarrow P(\emptyset)=1-\cancel{P(S)}^{\,1}$$

$$\Rightarrow P(\emptyset)=1-1=0$$

---

مثال: اگر $A$ و $B$ دو پیشامد از فضای نمونه‌ای $S$ باشند و $P(A')=0.3$ و $P(B)=0.6$ و $P(A\cap B)=0.4$ مقدار $P(A\cup B)$ را بدست آورید.

$$P(A)=1-P(A')=1-0.3=0.7$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.7+0.6-0.4=0.9$$

مثال: در یک جامعه ۳۰ درصد روزنامه‌ی الف و ۲۵ درصد روزنامه‌ی ب و ۴۰ درصد حداقل یکی از این دو روزنامه را می‌خوانند. اگر یک نفر از این جامعه را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال آنکه هر دو روزنامه را مطالعه کند، چقدر است؟

$P($روزنامه‌ی الف را بخواند$)=P(A)=0.3$

$P($روزنامه‌ی ب را بخواند$)=P(B)=0.25$

$P($حداقل یکی از روزنامه‌های الف یا ب را بخواند$)=P(A\cup B)=0.4$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$0.4=0.3+0.25-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=0.15$$

مثال: اگر $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$ و $P(A')=\frac{3}{8}$ باشد، مطلوبست:

الف) $P(B)$

ب) $P(B\cap A')$

ج) $P(A\cup B')$

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{5}{8}+P(B)-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{11}{24}$$

$$P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{11}{24}-\frac{1}{3}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')$$

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{5}{8}-\frac{1}{3}=\frac{7}{24}$$

$$P(B')=1-P(B)=1-\frac{11}{24}=\frac{13}{24}$$

$$\Rightarrow P(A\cup B')=\frac{5}{8}+\frac{13}{24}-\frac{7}{24}=\frac{21}{24}=\frac{7}{8}$$

---

مثال: اگر $2P(B)=P(A)=3P(A\cap B)$ باشد، حاصل $\frac{P(A-B)}{P(A\cup B)}$ کدام است؟

الف) $\frac{5}{9}$　　ج) $\frac{3}{7}$

ب) $\frac{4}{9}$　　د) $\frac{4}{7}$

$$2P(B)=P(A)=3P(A\cap B)\Rightarrow \begin{cases} P(A)=3P(A\cap B) & (1)\\ P(B)=\frac{3P(A\cap B)}{2}=\frac{3}{2}P(A\cap B) & (2)\end{cases}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\xlongequal{(1)}3P(A\cap B)-P(A\cap B)=2P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\xlongequal{(1),(2)}3P(A\cap B)+\frac{3}{2}P(A\cap B)-P(A\cap B)=\frac{7}{2}P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{P(A-B)}{P(A\cup B)}=\frac{2\cancel{P(A\cap B)}}{\frac{7}{2}\cancel{P(A\cap B)}}=\frac{2}{\frac{7}{2}}=\frac{4}{7}$$

بنابراین گزینه‌ی (د) صحیح است.

فصل دوم:

قسمت دوم: احتمال‌های غیرهم‌شانس

تعریف: هر زیرمجموعه‌ی تک عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده می‌گوییم

قرارداد: اگر $A=\{x\}$ یک پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S$ باشد، در این صورت به‌جای $P(\{x\})$ و به منظور ساده نویسی از $P(x)$ استفاده می‌کنیم. پس:

$$P(\{x\})=P(x)$$

تعریف: هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S=\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، $S$ را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم.

نکته: در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس اگر $S=\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ یک زیرمجموعه‌ی $k$ عضوی از $S$ باشد، همواره داریم

الف) $0\leq P(A)\leq 1$

ب) $P(S)=1$

ج) $P(A)=P(a_1)+P(a_2)+\dots+P(a_k)$

که با توجه به خاصیت های (ب) و (ج) می‌توانیم نتیجه‌ی مقابل را بگیریم:

$$P(S)=P(s_1)+P(s_2)+\dots+P(s_n)=1$$

مثال: اگر $S=\{a,b,c\}$ و $P(a)=P(b)$ و $P(b)=3P(c)$ باشد، مقدار $P(c)$ را بدست آورید.

$$\begin{cases}P(b)=3P(c)\\ P(a)=P(b)\end{cases}\Rightarrow P(a)=3P(c)$$

اکنون با توجه به تساوی $P(S)=P(a)+P(b)+P(c)=1$ داریم:

$$3P(c)+3P(c)+P(c)=1$$

$$7P(c)=1$$

$$P(c)=\frac{1}{7}$$

مثال: تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد سه برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است اگر در یک پرتاب این تاس، $A$ پیشامد وقوع عددی بزرگتر از ۴ باشد، $P(A)$ چقدر است؟

جواب: فضای نمونه ای عبارتست از: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

اکنون باید به هر عدد زوج احتمال $x$ و به هر عدد فرد احتمال $3x$ را نسبت دهیم یعنی

$P(2)=P(4)=P(6)=x$

$P(1)=P(3)=P(5)=3x$

اکنون داریم:

$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1$$

$$3x+x+3x+x+3x+x=1 \Rightarrow 12x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{12}$$

$A=\{5,6\}$: پیشامد وقوع عددی بزرگتر از ۴ $\Rightarrow P(A)=P(5)+P(6)$

$$=3x+x=4x$$

$$=4\times\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

---

قسمت سوم:

احتمال شرطی

در حالتی که فضای احتمال هم شانس است شرطی کردن یک پیشامد نسبت به پیشامد $B$ مثل این است که فضای نمونه (یعنی $S$) را کنار گذاشته و $B$ را فضای نمونه در نظر بگیریم، که احتمال روی این فضای نمونه نیز هم شانس است. به این رویکرد «کاهش فضای نمونه» گفته می شود.

نکته: در فضای نمونه ای هم شانس داریم: $P(A|B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$

مثال: در پرتاب دو تاس اگر حداقل یکی از اعداد رو شده ۵ باشد، با چه احتمالی عدد ۲ ظاهر می شود.

جواب:

$B$: پیشامد ظاهر شدن حداقل یک بار عدد ۵ در پرتاب دو تاس

$B=\{(1,5)(2,5)(3,5)(4,5)(5,5)(6,5),(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)\cancel{(5,5)},(5,6)\} \Rightarrow n(B)=11$

تکراری، پس حذف می شود.

$A$: پیشامد ظاهر شدن عدد ۲

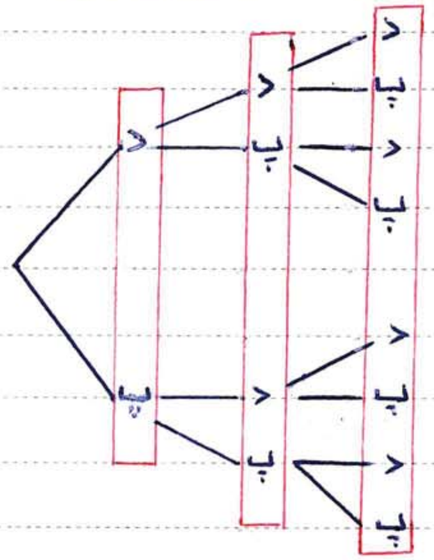
$A\cap B=\{(2,5),(5,2)\} \Rightarrow n(A\cap B)=2$

بنابراین:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{2}{11}$$

مثال: در یک خانواده با ۳ فرزند، اگر فرزند اول پسر باشد، با چه احتمالی این خانواده دقیقاً ۲ فرزند پسر دارد؟

جواب: می دانیم که فضای نمونه ای جنسیت فرزندان یک خانواده با ۳ فرزند ۸ عضو دارد، زیرا




حال اگر B پیشامدی باشد که در آن فرزند اول پسر باشد داریم،

B = {(پ, پ, پ), (پ, د, پ), (پ, پ, د), (پ, د, د)} $\Rightarrow n(B)=4$

اگر A پیشامدی باشد که در آن، خانواده دقیقاً دو فرزند پسر داشته باشد، داریم،

A∩B = {(پ, پ, د), (پ, د, پ)} $\Rightarrow n(A\cap B)=2$

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

مثال: اعداد ۱ تا ۸ را روی هشت کارت نوشته و ۳ کارت را به تصادف انتخاب می کنیم. اگر بدانیم که مجموع اعداد این ۳ کارت فرد است، احتمال اینکه دقیقاً دو کارت با شماره ی زوج انتخاب کرده باشیم چقدر است؟

B: (شرط) پیشامد آن است که مجموع ۳ عدد انتخاب شده فرد است.

A: پیشامد آن است که دقیقاً دو کارت با شماره ی زوج انتخاب شده باشد

$$n(B)=\binom{4}{3}+\binom{4}{1}\times\binom{4}{2}=4+6\times 4=28$$

انتخاب ۳ عدد فرد از چهار عدد فرد ۱، ۳، ۵، ۷

بنابراین A∩B: پیشامدی است که باید دو عدد زوج و یک عدد فرد انتخاب شود

$$n(A\cap B)=\binom{4}{2}\binom{4}{1}=24 \Longrightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{24}{28}=\frac{6}{7}$$

مثال: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $P(A)=2P(B)=0/4$ و $P(A\cup B)=0/5$ باشد، مقدار $P(A|B)$ را بدست آورید.

جواب:

$$2P(B)=0/4 \Rightarrow P(B)=\frac{0/4}{2}=0/2$$

$$P(A)=0/4$$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0/4+0/2-0/5=0/1$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0/1}{0/2}=\frac{1}{2}$$

مثال: یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۴ برآمد a، b، c و d است. اگر $P(a)=P(b)=\frac{1}{3}$ و $P(c)=P(d)=\frac{1}{6}$ باشد، مطلوبست:

الف) محاسبه‌ی $P(\{a,b,c\})$

ب) محاسبه‌ی $P(\{a,b,c\}|\{b,c,d\})$

جواب: فضای نمونه‌ای به صورت $S=\{a,b,c,d\}$ می‌باشد که یک فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس است، پس طبق محاسبه‌ی احتمال در فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس، داریم:

$$P(\{a,b,c\})=P(a)+P(b)+P(c)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

ب) برای محاسبه‌ی احتمال شرطی داده شده فرض می‌کنیم $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{b,c,d\}$ بنابراین

$$P(\{b,c\})=P(b)+P(c)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\{b,c\})}{P(\{b,c,d\})}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$$

$$P(\{b,c,d\})=P(b)+P(c)+P(d)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

بنابراین: $P(A|B)=\frac{3}{4}$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

## قانون ضرب احتمالات.

از رابطه‌ی $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ بدست می‌آید که به این تساوی $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)$ تساوی، قانون ضرب احتمالات می‌گوئیم و از این قانون برای بدست آوردن احتمال همزمان وقوع دو پیشامد استفاده می‌کنیم.

مثال: درون جعبه‌ای ۴ لامپ سالم و یک لامپ معیوب وجود دارد، دو لامپ به تصادف و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم، احتمال آنکه لامپ اول سالم و لامپ دوم معیوب باشد چقدر است؟

جواب: فرض می‌کنیم A: پیشامد سالم بودن لامپ اول و B: پیشامد معیوب بودن لامپ دوم باشد.
اکنون هدف ما محاسبه‌ی $P(A\cap B)$ می‌باشد.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

$P(B|A)=P($معیوب بودن لامپ دوم | لامپ اول سالم باشد$)=\frac{1}{4}$

$P(A)=\frac{4}{5}$

---

مثال: ۶۰ درصد کارکنان یک سازمان، مرد هستند، ۲۵ درصد کل کارکنان این سازمان و ۲۰ درصد کارکنان مرد این سازمان چاق هستند. اگر یک نفر از بین آنها به تصادف انتخاب کنیم، با کدام احتمال مرد یا چاق می‌باشد؟

الف) ۸۲٪ ب) ۷۸٪

ج) ۷۳٪ د) ۷٪

A: پیشامد مرد بودن شخص انتخاب شده $\Rightarrow P(A)=/6$

B: پیشامد چاق بودن فرد انتخاب شده $\Rightarrow P(B)=0/25$

$P($چاق بودن | مرد بودن$)=P(B|A)=/2$

اکنون طبق قانون ضرب احتمالات

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow /2=\frac{P(A\cap B)}{/6}\Rightarrow P(A\cap B)=/12$$

اکنون باید $P(A\cup B)$ را محاسبه کنیم

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=/6+/25-/12=0/73$$

نکته: قانون ضرب احتمالات را می‌توان برای سه پیشامد نیز نوشت. یعنی اگر $A_1$ و $A_2$ و $A_3$ پیشامدهایی با احتمال مثبت باشند، آنگاه:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

مثال: در کیسه‌ای دو گوی سفید، سه گوی سیاه و سه گوی سبز وجود دارد. از این کیسه، سه گوی و به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم، احتمال اینکه گوی اول سبز، گوی دوم سفید و گوی سوم سیاه باشد را بدست آورید.

