فعالیت های اینجانب در زمینه های تالیف کتاب های آموزشی:

۱) مولف کتاب تست میکرو طبقه بندی حساب دیفرانسیل گاج (چاپ ۹۰)

۲) مولف کتاب تست میکرو طبقه بندی حسابان گاج

۳) مولف کتاب ریاضیات ۳ تجربی مبتکران

۴) مولف کتاب ریاضیات ۲ دوم دبیرستان مبتکران

۵) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته ریاضی جلد (۱) دیفرانسیل و ریاضیات پایه (کتاب لقمه) مهروماه

۶) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته ریاضی جلد (۲) هندسه و گسسته (کتاب لقمه) مهروماه

۷) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته تجربی (کتاب لقمه) مهروماه

۸) مولف کتاب موضوعی مشتق مهروماه

۹) مولف کتاب های آموزشی ریاضی نوبل

۱۰) طراح تست آزمون های کانون فرهنگی آموزش قلم چی (سال های ۹۰-۸۸)

۱۱) طراح تست آزمون های مبتکران (سال های ۹۰-۸۴)

ارادتمند شما رحیم قهرمان

۰۹۳۸۷۷۳۶۴۱۸

Rahim.ghahreman

لیست جزوات ریاضیات (مولف :رحیم قهرمان)

1.ریاضیات تجربی جامع(دهم ،یازدهم و دوازدهم – ویژه کنکور)

2.ریاضی پایه و حسابان (ریاضی دهم ،حسابان یازدهم و دوازدهم – ویژه کنکور)

3.ریاضی دوازدهم تجربی (ویژه کنکور)

4.حسابان دوازدهم (ویژه کنکور)

5.ریاضی دوازدهم تجربی (ویژه امتحان نهایی)

6.حسابان دوازدهم (ویژه امتحان نهایی)

7.ریاضی یازدهم تجربی (ویژه کنکور)

8.حسابان یازدهم (ویژه کنکور)

9.ریاضی دهم و ریاضی تجربی (ویژه کنکور)

10.ریاضی نهم (ویژه تیز هوشان)

11.ریاضی نهم (ویژه امتحان نهایی)

جهت ثبت سفارش می توانید به شماره **09120726440** تماس و یا به صفحه شخصی **@RahimGhahreman** مراجعه کنید.

(۱)

درسنامه‌ی (۱) مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

در دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$، مجموع n جمله‌ی اول را با نماد S_n نمایش می‌دهند و تعریف می‌شود.

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$$

اگر a_1 جمله‌ی اول، a_n جمله n اُم و d قدرنسبت دنباله‌ی حسابی باشد، مجموع n جمله‌ی اول از رابطه‌های زیر حاصل می‌شود:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n) \quad \text{یا} \quad S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

تست: اگر مجموع ۶ جمله‌ی نخست یک دنباله‌ی حسابی (S_6) برابر ۳۰ و مجموع ۸ جمله‌ی نخست آن (S_8) برابر ۷۲ باشد، جمله‌ی چهارم آن دنباله کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} S_6=\frac{6}{2}(2a_1+5d) \Rightarrow 30=3(2a_1+5d) \Rightarrow 2a_1+5d=10 \\ S_8=\frac{8}{2}(2a_1+7d) \Rightarrow 72=4(2a_1+7d) \Rightarrow 2a_1+7d=18 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو معادله و دو مجهول}}$$

$$a_1=-5,\ d=4 \Rightarrow a_n=a_1+(n-1)d \xrightarrow{n=4} a_4=a_1+3d=-5+3(4)=7$$

تست: مجموع چند جمله از دنباله‌ی حسابی $a, 2, 5a-2, \ldots$ برابر ۵۵ است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱

یادآوری:	$a,b,c \xrightarrow[\text{حسابی}]{\text{دنباله}} 2b=a+c$

چون $5a-2$، ۲ و a تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند، پس:

$$(a)+(5a-2)=2(2) \Rightarrow 6a-2=4 \Rightarrow a=1$$

حال جملات دنباله‌ی مذبور به صورت $1,2,3,\ldots$ در می‌آید و در نتیجه:

$$S_n=55 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=55 \Rightarrow \frac{n}{2}(2+(n-1))=55 \Rightarrow$$

$$n(n+1)=110 \Rightarrow n(n+1)=10\times 11 \Rightarrow n=10$$

مولف:رحیم قهرمان

تست: در یک دنباله‌ی حسابی، اگر به جمله‌ی اول ۳ واحد اضافه کنیم و از قدرنسبت ۲ واحد کم کنیم، مجموع بیست جمله‌ی اول چه تغییری می‌کند؟

۱) ۳۲۰ واحد اضافه می‌شود   ۲) ۱۶۰ واحد کم می‌شود

۳) ۳۲۰ واحد کم می‌شود   ۴) ۱۶۰ واحد اضافه می‌شود

پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$(\text{قدیم}) S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow (\text{قدیم}) S_{20} = 10(2a_1 + 19d)$$

$$\Rightarrow (\text{جدید}) S_{20} = 10(2(a_1+3) + 19(d-2)) = 10(2a_1 + 19d + 6 - 38) =$$

$$= \underbrace{10(2a_1 + 19d)}_{(\text{قدیم}) S_{20}} - 320 \Rightarrow (\text{جدید}) S_{20} = (\text{قدیم}) S_{20} - 320$$

نکات:

۱) اگر تعداد جملات یک دنباله‌ی حسابی فرد باشد، داریم:

$$S_n = n \times (\text{جمله‌ی وسط}) \quad \text{یا} \quad S_{2n-1} = (2n-1) \times a_n$$

تست: در یک دنباله‌ی حسابی دارای ۲۷ جمله است. اگر مجموع سه جمله‌ی وسط برابر ۱۵ باشد، مجموع جمله‌های این ۲۷ جمله چقدر است؟

۱) ۴۰۵   ۲) ۳۶۰   ۳) ۱۳۵   ۴) ۸۱

پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$\text{مجموع سه جمله‌ی وسط} = 3 \times (\text{جمله‌ی وسط}) \Rightarrow 15 = 3 \times \text{جمله‌ی وسط} \Rightarrow$$

$$\text{جمله‌ی وسط} = 5$$

سه جمله‌ی وسط عبارتند از جملات a_{13}، a_{14} و a_{15}، بنابراین:

$$a_{13} + a_{14} + a_{15} = 15 \Rightarrow (a_{13} + a_{15}) + a_{14} = 15 \Rightarrow 2a_{14} + a_{14} = 15$$

$$\Rightarrow a_{14} = 5 \quad \text{و} \quad S_{27} = \frac{27}{2}(a_1 + a_{27}) = \frac{27}{2}(2a_{14}) \xrightarrow{a_{14}=5} 135$$

۲) مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $S_n=\alpha n^2+\beta n$ است. برای یافتن جمله عمومی دنباله حسابی از طریق S_n، کافی است S_1 و S_2 را بدست آوریم، داریم:

$$\begin{cases} S_1=a_1 \ (*) \\ S_2=a_1+a_2 \end{cases} \Rightarrow S_2-S_1=a_2 \xrightarrow{(*)} d=a_2-a_1=S_2-2S_1 \ (**)$$

با داشتن a_1 و d، دنباله حسابی مشخص می‌شود.

تست:

۳) روش دیگر برای یافتن جمله عمومی از روی S_n، استفاده از رابطه $a_n=S_n-S_{n-1}$ است.

تست: مجموع n جمله اول از دنباله حسابی $S_n=\frac{n(2n-3)}{4}$ است. جمله دهم کدام است؟

۱) ۸٫۲۵ ۲) ۸٫۷۵ ۳) ۹٫۲۵ ۴) ۹٫۷۵

پاسخ: گزینه ۲) $a_n=S_n-S_{n-1}$، بنابراین:

$$a_{10}=S_{10}-S_9=\frac{10\times(2\times10-3)}{4}-\frac{9\times(2\times9-3)}{4}=\frac{170}{4}-\frac{135}{4}=8.75$$

تست: مجموع n جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت $S_n=\frac{n(n-15)}{6}$ است، در این دنباله مجموع جملات، با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۸۹)

۱) ۹ ۲) $\frac{29}{3}$ ۳) $\frac{49}{3}$ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۴) اگر جملات دنباله حسابی را با $a_1,a_2,\dots$ نشان دهیم، داریم:

$$a_7+a_8+\dots+a_{17}+a_{18}=S_{18}-S_6=\frac{18(18-15)}{6}-\frac{6(6-15)}{6}=9+9=18$$

تست: بین دو عدد ۴ و ۶ حداقل چند واسطه حسابی باید درج کرد تا مجموع کلیه این اعداد دنباله بزرگتر از ۵۰ باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ تست شماره‌ی ۲۲) فرض کنیم m واسطه‌ی بین ۴ و ۶ درج کرده‌ایم، پس از جمع دنباله‌ی تشکیل شده m+2 عضو خواهد داشت و باید جمع همه‌ی این اعضا بزرگ‌تر از ۵۰ باشد، یعنی:

$$S_{m+2}>50 \Rightarrow \frac{m+2}{2}(\underbrace{a_1}_{\text{جمله‌ی اول}}+\underbrace{a_{m+2}}_{\text{جمله‌ی آخر}})>50 \Rightarrow \frac{m+2}{2}(4+6)>50$$

$$\Rightarrow m+2>10 \Rightarrow m>8 \Rightarrow m\geq 9$$

یعنی باید حداقل ۹ عدد بین ۴ و ۶ اضافه شود.

تست: حداکثر چند جمله از جملات دنباله‌ی حسابی ۳، $\frac{5}{2}$، ۲، $\frac{3}{2}$، ... را با هم جمع کنیم تا حاصل عددی مثبت گردد.

