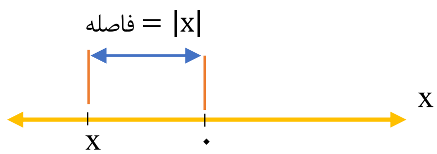
❈ قدر مطلق و ویژگیهای آن :

قدر مطلق: قدر مطلق هر عدد حقیقی، یعنی فاصله ی آن عدد حقیقی تا مبداء مختصات. قدر مطلق عدد حقیقی x را با $|x|$ نشان می دهیم.



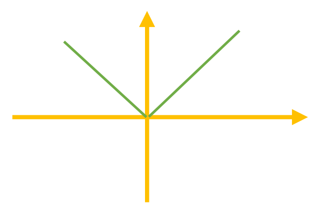
به عنوان مثال فاصله نقاط به طول های ۲ و ۲- روی محور اعداد حقیقی تا مبداء مختصات برابر ۲ واحد است

پس:
$$|-۲| = |۲| = ۲$$

به طور کلی فاصله ی ۲ عدد a و b روی محور اعداد حقیقی برابر $|a-b|$ است تعریف جبری قدر مطلق عدد حقیقی x به صورت زیر است:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

قرینه



یعنی اگر داخل قدرمطلق مثبت باشد خود آن عدد را بیرون می آوریم و اگر درون قدر مطلق منفی باشد قرینه ی آن عدد را بیرون می آوریم.

مثال: حاصل عبارات زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

الف) $|-۱۲ \div ۲ \times ۳|$

ب) $|۳-\sqrt{۲}|$

پ) $|۳-\sqcap|$

ت) $|۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}|$

ج) $|۱-\sqrt{۳}|+|\sqrt{۳}-۲|$

د) $|-(x-۱)^{۲}-۳|$

مثال۲: حاصل عبارات زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

الف) $\sqrt{a^{۴}+۲a^{۲}+۱}$

ب) $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}$

مثال۳: اگر $x<۰$ حاصل $\sqrt{x^{۲}+۱+۲\sqrt{x^{۲}}}$ کدام است.

الف) $-(x-۱)$ ب) $x+۱$ ج) $x-۱$ د) $-(x+۱)$

مثال۴: اگر $a>۰>b$ حاصل $|a-b|+|a+۱|-|۱-b|$ را به ساده ترین صورت بنویسید.

مثال۵: اگر $۳>x>۱$ باشد حاصل عبارت $|x-۱|+|x-۳|$ را بدست آورید.

❋ روش کلی رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق :

۱- ریشه های داخل قدر مطلق را بدست می آوریم و عبارات داخل قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم.

۲- با توجه به جدول تعیین علامت و علامت عبارت داخل قدرمطلق در هر بازه، قدر مطلق را برمی داریم و تابع را به صورت یک تابع چند ضابطه ای می نویسیم.

۳- نمودار هر ضابطه را با توجه به محدوده ی مورد نظر رسم می کنیم.

مثال۶: با استفاده از تعیین علامت، ضابطه ی هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

الف) $y = |x - ۲| + ۱$

ب) $y = x|x|$

پ) $y = |x - ۱| + |x + ۲|$

ت) $y = |x - ۱| - |x + ۲|$

ج) $y = |x^{۲} - ۱|$

د) $y = ۳ - |x + ۱|$

ه) $y = x + |x|$

ی) $f(x) = ۲x - |x - ۱| + \frac{|x|}{x}$

نکته:

برای رسم توابع به فرم $y = k|ax + b| + d$ به کمک نقطه یابی ابتدا ریشه ی داخل قدر مطلق را بدست آورده و ریشه ی بدست آمده را همراه با یک عدد در سمت چپ و یک عدد در سمت راست آن را به x می دهیم و y را بدست می آوریم .