جواب: پیشامدهای $A_1$ و $A_2$ و $A_3$ را به این صورت درنظر می‌گیریم:

$A_1$: گوی اول سبز　　$A_2$: گوی دوم سفید　　$A_3$: گوی سوم سیاه

اکنون باید $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ را محاسبه کنیم.

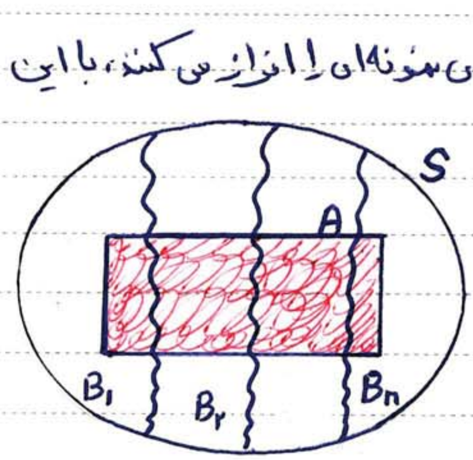
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

در ابتدا ۸ گوی درون کیسه قرار دارد که سه تای آنها سبز می‌باشند، بنابراین احتمال آنکه گوی اول خارج شده، سبز باشد برابر $P(A_1) = \frac{3}{8}$ می‌باشد، با خارج شدن یک گوی سبز، ۷ گوی درون کیسه باقی می‌ماند که دوتای آنها سفید هستند، بنابراین اگر گوی دوم را خارج کنیم، آنگاه احتمال سفید بودن آن برابر $P(A_2 | A_1) = \frac{2}{7}$ می‌باشد، و در نهایت با خارج کردن این گوی از کیسه، ۶ گوی درون کیسه باقی می‌ماند که سه تای آنها سیاه هستند. پس با خارج کردن گوی سوم، احتمال سیاه بودن آن برابر $P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ می‌باشد، پس داریم:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{56}$$

قانون احتمال کل:

فرض کنید $B_1$، $B_2$ و ... و $B_n$ پیشامدهایی با احتمال مثبت باشند که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند، با این شرایط، برای هر پیشامد دلخواه $A$ داریم:






در این صورت:

$$P(A)=P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)+\dots+P(B_n).P(A|B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i).P(A|B_i)$$

مثال: درون جعبه‌ای ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه قرار دارد. یک مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می‌کنیم، با کدام احتمال این مهره سفید است؟

جواب: مهره‌ی اول که از جعبه خارج می‌کنیم یا سفید است یا سیاه. بنابراین پیشامدهای $B_1, B_2$ که فضای نمونه‌ای $S$ را به دو مجموعه افراز می‌کند، به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$B_1$: مهره‌ی اول خارج شده، سفید است. $P(B_1)=\frac{5}{9}$

$B_2$: مهره‌ی اول خارج شده، سیاه است. $P(B_2)=\frac{4}{9}$

اگر $A$ پیشامد سفید بودن مهره‌ی دوم باشد، آنگاه:

الف) با خارج کردن یک مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه در جعبه باقی می‌ماند و

$P(A|B_1)=\frac{4}{8}$

ب) با خارج کردن یک مهره‌ی سیاه، ۵ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه در جعبه باقی می‌ماند و

$P(A|B_2)=\frac{5}{8}$

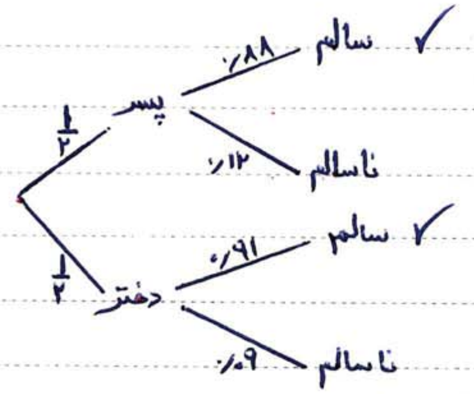
اکنون بنا بر قانون احتمال کل داریم:

$$P(A)=P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{9}$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: فرض کنید احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۲٪ و به فرزند دختر ۹٪ باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند، انتظار فرزندی را دارند. احتمال اینکه این فرزند سالم باشد چقدر است؟

جواب: برای این مسأله اگر سعی کنیم فهرستی از حالات ممکن تشکیل دهیم داریم:




حال اگر شاخه هایی را که به وضعیت سالم ختم می شوند را درنظر بگیریم، داریم:

$$\text{احتمال سالم بودن فرزند} = \underbrace{\frac{1}{2}\times 0/88}_{\text{شاخه اول}} + \underbrace{\frac{1}{2}\times 0/91}_{\text{شاخه دوم}} = 0/895$$

اکنون به روش دیگری (با استفاده از قانون احتمال کل) می توانیم احتمال مورد نظر را بدست آوریم

جواب:

$B_1$ : پسر بودن فرزند

$B_2$ : دختر بودن فرزند

$A$ : سالم بودن فرزند

بنابراین:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)$$

$$=\frac{1}{2}\times(1-0/12)+\frac{1}{2}\times(1-0/09)=0/44+0/455=0/895$$

فصل دوم
قسمت چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته:

پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع پیشامد B بر احتمال وقوع پیشامد A اثری نداشته باشد. یعنی:

$P(A|B)=P(A)$

$$\begin{cases} P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ P(A|B)=P(A) \end{cases} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A|B).P(B)=P(A).P(B)$$

بنابراین: دو پیشامد A و B مستقل از همدیگرند هرگاه: $\boxed{P(A\cap B)=P(A).P(B)}$

مثال: اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A)=2P(B)=0/6$ باشد، مقدار $P(A\cup B)$ را محاسبه کنید.

$P(A)=2P(B)=0/6 \Rightarrow P(A)=0/6\ ,\ P(B)=\frac{0/6}{2}=0/3$

چون پیشامدهای A و B مستقل هستند $\Rightarrow P(A\cap B)=P(A).P(B)=0/6\times 0/3=0/18$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/6+0/3-0/18=0/72$

مثال: احتمال قبولی دو نفر در کنکور $0/8$ و $0/9$ می‌باشد، احتمال اینکه حداقل یکی از این دو نفر در کنکور قبول شود، چقدر است؟

جواب: می‌دانیم که قبول شدن یا نشدن هر یک از این دو نفر در قبول شدن یا نشدن دیگری تأثیری ندارد. پس قبول شدن این دو نفر مستقل از یکدیگرند.

A: پیشامد قبولی نفر اول در کنکور

B: پیشامد قبولی نفر دوم در کنکور

$P(A)=0/8$
$P(B)=0/9$
$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A).P(B)=0/8\times 0/9=0/72$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/8+0/9-0/72=0/98$



تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

نکته ی مهم: اگر $A$ و $B$ دو پیشامد مستقل از هم باشند، آنگاه:

الف) $A$ و $B'$ نیز مستقل از یکدیگرند، یعنی: $P(A\cap B') = P(A).P(B')$

ب) $A'$ و $B$ نیز مستقل از یکدیگرند، یعنی: $P(A'\cap B) = P(A').P(B)$

ج) $A'$ و $B'$ نیز مستقل از یکدیگرند، یعنی: $P(A'\cap B') = P(A').P(B')$

---

مثال: اگر $A$ و $B$ دو پیشامد مستقل باشند و $P(A)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cup B')=\frac{3}{4}$ باشد، $P(B)$ چقدر است؟

جواب: چون دو پیشامد $A$ و $B$ مستقل از هم دیگرند پس $A$ و $B'$ نیز مستقل از یکدیگرند و

$$P(A\cap B') = P(A).P(B') \qquad (1)$$

از طرفی داریم:

$$P(A\cup B') = P(A) + P(B') - P(A\cap B') \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Longrightarrow P(A\cup B') = P(A) + P(B') - P(A).P(B')$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + P(B') - \frac{1}{4}\times P(B') \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{4}P(B') \Rightarrow P(B') = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

---

مثال: احتمال موفقیت عمل پیوند عضو روی یک بیمار $0/9$ و روی بیماری دیگر $0/8$ است. احتمال اینکه عمل پیوند عضو روی فقط یکی از این دو نفر موفقیت آمیز باشد، چقدر است؟

$A$: موفقیت آمیز بودن عمل پیوند عضو روی بیمار اول و $B$: موفقیت آمیز بودن عمل پیوند عضو روی بیمار دوم
می دانیم که $(A\cap B')$ و $(A'\cap B)$ ناسازگارند (زیرا اشتراک آنها تهی است)

$$P[(A\cap B')\cup(A'\cap B)] = P(A\cap B') + P(A'\cap B) = P(A).P(B') + P(A').P(B)$$

$$= 0/9\times(1-0/8) + (1-0/9)\times 0/8$$

$$= 0/18 + 0/08 = 0/26$$

$A$ و $B$ مستقل هستند $\Rightarrow$ $A'$ و $B$ مستقل اند

$A$ و $B$ مستقل هستند $\Rightarrow$ $A$ و $B'$ مستقل اند $\Rightarrow P(A\cap B') = P(A).P(B')$

فصل سوم:

درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها

اگر کسی بخواهد وزن شما را بداند و از شما پرسیده شود که وزنتان چقدر است، عددی را به عنوان وزن خود معرفی می‌کنید. این عدد را **داده** می‌گوییم و اگر از مدل گوشی شما سؤال پرسیده شود، جواب شما به این سؤال را **داده‌ی آماری** می‌گویند. بنابراین:

داده‌ها: واقعیت‌هایی درباره‌ی یک شی، یا فرد هستند که در محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند.

متغیر: هر ویژگی از اشیا یا اشخاص که در اعضای جامعه یکسان نیست و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر کند را متغیر می‌گویند و عددی که به آن ویژگی نسبت داده می‌شود را مقدار متغیر یا مشاهده می‌گویند.

فراوانی یک داده: تعداد دفعاتی که هر داده مشاهده می‌شود را فراوانی آن داده می‌گویند.

نکته: فراوانی داده‌ی $x_i$ را با $f_i$ نمایش می‌دهند.

مثال: در داده‌های ۳، ۵، ۸، ۴، ۵، ۲، ۵، ۳ فراوانی عدد ۵ برابر ۳ می‌باشد زیرا عدد ۵ سه بار تکرار شده است و فراوانی عدد ۳ نیز ۲ می‌باشد، زیرا عدد ۳ دو بار تکرار شده است.

جدول فراوانی: برای نظم بخشیدن به داده‌ها و بدست آوردن اطلاعات بهتر داده‌ها را در جدولی به صورت مقابل ثبت می‌کنیم

| داده‌ها | $x_1$ | $x_2$ | ..... | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| فراوانی | $f_1$ | $f_2$ | | $f_k$ |

فراوانی نسبی یک داده: با تقسیم فراوانی هر داده به تعداد کل داده‌ها، فراوانی نسبی آن داده بدست می‌آید.

درصد فراوانی نسبی: اگر فراوانی نسبی هر داده را در ۱۰۰ ضرب کنیم، آنگاه درصد فراوانی نسبی آن داده بدست می‌آید.

نکته: در جدول فراوانی نسبی، مجموع فراوانی‌های نسبی برابر یک می‌باشد. یعنی اگر تعداد داده‌ها برابر $N$ باشد، داریم:

| داده‌ها | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| فراوانی نسبی | $\frac{f_1}{N}$ | $\frac{f_2}{N}$ | $\frac{f_3}{N}$ | ... | $\frac{f_k}{N}$ |

$$\Rightarrow \frac{f_1}{N}+\frac{f_2}{N}+\frac{f_3}{N}+\dots+\frac{f_k}{N}=1$$

مثال: جدول فراوانی نسبی گروه خونی ۸۰ دانش آموز به صورت زیر است. گروه خونی چند دانش آموز از نوع A می باشد؟

| گروه خونی | A | B | AB | O |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| فراوانی نسبی | x | ۰/۳ | ۰/۱۵ | ۰/۱ |

جواب: می دانیم که مجموع فراوانی های نسبی در جدول فراوانی نسبی برابر 1 می باشد. بنابراین

$x + ۰/۳ + ۰/۱۵ + ۰/۱ = ۱ \Rightarrow x + ۰/۵۵ = ۱ \Rightarrow x = ۱ - ۰/۵۵ = ۰/۴۵$

اکنون طبق تعریف فراوانی نسبی: اگر $f_A$ فراوانی گروه خونی A باشد. داریم:

$x = \frac{\text{فراوانی } A}{\text{تعداد کل داده‌ها}} \Rightarrow ۰/۴۵ = \frac{f_A}{۸۰} \Rightarrow f_A = ۸۰ \times ۰/۴۵ = ۳۶$



بنابراین ۳۶ نفر از ۸۰ نفر، گروه خونی A دارند.