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

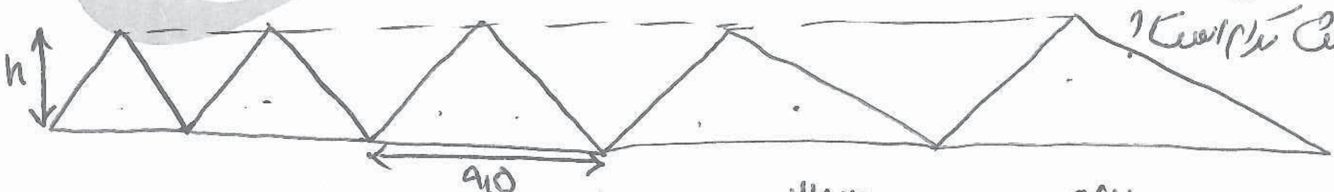
گزینه‌ی ۴) در واقع می‌خواهیم در دنباله‌ی فوق $S_n>0$ باشد، پس داریم:

$$S_n>0 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)>0 \Rightarrow \frac{n}{2}(2(3)+(n-1)(-\frac{1}{2}))>0 \xrightarrow{\times 2}$$

$$n(6-\frac{(n-1)}{2})>0 \xrightarrow{\times 2} n(12-n+1)>0 \Rightarrow n(13-n)>0 \Rightarrow 0<n<13$$

بنابراین حداکثر مقداری که n می‌تواند اختیار کند تا به ازای آن S_n عددی مثبت باشد برابر ۱۲ است.

تست: ۵ مثلث داریم که هم ارتفاع هستند و اندازه‌ی قاعده‌ی آنها تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. اگر جمع مساحت‌های این مثلث‌ها برابر ۹۵ و اندازه‌ی قاعده‌ی مثلث میانی برابر ۹٫۵ باشد، اندازه‌ی ارتفاع این مثلث کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$\begin{cases} n=5 \\ S_5=95 \\ a_3=\frac{1}{2}(9.5)h \end{cases} \Rightarrow 95=\frac{5}{2}[2a_1+(5-1)(d)] \Rightarrow 95=\frac{5}{2}(2a_1+4d) \longrightarrow$$

$$a_1+2d \longrightarrow \frac{1}{2}(9.5)h=19 \Rightarrow h=4$$

درسنامه‌ی (۲)   مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

در دنباله‌ی هندسی $\{a_n\}$، مجموع n جمله‌ی اول را با نماد S_n نمایش می‌دهند و تعریف می‌شود:

$$a_1+a_2+\dots+a_n=S_n$$

اگر a_1 جمله‌ی اول و a_{n+1} جمله‌ی $(n+1)$ام و q قدر نسبت دنباله‌ی هندسی باشند $(q\neq 1)$ مجموع n جمله‌ی اول از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

تست: حاصل مجموع $1+x+x^2+\dots+x^{12}$ به ازای $x=\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) $۱۲۸+۶۴\sqrt{۲}$ ۲) $۱۲۷+۶۴\sqrt{۲}$ ۳) $۱۲۸+۶۳\sqrt{۲}$ ۴) $۱۲۷+۶۳\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$1+x+x^2+\dots+x^{12}=$ (مجموع ۱۳ جمله از یک دنباله‌ی هندسی با $q=x, a_1=1$) $=\frac{1\times(1-x^{13})}{1-x}$

$$=\frac{1-x^{13}}{1-x}\xrightarrow{x=\sqrt{2}}\frac{1-(\sqrt{2})^{13}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(1-64\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\frac{1+\sqrt{2}-64\sqrt{2}-128}{-1}$$

$$=127+63\sqrt{2}$$

تست: دنباله‌ی هندسی ... و $\frac{1}{2}$ و x و 2 غیرنزولی است. مجموع شش جمله‌ی اول آن کدام است؟

۱) $\frac{۴۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۲۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۱}{۸}$ ۴) $\frac{۲۳}{۱۶}$

پاسخ: گزینه‌ی (۲) در دنباله‌ی هندسی مذکور $a_3=\frac{1}{2}$ و $a_1=2$ می‌باشد، بنابراین:

$$\frac{a_3}{a_1}=q^2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{2}=q^2 \Rightarrow q=\pm\frac{1}{2}$$

به ازای $q=\frac{1}{2}$ دنباله نزولی و به ازای $q=-\frac{1}{2}$ نه نزولی و نه صعودی خواهد بود (یعنی علامت جمله‌ها مثبت و منفی می‌شود) پس بر اساس مفروضات این تست ما $q=-\frac{1}{2}$ را انتخاب می‌کنیم:

$$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{2\left(1-(-\frac{1}{2})^6\right)}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2(1-\frac{1}{64})}{\frac{3}{2}}=\frac{21}{16}$$

تست : در یک دنباله‌ی هندسی مجموع هشت جمله‌ی اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله‌ی اول آن است. جمله‌ی هفتم چند برابر جمله‌ی اول است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{5}{32}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$S_8=\frac{5}{4}S_4 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{5}{4}\left(\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}\right) \Rightarrow$$

$$1-q^8=\frac{5}{4}(1-q^4) \Rightarrow (1-q^4)(1+q^4)=\frac{5}{4}(1-q^4) \xrightarrow{q^4\neq 1}$$

$$1+q^4=\frac{5}{4} \Rightarrow q^4=\frac{1}{4} \Rightarrow q^2=\frac{1}{2}$$

در نتیجه:

$$\frac{a_7}{a_1}=\frac{a_1q^6}{a_1}=q^6=(q^2)^3=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$$

دقت داشته باشید که اگر $q^4=1$ باشد آنگاه قدر مطلق همه‌ی جملات با هم برابر شده و در نتیجه $\frac{a_7}{a_1}=1$ که در گزینه‌ها موجود نیست.

تست: حداقل چند جمله از دنباله‌ی هندسی ...، ۲، ۱، $\frac{1}{2}$ را با شروع از جمله‌ی اول جمع کنیم تا حاصل بزرگتر از ۹۰۰ شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲) باید از نامساوی $S_n>900$ کمترین مقدار n را بیابیم.

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)>900 \Rightarrow 2^n-1>1800 \Rightarrow 2^n>1801 \Rightarrow n>10$$

$\Rightarrow$ کمترین مقدار n برابر ۱۱ است.

تست: تعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی، عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت کدام است؟ (سراسری خارج ۸۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۴) فرض کنیم دنباله‌ی هندسی، $2n$ جمله داشته باشد، بنابه فرض داریم:

$$a_1+a_2+\dots+a_{2n}=3(a_1+a_3+\dots+a_{2n-1})$$

جملات با ردیف فرد، یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت q^2 و n جمله‌اند بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=3\times\frac{a_1(1-(q^2)^n)}{1-q^2}\Rightarrow\frac{1}{1-q}=\frac{3}{(1-q)(1+q)}$$

$$\Rightarrow 1=\frac{3}{1+q}\Rightarrow q=2$$

تست: در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع ۶ جمله‌ی اول، ۵۷ برابر مجموع دو جمله‌ی اول است. مجموع چهار جمله‌ی اول این دنباله چند برابر مجموع دو جمله‌ی اول آن است؟

۱) ۵۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۶۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳) جمله‌ی اول را a_1 و قدر نسبت را q می‌گیریم. طبق فرض $\frac{S_6}{S_2}=57$ بنابراین:

$$\frac{1-q^6}{1-q^2}=57\Rightarrow\frac{(1-q^2)(1+q^2+q^4)}{1-q^2}=57\Rightarrow q^4+q^2-56=0\Rightarrow$$

$$(q^2+8)(q^2-7)=0$$

پس $q^2=7$ حال با نوشتن فرمول‌های S_4 و S_2 نتیجه می‌گیریم.

$$\frac{S_4}{S_2}=\frac{1-q^4}{1-q^2}=1+q^2=8$$

تست: برای محافظت در تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو، لایه‌هایی محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش دست کم ۹۹ درصد کاهش یابد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

مولف:رحیم قهرمان

پاسخ: گزینه ۳) اولین لایه، مواد مضر را نصف می‌کند، دومین لایه نیز نیم باقی‌مانده، یعنی از مواد مضر، نصفِ $\frac{1}{4}$ مواد مضر را برطرف می‌کند و... . دنباله‌ی این اعداد به صورت $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ است. بدیهی است که این اعداد، جملات یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $q=\frac{1}{2}$ و جمله‌ی اول $a_1=\frac{1}{2}$ است. بنابر فرض باید داشته باشیم:

$$S_n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n \geq 7$$

پس تعداد لایه‌ها باید حداقل هفت باشد.

نکته: برای یافتن جمله عمومی از روی S_n می‌توان از رابطه‌ی $a_n=S_n-S_{n-1}$ استفاده کرد.