نکته: اگر داده های جمع آوری شده زیاد و پراکنده باشند، بررسی آنها طولانی می شود، بنابراین برای آنکه بتوانیم آسانتر و بهتر نتیجه بگیریم، داده ها را متناسب با موضوع آماری دسته بندی می کنیم.

دامنه ی تغییرات: به اختلاف بین بیشترین و کمترین داده، دامنه ی تغییرات گفته می شود که آن را با حرف R نشان می دهیم.

R = بیشترین داده − کمترین داده

مثال: دامنه ی تغییرات داده های ۱۷، ۵، ۱۹، ۲۱، ۸، ۱۲، ۳، ۵ چقدر است؟

۲۱ = بیشترین داده

۳ = کمترین داده

$R = ۲۱ - ۳ = ۱۸$

منظور از فراوانی دسته چیست؟ تعداد اعضایی را که در دسته ی i ام قرار می گیرند را فراوانی دسته ی i ام می گویند و آن را با $f_i$ نشان می دهند.

منظور از فراوانی نسبی دسته چیست؟ اگر $f_i$ فراوانی دسته ی i ام و تعداد کل داده ها n باشد، کسر $\frac{f_i}{n}$ را فراوانی نسبی دسته ی i ام می گویند.

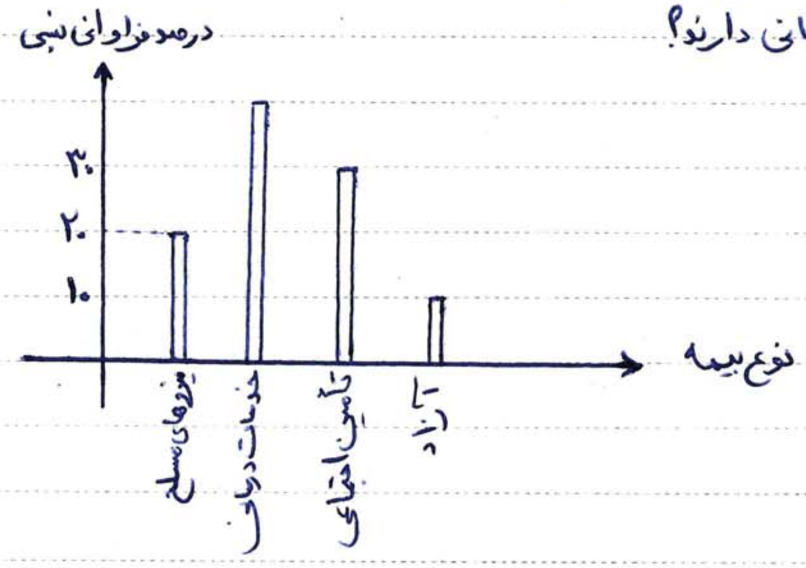
مثال: اگر فراوانی دسته ای ۴ و تعداد کل داده ها برابر ۲۵ باشد آنگاه فراوانی نسبی این دسته برابر است با: $\frac{۴}{۲۵}$ یا همان ۰/۱۶

نمودارها و تحلیل داده‌ها:

الف) نمودار میله‌ای: این نمودار بیشتر برای متغیرهای گسسته و کیفی مناسب است. این نمودار از دو محور عمود بر هم تشکیل شده است، محور افقی داده‌ها، و محور عمودی برحسب فراوانی یا فراوانی نسبی می‌باشد.

نکته: نمودار میله‌ای برای مقایسه‌ی فراوانی داده‌ها است.

مثال: شکل روبرو نمودار میله‌ای دارندگان انواع بیمه در یک مدرسه با ۱۸۰ دانش آموز می‌باشد. چند دانش آموز بیمه‌ی خدمات درمانی دارند؟




جواب: محور عمودی درصد فراوانی نسبی است و می‌دانیم که مجموع درصدهای فراوانی نسبی برابر ۱۰۰ می‌باشد. بنابراین اگر درصد فراوانی نسبی افراد بیمه شده‌ی خدمات درمانی را $x$ در نظر بگیریم، داریم:

$۲۰ + x + ۳۰ + ۱۰ = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۴۰$

بنابراین ۴۰ درصد از دانش آموزان از بیمه‌ی خدمات درمانی استفاده می‌کنند و $\frac{۴۰}{۱۰۰} \times ۱۸۰ = ۷۲$ نفر می‌باشند.

ب) نمودار دایره‌ای: این نمودار برای متغیرهای کمی گسسته و کیفی مناسب است، برای رسم نمودار دایره‌ای، ابتدا دایره را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم که هر قسمت نشان دهنده‌ی ۱۰ درصد کل دایره است. سپس با توجه به فراوانی نسبی یا درصد فراوانی نسبی هر داده، همان قسمت از دایره را رنگ می‌کنیم.

مثال: پایه‌ی یازدهم یک دبیرستان از ۵ کلاس تشکیل شده است، که این ۵ کلاس را با کدهای ۱ تا ۵ نشان می‌دهیم و از هر کلاس تعدادی دانش آموز را که در جدول زیر آمده است، برای آزمایش انتخاب کرده‌ایم. نمودار دایره‌ای آن را رسم کنید.

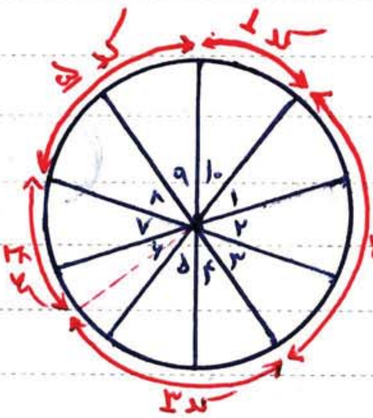
| کد کلاس | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|---|---|---|---|---|---|
| فراوانی | ۴ | ۱۲ | ۱۰ | ۶ | ۸ |

جواب: ابتدا تعداد کل داده‌ها را بدست می‌آوریم: $۴ + ۱۲ + ۱۰ + ۶ + ۸ = ۴۰$

در جدول زیر فراوانی نسبی هر کدام از داده‌ها آمده است.

| کد کلاس | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|---|---|---|---|---|---|
| فراوانی | ۴ | ۱۲ | ۱۰ | ۶ | ۸ |
| فراوانی نسبی | $\frac{4}{40}=0/1$ | $\frac{12}{40}=0/3$ | $\frac{10}{40}=0/25$ | $\frac{6}{40}=0/15$ | $\frac{8}{40}=0/2$ |

اکنون در دایره‌ی مقابل که به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شده است سهم هر کلاس را در دایره مشخص می‌کنیم.

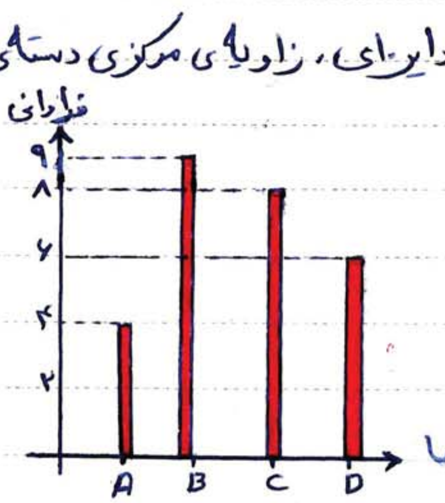



نکته: نمودار دایره‌ای را می‌توان برحسب زاویه‌های مرکزی و به صورت زیر نمایش داد.
دایره‌ای به شعاع دلخواه را به چند قطاع تقسیم می‌کنیم به طوری که اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی هر یک از این قسمت‌ها متناسب با فراوانی آن قسمت باشد. بنابراین اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی نظیر داده‌ی $x_i$ برابر است با: $360^\circ \times$ فراوانی نسبی داده‌ی $x_i$ یا:

$$\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360^\circ$$

نکته: مجموع زاویه‌های مرکزی در نمودار دایره‌ای برابر ۳۶۰ درجه است.
نکته: از نمودار دایره‌ای برای نمایش هر نوع متغیری استفاده می‌کنیم، اما برای متغیرهای کیفی مناسب‌تر می‌باشد.

مثال: شکل مقابل نمودار میله‌ای داده‌ها در ۴ دسته است. در نمودار دایره‌ای، زاویه‌ی مرکزی دسته‌ی D چند درجه است؟




جواب: فراوانی دسته‌ی D برابر $f_4 = 6$ و تعداد کل داده‌ها برابر است با
$n = 4 + 9 + 8 + 6 = 27$
بنابراین

$$\alpha_4 = \frac{f_4}{n} \times 360^\circ = \frac{6}{27} \times 360 = 80^\circ$$

فصل سوم

درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز؛

میانگین، میانه و مُد سه معیار گرایش به مرکز می باشد. که می توان به کمک آنها نتیجه ی مطالعات را گزارش داد.

الف) میانگین یا معدل؛ حاصل تقسیم مجموع داده ها بر تعداد داده ها را میانگین یا معدل یا متوسط داده ها می گوئیم. و آن را با حرف $\bar{x}$ نشان می دهیم، بنابراین اگر داده های مورد نظر ما $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ باشند. داریم.

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{n}$$

مثال: میانگین داده های ۳، ۲، ۱۰، ۶ و ۴ را بدست آورید.

$$\bar{x} = \frac{4+6+10+2+3}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

مثال: اگر میانگین داده های ۴، ۱-۴x، ۲، ۱+۲x برابر ۶ باشد، مقدار x چقدر است؟

$$\frac{2x+1+2+4x-1+4}{4} = 6 \Rightarrow \frac{6x+6}{4} = 6 \Rightarrow 6x+6 = 24$$

$$6x = 24-6 = 18$$

$$x = \frac{18}{6} = 3$$

نکته ی مهم: اگر میانگین n داده ی آماری برابر $\bar{x}$ باشد، آنگاه مجموع داده ها برابر $n\bar{x}$ می باشد

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{n} = \bar{x} \Rightarrow x_1+x_2+x_3+\dots+x_n = n\bar{x}$$

مثال: میانگین ۸ داده ی آماری ۱۴ و میانگین ۱۲ داده ی آماری دیگر ۱۸ می باشد، میانگین این ۲۰ داده را بدست آورید.

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_8}{8} = 14 \Rightarrow x_1+x_2+x_3+\dots+x_8 = 8\times 14 = 112$$

$$\frac{\quad + \quad + y_3+\dots+y_{12}}{12} = 18 \Rightarrow y_1+y_2+y_3+\dots+y_{12} = 12\times 18 = 216$$

میانگین ۲۰ داده $= \dfrac{\overbrace{x_1+x_2+x_3+\dots+x_8}^{112}+\overbrace{y_1+y_2+y_3+\dots+y_{12}}^{216}}{20} = \dfrac{112+216}{20} = \dfrac{328}{20} = 16{,}4$

نکته ی مهم: اگر تمام داده‌ها باهم برابر باشند، میانگین نیز با آنها برابر است. و در غیر این صورت همواره عددی بین کوچکترین و بزرگترین داده است.

قضیه: اگر هر یک از داده‌های آماری را با مقدار ثابتی جمع کنیم، میانگین آنها نیز با همان مقدار ثابت جمع می‌شود.

مثال: اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر ۷ باشد. میانگین داده‌های زیر را بدست آورید.

$$x_1+3,\ x_2+3,\ x_3+3,\ \dots,\ x_n+3 = ?$$

جواب: از آنجا که میانگین داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر ۷ می باشد. پس:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{n}=7 \Rightarrow x_1+x_2+x_3+\dots+x_n=7n$$

$$\frac{x_1+3+x_2+3+x_3+3+\dots+x_n+3}{n}=\frac{\overbrace{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}^{7n}+\overbrace{3+3+\dots+3}^{n\text{تا}}}{n}$$

$$=\frac{7n+3n}{n}=\frac{10\cancel{n}}{\cancel{n}}=10$$

قضیه: اگر هر یک از داده‌های آماری را در مقدار ثابتی ضرب کنیم، میانگین آنها نیز در همان مقدار ثابت ضرب می‌شود.