همچنین داریم $a_1=S_1$ و $a_2=S_2-S_1$، در نتیجه

$$q=\frac{S_2-S_1}{S_1}$$

تست: اگر مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی به صورت $S_n=3(1-2^{-n})$ باشد، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۱)

$$S_n=3(1-2^{-n}) \Rightarrow \begin{cases} S_2=a_1+a_2 \xrightarrow{n=2} \frac{9}{4} \\ S_1=a_1 \xrightarrow{n=1} \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a_1+a_2=\frac{9}{4} \xrightarrow{a_1=\frac{3}{2}}$$

$$a_2=\frac{3}{4} \Rightarrow q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$$

درسنامه‌ی (۳) سه اتحاد مهم

۱) اگر $x,y\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$، آنگاه:

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

۲) اگر $x,y\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$ عددی فرد باشد، آنگاه:

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1})$$

۳) اگر $x,y\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$ عددی زوج باشد، آنگاه:

$$x^n-y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1})$$

حالات خاص

۱) اگر n عدد طبیعی باشد داریم:

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$$

۲) اگر n عددی فرد باشد داریم:

$$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots+1)$$

مثال: به کمک اتحادهای ذکر شده حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $\dfrac{(x^2-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x^{20}-1}$

ب) $\dfrac{(x^5+1)(x^2-x+1)}{x^3+1}$

پاسخ:

الف) $\dfrac{((x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1))((x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1))}{x^{20}-1}=\dfrac{(x^5-1)(x^5+1)}{x^{20}-1}$

$$=\frac{x^{10}-1}{(x^{10}-1)(x^{10}+1)}=\frac{1}{x^{10}+1}$$

ب) $\dfrac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = x^4-x^3+x^2-x+1$

تست: حاصل $A=(x^{21}-1)(1+x^{-1}+x^{-2}+\dots+x^{-20})^{-1}$ را به ازای $x=\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) $512(\sqrt{2}-1)$ ۲) $1024(\sqrt{2}+1)$ ۳) $512(\sqrt{2}+1)$ ۴) $1024(\sqrt{2}-1)$

پاسخ: گزینه ی ۴

$$A=(x^{21}-1)\left(1+\frac{1}{x^1}+\frac{1}{x^2}+\dots+\frac{1}{x^{20}}\right)^{-1}=(x^{21}-1)\left(\frac{x^{20}+x^{19}+\dots+x+1}{x^{20}}\right)^{-1}$$

$$=(x^{21}-1)\left(\frac{x^{20}}{x^{20}+x^{19}+\dots+1}\right)=(x-1)(x^{20}+x^{19}+\dots+1)\times\frac{x^{20}}{x^{20}+x^{19}+\dots+1}$$

$$=x^{20}(x-1) \Rightarrow A=x^{20}(x-1)$$

حال حاصل به دست آمده را به ازای $x=\sqrt{2}$ بدست می‌آوریم:

$$A(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^{20}(\sqrt{2}-1)=1024(\sqrt{2}-1)$$

درسنامه ی شماره ۴

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور** معادلات درجه ی دوم

مولف: رحیم قهرمان اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله ی $ax^2+bx+c=0$ باشند، داریم: $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و $p=x_1x_2=\frac{c}{a}$

تذکر: حالات دیگر را می توان به رابطه ای از ترکیب بین S و p تبدیل کرد، به عنوان مثال داریم:

1) $x_1^2+x_2^2=S^2-2p$

2) $x_1^3+x_2^3=S^3-3pS$

3) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{S+2\sqrt{p}}$

4) $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\sqrt{S-2\sqrt{p}}$

5) $\begin{cases} x_1>0 \\ x_2>0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}+\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}=\frac{S}{\sqrt{p}}$

6) $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{S^2-4p}$

تست: اگر α و β ریشه های معادله ی $4x^2-12x+1=0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟

1) 2 　 2) 3 　 3) 4 　 4) 6

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۵)

پاسخ: گزینه ی ۳

$4x^2-12x+1=0 \Rightarrow S=3,\ p=\frac{1}{4} \quad (*)$

$$A=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{S+2\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\overset{(*)}{=}\frac{\sqrt{3+2\times\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=4$$

تست: به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله ی $mx^2-(m+3)x+5=0$ برابر 6 می باشد؟

(سراسری تجربی ۹۳)

1) $-\frac{9}{5}$ 　 2) 1 　 3) $-\frac{9}{5}$ و 1 　 4) -1 و $\frac{9}{5}$

پاسخ: گزینه ی ۱، اگر ریشه های معادله را α و β بنامیم، داریم:

$$\alpha^2+\beta^2=S^2-2p=6 \xrightarrow[p=\frac{5}{m}]{S=\frac{m+3}{m}} \left(\frac{m+3}{m}\right)^2-\frac{10}{m}=6 \Rightarrow \frac{m^2+6m+9}{m^2}-\frac{10}{m}=6$$

$$\overset{\times m^2}{\Longrightarrow} 5m^2+4m-9=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} \begin{cases} m=1 \\ m=-\frac{9}{5} \end{cases}$$

از مقادیر به دست آمده برای m باید ببینیم کدام یک دلتای معادله اصلی را منفی می کنند:

$$\begin{cases} m=1 \Rightarrow x^2-4x+5=0 \Rightarrow \Delta=16-20<0 \quad \text{غ ق ق} \\ m=-\frac{9}{5} \Rightarrow \Delta>0 \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

تست: عدد $2\sqrt{3}$ واسطه ی هندسی بین ریشه های معادله ی $2x^2-mx=1-m$ است، m کدام است؟

1) 8 　 2) 12 　 3) [illegible] 　 4) 25

پاسخ: گزینه ی ۴

> یادآوری: اگر a و b دو عدد مثبت باشند، واسطه ی هندسی بین آنها مساوی $\sqrt{ab}$ است

اگر $2\sqrt{3}$ واسطه ی هندسی x_1 و x_2 باشد آنگاه:

$$\sqrt{x_1x_2}=2\sqrt{3}\Rightarrow x_1x_2=12\xrightarrow{x_1x_2=\frac{c}{a}}\frac{m-1}{2}=12\Rightarrow m=25$$

تست: هرگاه یکی از ریشه های معادله ی $ax^2+bx+a=0$ سه برابر ریشه ی دیگر باشد، مقدار $\frac{a^2}{b^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{16}$

گزینه ی ۴) نگاهی دقیق به معادله واضح می سازد که حاصل ضرب ریشه های مساوی (۱) است (این مطلب کمک زیادی به ما خواهد کرد): $x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{a}{a}=1\Rightarrow x_1x_2=1$

$$\begin{cases}x_1x_2=1\\ x_1=3x_2\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{x_2}=3x_2\Rightarrow x_2^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x_1^2=3$$

از طرفی:

$$x_1^2+x_2^2=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}\Rightarrow S^2-2P=\frac{10}{3}\Rightarrow\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2=\frac{10}{3}\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}=\frac{16}{3}\Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{3}{16}$$

تست: اگر $x_1=\sin\alpha$ و $x_2=\cos\alpha$ ریشه های معادله ی $x^2+bx+c=0$ باشند، حاصل $\frac{x_1}{x_2^3}+\frac{x_2}{x_1^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{3c^2-1}{c^3}$ ۲) $\frac{c^2+2}{c^3}$ ۳) $\frac{1-2c^2}{c^3}$ ۴) $\frac{2c^2-1}{c^3}$

پاسخ: گزینه ی ۳

> نکته: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$\frac{x_1}{x_2^3}+\frac{x_2}{x_1^3}=\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^3x_2^3}$$

حال با جایگذاری مقدار $x_1=\sin\alpha$ و $x_2=\cos\alpha$ در رابطه ی به دست آمده داریم:

$$\frac{x_1^4+x_2^4}{(x_1x_2)^3}=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{(\sin\alpha\cos\alpha)^3}=\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha\cos\alpha)^3}$$

$$=\frac{1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha\cos\alpha)^3}$$

کافی است برای محاسبه ی رابطه ی اخیر حاصلضرب ریشه های معادله درجه دوم یعنی $\sin\alpha\cos\alpha$ که همان مقدار c است را در آن جایگذاری کنیم، بنابراین:

$$\frac{1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha\cos\alpha)^3}=\frac{1-2c^2}{c^3}$$

ویژگی معادله ی درجه ی دوم $ax^2+bx+c=0$ (در حالت $\Delta>0$)

۱) اگر $c=0 \Leftrightarrow$ معادله یک ریشه برابر صفر دارد. $\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=0\\x_2=-\frac{b}{a}\end{cases}$

۲) اگر $b=0 \Leftrightarrow$ معادله دو ریشه قرینه دارد.

۳) اگر $a=0$, $b\neq 0 \Leftrightarrow x=-\frac{c}{b}$

۴) اگر $a=c \Leftrightarrow$ دو ریشه معادله عکس یکدیگرند

۵) اگر $a=-c \Leftrightarrow$ دو ریشه معادله قرینه عکس یکدیگرند.

۶) اگر $a+b+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=1\\x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$

۷) اگر $a+c=b \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-1\\x_2=-\frac{c}{a}\end{cases}$

تست: به ازای کدام مقدار m ریشه های حقیقی $mx^2+3x+m^2=3$، معکوس یکدیگرند؟

(سراسری تجربی خارج ۹۰)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینه ی (۲) معادله دارای دو ریشه حقیقی است، بنابراین:

$mx^2+3x+m^2-3=0 \xrightarrow{\Delta>0} 9-4m(m^2-3)>0$

به علاوه در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ ، مجموع ریشه‌ها برابر با $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر با $\frac{c}{a}$ است. پس داریم:

$$mx^2+3x+m^2-2=0 \Rightarrow \quad P=\frac{m^2-2}{m}$$

چون ریشه‌ها معکوس یکدیگرند، پس باید $P=1$ یعنی $a=c$

$$m^2-2=m \Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow (m+1)(m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$$

حال هر یک از مقادیر است آمده را در رابطه‌ی (*) قرار می‌دهیم داریم:

$$\begin{cases} m=-1 \xrightarrow{(*)} 9-4(-1)(1-2)>0 \Rightarrow 5>0 \Rightarrow \text{قابل قبول} \\ m=2 \xrightarrow{(*)} 9-4\times2(4-2)>0 \Rightarrow -7>0 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین فقط به ازای $m=-1$ ریشه‌های معادله مثبت و معادله دارای دو ریشه است.

نکاتی درباره جواب‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$

۱) اگر $\Delta>0 \Leftrightarrow$ معادله دو ریشه متمایز دارد.

الف) $\frac{c}{a}<0 \Rightarrow$ دو ریشه مختلف العلامت دارد $\Rightarrow$
$$\begin{cases} -\frac{b}{a}<0 \;,\; |x_1|>|x_2| \\ -\frac{b}{a}=0 \;,\; \text{دو ریشه قرینه یکدیگرند} \\ -\frac{b}{a}>0 \;,\; |x_2|>|x_1| \end{cases}$$

ب) $\frac{c}{a}=0 \Rightarrow$ یک ریشه صفر و دیگری $-\frac{b}{a}$ است.

ج) $\frac{c}{a}>0 \Rightarrow$ دو ریشه هم علامت اند $\Rightarrow$
$$\begin{cases} -\frac{b}{a}<0 \quad \text{هر دو ریشه منفی اند} \\ -\frac{b}{a}=0 \quad \text{غیر ممکن است} \\ -\frac{b}{a}>0 \quad \text{هر دو مثبت اند} \end{cases}$$

۲) اگر $\Delta=0 \Rightarrow$ معادله دارای ریشه مضاعف است.

$$\Rightarrow x_1=x_2=-\frac{b}{2a} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow x_1=x_2>0 \\ -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow x_1=x_2<0 \end{cases}$$

۳) $\Delta<0$ ⇐ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد

تست: حدود m برای آن که معادله $(m-1)x^2+mx+m-3=0$ دو ریشه مختلف العلامه داشته باشد، کدام است؟

۱) $m>2$ ۲) $1<m<3$ ۳) $m<1$ ۴) $0<m<1$

پاسخ: گزینه (۲) می‌دانیم معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشه مختلف العلامه است، هرگاه $\frac{c}{a}<0$ باشد.

$$(m-1)x^2+mx+m-3=0 \Rightarrow \frac{m-3}{m-1}<0 \Rightarrow 1<m<3$$

تست: به ازای چه مقدار m معادله‌ی $3x^2+(m^2-16)x+m+3=0$ دارای دو ریشه قرینه است؟

۱) -4 ۲) ± 4 ۳) -3 ۴) ± 3

پاسخ: گزینه (۱) می‌دانیم معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ به شرط $b=0$ و $\frac{c}{a}<0$ دو ریشه‌ی قرینه هم دارد. بنابراین:

$$\begin{cases} m^2-16=0 \\ \frac{m+3}{3}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-4 \text{ یا } m=4 \\ m<-3 \end{cases} \Rightarrow m=-4$$

تست: کدام یک از معادلات زیر، دو جواب مختلف العلامه دارد که جواب منفی از نظر قدر مطلق از جواب مثبت بزرگ‌تر است؟

۱) $8x^2-4x-3=0$ ۲) $-x^2-8x+7=0$

۳) $-x^2-9x-12=0$ ۴) $-x^2+7x+8=0$

گزینه (۲) با توجه به اینکه معادله دارای دو جواب مختلف العلامت است، لذا باید $\frac{c}{a}<0$ باشد، از طرفی اگر جواب منفی از لحاظ قدر مطلق از جواب مثبت بزرگ‌تر است، پس مجموع دو ریشه عددی منفی است یعنی $-\frac{b}{a}<0$ است. بنابراین باید $\frac{c}{a}<0$ و $-\frac{b}{a}<0$ باشد. تنها معادله گزینه‌ی (۲) دارای این شرایط است.

درسنامه (۵) تشکیل معادله درجه دوم

۱) معادله‌ی درجه‌ی دومی که جواب‌های آن اعداد حقیقی x_1 و x_2 باشند و داشته باشیم $S=x_1+x_2$ و $P=x_1x_2$ آنگاه معادله‌ی درجه‌ی دوم آن به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$x^2-Sx+P=0$$

تست: معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ و $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2-(3+\sqrt{2})x+\frac{1}{2}=0$

۲) $x^2+(3+\sqrt{2})x+\frac{1}{2}=0$

۳) $x^2-(3-\sqrt{2})x+\frac{1}{2}=0$

۴) $x^2-(3+\sqrt{2})x+1=0$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ ابتدا S و P را می‌یابیم:

$$\begin{cases} S=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=3+\sqrt{2} \\ P=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

حال با داشتن $S=3+\sqrt{2}$ و $P=\frac{1}{2}$ معادله‌ی درجه دوم را تشکیل می‌دهیم:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-(3+\sqrt{2})x+\frac{1}{2}=0$$

۲) اگر عدد اصم $\alpha+\sqrt{\beta}$ ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دومی با ضرایب گویا باشد، در این صورت ریشه‌ی دیگر $\alpha-\sqrt{\beta}$ خواهد بود.

تست: عدد $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ ریشه‌ی کدام یک از معادلات زیر است؟

۱) $x^2-4x+1=0$ ۲) $x^2+3x-1=0$ ۳) $x^2-2x-1=0$ ۴) $x^2-7x+4=0$

پاسخ: گزینه‌ی ۱

$$x_1=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=|2-\sqrt{3}|=2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x_1=2-\sqrt{3} \Rightarrow x_2=2+\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=1 \end{cases} \Rightarrow x^2-4x+1=0$$

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف:رحیم قهرمان

۳) برای یافتن معادله درجه دومی جدیدی که ریشه های آن رابطه ای با ریشه های معادله ی قبلی داشته باشد، S' و P' را برای معادله ی جدید به دست آورده و آن گاه معادله ی $x^2-S'x+P'=0$ را تشکیل می دهیم.

تست: اگر α و β ریشه های معادله ی $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه جواب های کدام معادله به صورت $\{\frac{1}{\alpha}+1, \frac{1}{\beta}+1\}$ است؟

(سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $4x^2-5x+1=0$
۲) $4x^2-x+1=0$
۳) $4x^2-5x-1=0$
۴) $4x^2-3x-1=0$

پاسخ: گزینه ۳

$$2x^2-3x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{3}{2} \\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-2 \end{cases}$$

ریشه های معادله مورد نظر عبارتند از: $\alpha'=\frac{1}{\alpha}+1$ و $\beta'=\frac{1}{\beta}+1$، پس:

$$\begin{cases} S'=\alpha'+\beta'=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+2=\frac{5}{4} \\ P'=\alpha'\beta'=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+1=\frac{-1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)+1=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2-S'x+P'=0$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}=0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2-5x-1=0$$

تست: ریشه های کدام معادله، از معکوس ریشه های معادله درجه دوم $2x^2-3x-1=0$، یک واحد کمتر است؟

(سراسری تجربی ۹۴)

۱) $x^2-3x+1=0$
۲) $x^2+3x+1=0$
۳) $x^2-5x+2=0$
۴) $x^2+5x+2=0$

پاسخ: گزینه ۴) اگر ریشه های این معادله را α و β بنامیم، داریم:

$$2x^2-3x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2} \\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{3}{2} \end{cases}$$

معادله‌ای که ریشه‌های آن، از معکوس ریشه‌های معادله اولیه یک واحد کم‌تر است، به صورت زیر خواهد بود:

$$\left\{\frac{1}{\alpha}-1 \text{ و } \frac{1}{\beta}-1\right\}$$

$$S'=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-2=-5$$

$$P'=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\beta}-1\right)=\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+1=\frac{1}{\alpha\beta}-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+1 \Rightarrow$$

$$P'=\frac{1}{-\frac{1}{2}}-(-3)+1=2$$

با توجه به رابطه‌ی $x^2-S'x+P'=0$ می‌توانیم معادله‌ی مورد نظر را به دست آوریم.

$$\begin{cases} S'=-5 \\ P'=2 \end{cases} \Rightarrow x^2+5x+2=0$$

معادله دو مجذوری که به روش تغییر متغیر قابل حل می‌باشند:

در برخی از معادلات می‌توان با در نظر گرفتن یک متغیر جدید، آن معادله را به یکی از معادلاتی که می‌شناسیم، تبدیل کرد. در این حالت بعد از حل معادله‌ی حاصل، جواب‌ها را در عبارت تغییر متغیر قرار می‌دهیم و مقادیر مجهول اصلی معادله‌ی اولیه را به دست می‌آوریم.

تست: مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

پاسخ: گزینه‌ی ۲، معادله را از روش تغییر متغیر حل می‌کنیم، داریم:

$$(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0 \xrightarrow{x^2+x=t} t^2-18t+72=0 \Rightarrow (t-6)(t-12)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=x^2+x=12 \Rightarrow x^2+x-12=0 \xrightarrow{\text{۲ ریشه حقیقی دارد}} x_1+x_2=-1 \\ t=x^2+x=6 \Rightarrow x^2+x-6=0 \xrightarrow{\text{۲ ریشه حقیقی دارد}} x_3+x_4=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=x_1+x_2+x_3+x_4=-2$$

مولف:رحیم قهرمان

درسنامه ی (۴) نمودار تابع درجه ی دوم (سهمی)

۱) اگر $a>0$ باشد، دهانه ی سهمی به سمت بالا و به صورت ∪ است (تابع می‌نیمم دارد.)

۲) اگر $a<0$ باشد، دهانه سهمی به سمت پایین و به صورت ∩ است، (تابع ماکزیمم دارد.)

۳) مختصات راس سهمی از فرمول $S\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ به دست می‌آید که آن نقطه ی می‌نیمم (هرگاه $a>0$) یا نقطه ی ماکزیمم (هرگاه $a<0$) تابع می‌گویند و خط $x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی است.