مثال: اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر ۷ باشد. میانگین داده‌های زیر را بدست آورید.

$$5x_1,\ 5x_2,\ 5x_3,\ \dots,\ 5x_n$$

جواب: از آنجا که میانگین داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر ۷ می باشد، پس:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{n}=7 \Rightarrow x_1+x_2+x_3+\dots+x_n=7n$$

اکنون برای محاسبه ی میانگین داده‌های جدید داریم:

$$\frac{5x_1+5x_2+5x_3+\dots+5x_n}{n}=\frac{5(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)}{n}=\frac{5\times(7n)}{n}$$

$$=\frac{35\cancel{n}}{\cancel{n}}=35$$

مثال: اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر ۵ باشد، میانگین داده‌های زیر چقدر است؟

$$3x_1+6,\ 3x_2+6,\ 3x_3+6,\ \dots,\ 3x_n+6$$

جواب: چون همه‌ی داده‌ها در ۳ ضرب شده‌اند پس میانگین آنها نیز در ۳ ضرب می‌شود یعنی $3\times 5=15$
و از آنجا که همه‌ی داده‌ها با ۶ جمع شده‌اند میانگین آنها نیز با ۶ جمع می‌شود. یعنی $15+6=21$

البته با روش دیگری نیز می‌توانیم همین عدد ۲۱ را بدست آوریم که به این صورت است.

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{n}=5 \Rightarrow x_1+x_2+x_3+\dots+x_n=5n$$

$$\text{میانگین داده‌های جدید}=\frac{3x_1+6+3x_2+6+3x_3+6+\dots+3x_n+6}{n}$$

$$=\frac{3x_1+3x_2+3x_3+\dots+3x_n+\overbrace{6+6+6+\dots+6}^{n\text{تا}}}{n}$$

$$=\frac{3\overbrace{(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)}^{5n}+6n}{n}=\frac{3\times(5n)+6n}{n}$$

$$=\frac{15n+6n}{n}=\frac{21\cancel{n}}{\cancel{n}}=21$$

میانگین وزن دار: اگر در یک سری از داده‌ها تکرار وجود داشته باشد، برای محاسبه‌ی میانگین آنها، ابتدا هر داده را در فراوانی خودش (تعداد دفعات تکرارش) ضرب می‌کنیم، سپس جوابهای بدست آمده را با هم جمع می‌کنیم و بر فراوانی کل (تعداد کل داده‌ها) تقسیم می‌کنیم.

مثال: میانگین داده‌های ۱۰ و ۱۰ و ۱۰ و ۱۸ و ۱۸ و ۲۰ و ۲۶ و ۳۰ و ۳۰ و ۳۰ و ۳۰ و ۳۰ و ۳۰ و ۳۰ را بدست آورید.

$$\bar{x}=\frac{3\times10+2\times18+20+26+7\times30}{14}=\frac{322}{14}=23$$

مثال: جدول زیر نمرات محمد را نشان می‌دهد. معدل او چقدر است؟

| درس | ریاضی | عربی | فیزیک | زبان |
|---|---|---|---|---|
| نمره | ۱۴ | ۱۵ | ۱۸ | ۱۲ |
| ضریب | ۴ | ۲ | ۳ | ۲ |

$$\text{معدل}\ (\bar{X})=\frac{4\times14+2\times15+3\times18+2\times12}{11}=\frac{164}{11}\simeq 14{,}9$$

مجموع ضرایب $=4+2+3+2=11$



تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۳۵۲

ب) میانه: داده‌ای است که نصف داده‌ها از آن کوچکتر و نصف داده‌ها از آن بزرگتر باشد.

نکته: برای بدست آوردن میانه، ابتدا آنها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و سپس:

الف) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، عدد وسط را به عنوان میانه در نظر می‌گیریم.

ب) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو عدد وسط را به عنوان میانه در نظر می‌گیریم.

مثال: در داده‌های ۱۱، ۱، ۲، ۹ و ۴ میانه را مشخص کنید.

جواب: ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

۱ ، ۲ ، ۴ ، ۹ ، ۱۱

میانه ← ۴

مثال: در داده‌های ۱۰، ۶، ۴، ۱، ۱۱ و ۱ میانه را مشخص کنید.

جواب: ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

۱ ، ۱ ، $\boxed{۴ ، ۶}$ ، ۱۰ ، ۱۱

$$\text{میانه} = \frac{۴+۶}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

لازم به ذکر است که میانه ممکن است در بین داده‌ها نباشد، مثلاً در این مثال میانه عدد ۵ می‌باشد ولی در داده‌ها عدد ۵ موجود نیست.

---

چارک‌ها (چارک اول و دوم و سوم) سه عدد هستند که داده‌های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

نکته: چارک دوم همان میانه است.

نکته: چارک اول را با $Q_1$ و چارک دوم را با $Q_2$ و چارک سوم را با $Q_3$ نمایش می‌دهند.

مثال: برای داده‌های زیر چارک اول، دوم و سوم را مشخص کنید.

۱، ۴، ۹، ۱۶، ۸، ۱، ۱۳، ۱۱، ۱۷، ۵، ۶

جواب: ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم، سپس، میانه را به عنوان چارک دوم ( $Q_2$ ) در نظر می‌گیریم. در مرحله‌ی بعد میانه‌ی اعداد قبل از $Q_2$ را به عنوان $Q_1$ و میانه‌ی اعداد بعد از $Q_2$ را به عنوان $Q_3$ در نظر می‌گیریم.

$\boxed{۱ ، ۱ ، ۴ ، ۵ ، ۶}$ ، ۸ ، $\boxed{۹ ، ۱۱ ، ۱۳ ، ۱۶ ، ۱۷}$

۴ ← چارک اول یا $Q_1$

۸ ← چارک دوم یا میانه ($Q_2$)

۱۳ ← چارک سوم یا $Q_3$

مثال: در داده‌های زیر چارک اول و دوم و سوم را مشخص کنید.

۱۸، ۴، ۳، ۱۱، ۱۳، ۲۰، ۲۱، ۸، ۱۰، ۳۰، ۱۴، ۱۰، ۱

جواب: ابتدا باید داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم.

$$\boxed{1,\ 3,\ \boxed{4,\ 8},\ 10,\ 10},\ \underbrace{11}_{Q_2},\ \boxed{13,\ 14,\ \boxed{18,\ 20},\ 21,\ 30}$$

$Q_1$ چارک اول — $Q_2$ میانه، چارک دوم — $Q_3$ چارک سوم



---

مثال: در داده‌های مقابل حاصل $\frac{Q_1+Q_2}{Q_3}$ چقدر است؟

$$12, 11, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 19, 20, 18, 21, 23, 22$$

جواب: ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$11, 12, 14, 15, 16, 17, \boxed{17,\ 18}\ 18, 19, 20, 21, 22, 23$$

$$Q_2=\frac{17+18}{2}=17.5$$

اکنون دقت شود که داده‌های قبل از $Q_2$ عبارتند از: ۱۷ و ۱۷، ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۱۲، ۱۱ که میانه‌ی آنها برابر است با ۱۵ بنابراین $Q_1=15$ و داده‌های بعد از $Q_2$ عبارتند از: ۲۳، ۲۲، ۲۱، ۲۰، ۱۹، ۱۸، ۱۸ که میانه‌ی آنها عبارتست از ۲۰ بنابراین $Q_3=20$ می‌باشد.

$$\frac{Q_1+Q_2}{Q_3}=\frac{15+17.5}{20}=\frac{32.5}{20}=1.625$$

---

مُد: هر داده با بیشترین فراوانی را مُد می‌گوئیم.

مثال: در داده‌های ۷، ۲، ۵، ۱، ۵ چون عدد ۵ بیشتر از همه تکرار شده است پس مُد عدد ۵ می‌باشد.

نکته: مُد ممکن است منحصر به فرد نباشد و در یک سری از داده‌ها دو یا چند مُد وجود داشته باشد.

مثال: در داده‌های ۵، ۱، ۵، ۷، ۳، ۷، ۴ هرکدام از اعداد ۵ و ۷ مُد می‌باشند زیرا هرکدام به اندازه‌ی دو بار تکرار شده‌اند.

نکته: اگر در داده‌هایی، همه‌ی داده‌ها یک فراوانی داشته باشند، آنگاه این داده‌ها مُد ندارند.

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

فصل سوم:

درس سوم: معیارهای پراکندگی:

شاخصهای پراکندگی عبارتند از:
- الف) واریانس
- ب) انحراف معیار
- ج) ضریب تغییرات.

الف) واریانس ($\sigma^2$): برای محاسبه‌ی واریانس داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

مثال: واریانس داده‌های ۷، ۵، ۱۱، ۱۰، ۷ را بدست آورید.

$$\bar{x} = \frac{7+10+11+5+7}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\sigma^2 = \frac{(7-8)^2+(10-8)^2+(11-8)^2+(5-8)^2+(7-8)^2}{5} = \frac{1+4+9+9+1}{5} = \frac{24}{5} = 4/8$$

---

مثال: اختلاف پنج داده‌ی آماری از میانگین برابر ۳، ۲-، ۴-، a و ۱ می‌باشد. واریانس این پنج داده‌ی آماری را بدست آورید.

جواب: پنج داده‌ی آماری را به صورت $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ درنظر می‌گیریم
از طرفی می‌دانیم که مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است. بنابراین

$$\left.\begin{array}{l} x_1-\bar{x}=3 \\ x_2-\bar{x}=-2 \\ x_3-\bar{x}=-4 \\ x_4-\bar{x}=a \\ x_5-\bar{x}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$1+a-4-2+3=0 \Rightarrow a-2=0 \Rightarrow a=2$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+(x_4-\bar{x})^2+(x_5-\bar{x})^2}{5}$$

$$= \frac{3^2+(-2)^2+(-4)^2+2^2+1^2}{5} = \frac{9+4+16+4+1}{5} = \frac{34}{5} = 6/8$$

نکته‌ی مهم: هرچقدر که واریانس داده‌ها کوچکتر باشد، پراکندگی داده‌ها کمتر است. یعنی داده‌ها به هم و به میانگین خودشان نزدیکترند. و اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد، آنگاه همه‌ی داده‌ها باهم برابرند و برعکس.

مثال: اگر واریانس داده‌های $a$ ، $b-2$ ، $2c+1$ و ۱۷ برابر صفر باشد، میانگین داده‌های زیر را بدست آورید.

$38, 36, 35, 4c+1, a+b$

جواب: چون واریانس داده‌های $a$ ، $b-2$ ، $2c+1$ ، ۱۷ صفر است پس تمام این داده‌ها باهم برابرند.

$$a=b-2=2c+1=17 \Rightarrow a=17,\ b=19,\ c=8$$

بنابراین داده‌های جدید عبارتند از:

$$38, 36, 35, \underbrace{4(8)+1}_{33}, \underbrace{17+19}_{36}$$

که میانگین این داده‌ها عبارتست از:

$$\bar{x}=\frac{38+36+35+33+36}{5}$$



---

مثال: میانگین و واریانس ۱۷ داده‌ی آماری به ترتیب ۱۶ و ۳ می‌باشد. اگر داده‌های ۱۸ ، ۱۷ ، ۱۳ را به آنها اضافه کنیم. واریانس ۲۰ داده‌ی حاصل کدام است؟

الف) ۳٫۲۵　　ب) ۳٫۵　　ج) ۳٫۷۵　　د) ۴

جواب: فرض کنید $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{17}$ هفده داده‌ی آماری با میانگین ۱۶ و واریانس ۳ باشد.

$$\sigma_1^2=\frac{\overbrace{(x_1-16)^2+(x_2-16)^2+(x_3-16)^2+\dots+(x_{17}-16)^2}^{A}}{17}=3 \Rightarrow \frac{A}{17}=3 \Rightarrow A=17\times 3=51$$

از طرفی می دانیم که میانگین داده‌های ۱۸ ، ۱۷ ، ۱۳ نیز برابر ۱۶ می باشد ($16=\frac{48}{3}=\frac{13+17+18}{3}$) بنابراین اگر این سه داده را به داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{17}$ اضافه کنیم آنگاه میانگین این ۲۰ داده نیز برابر ۱۶ می باشد. و در نتیجه داریم:

$$\sigma^2=\frac{\overbrace{(x_1-16)^2+(x_2-16)^2+(x_3-16)^2+\dots+(x_{17}-16)^2}^{A}+(18-16)^2+(17-16)^2+(13-16)^2}{20}$$

$$=\frac{\overset{51}{A}+4+1+9}{20}=\frac{65}{20}=3.25$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

نکته‌ی مهم: اگر داده‌ها را با عدد ثابتی جمع کنیم، واریانس آنها تغییری نمی‌کند و اگر داده‌ها را در عدد ثابتی ضرب کنیم، واریانس آنها در مجذور این عدد ضرب خواهد شد.

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: واریانس داده‌های ۱۰۱ و ۱۰۲ و ۹۹ و ۹۸ را بدست آورید.