تست: اگر یکی از منحنی های تابع درجه دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ نسبت به خط $x=2$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟ (سراسری تجربی ۸۳)

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۶

گزینه ی (۴) $x=2$ محور تقارن تابع درجه دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ می‌باشد لذا:

$$x=\frac{-1}{2(a-1)} : \text{محور تقارن} \xrightarrow{x=2 \text{ محور تقارن}} \frac{-1}{2(a-1)}=2 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

بنابراین ضابطه ی تابع به شکل $y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$ در می‌آید و محل تقاطعش با جهت مثبت محور xها عبارتست از:

$$y=0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2+x+3=0 \Rightarrow x^2-4x-12=0 \Rightarrow (x+2)(x-6)=0 \xRightarrow{x>0} x=6$$

تست: نقطه ی می‌نیمم تابع $y=x^2+ax+2$ روی نیمساز قرار دارد. a کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) ۲   ۴) ۴

پاسخ: گزینه ی (۴)

$$y=x^2+ax+2 \Rightarrow S\left(-\frac{a}{2}, \frac{-(a^2-4(2)(1))}{4}\right) \Rightarrow S\left(-\frac{a}{2}, \frac{8-a^2}{4}\right)$$

که روی نیمساز ربع اول و سوم یعنی روی خط $y=x$ قرار دارد، بنابراین:

$$y_S=x_S \Rightarrow \frac{8-a^2}{4}=-\frac{a}{2} \Rightarrow 2a^2-4a-16=0 \Rightarrow a^2-2a-8=0 \Rightarrow$$

$$(a+2)(a-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ a=4 \end{cases}$$

اما چون نقطه‌ی مینیمم S روی نیم‌ساز ربع سوم قرار دارد، لذا $x_S<0$، یعنی:

$$-\frac{a}{2}<0 \Rightarrow a>0$$

بنابراین فقط $a=4$ قابل قبول است.

۴) هر تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ را می‌توان به صورت $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ نیز نوشت که در آن $S(\alpha,\beta)$ رأس سهمی است.

تست: نقاط $A(1,3)$ و $B(-3,3)$ روی منحنی تابع $y=a(x-b)^2+c$ قرار دارند، هرگاه: (مشابه سراسری تجربی خارج از کشور ۱۹)

۱) $b=-1$ ۲) $b=1$

۳) $b=0$ ۴) $b=-2$

پاسخ: گزینه‌ی ۱) نقاط A و B روی منحنی تابع y قرار دارند، پس مختصات آن‌ها در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند:

$$A(1,3)\xrightarrow{y=a(x-b)^2+c} 3=a(1-b)^2+c \Rightarrow 3-c=a(1-b)^2 \quad (I)$$

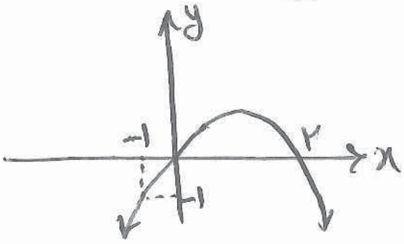
$$B(-3,3)\xrightarrow{y=a(x-b)^2+c} 3=a(-3-b)^2+c \Rightarrow 3-c=a(-3-b)^2 \quad (II)$$

$$(I,II)\Rightarrow a(1-b)^2=a(-3-b)^2 \xrightarrow{a\neq 0} (1-b)^2=(-3-b)^2 \Rightarrow |1-b|=|-3-b|$$

$$\xrightarrow{|x|=|y|\Rightarrow x=\pm y}\begin{cases}1-b=-3-b \Rightarrow 1=-3 \quad \times\\ 1-b=3+b \Rightarrow 2b=-2 \rightarrow b=-1\end{cases}$$

۵) اگر تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ محور xها را در نقاطی به طول‌های x_1 و x_2 قطع کند، آنگاه معادله را به صورت $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ نیز می‌توان نوشت.

تست: نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، مانند شکل مقابل است. حاصل $a+2b-c$ کدام است؟



۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$

۳) 4 ۴) 2

پاسخ: گزینه‌ی ۲) با توجه به این‌که ... $f(x)=ax^2+bx+c$ است، بنابراین

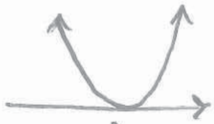
ضابطه‌ی آن را می‌توان به صورت $f(x)=a(x)(x-2)$ در نظر گرفت. داریم:

$$f(x)=a(x)(x-2) \xrightarrow{f(-1)=-1} -1=a(-1)(-1-2) \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

$$f(x)=-\frac{1}{3}(x)(x-2)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+0 \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow a+3b-c=\frac{5}{3}$$

۶) اگر تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ محور xها را فقط در یک نقطه مانند x_1 قطع کند، آن‌گاه ضابطه‌اش را به صورت $y=a(x-x_1)^2$ می‌توان نوشت.

۷) در سهمی $y=ax^2+bx+c$ اگر $\begin{cases} \Delta=0 \\ a>0 \end{cases}$ سهمی بالای محور xها و بر آن مماس است.



$-\frac{b}{2a}$

تست: به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=(m-2)x^2-3x+m+2$ بالای محور xها و مماس بر آن است؟

۱) -3 ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 3 (سراسری ریاضی ۸۲)

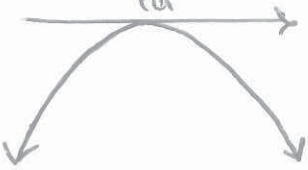
پاسخ: گزینه‌ی ۳ تابع بالای محور xهاست، پس رو به بالاست و در نتیجه $a>0$ است. از طرفی بر محور xها مماس است، پس معادله‌ی $y=0$ دارای ریشه مضاعف است و در نتیجه $\Delta=0$.

$$\begin{cases} \Delta=0 \Rightarrow 9-4(m-2)(m+2)=0 \Rightarrow 9-4(m^2-4)=0 \\ a>0 \Rightarrow m-2>0 \Rightarrow m>2 \end{cases}$$

$$9-4(m^2-4)=0 \Rightarrow m^2=\frac{25}{4} \xrightarrow{m>2} m=\frac{5}{2}$$

۸) در سهمی $y=ax^2+bx+c$ اگر $\begin{cases} \Delta=0 \\ a<0 \end{cases}$ سهمی پایین محور xها و بر آن مماس است.

$-\frac{b}{2a}$



تست: به ازای کدام مقدار m نمودار سهمی $f(x) = (2m-1)x^2 - 2mx + 2m-1$ رو به پایین محور xها بر آن مماس باشد؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{4}{9}$

پاسخ: گزینه ی ۳)

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4(2m-1)^2 = 0 \Rightarrow m^2 - (2m-1)^2 = 0 \\ 2m-1 < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (m+2m-1)(m-2m+1) = 0 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \text{ یا } m = 1 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

با توجه به اینکه $m<\frac{1}{2}$ ، $m=1$ غیرقابل قبول است، پس $m=\frac{1}{3}$ جواب است.

۹) نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره بالای محور xهاست، (به عبارت دیگر چندجمله ای ax^2+bx+c همواره مثبت است) اگر و تنها اگر $a>0$ و $\Delta<0$ باشد.

تست: به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=(m+2)x^2-2mx+1$ همواره بالای محور xها است؟
(سراسری ریاضی خارج کشور ۸۵)

۱) $m>-2$ ۲) $-2<m<-1$ ۳) $-2<m<2$ ۴) $-1<m<2$

پاسخ: گزینه ی ۴) نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ همواره بالای محور xهاست اگر $a>0$ و $\Delta<0$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} a>0 \Rightarrow m+2>0 \Rightarrow m>-2 \quad (*) \\ \Delta<0 \Rightarrow m^2-m-2<0 \Rightarrow (m+1)(m-2)<0 \Rightarrow -1<m<2 \quad (**) \end{cases}$$

$$(*) \cap (**) \Rightarrow -1<m<2$$

۱۰) نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور xهاست (به عبارت دیگر چندجمله ای ax^2+bx+c همواره منفی است) اگر و تنها اگر $a<0$ و $\Delta<0$ باشد.

تست: به ازای کدام مقادیر m، نمودار $y=(m-1)x^2+\sqrt{3}x+m$ همواره در زیر محور xها است؟

(سراسری ریاضی داخل ۸۵)

۱) $m<-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}<m<1$ ۳) $1<m<\frac{3}{2}$ ۴) $m>\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه‌ی (۱) می‌دانیم نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور xها است اگر $a<0$ و $\Delta<0$ باشد. داریم:

$$\begin{cases} a<0 \Rightarrow m-1<0 \Rightarrow m<1 \quad (*) \\ \Delta<0 \Rightarrow 3-4m(m-1)<0 \Rightarrow -4m^2+4m+3<0 \Rightarrow 4m^2-4m-3>0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$(2m+1)(2m-3)>0 \Rightarrow m<-\frac{1}{2} \text{ یا } m>\frac{3}{2} \quad (**)$$

$$(*)\cap(**) \Rightarrow m<-\frac{1}{2}$$

۱۱) نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ از هر چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور می‌کند هرگاه $\frac{c}{a}<0$ باشد، یعنی دارای دو ریشه مختلف العلامت باشد.

تست: با کدام مقادیر m، منحنی به معادله‌ی $y=(m+2)x^2-2x+1$ از هر چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات می‌گذرد؟

(سراسری ریاضی داخل ۸۷)

۱) $m<-2$ ۲) $m<-1$ ۳) $-2<m<-1$ ۴) $-4<m<-2$

پاسخ: گزینه‌ی (۱) تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ از هر چهار ناحیه عبور می‌کند، هرگاه دارای دو ریشه مختلف العلامت باشد، به عبارت دیگر $\frac{c}{a}<0$ شود:

$$\frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{1}{m+2}<0 \Rightarrow m<-2$$

۱۲) صفرهای تابع درجه دوم: نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور xها، نقاط با طول مشترک آنها را صفرهای تابع می‌نامیم، چرا که در این نقاط مقدار تابع صفر می‌شود.