جواب: برای سادگی در انجام محاسبات، تمام داده‌ها را منهای ۱۰۰ می‌کنیم. در این صورت در مقدار واریانس تغییری بوجود نمی‌آید. (اگر تمام داده‌ها را با عددی جمع کنیم و یا از عددی کم کنیم در مقدار واریانس تغییری ایجاد نمی‌کند) بنابراین داده‌های جدید عبارتند از: ۱ و ۲ و ۱- و ۲-

$$\bar{x} = \frac{-2-1+2+1}{4} = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{(-2-0)^2+(-1-0)^2+(2-0)^2+(1-0)^2}{4} = \frac{4+1+4+1}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

مثال: واریانس تعدادی داده‌ی آماری برابر ۵ می‌باشد. ابتدا به هر داده‌ی آماری ۴ واحد اضافه می‌کنیم و سپس آنها را ۳ برابر می‌کنیم. واریانس داده‌های جدید چقدر است؟

جواب: اگر به تمام داده‌های آماری ۴ واحد اضافه کنیم هیچ تأثیری در مقدار واریانس ندارد. ولی اگر آنها را در ۳ ضرب کنیم مقدار واریانس داده‌های جدید در $3^2$ ضرب می‌شود. بنابراین واریانس داده‌های جدید برابر است با: $3^2 \times 5 = 45$ (اگر تعدادی داده‌ی آماری را در عددی ضرب کنیم، واریانس آنها در مربع این عدد ضرب می‌شود.

نکته‌ی مهم: واریانس داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ را می‌توان از فرمول زیر بدست آورد.

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots+x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

لازم به ذکر است که $A = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots+x_n^2}{n}$ میانگین مجذورات داده‌های آماری است.

مثال: مجموع و واریانس ۱۰ داده‌ی آماری به ترتیب ۴۰ و ۲ می‌باشد، مجموع مربعات این ۱۰ داده‌ی آماری کدام است؟

الف) ۱۶۰ ب) ۱۸۰ ج) ۱۹۰ د) ۲۰۰

جواب: $x_1+x_2+x_3+\dots+x_{10} = 40 \Rightarrow \bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{10} = \frac{40}{10} = 4$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots+x_{10}^2}{10} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 2 = \frac{\overbrace{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots+x_{10}^2}^{B}}{10} - 4^2$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{B}{10} - 16 \Rightarrow \frac{B}{10} = 18 \Rightarrow B = 180$$

$B = x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots+x_{10}^2 = 180$ بنابراین گزینه‌ی (ب) درست است.

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

انحراف معیار: به جذر واریانس، انحراف معیار گفته می‌شود و آن را با نماد $\sigma$ نمایش می‌دهند. $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$

مثال: اگر واریانس چند داده ۳۶ باشد، انحراف معیار آن‌ها برابر است با: $\sqrt{36}=6$

ضریب تغییرات: اگر بخواهیم پراکندگی نمرات دو کلاس در درس ریاضی را با هم مقایسه کنیم، ابتدا واریانس نمرات هر یک از کلاس‌ها را بدست می‌آوریم، واریانس نمرات هر کلاسی کمتر باشد، آن داده‌ها به هم نزدیک‌ترند. و در نتیجه پراکندگی کمتری دارند. اما اگر واریانس نمرات دو کلاس یکسان باشد، از ضریب تغییرات استفاده می‌کنیم.

نکته: ضریب تغییرات را با نماد CV نشان می‌دهیم و عبارتست از: $CV=\dfrac{\sigma}{\bar{x}}$

مثال: ضریب تغییرات داده‌های ۴، ۸، ۶، ۶، ۵ و ۱ را بدست آورید.

$$\bar{x}=\frac{1+5+6+6+8+4}{6}=\frac{30}{6}=5$$

$$\sigma^2=\frac{(1-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2+(4-5)^2}{6}=\frac{16+0+1+1+9+1}{6}=\frac{28}{6}\simeq 4{,}66$$

انحراف استاندارد = جذر واریانس $\Rightarrow \sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{4{,}66}\simeq 2{,}15$

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{2{,}15}{5}\simeq 0{,}43$$

مفهوم ضریب تغییرات چیست؟: میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین.

مثال: مجموع ۱۸ داده‌ی آماری ۵۴ و مجموع مجذورات آنها ۱۸۰ می‌باشد، ضریب تغییرات داده‌ها را بدست آورید.

جواب:

$$x_1+x_2+\dots+x_{18}=54 \Rightarrow \bar{x}=\frac{x_1+x_2+\dots+x_{18}}{18}=\frac{54}{18}=3$$

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_{18}^2=180 \Rightarrow \sigma^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_{18}^2}{18}-(\bar{x})^2 \Rightarrow \sigma^2=\frac{180}{18}-3^2=1$$

$$\sigma^2=1 \Rightarrow \sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{1}=1$$

انحراف معیار

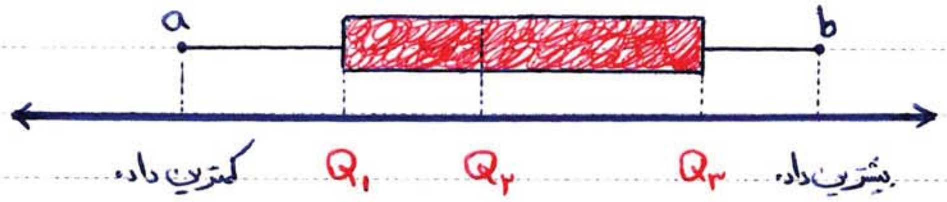
$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{1}{3}$$

نمودار جعبه ای؛ هر یک از نمودارهای میله‌ای، مستطیلی و ... برای مقایسه‌ی داده‌ها مفیدند ولی هیچ کدام از آنها پراکندگی داده‌ها را نشان نمی‌دهند.

به کمک چارک ها می‌توان داده‌ها را به ۴ دسته تقسیم بندی کرد و سپس تمرکز داده‌ها را مشخص کرد.

نمودار جعبه ای: نموداری تصویری است که داده‌ها را بر اساس پنج مقدار نمایش می‌دهد که این داده‌ها به ترتیب از چپ به راست (روی محور) عبارتند از:

۱- کوچکترین داده　۲ چارک اول　۳ میانه　۴ چارک سوم　۵ بزرگترین داده




نکته: $Q_1$ و $Q_3$ در دو طرف جعبه قرار دارند نه درون آن

نکته: $Q_2$ یا چارک دوم یا میانه لزومی ندارد که حتماً وسط جعبه باشد.

دامنه‌ی میان چارکی: به اختلاف بین چارک اول و سوم، دامنه‌ی میان چارکی می‌گوییم و آن را با سه حرف IQR نشان می‌دهیم. یعنی

$IQR = Q_3 - Q_1$

مثال: برای داده‌های زیر چارک اول، دوم و سوم و دامنه‌ی میان چارکی را مشخص کنید و نمودار جعبه ای مربوط به این داده‌ها را رسم کنید.

۱۸، ۴، ۳، ۱۱، ۱۳، ۲۰، ۲۱، ۸، ۱۰، ۳۰، ۱۴، ۱۰، ۱

جواب: ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. بنابراین:

$1 , 3 , \boxed{4 , 8} , 10 , 10 , 11 , 13 , 14 , \boxed{18 , 20} , 21 , 30$

میانه ($Q_2$) = ۱۱

$Q_1 = \frac{4+8}{2} = 6$

$Q_3 = \frac{18+20}{2} = 19$

$IQR = Q_3 - Q_1 = 19 - 6 = 13$

نمودار جعبه ای آن به صورت زیر است.

فصل چهارم:

قسمت اول: جامعه ی آماری و نمونه:

علم آمار با روش های مورد استفاده، در جمع آوری، ارائه، تجزیه و تحلیل و تفسیر داده ها سروکار دارد. روشهایی که برای تجزیه و تحلیل مجموعه ای از داده ها بکار می روند تا حدود زیادی به روشی که برای جمع آوری اطلاعات بکار رفته است، بستگی دارند.

واحد آماری: به هر یک از افراد یا اشیاء که داده های مربوط به آنها در یک بررسی گردآوری می شود را واحد آماری می گویند.

جامعه ی آماری: مجموعه ی کل واحدهای آماری را جامعه ی آماری می نامیم.

اندازه یا حجم جامعه ی آماری: به تعداد اعضای جامعه ی آماری، اندازه یا حجم جامعه می گوئیم.

نمونه: هر زیر مجموعه از جامعه ی آماری را که با روشهای مشخص انتخاب شده باشد را یک نمونه می نامیم. و هر یک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه می نامیم.

اندازه یا حجم نمونه: تعداد اعضای نمونه را اندازه ی نمونه یا حجم نمونه می گوئیم.

مثال: فرض کنید می خواهیم میزان رضایت دانش آموزان سال دوازدهم را در مورد حجم کتب درسی در ایران بررسی کنیم. در این جا:

الف) به تمام دانش آموزان سال دوازدهم که می خواهیم رضایت آنها را در مورد حجم کتب درسی بدانیم را جامعه ی آماری می گویند که تمام دانش آموزان سال دوازدهم در ایران را شامل می شود.

ب) به هر کدام از دانش آموزان سال دوازدهم یک واحد آماری گفته می شود.

ج) از آنجا که پرسیدن نظر تک تک دانش آموزان سال دوازدهم در کل کشور به دلایلی از جمله وقت گیر بودن و هزینه و .... مشکل است. به جای کل کشور مثلاً فقط در مورد استان خوزستان این بررسی را انجام می دهیم که در اینجا استان خوزستان یک نمونه می باشد.

د) به تعداد کل دانش آموزان سال دوازدهم در کشور، حجم جامعه و به تعداد کل دانش آموزان دوازدهم در استان خوزستان حجم نمونه گفته می شود.

در نهایت بعد از آنکه اطلاعات لازم را در مورد استان خوزستان جمع آوری و سازماندهی و تجزیه و تحلیل کردیم، می توانیم آن نتایج را به کل کشور تعمیم دهیم؛ در واقع:

نمونه گیری: فرایند انتخاب نمونه ای از یک جامعه به منظور تعمیم اطلاعات آن به جامعه است.

لازم به ذکر است که عضوهای انتخابی نمونه باید متناسب با تعداد کل عضوهای جامعه باشد.

انواع روشهای نمونه گیری:

الف) نمونه گیری تصادفی ساده: روشی از نمونه گیری است که در آن همه ی واحدهای آماری برای انتخاب شدن در نمونه، احتمال یکسان دارند. یعنی هر یک از اعضا شانس یکسان برای انتخاب شدن داشته باشند و از قبل نتوانیم پیش بینی کنیم که کدام اعضا انتخاب می شوند. و همچنین برای انتخاب هر کدام از آنها از قانون یا الگوی خاصی نباید استفاده کرد.

مثال: اگر بخواهیم در یک کلاس ۳۰ نفره ۱۲ نفر را برای سنجش بینایی آنها انتخاب کنیم، می توانیم اسامی این ۳۰ نفر را روی ۳۰ برگه ی کوچک بنویسیم و ۱۲ تا از آنها را به صورت قرعه کشی خارج کنیم. در اینجا شانس انتخاب هر کدام از این ۳۰ نفر برای وارد شدن در لیست سنجش بینایی با هم برابر است.

البته مشکل این روش در جامعه هایی با تعداد زیاد است زیرا دسترسی به فهرستی از اعضای جامعه و دسترسی به اعضای انتخابی دشوار است و ممکن است هزینه بر باشد.

ب) نمونه گیری خوشه ای: یکی از روشهای نمونه گیری است که در آن واحدهای نمونه گیری اولیه در جامعه، گروه ها یا خوشه ها باشند. سپس همه ی واحدهای آماری خوشه های انتخاب شده را به عنوان نمونه در نظر می گیریم.

مثال: می خواهیم میانگین نمرات ریاضی دانش آموزان شهر تهران را محاسبه کنیم. اگر فهرست های دانش آموزان را نداشته باشیم ولی فهرست مدارس موجود باشد، نمونه گیری خوشه ای راه حل مناسبی برای گردآوری داده ها است. لازم به ذکر است که در اینجا مدرسه ها همان خوشه ها هستند، سپس تمام دانش آموزان مدارس انتخاب شده را به عنوان حجم نمونه در نظر می گیریم.

البته اگر بودجه یا زمان کافی برای نمونه گیری تصادفی ساده نداشته باشیم این روش مقرون به صرفه است.