تست: اگر $x=m$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^2-(3m+1)x+2$ باشد، صفر دیگر آن کدام است؟ $(m\in N)$

۱) $2m+1$ ۲) $2m$ ۳) $2m-1$ ۴) $-m$

پاسخ: گزینه‌ی ۱)

$$f(x)=x^2-(3m-1)x+2 \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}=3m+1 \quad (*)$$

یکی از صفرهای تابع $x_1=m$ است. در نتیجه:

$$(*) \Rightarrow m+x_2=3m+1 \Rightarrow x_2=2m+1$$

درسنامه‌ی (۷) روش یافتن ماکزیمم یا مینیمم توابع درجه دوم

در سهمی به معادله‌ی $y=ax^2+bx+c$ نقطه‌ی $S(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ نقطه‌ی اکسترمم یا همان رأس سهمی است. توجه داریم که:

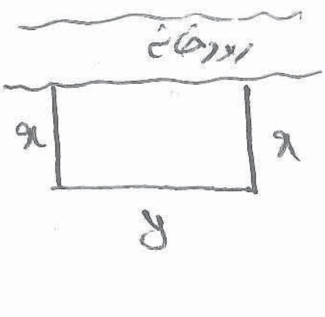
۱) اگر $a>0$، $y=\frac{-\Delta}{4a}$ مقدار مینیمم تابع است.

۲) اگر $a<0$، $y=\frac{-\Delta}{4a}$ مقدار ماکزیمم تابع است.

تست: بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۱)

۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸ ۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

پاسخ: گزینه‌ی ۲) با توجه به شکل و فرض مسئله $2x+y=88$ است، پس $y=88-2x$. تابع مساحت مستطیل برابر است با:



$$S=xy \Rightarrow S(x)=x(88-2x)=88x-2x^2$$

$$S_{max}=\frac{-\Delta}{4a}=-\frac{(88^2-4(-2)(0))}{4(-2)}=968$$

درسنامه‌ی (۸) معادلات شامل عبارات گویا

معادله‌هایی که در آن‌ها عبارات گویا وجود داشته باشند، معادله‌هایی شامل عبارت‌های گویا می‌نامند.

برای حل این گونه معادلات باید مراحل زیر را انجام دهیم.

۱) دامنه‌ی معادله را بدست می‌آوریم.

۲) همه‌ی عبارات جبری را به یک طرف معادله انتقال می‌دهیم.

۳) ک.م.م مخرج‌ها را بدست می‌آوریم و معادله را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب و ساده‌تر می‌کنیم و جواب‌ها را بدست می‌آوریم (البته ریشه‌ی مخرج نباشد)

۴) جواب‌هایی قابل قبول هستند که در دامنه‌ی جواب معادله قرار داشته باشند.

تست: در معادله‌ی $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=3$ حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینه‌ی ۳ $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=3 \Rightarrow$ ک.م.م مخرج کسرها $=(x-2)x$

$(\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=3)\times x(x-2) \Rightarrow x^2+x-2=3(x-2)x \Rightarrow 2x^2-7x+2=0$

معادله‌ی $2x^2-7x+2=0$ دارای دو ریشه متمایز است چون $x=2$ یا $x=0$ ریشه‌های معادله نیستند (صفرکننده‌های مخرج کسرها) بنابراین هر دو ریشه قابل قبول می‌باشند. با توجه به اینکه $\frac{c}{a}=\frac{2}{2}=1$ لذا حاصل ضرب ریشه‌ها برابر با ۱ است.

درسنامه‌ی (۹) معادلات رادیکالی

برای حل یک معادله شامل رادیکال مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

۱) رادیکال را در یک طرف تنها نگه می‌داریم و بقیه جملات را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم.

۲) طرفین معادله را به توان عدد فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم.

۳) معادله را ساده می‌کنیم اگر باز رادیکال وجود داشت دوباره آن را در یک طرف تنها نگه می‌داریم و طرفین معادله را به توان عدد فرجه می‌رسانیم و نتیجه را ساده و حل می‌کنیم.

۴) تمام جواب‌های به دست آمده را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم. و جواب‌های نابجا را کنار می‌گذاریم.

تست: مجموع جواب‌های معادله رادیکالی $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=1$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=1 \Rightarrow \sqrt{3x+4}=1+\sqrt{2x+1} \xrightarrow{\text{به توان دو}}$$

$$3x+4=1+2\sqrt{2x+1}+2x+1 \Rightarrow x+2=2\sqrt{2x+1} \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$x^2+4x+4=8x+4 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=4$$

هر دو جواب به دست آمده در معادله اصلی صدق می‌کنند. بنابراین قابل قبول می‌باشند. پس مجموع دو جواب به دست آمده برابر ۴ است.

تست: معادله $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2+a}=0$ به ازای چند مقدار a، دارای جواب است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۲) می‌دانیم مجموع دو عدد نامنفی همواره نامنفی است. مجموع چند عبارت نامنفی زمانی می‌تواند صفر باشد که تمام عبارات هم‌زمان صفر شوند. $\sqrt{x^2-3x+2}$ همواره نامنفی است و به ازای $x=1$ و $x=2$ صفر می‌شود. اگر عبارت همواره نامنفی $\sqrt{x^2+a}$ نیز به ازای $x=1$ یا $x=2$ صفر شود، در این صورت معادله $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2+a}=0$ جواب خواهد داشت:

الف) اگر $x=1$ جواب معادله $\sqrt{x^2+a}$ باشد، آنگاه $1^2+a=0$، در نتیجه $a=-1$ است.

ب) اگر $x=2$ جواب معادله $\sqrt{x^2+a}$ باشد، آنگاه $2^2+a=0$، در نتیجه $a=-4$ است.

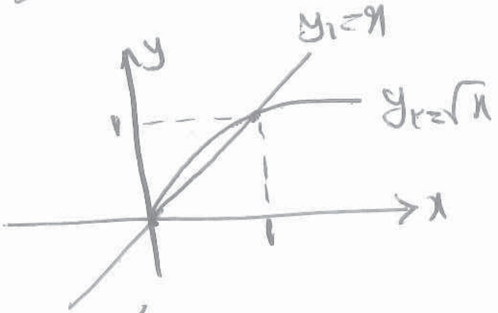
به ازای $a=-1$ یا $a=-4$، معادله داده شده دارای جواب است.

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور** (۲۷)

مولف:رحیم قهرمان

درسنامه ی (۱۰) حل معادلات به روش هندسی

گاهی اوقات بعضی از معادلات به روش جبری قابل حل نیستند و یا حل جبری بسیار وقت گیر می باشد. اکنون می خواهیم روش هندسی حل معادلات را مورد بررسی قرار دهیم. به عنوان مثال فرض کنید می خواهیم تعداد جواب های معادله ی $x=\sqrt{x}$ را با روش هندسی به دست آوریم. بدین منظور در یک دستگاه مختصات نمودار دو تابع $y_1=x$ و $y_2=\sqrt{x}$ را رسم می کنیم.



همان طور که می بینید، نمودار این دو تابع در دو نقطه یکدیگر را قطع می کنند. پس معادله ی $x=\sqrt{x}$ دو جواب دارد.

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط محل تلاقی نمودارهای توابع f و g جواب های معادله ی $f(x)=g(x)$ خواهند بود و بر عکس یعنی هر جواب این معادله، طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.

تست: معادله ی $\frac{2x-1}{x}=5-x^2$ چند جواب دارد؟

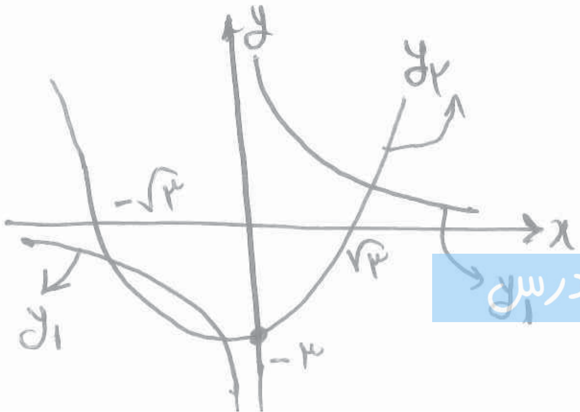
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ی ۳) معادله را بازنویسی می کنیم.

$$\frac{2x-1}{x}=5-x^2 \Rightarrow 2-\frac{1}{x}=5-x^2$$

$$\Rightarrow x^2-3=\frac{1}{x}$$

نمودار توابع $y_1=\frac{1}{x}$ و $y_2=x^2-3$ را در یک دستگاه رسم می کنیم. چون نمودار $y_2=x^2-3$ و $y_1=\frac{1}{x}$ یکدیگر را در سه نقطه قطع کرده اند پس معادله داده شده سه جواب دارد.