ج) نمونه گیری طبقه ای: یکی از روشهای نمونه گیری است که در آن با طبقه بندی جامعه به زیرجامعه های مجزا، یک نمونه ی تصادفی ساده از هر طبقه انتخاب می شود. اگر جامعه به دو یا چند بخش تقسیم شده باشد به طوری که عضو مشترک نداشته باشند، می توان از هر بخش به صورت جداگانه نمونه گیری کرد.

نکته: در نمونه گیری خوشه ای، درون خوشه ها هرچه ویژگی مورد بررسی تفاوت بیشتری داشته باشد بهتر است ولی در نمونه گیری طبقه ای هرچه طبقات از نظر ویژگی مورد بحث همگن باشند بهتر است.

مثال برای نمونه گیری طبقه ای: در یک مجتمع آموزشی ۵۰۰ نفری که ۱۵ درصد آنها را دانش آموزان پایه ی هشتم، ۲۰ درصد آنها را دانش آموزان پایه نهم، ۳۰ درصد آنها را دانش آموزان پایه دهم و ۲۵ درصد آنها را دانش آموزان پایه یازدهم تشکیل می دهد می خواهیم ۴۰ نفر را به عنوان نمونه انتخاب کنیم که روش کار به این صورت است.

۶ = ٪۱۵ × ۴۰ = تعداد افراد نمونه از بین دانش آموزان هشتم

۸ = ٪۲۰ × ۴۰ = تعداد افراد نمونه از بین دانش آموزان نهم

۱۲ = ٪۳۰ × ۴۰ = تعداد افراد نمونه از بین دانش آموزان دهم

۱۴ = ٪۳۵ × ۴۰ = تعداد افراد نمونه از بین دانش آموزان یازدهم

بنابراین مجموع افراد انتخاب شده، از طبقات ۴۰ نفر می باشد. (۴۰ = ۱۴ + ۱۲ + ۸ + ۶) در مرحله ی دوم از هر یک از طبقات و به کمک روش نمونه گیری تصادفی ساده، افراد نمونه را انتخاب می کنیم. در واقع تعداد کل دانش آموزان هشتم ۷۵ نفر می باشند (۷۵ = ٪۱۵ × ۵۰۰) و ما باید ۶ نفر از آنها را انتخاب کنیم که به کمک روش نمونه گیری تصادفی، می توانیم ۶ نفر از این ۷۵ را (مثلاً به قید قرعه) انتخاب کنیم، برای پایه های دیگر نیز به همین روش افراد نمونه را انتخاب می کنیم.

د) نمونه گیری سیستماتیک یا سامانمند: نوعی نمونه گیری طبقه ای است که در آن اندازه ی طبقات با هم برابر است. فقط از طبقه ی اول یک واحد آماری به تصادف انتخاب می شود. و با همان رویه از طبقات دیگر این کار انجام می شود.

مثال: در یک خیابان که پلاک ساختمانها از ۱ تا ۵۰۰ شماره گذاری شده است. می خواهیم یک نمونه ی ۲۵ تایی به روش نمونه گیری سیستماتیک انتخاب کنیم تا از آنها راجع به مشکلات حمل ونقل عمومی سؤالاتی پرسیده شود. در این روش ابتدا جامعه را به ۲۵ گروه ۲۰ تایی (۲۰ = ۲۵ ÷ ۵۰۰) تقسیم می کنیم اکنون یک واحد آماری از طبقه ی اول که شماره ی آن کوچکتر یا مساوی ۲۰ می باشد را به تصادف انتخاب می کنیم (فرض کنید عدد ۷ را به صورت تصادفی انتخاب کردیم) در این صورت شماره های ۷ و (۲۷ = ۷ + ۲۰) و (۴۷ = ۷ + ۲۷) و (۵۴ = ۷ + ۴۷) و ... و ۴۸۷ به عنوان ۲۵ عضو نمونه انتخاب می شوند. یعنی

اعضای نمونه = ۷، ۲۷، ۴۷، ۶۷، ...، ۴۸۷

نکته ی مهم: در روش سیستماتیک برای انتخاب نمونه ای با $n$ عضو، اگر جامعه را به $n$ گروه $k$ عضوی تقسیم کنیم و عضو $x$ از گروه اول به تصادف انتخاب شود، آنگاه بقیه ی عضوهای تصادفی نمونه، از فرمول دنباله ی حسابی $x_n = x+(n-1)k$ بدست می آید.

مثال: در یک جامعه با ۳۴۰ عضو، می خواهیم نمونه ای ۲۰ عضوی به روش سیستماتیک انجام دهیم. اگر اولین شماره ی انتخابی تصادفی ۱۱ باشد، دهمین شماره ی انتخابی تصادفی را مشخص کنید.

جواب: با تقسیم ۳۴۰ بر $n=20$ داریم $k=17$ (در واقع جامعه به ۲۰ گروه ۱۷ تایی تقسیم می شود). اکنون طبق فرض اولین شماره ی انتخابی برابر $x=11$ می باشد بنابراین $x_{10}$ (دهمین عضو انتخابی) برابر است با

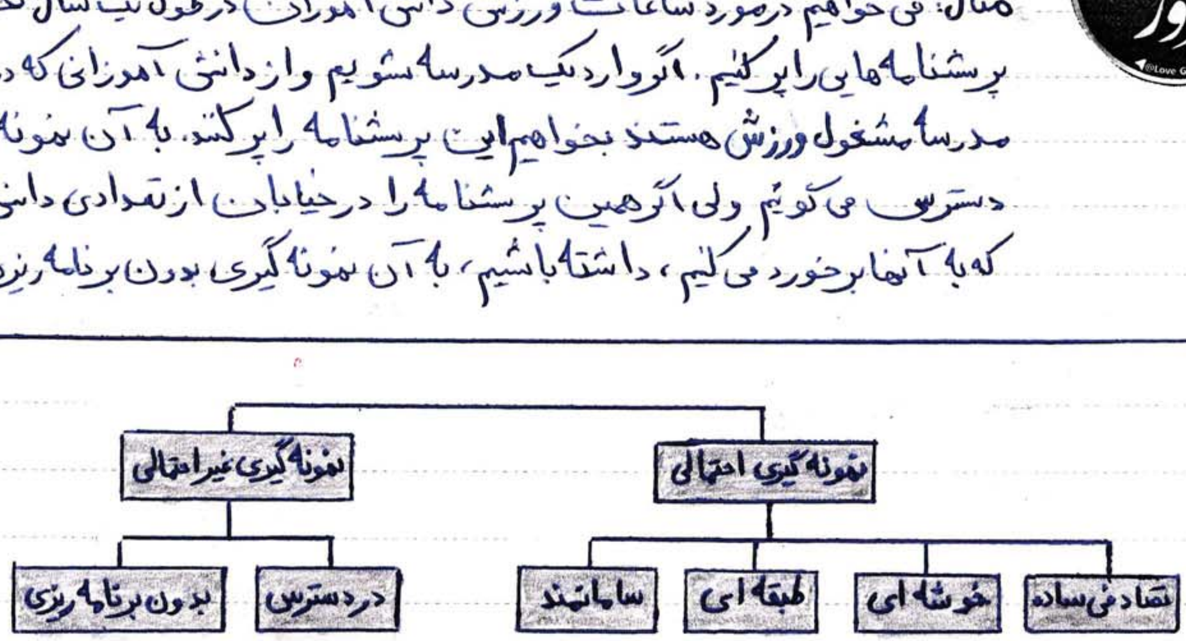
$$x_{10} = \overset{11}{\cancel{x}} + (10-1)\times 17 \Rightarrow x_{10} = 11 + 9\times 17 = 164$$

یکی از ویژگی های روش نمونه گیری سیستماتیک انجام آسان آن است. در واقع این روش، روش تغییر شکل یافته ی نمونه گیری تصادفی ساده است.

نمونه گیری احتمالی: نمونه گیری است که همه ی واحدهای آماری، احتمالی معلوم برای انتخاب در نمونه داشته باشند. و از روش تصادفی برای انتخاب واحدهای نمونه استفاده شود. هر چهار روش نمونه گیری که تا حالا توضیح داده شده است، جزو نمونه گیری احتمالی می باشند.

نمونه گیری غیراحتمالی: زمانی که در انتخاب نمونه هیچ روش تصادفی بکار گرفته نشود. نمونه گیری حالت غیراحتمالی به خود می گیرد. مانند انتخاب نمونه گیری بدون برنامه ریزی یا انتخاب نمونه هایی که در دسترس باشند.

مثال: می خواهیم در مورد ساعات ورزش دانش آموزان در طول یک سال تحصیلی پرسشنامه هایی را پر کنیم. اگر وارد یک مدرسه شویم و از دانش آموزانی که در حیاط مدرسه مشغول ورزش هستند بخواهیم این پرسشنامه را پر کنند، به آن نمونه ی در دسترس می گوییم ولی اگر همین پرسشنامه را در خیابان از تعدادی دانش آموز که به آنها برخورد می کنیم، داشته باشیم، به آن نمونه گیری بدون برنامه ریزی می گوییم.




تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

نمونه گیری اُریب: اگر یک روش نمونه گیری از نمونه گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند، می‌گویند آن روش نمونه گیری اریب است. لذا آمارشناسان تلاش می‌کنند تا با شناسایی منابع تولید اُریبی، نمونه گیری‌ها را تا جایی که می‌توانند نا اریب کنند.

آمارگیری: گردآوری داده‌ها به یکی از روشهای ممکن مانند: مشاهده و پرسشنامه و مصاحبه و دادگان است.
آمارگیر: کسی است که آمارگیری را انجام می‌دهد. مانند کسی که یک پرسشنامه طراحی می‌کند و در اختیار واحدهای جامعه یا نمونه قرار می‌دهد تا پرسش نامه را تکمیل کنند، که البته این کار زحمت زیادی برای آمارگیر دارد.

روشهای جمع آوری اطلاعات:

الف) مشاهده: گردآوری داده‌ها بدون نیاز به فرد پاسخگو، مثل شمارش تعداد تاکسی‌های عبوری از یک خیابان بین ساعات ۷ تا ۹ شب

ب) پرسشنامه: مجموعه سؤالات از پیش تعیین شده که توسط تعدادی پاسخگو تکمیل می‌شود. که این روش مرسوم ترین روش برای جمع آوری اطلاعات است.

ج) مصاحبه: معمولاً بین دو نفر صورت می‌گیرد. یکی مصاحبه گر (همان آمارگیر) و دیگری مصاحبه شونده. مصاحبه از صاحب نظران راه حل مناسبی برای گردآوری داده‌ها است. این روش بیشتر زمانی استفاده می‌شود که آمارگیر از همه‌ی پاسخهای ممکن اطلاع کافی ندارد.

د) دادگان: شامل مجموعه ای از اطلاعات ذخیره شده است. در بسیاری از موارد داده‌ها را می‌توان از اطلاعاتی که قبلاً ذخیره شده است بدست آورد. مثلاً بخواهیم در مورد آمار ازدواج در سال ۹۸ تحقیق کنیم، می‌توانیم با مراجعه به اداره‌ی ثبت احوال این اطلاعات را بدست آوریم.

محدودیت‌های آمارگیری

الف) پرسشنامه: اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان بر است.
ب) مشاهده: اگر به دقت زیادی نیاز داشته باشیم، مناسب نیست.
ج) دادگان: همیشه اطلاعات ثبتی در اختیار ما نیست. مثلاً اگر بخواهیم در مورد میزان حقوق کارکنان یک اداره تحقیق کنیم شاید آن اداره به راحتی اطلاعات لازم را در اختیار ما قرار ندهد.

تعریف متغیر: به هر ویژگی از اشخاص یا اشیاء که قرار است بررسی شود را متغیر می گوئیم.

**انواع متغیرها**

الف) متغیر کمی: متغیری است که مقادیر عددی می گیرد و برای آن عملیات ریاضی از قبیل جمع، تفریق و معدل گیری قابل انجام است. مانند وزن، قد و درآمد یک ورزشکار

نکته: متغیرهای کمی به دو دسته تقسیم می شوند.

۱- متغیر کمی پیوسته: متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند. مثلاً اگر وزن فردی ۷۱ کیلوگرم و وزن فرد دیگری ۷۲ کیلوگرم باشد، آنگاه هر عدد بین ۷۱، ۷۲ می تواند وزن فرد نفر سومی باشد.

۲- متغیر کمی گسسته: متغیر کمی که پیوسته نباشد، متغیر کمی گسسته نام دارد. مثل تعداد کلاسهای یک مدرسه زیرا تعداد کلاسهای یک مدرسه از جنس عدد هستند (مثلاً ۳ کلاس یا ۵ کلاس یا ...) ولی مدرسه ای با ۳/۵ کلاس وجود ندارد، پس کمی گسسته می باشد.

ب) متغیر کیفی: متغیری است که صرفاً برای دسته بندی افراد یا اشیاء در گروه ها بکار می رود و لزوماً مقدار عددی نمی گیرد. مثل جنسیت، ملیت و رنگ چشم افراد و میزان علاقه ی مردم به فوتبال و ....

نکته: متغیرهای کیفی به دو دسته تقسیم می شوند.

۱- متغیر کیفی ترتیبی: متغیر کیفی که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود دارد را متغیر کیفی ترتیبی می گوئیم. مثل مراحل ادامه تحصیل که ابتدا باید دبستان سپس متوسطه ی اول و متوسطه ی دوم و... را به ترتیب پشت سر بگذاریم.

۲- متغیر کیفی اسمی: متغیر کیفی که در آن ترتیب طبیعی وجود ندارد را متغیر کیفی اسمی می گویند. مثل جنسیت افراد که یا مرد هستند و یا زن، و واضح است که در آنها ترتیب طبیعی وجود ندارد.

انواع متغیر
- متغیر کمی
  - پیوسته
  - گسسته
- متغیر کیفی
  - ترتیبی
  - اسمی

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید.

الف) تعداد کلاسهای یک مدرسه: از نوع تعداد است و متغیر کمی گسسته می باشد

ب) وزن ماهی های موجود در دریا: متغیر کمی پیوسته می باشد

ج) میزان آلودگی هوا: متغیر کمی پیوسته است.

د) تعداد نامه های یک صندوق: متغیر کمی گسسته می باشد

هـ) قد دانش آموزان یک کلاس: متغیر کمی پیوسته می باشد

) تعداد مکالمات تلفنی یک اداره در یک روز: متغیر کمی گسسته می باشد.

ث) رنگ چشم افراد: متغیر کیفی اسمی است (در رنگ چشم افراد ترتیب وجود ندارد)

ک) رتبه بندی کارگران براساس مهارت: متغیر کیفی ترتیبی است زیرا می توان کارگران را براساس مهارت به ضعیف، متوسط و قوی رتبه بندی کرد که در آنها ترتیب وجود دارد.

گ) میزان علاقه ی مردم به فوتبال: متغیر کیفی ترتیبی است زیرا میزان علاقه ی مردم به فوتبال را می توان به صورت کم، متوسط و زیاد دسته بندی کرد که در آن ترتیب وجود دارد.

ل) درجه حرارت شهرها: متغیر کمی پیوسته می باشد.

م) جنسیت افراد: متغیر کیفی اسمی است. زیرا جنسیت براساس مرد یا زن می باشد و در آن ترتیب طبیعی وجود ندارد.

---

سرشماری: اگر تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم سرشماری کرده ایم که بیشتر در مواقعی که جامعه آماری کوچک باشد از سرشماری استفاده می کنیم ولی اگر جامعه بزرگ باشد مطالعات را از طریق نمونه گیری انجام می دهیم.

مثال: اگر بخواهیم نظر مردم در مورد خدمات دولتی را بدانیم امکان سرشماری وجود ندارد. زیرا دسترسی به تمام مردم برای پرسیدن نظر آنها وجود ندارد. بنابراین بخشی از جامعه را (مثلاً یک شهرستان یا محله یا...) را انتخاب می کنیم و نظر مردم را در مورد خدمات دولتی جویا می شویم که در واقع نمونه گیری کرده ایم

سرشماری مشکلاتی دارد که مهمترین آنها عبارتند از:

**الف)** در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه: مثلاً اگر بخواهیم تمام ماهی های خاویار دریای خزر را مورد مطالعه قرار دهیم، به همه ی این ماهی ها دسترسی نداریم.

**ب)** از بین رفتن اعضای جامعه آماری: مثلاً اگر بخواهیم میزان مقاومت تمام لامپ های تولید شده توسط یک کارگاه را در برابر نوسانات برق بسنجیم، ممکن است که همه ی لامپ ها را از بین ببریم.

**ج)** وقت گیر بودن و زمان بر بودن آن: در جامعه ها با اعضای بسیار زیاد سرشماری وقت زیادی را می گیرد. از طرفی برای سرشماری نیاز به نیروها و تجهیزات فراوانی داریم به این معنی که باید هزینه ی زیادی را متحمل شویم که برای حل این مشکلات معمولاً از روش نمونه گیری که راحت تر است استفاده می کنیم.

منظور از پارامتر و آماره چیست؟ هر دو مشخصه ی عددی هستند که:

الف) پارامتر توصیف کننده ی جنبه ای خاص از جامعه است.

ب) آماره توصیف کننده ی جنبه ای خاص از نمونه است.

مثال: اگر داده های مربوط به تک تک ورزشکاران المپیک را داشته باشیم، یعنی به داده های جامعه ی آماری دسترسی داریم و نسبت مردان به کل جامعه ی ورزشکاران المپیک را به راحتی می توانیم بدست آوریم. لازم به ذکر است که: پارامتر در صورتی قابل محاسبه است که داده های کل جامعه در اختیار باشد. در این مثال نسبت مردان به کل ورزشکاران المپیک معرف یک پارامتر است.

البته محاسبه ی پارامتر در یک جامعه ی آماری به خاطر تعداد زیاد اعضای جامعه معمولاً دشوار است لذا مقدار آن معمولاً مجهول است. به همین دلیل در علم آمار چند آماره را برای یک متغیر (ویژگی) خاص بدست می آورند و از روی آنها مقدار پارامتر را تخمین می زنند. ضمناً مقدار یک آماره از نمونه ای به نمونه ی دیگر متفاوت است. این در حالی است که پارامترهای جامعه همیشه ثابت هستند.

تفاوت بین پارامتر و آماره:

الف) مقدار یک آماره از نمونه ای به نمونه ی دیگر متفاوت است.

ب) پارامترهای جامعه همیشه مقداری ثابت دارند.

مثال: در یک مطالعه از ۱۰۰۰ نفر مشتری که در یک رستوران غذا خورده اند، می خواهیم در رابطه با غذای رستوران و از نظر کیفیت سؤال کنیم (خوب، متوسط، بد) می دانیم از نظر مشتری ها نسبت غذاهای با کیفیت خوب به کل برابر با $\frac{۴۵۰}{۱۰۰۰}$ می باشد. حال ۱۲۰ مشتری را به طور تصادفی انتخاب می کنیم که نسبت غذاهای با کیفیت خوب در این قسمت برابر $\frac{۵۲}{۱۲۰}$ می باشد.

الف) متغیر را مشخص کنید.

ب) مقدار پارامتر و آماره را مشخص کنید.

جواب: موضوع مورد بررسی کیفیت غذا است. پس متغیر مورد نظر: کیفیت غذا می باشد و کسر $\frac{۴۵۰}{۱۰۰۰}$ مقدار پارامتر است. چون تعداد غذاهای با کیفیت خوب را در کل جامعه ی آماری (نظر کل مشتری ها) نشان می دهد. ولی کسر $\frac{۵۲}{۱۲۰}$ مقدار آماره است زیرا تعداد غذاهای با کیفیت خوب را در بخشی از جامعه نشان می دهد نه در کل جامعه

مثال: با توجه به این که پارامتر مقدار ...... دارد، این مقدار ...... است و به همین دلیل از ...... برای تخمین پارامتر استفاده می کنیم.

الف) متغیری - مجهول - نمونه ها

ب) متغیری - معلوم - نمونه ها

ج) ثابتی - مجهول - آماره ها ✓

د) ثابتی - معلوم - آماره ها

نکته: در بسیاری از زمینه های کاربردی، هدف محققان تعیین پارامترهای جامعه است ولی دسترسی به آنها از طریق شمارش جامعه ی آماری امکان پذیر نیست. در چنین مواردی برای استنباط پارامترهای جامعه از نمونه ی آماری استفاده می شود. بنابراین داریم:

فرایند نتیجه گیری درباره ی پارامترهای جامعه براساس نمونه را آمار استنباطی می گوییم.

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

## فصل چهارم

### قسمت دوم: برآورد.

فرض کنید جامعه از ۴ دانش آموز با نمرات فیزیک ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ تشکیل شده است. می خواهیم بر اساس نمونه ای به اندازه ی ۲ میانگین این جامعه ی ۴ عضوی را برآورد کنیم.
در این مثال: پارامتر جامعه میانگین نمرات این ۴ دانش آموز است که این مقدار برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{13+12+11+10}{4} = 11.5$$

در واقع عدد ۱۱٫۵ مقدار پارامتر جامعه است.

تمام نمونه های دوتایی این جامعه عبارتند از: {۱۲، ۱۳} و {۱۱، ۱۳} و {۱۱، ۱۲} و {۱۰، ۱۳} و {۱۰، ۱۲} و {۱۰، ۱۱} : نمونه

$\bar{x} = \frac{12+13}{2} = 12.5$

$\bar{x} = \frac{11+13}{2} = 12$

$\bar{x} = \frac{11+12}{2} = 11.5$

$\bar{x} = \frac{10+13}{2} = 11.5$

$\bar{x} = \frac{10+12}{2} = 11$

$\bar{x} = \frac{10+11}{2} = 10.5$

میانگین هر نمونه که آماره ی آن نمونه می باشد را بدست آوردیم در این صورت: آماره ی نمونه ی {۱۰، ۱۱} برابر ۱۰٫۵ می باشد که تخمینی (برآوردی) از پارامتر جامعه ($\bar{x} = 11.5$) می باشد. که به این کار در ریاضیات برآورد نقطه ای می گویند و احتمال آنکه نمونه ی {۱۰، ۱۱} مشاهده شود برابر $\frac{1}{6}$ می باشد زیرا تعداد کل نمونه های دوتایی ۶ تا می باشند. در واقع: $\frac{1}{6}$، احتمال مشاهده ی ۱۰٫۵ به عنوان برآورد نقطه ای از مقدار پارامتر یعنی $\bar{x} = 11.5$ می باشد.

نکته: مقدار عددی آماره را برآورد یا برآورد نقطه ای می نامند.

مراحل رسم جدول مقادیر برآورد میانگین: جدول مقادیر برآورد میانگین دارای سه سطر است که
الف) سطر اول جدول نمونه است، در مثال قبل تمام نمونه های دوتایی عبارتند از:

| نمونه | {۱۰، ۱۱} | {۱۰، ۱۲} | {۱۰، ۱۳} | {۱۱، ۱۲} | {۱۱، ۱۳} | {۱۲، ۱۳} |
|---|---|---|---|---|---|---|

ب) سطر دوم جدول میانگین نمونه ها است که باید آنها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. لازم به ذکر است که در آماره ی {۱۱، ۱۲} و {۱۰، ۱۳} دارای میانگین ۱۱٫۵ می باشند و باید در یک ستون و در کنار هم نوشته شوند.
ج) سطر سوم جدول احتمال است: در هر ستون تعداد نمونه ها را بر مجموع آنها تقسیم می کنیم تا احتمال هر ستون بدست آید.

به عنوان مثال (با توجه به مثال قبل) داریم:

| نمونه | $\{10,11\}$ | $\{10,12\}$ | $\{10,13\}$ و $\{11,12\}$ | $\{11,13\}$ | $\{12,13\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| میانگین $(\bar{X})$ | $\frac{10+11}{2}=10/5$ | $11$ | $11/5$ | $12$ | $12/5$ |
| احتمال | $\frac{1}{6}\simeq 0/17$ | $\frac{1}{6}\simeq 0/17$ | $\frac{2}{6}\simeq 0/33$ | $\frac{1}{6}\simeq 0/17$ | $\frac{1}{6}\simeq 0/17$ |

نکته: با افزایش اندازه‌ی نمونه، برآوردها به میانگین جامعه که پارامتر است نزدیک‌تر می‌شوند، تا جایی که اندازه‌ی نمونه با اندازه‌ی جامعه برابر شود، برآورد با مقدار پارامتر برابر می‌شود.