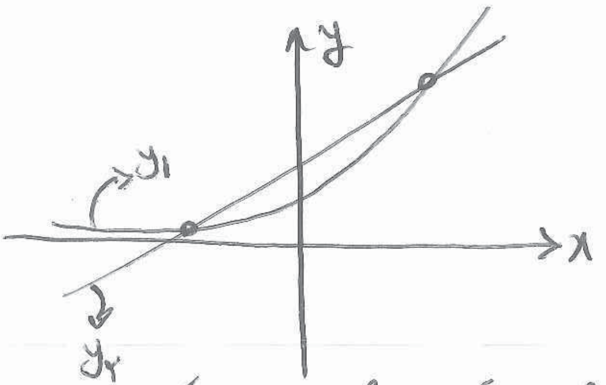


مولف: رحیم قهرمان

تست: معادله ی $2^x = 2x+2$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ‏ ‏ ۲) ۱ ‏ ‏ ۳) ۲ ‏ ‏ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ی ۳) نمودار دو تابع $y_1=2^x$ و $y_2=2x+2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



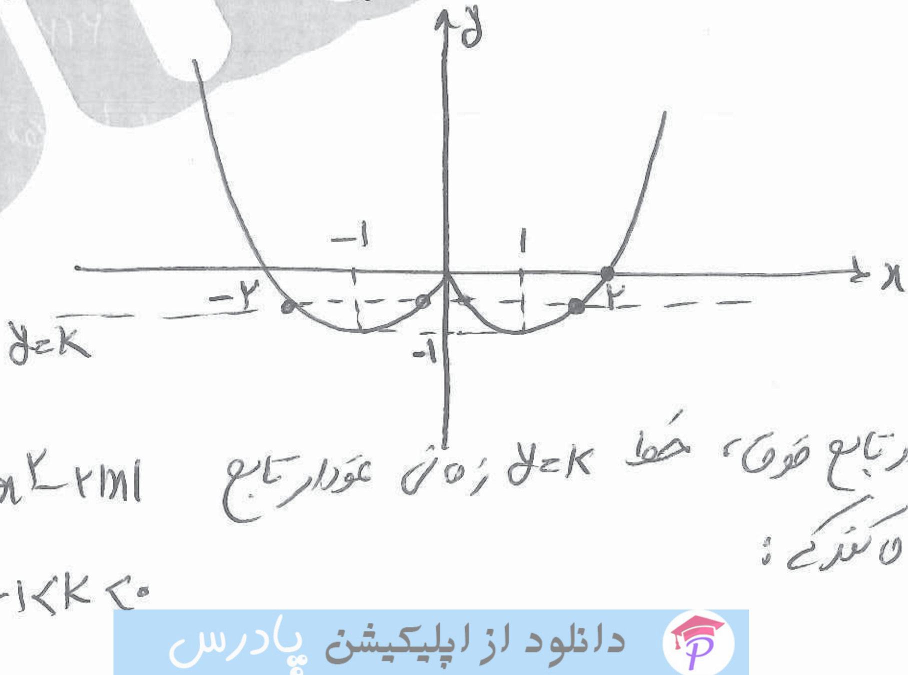
$\Rightarrow$ معادله دو جواب دارد.

تست: اگر معادله ی $x^2-2|x|=k$ دارای چهار ریشه ی حقیقی باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k>0$ ‏ ‏ ۲) $k>1$ ‏ ‏ ۳) $-1<k<0$ ‏ ‏ ۴) $-1\leq k\leq 0$

پاسخ: گزینه ی ۳) تابع $f(x)=x^2-2|x|$ را در نظر بگیرید و با توجه به ریشه ی داخل قدر مطلق و با استفاده از تعیین علامت آن، این تابع را به یک تابع دو ضابطه ای تبدیل می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x\ ; & x\geq 0 \\ x^2+2x\ ; & x<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1-1\ ; & x\geq 0 \\ x^2+2x+1-1\ ; & x<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} (x-1)^2-1\ ; & x\geq 0 \\ (x+1)^2-1\ ; & x<0 \end{cases}$$



با توجه به نمودار تابع فوق، خط $y=k$ زمانی نمودار تابع $f(x)=x^2-2|x|$ را در چهار نقطه قطع می‌کند که:

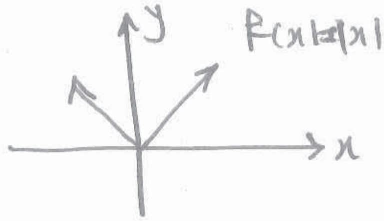
$-1<k<0$

مولف:رحیم قهرمان

درسنامه ی (۱۱)

تابع قدر مطلق: تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می کند، تابع قدر مطلق نامیده می شود و با $f(x)=|x|$ نشان داده می شود. یعنی $f:A\to B$ با ضابطه ی $f(x)=|x|$ یک تابع قدر مطلق روی A نامیده می شود.

نمودار تابع قدر مطلق: اگر دامنه ی تابع قدر مطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد، آن گاه $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه ی $f(x)=|x|$ به کمک دو خط $y=x$ و $y=-x$ قابل رسم است. چون به ازای هر x حقیقی، $|x|\geq 0$، لذا وقتی دامنه ی $f(x)=|x|$، $\mathbb{R}$ باشد آن گاه برد، مجموعه اعداد حقیقی نامنفی یعنی $[0,+\infty)$ است.



$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

خواص قدر مطلق:

1) $\sqrt[2k]{x^{2k}}=|x|$ 2) $|x|=|-x|$ 3) $|xy|=|x|\,|y|$

4) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\ (y\neq 0)$ 5) $|x|=a \xrightarrow{a\geq 0} x=\pm a$

6) $|x|=|y| \Rightarrow x=\pm y$ 7) $|x|<a \xrightarrow{a>0} -a<x<a$

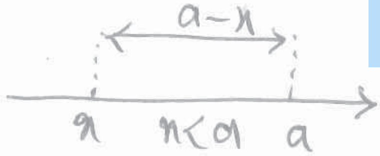
8) $|x|>a \xrightarrow{a\geq 0} x>a$ یا $x<-a$ 9) $|x+y|\leq |x|+|y|$ (نامساوی مثلث)

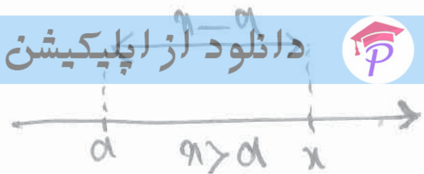
10) $|x+y|=|x|+|y| \Leftrightarrow xy\geq 0$ 11) $|x|<|y| \Leftrightarrow x^2<y^2 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)<0$

12) $a<x<b \overset{a<b}{\Longleftrightarrow} \left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}$

13) $x<a$ یا $x>b \overset{a<b}{\Longleftrightarrow} \left|x-\frac{a+b}{2}\right|>\frac{b-a}{2}$

نکته: فاصله ی نقطه ی به طول x روی محور اعداد حقیقی از نقطه ی به طول a برابر است با: $|x-a|$





تست: مجموعه جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{x-3}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\right| > -\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $[0,\frac{1}{4}]$ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۴) $[0,1)$

پاسخ: گزینه‌ی ۴) نامعادله‌ی $|f(x)|>a$ وقتی a منفی باشد، همواره و برای هر مقدار در دامنه‌ی f برقرار است. پس باید دامنه‌ی تابع $\frac{x-3}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$ را تعیین کنیم.

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ 1-\sqrt{x}>0 \Rightarrow \sqrt{x}<1 \Rightarrow x\in[0,1)\end{cases}$$

تست: مجموعه جواب‌های دستگاه $\begin{cases}|x|<2\\|2x-3|<x\end{cases}$ با مجموعه جواب‌های کدام نامعادله زیر برابر است؟

۱) $|3x-2|<1$ ۲) $|x-1|<1$ ۳) $|2x-3|<1$ ۴) $|x-2|<1$

پاسخ: گزینه‌ی ۳)

$$|x|<2 \xrightarrow{\text{خاصیت (۷)}} -2<x<2 \quad (1)$$

$$|2x-3|<x \xrightarrow[\text{خاصیت (۷)}]{x\ge 0} -x<2x-3<x \Rightarrow \begin{cases}2x-3<x\Rightarrow x<3\\ 2x-3>-x\Rightarrow x>1\end{cases} \Rightarrow 1<x<3 \quad (2)$$

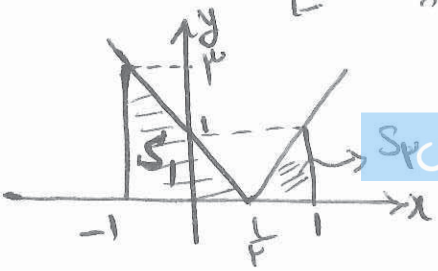
$$(1)\cap(2) \Rightarrow 1<x<2 \xrightarrow{\text{خاصیت (۱۲)}} \left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{2-1}{2} \Rightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{|2x-3|}{2}<\frac{1}{2} \xrightarrow{2>0} |2x-3|<1$$

تست: مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x)=|2x-1|$ و محور xها و دو خط $x=1$ و $x=-1$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) 2 ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 3 (سراسری تجربی ۹۰)

پاسخ: گزینه‌ی ۳) برای تعیین مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $f(x)=|2x-1|$، محور xها و دو خط $x=1$ و $x=-1$ یکی از روش‌ها رسم نمودار تابع است. پس داریم:



$$S=S_1+S_2=\frac{\frac{3}{2}\times 3}{2}+\frac{\frac{1}{2}\times 1}{2}=\frac{5}{2}$$