مثال: می‌خواهیم براساس نمونه‌ای به اندازه‌ی ۲، میانگین جامعه‌ی ۶ عضوی $A=\{2,3,4,5,6,7\}$ را برآورد کنیم، اگر میانگین جامعه را $4/5$ برآورد کنیم، احتمال مقدار برآورد میانگین برای نمونه های دوتایی چقدر است؟

جواب: ابتدا تمام نمونه‌های دوتایی از جامعه‌ی ۶ عضوی را بدست می‌آوریم که برابر است با

$$\binom{6}{2}=\frac{6!}{(6-2)!\times 2!}=\frac{6\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}\times 2}=15$$

اکنون تمام نمونه‌های دوتایی که مقدار میانگین جامعه را $4/5$ برآورد کرده اند، بدست می‌آوریم که به صورت مقابل می‌باشند. (زیرا میانگین اعضای آنها $4/5$ می باشد) $\{2,7\}$ ، $\{3,6\}$ و $\{4,5\}$

درنتیجه احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{3}{15}$

نکته: اگر بخواهیم انحراف معیار برآورد میانگین جامعه را در جامعه‌های نامتناهی بدست آوریم از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\sigma_{\bar{x}}$: انحراف معیار میانگین
$\sigma$: انحراف معیار
$n$: اندازه‌ی نمونه

نکته: با توجه به این که $\sigma$ عددی ثابت است. با افزایش اندازه‌ی نمونه ($n$) مقدار $\sigma_{\bar{x}}$ کاهش می یابد و درنتیجه برآورد دقیق تر (و خطای کمتر) برای برآورد میانگین جامعه داریم

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: فرض کنید انحراف معیار نمرات درس فیزیک در سال گذشته و در کل کشور ۶ شده است. انحراف معیار برآورد میانگین نمرات درس فیزیک افراد جامعه را برای نمونه ای به اندازه ی ۱۰۰ بدست آورید.

جواب:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{100}} = \frac{6}{10} = 0.6$$

مثال: اگر انحراف معیار برآورد در جامعه‌ای ۲ باشد، تعداد نمونه چه اندازه باید باشد تا انحراف معیار میانگین جامعه برابر ۰/۰۸ شود.

الف) ۵    ب) ۲۵    ج) ۱۲۵    د) ۶۲۵ ✓

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{8}{100} = \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2\times 100}{8} = 25 \Rightarrow n = 625$$

نکته: اگر اندازه ی نمونه $k$ برابر شود انحراف معیار برآورد میانگین $\frac{1}{\sqrt{k}}$ برابر می شود. زیرا:

اندازه ی نمونه $= n \Rightarrow \sigma_{\bar{x}_1} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

اندازه ی نمونه $= kn \Rightarrow \sigma_{\bar{x}_2} = \frac{\sigma}{\sqrt{kn}} = \frac{\sigma}{\sqrt{k}\times\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{k}}\sigma_{\bar{x}_1}$

$$\sigma_{\bar{x}_2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_{\bar{x}_1}$$

مثال: انحراف معیار میانگین جامعه‌ای ۵/۲ است اگر اندازه ی نمونه را ۱۶ برابر کنیم، انحراف معیار میانگین جامعه ی جدید چقدر است؟

$$\sigma_{\bar{x}_2} = \frac{1}{\sqrt{k}}\sigma_{\bar{x}_1} \Rightarrow \sigma_{\bar{x}_2} = \frac{1}{\sqrt{16}}\times 5.2 = \frac{1}{4}\times 5.2 = \frac{5.2}{4} = 1.3$$

برآورد بازه‌ای:

برآورد بازه‌ای یا بازه‌ی اطمینان پارامتر جامعه: عبارت است از بازه‌ای عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان که به ضریب اطمینان شهرت دارد.

مثال: یک شرکت طبق سوابق گذشته برای خود سهم ۴۰ درصدی برای بازار آتی را در نظر می‌گیرد. با توجه به نامشخص بودن برخی از عوامل در بازار آینده، این شرکت، سهم آتی خود را به صورت یک بازه مثلاً عددی بین ۳۸ تا ۴۲ درصدی بیان می‌کند و معمولاً این بازه را با یک درصد اطمینان مثلاً ۹۵ درصد بیان می‌کند، چنین برآوردهایی را برآورد بازه‌ای می‌گوییم.

نکته: اگر نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی $n$ با میانگین $\bar{x}$ در اختیار داشته باشیم، در این صورت اگر انحراف معیار جامعه $\sigma$ باشد. با اطمینان بیش از ۹۵ درصد میانگین جامعه ($\mu$) در بازه‌ی زیر قرار می‌گیرد.

$$\left(\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

در واقع داریم:

$$\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

مثال: اگر یک نمونه به اندازه‌ی ۹ داشته باشیم که میانگین آنها عدد $\bar{x}=2$ و انحراف معیار جامعه $\sigma=1{,}5$ باشد، در این صورت یک فاصله‌ی اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین جامعه محاسبه کنید.

جواب: با فرض $n=9$ و $\bar{x}=2$ و $\sigma=1{,}5$ داریم:

$$\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$2-\frac{2\times 1{,}5}{\sqrt{9}}<\mu<2+\frac{2\times 1{,}5}{\sqrt{9}} \Rightarrow 2-1<\mu<2+1 \Rightarrow 1<\mu<3$$

بنابراین فاصله‌ی اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین جامعه به صورت $(1,3)$ می‌باشد.

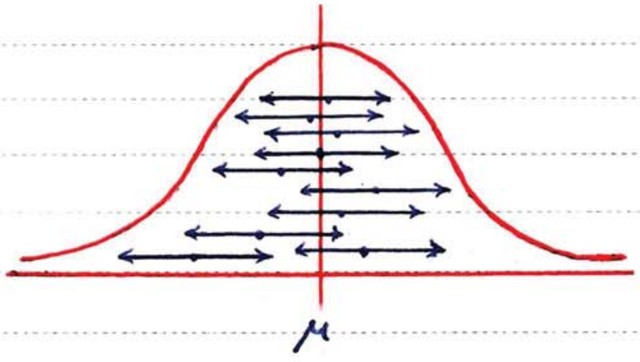
مثال: فاصله‌ی اطمینان بیش از ۹۵ درصدی برای یک نمونه به اندازه‌ی $n=100$ نفر از دانش‌آموزان یک مدرسه که میانگین وزن و انحراف معیار آنها به ترتیب برابر $\bar{x}=65$ و $\sigma=7{,}5$ می‌باشد را مشخص کنید.

$$\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 65-\frac{2\times 7{,}5}{\sqrt{100}}<\mu<65+\frac{2\times 7{,}5}{\sqrt{100}} \Rightarrow 63{,}5<\mu<66{,}5$$

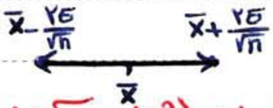
بنابراین بازه‌ی اطمینان بیش از ۹۵ درصدی برای میانگین جامعه به صورت $(63{,}5\ ,\ 66{,}5)$ می‌باشد.

نکته: نقطه‌ی میانی بازه‌ی حاصل از برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه، $\bar{x}$ است.

مفهوم بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی روی نمودار.




اگر بازه‌های اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین جامعه را روی نمودار نمایش دهیم به طوری که $\bar{x}$ میانگین نمونه و $\mu$ میانگین جامعه و $(\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}})$ یک بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی به شکل زیر باشد.




آنگاه از هر ۱۰۰ نمونه‌ی تصادفی ۹۵ تای آنها بازه‌ی اطمینان درست می‌دهند که $\mu$ (میانگین جامعه) را قطع می‌کند و ۵ نمونه‌ی تصادفی $\mu$ را قطع نمی‌کند.

طول برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه با اطمینان ۹۵ درصدی؛

برای بدست آوردن طول برآورد بازه‌ای باید اختلاف بیشترین و کمترین مقدار بازه‌ی اطمینان را بدست آوریم، یعنی باید اختلاف اعداد سمت چپ و راست بازه‌ی $(\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}})$ را بدست آوریم؛

طول برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه با اطمینان ۹۵٪ $= (\bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}) - (\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}) = \cancel{\bar{x}} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} - \cancel{\bar{x}} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$

$$= \frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$$

مثال: در یک جامعه با انحراف معیار ۲ و اندازه‌ی جامعه ۴۰۹۶، طول بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی کدام است؟

الف) ۰/۲۵　　ب) ۰/۷۵　　ج) ۰/۱۲۵　　د) ۰/۱۷۵

طول برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه با اطمینان ۹۵ درصدی $= \frac{4\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4 \times 2}{\sqrt{4096}} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} = 0/125$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

برآورد بازه‌ای نسبت، با اطمینان ۹۵ درصدی؛

اگر از جامعه‌ای نسبتاً بزرگ، $n$ نمونه‌ی تصادفی ساده انتخاب کنیم و $m$ تا از آنها ویژگی مورد مطالعه‌ی ما را داشته باشند. آنگاه نسبت واقعی افرادی از جامعه که آن ویژگی را دارند. با اطمینان ۹۵ درصد در

بازه‌ی $\left(p-2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ,\ p+2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ قرار دارد. که در آن $p=\frac{m}{n}$ می‌باشد.

تذکر: اندازه‌ی بازه‌ی اطمینان وابسته به تعداد نمونه (یعنی $n$) می‌باشد ولی ارتباطی با تعداد اعضای جامعه ندارد.

مثال: فرض کنید از ۲۵ دانشجو سؤال پرسیده‌ایم که «آیا در روز بیشتر از ۲ ساعت از اینترنت استفاده می‌کنید؟» که ۲۰ نفر از آنها به این سؤال پاسخ مثبت داده‌اند. در این صورت چند درصد از دانشجویان با اطمینان ۹۵ درصد، جوابشان به این سؤال مثبت خواهد بود؟ طول بازه با اطمینان ۹۵ درصدی چقدر است؟

جواب: طبق فرض، تعداد نمونه ۲۵ نفر است که ۲۰ نفر ویژگی مورد نظر را داشته‌اند. پس:

$$n=25\ ,\ m=20 \Rightarrow p=\frac{m}{n}=\frac{20}{25}=0/8$$

$$2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=2\sqrt{\frac{0/8(1-0/8)}{25}}=0/16$$

$$\left(p-2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ,\ p+2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)=(0/8-0/16\ ,\ 0/8+0/16)=(0/64\ ,\ 0/96)$$



بنابراین با اطمینان ۹۵ درصدی می‌توان گفت که نسبت مورد نظر بین ۶۴ درصد و ۹۶ درصد است. همچنین طول بازه برابر است با:

$$\text{طول بازه} = 0/96 - 0/64 = 0/32$$

نکته: اگر در محاسبه‌ی بازه‌ی اطمینان، نسبت تعداد نمونه‌ها را $k$ برابر کنیم، طول بازه‌ی اطمینان تقسیم بر $\sqrt{k}$ می‌شود. یعنی اگر تعداد نمونه‌ها را ۴ برابر کنیم طول بازه‌ی اطمینان تقسیم بر $\sqrt{4}$ یا همان ۲ می‌شود و نصف می‌شود. و اگر تعداد نمونه‌ها را ۱۰۰ برابر کنیم طول بازه‌ی اطمینان تقسیم بر ۱۰ می‌شود به این معنی که دقت محاسبه‌ی نسبت، یک رقم اعشار بهتر خواهد شد.

مثال: اگر در مثال قبل به جای $n=25$ نفر از $n=100$ نفر دانشجو سؤال پرسیده شود (تعداد نمونه‌ها را ۴ برابر کرده‌ایم زیرا $100=4\times25$) آنگاه طول بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی (که ۳۲٪ بود) بر $\sqrt{4}$ یا همان ۲ تقسیم می‌شود و طول این بازه برابر ۱۶ درصد می‌شود.

طول بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی، کمتر از یک درصد.

هرگاه بخواهیم، تعداد n نمونه‌ی تصادفی ساده را چنان انتخاب کنیم که طول بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی کمتر از یک درصد باشد، برآورد بازه‌ای نسبت از فرمول مقابل بدست می‌آید.

$$\left(p-\frac{1}{\sqrt{n}}, p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad , p=\frac{m}{n}$$

$$\text{طول این بازه} = p+\frac{1}{\sqrt{n}}-\left(p-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\cancel{p}+\frac{1}{\sqrt{n}}-\cancel{p}+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}}$$

بنابراین اگر بخواهیم طول بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی کمتر از یک درصد باشد، باید n را آنقدر بزرگ درنظر بگیریم که $\frac{2}{\sqrt{n}}$ از ۱٪ کمتر شود یعنی $\left(\frac{2}{\sqrt{n}} < 0.01\right)$

مثال: در یک شرکت خودروسازی، باید بدانیم چند درصد از ماشین‌ها در طول یک سال از گارانتی استفاده کرده‌اند، اگر طول بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی کمتر از ۸ درصد باشد، نمونه‌ی ما باید شامل چند ماشین باشد.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} < 0.08 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{8}{100} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{2}{25} \Rightarrow \sqrt{n} > 25 \Rightarrow n > 625$$

بنابراین نمونه‌ی ما برای طول بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی کمتر از ۸ درصد، باید بیشتر از ۶۲۵ ماشین باشد.

فیروز محمودی گهرویی
۹۸/۵/۲۰
اهواز - ناحیه ۳
۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