تست: مجموعه جواب نامعادله $-3|x+3| + 2(x+3)^2+1 \le 0$ کدام است؟

۱) $[-4,-\frac{5}{2}] \cup [-2,-\frac{3}{2}]$ ۲) $[-4,-\frac{3}{2}]$

۳) $[-4,-\frac{7}{2}] \cup [-\frac{5}{2},-2]$ ۴) $[-\frac{7}{2},-2]$

پاسخ: گزینه ۳

$$-3|x+3| + 2(x+3)^2+1\le 0 \xrightarrow{|x|^2=x^2} 2|x+3|^2-3|x+3|+1\le 0$$

$$\xrightarrow{|x+3|=A} 2A^2-3A+1\le 0 \Rightarrow (A-1)(2A-1)\le 0 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} \frac{1}{2}\le A\le 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\le |x+3|\le 1 \xrightarrow{a\le x\le b \Rightarrow \begin{cases} x\ge a \\ x\le b\end{cases}} \begin{cases} |x+3|\le 1 \\ |x+3|\ge \frac{1}{2}\end{cases}$$

$$|x|\le a \xrightarrow{a\ge 0} -a\le x\le a$$

$$|x|\ge a \xrightarrow{a\ge 0} \begin{cases} x\ge a \\ \text{یا} \\ x\le -a\end{cases}$$

$$\begin{cases} -1\le x+3\le 1 \\ x+3\ge \frac{1}{2} \ \text{یا}\ x+3\le -\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\le x\le -2 \\ x\ge -\frac{5}{2} \ \text{یا}\ x\le -\frac{7}{2}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cap} (-\frac{5}{2}\le x\le -2) \cup (-4\le x\le -\frac{7}{2})$$

تست: اگر نمودار تابع $f(x)=||x-2|-a|-3$ دقیقاً سه بار محور xها را قطع کند، آنگاه مقدار a کدام است؟

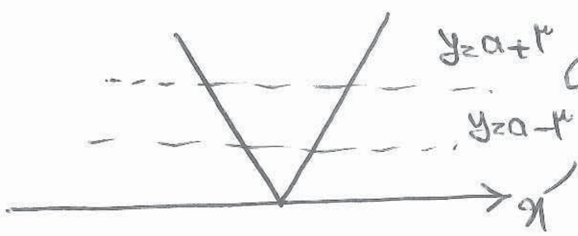
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲) از فرض سوال نتیجه می‌گیریم معادله $f(x)=0$ سه جواب دارد، بنابراین معادله $||x-2|-a|=3$ سه ریشه دارد. دو معادله زیر را داریم:

1) $|x-2|-a=3 \Rightarrow |x-2|=a+3$

2) $|x-2|-a=-3 \Rightarrow |x-2|=a-3$

پس باید تعداد نقاط تقاطع نمودار $y=|x-2|$ و خطوط افقی $y=a+3$ و $y=a-3$ را بیابیم. مطابق شکل این خطوط و نمودار حداکثر ۴ نقطه برخورد دارند و فقط در حالتی سه نقطه‌ی برخورد دارند که خط $y=a-3$ از راس زاویه‌ی نمودار بگذرد یعنی $a-3=0$، بنابراین $a=3$ (خطوط و نمودار می‌توانند ۲ و یا ۰ نقطه‌ی برخورد نیز داشته باشند که این حالات مورد نظر نمی‌باشند.)



تست: اگر مقادیری که در $|x^2-x|+x^2=|x|$ و مقادیری که در $|x-\alpha|<\beta$ صدق می‌کنند معادل یکدیگر باشند، $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) ۲

پاسخ: گزینه (۱) می‌دانیم $|a|+|b|\geq|a-b|$ و حالت تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که $ab\leq0$

$$|x^2-x|+x^2=|x| \Rightarrow |x^2-x|+|x^2|=|x| \Rightarrow$$

$$\underbrace{|x^2-x|}_{b}+\underbrace{|x^2|}_{a}=|\underbrace{(x^2)}_{a}-\underbrace{(x^2-x)}_{b}| \Rightarrow x^2(x^2-x)\leq 0 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}}$$

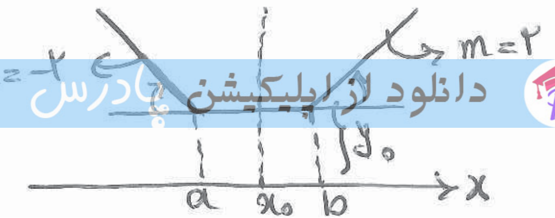
$$0\leq x\leq 1 \xrightarrow{a<x<b \Leftrightarrow |x-\frac{a+b}{2}|<\frac{b-a}{2}} |x-\frac{1+0}{2}|\leq\frac{1-0}{2}$$

$$\Rightarrow |x-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{1}{2}} \alpha+\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

درسنامه‌ی (۱۲) نمودارهای قدرمطلقی

$(a<b)\ y=|x-a|+|x-b|$

بررسی نمودار توابع به فرم $(a<b)\ y=|x-a|+|x-b|$: نمودارهای این توابع، نمودارهای قدرمطلقی محسوب می‌شوند و شکل کلی آن‌ها به صورت زیر است:



با توجه به نمودار داریم:

۱) ریشه های تک تک قدرمطلق ها یعنی $x=a$ و $x=b$ محل های شکستگی نمودار تابع است.

۲) خط $x_0=\frac{a+b}{2}$ محور تقارن منحنی است.

۳) $y_0=|a-b|$ کمترین مقدار y است، لذا برد تابع به صورت $R_y=[|a-b|,+\infty)$ می باشد.

۴) نمودار در بازه ی $[a,b]$ تبدیل به پاره خطی موازی با محور xها می شود، یعنی مقدار y در این بازه عدد ثابتی است که با جایگذاری هر عدد دلخواه x از بازه ی $[a,b]$، این مقدار ثابت $(|a-b|)$ به دست می آید.

تست: خط $x=-2$ محور تقارن نمودار تابع $y=|2x+1|+|2x+3k|$ است. در این صورت مقدار k کدام است؟

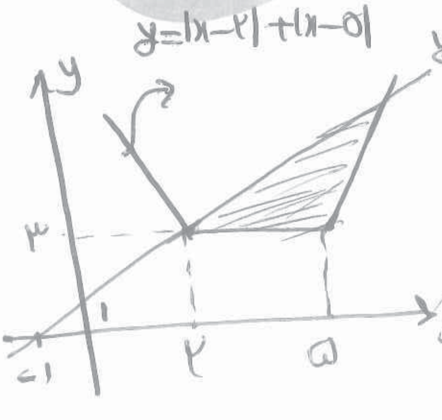
۱) $\frac{13}{3}$ ۲) ۶ ۳) $\frac{11}{3}$ ۴) $\frac{15}{3}$

پاسخ: گزینه ی ۳. ضابطه ی تابع را می توان به صورت $y=2(|x+\frac{1}{2}|+|x+\frac{3k}{2}|)$ نوشت که محور تقارن خط زیر است:

$$x=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{3k}{2}}{2}=\frac{-1-3k}{4}\xrightarrow{\text{طبق فرض}}\frac{-1-3k}{4}=-2\Rightarrow k=\frac{11}{3}$$

تست: مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $y=|2-x|+|x-5|$ و خط $y=x+1$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۱۲



پاسخ: گزینه ی ۲. خط $y=x+1$ و نمودار تابع $y=|x-2|+|x-5|$ را رسم می کنیم. دو منحنی در نقطه ی $(2,3)$ تلاقی دارند. مختصات نقطه ی تلاقی دوم از محل نمودار زیر است و کافی است دقت کنید که معادله ی نیم خط دوم $y=2x-7$ است، زیرا به ازای $x\geq5$ ضابطه ی تابع $y=2x-7$ ...

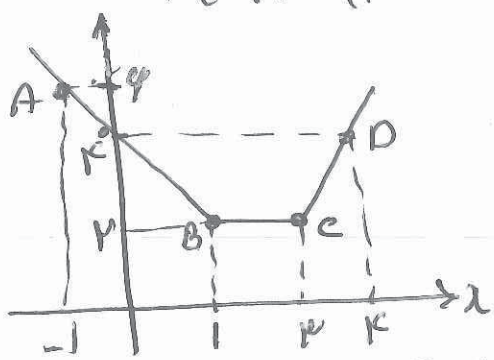
$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=2x-7 \end{cases} \Rightarrow x+1=2x-7 \Rightarrow x=8 \Rightarrow y=9$$

پس ارتفاع شکل هاشور خورده برابر $9-3=6$ است درنتیجه مساحت آن $\frac{6\times3}{2}=9$ واحد مربع.

تست: طول خط شکسته ی نمودار تابع $y=|x-1|+|x-3|$ در بازه ی $[-1,4]$ کدام است؟

۱) $3+2\sqrt{5}$ ۲) $2+3\sqrt{5}$ ۳) $3+2\sqrt{2}$ ۴) $2+3\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ی ۲) نمودار تابع به صورت شکل مقابل است.



$$|AB|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$$
$$|BC|=2 \quad , \quad |CD|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow |AB|+|BC|+|CD|=2+3\sqrt{5}$$

نکته: جواب های معادله ی $|x-\alpha|+|x-\beta|=k$ به صورت زیر است:

الف) $k<|\alpha-\beta| \Leftarrow$ معادله جواب ندارد.

ب) $k=|\alpha-\beta| \Leftarrow$ معادله بی شمار جواب دارد و مجموعه جواب معادله در این حالت $[a,b]$ است.

ج) $k>|\alpha-\beta| \Leftarrow$ معادله دو جواب دارد، اگر x_1 و x_2 جواب های معادله در این حالت باشند، آنگاه $x_{1,2}=\frac{\alpha+\beta\pm k}{2}$ و $x_1+x_2=\alpha+\beta$ و $|x_1-x_2|=k$ است.

تست: مجموعه جواب معادله ی $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}=1$ کدام است؟

۱) $[2,3]$ ۲) $\{2,3\}$ ۳) $\mathbb{R}-[2,3]$ ۴) $\emptyset$

پاسخ: گزینه ی ۱) با توجه به $x^2-4x+4=(x-2)^2$ و $x^2-6x+9=(x-3)^2$ معادله ی را به صورت $|x-2|+|x-3|=1$ می توانیم بنویسیم. با توجه به نمودار تقریبی شکل تابع $y=|x-2|+|x-3|$ در شکل روبرو، می بینیم که $2\le x\le 3$ جواب های معادله اند.