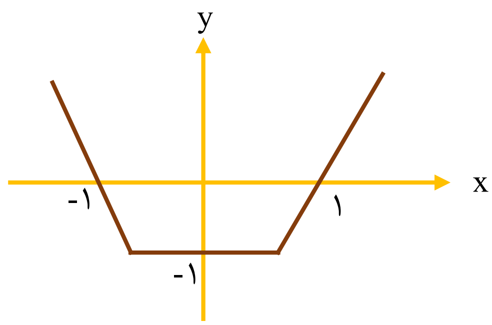
x	یک عدد قبل	ریشه	یک عدد بعد
y			

مثال۷: نمودار تابع $f(x) = -۲|x - ۳| + ۱$ را رسم کنید .

✵ رسم توابع به فرم $y = |f(x)|$:

ابتدا نمودار $y = f(x)$ یعنی عبارات داخل قدر مطلق را رسم می کنیم سپس قسمت های بالای محور x ها را نگه می داریم و قرینه ی قسمتهایی که زیر محورx ها هستند را نسبت به محورx ها بدست می آوریم .

مثال۸ : شکل زیر نمودار تابع با ضابطه ی $y = f(x)$ است نمودار $y = |f(x)|$ را رسم کنید.



مثال۹: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = |x^۲ - ۱|$

ب) $y = |\sin x| \qquad -\frac{\sqcap}{۲} \le x \le \frac{\sqcap}{۲}$

پ) $y = |\cos x| \quad ۰ \le x \le ۲\sqcap$

ت) $y = \left| |x| - ۲ \right|$

ج) $y = |x^۲ - ۲x|$

د) $y = \left| |x + ۱| - ۱ \right|$

❋ ویژگیهای قدر مطلق:

۱- قدر مطلق هر عدد حقیقی، مقداری نامنفی است $|x| \geq ۰$

۲-قدر مطلق هر عدد حقیقی و قدر مطلق قرینه ی آن عدد با هم برابرند $|x| = |-x|$

۳- $\sqrt{x^۲} = |x|$ در حالت کلی $\forall x \in \mathrm{IR}؛ \sqrt[۲n]{x^{۲n}} = |x|$

۴- برای هر دو عدد حقیقی x و y همواره داریم $(y \neq ۰)$ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ و $|x.y| = |x||y|$

تمرین: ویژگی ۴ را ثابت کنید.

۵- برای هر عدد حیقیقی x $|x^۲| = |x|^۲ = x^۲$

۶- برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

$|x| = |y| \Longrightarrow x = \pm y \qquad |x| = a \overset{a>0}{\Longrightarrow} x = \pm a$

۷- برای هر عدد حقیقی x، اگر $a > 0$ باشد آنگاه

الف) $|x| \leq a \to -a \leq x \leq a$

ب) $|x| \geq a \to \begin{cases} x \geq a \\ \text{یا} \\ x \leq -a \end{cases}$

تمرین: ویژگی ۷ را ثابت کنید.

۸- برای هر عدد حقیقی x داریم:

$-|x| \leq x \leq |x|$

تمرین: ویژگی ۸ را ثابت کنید.

مثال۱۰: برای هر دو عدد حقیقی b و a ثابت کنید(نامساوی مثلث)

$|a + b| \leq |a| + |b|$

مثال ۱۱: برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید.

الف) $|x-y| \leq |x|+|y|$　　　ب) $|x|-|y| \leq |x-y|$

❋ حل معادلات شامل قدرمطلق:

الف) معادلاتی که به وسیله ی ویژگی های قدر مطلق حل می شوند:

$|U| = a \Rightarrow U = \pm a$　　$|f(x)| = |g(x)| \Rightarrow f(x) = \pm g(x)$　　$|U|^۲ = U^۲$

مثال ۱۲: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $|۲x+۱|-۲=۵$

۲) $\big||۳x-۱|-۳\big|=۸$

۳) $|۳x-۲|=|x-۴|$

۴) $|x-۱|=۴-۳x$

۵) $\big||x^۲-۱|-۲\big|=۱$

$۶)۲x - |x - ۵| = ۱$

$۷)|x^۲ - ۳x| + x^۲ - ۳x = ۰$

ب) معادلاتی که با ویژگی های قدر مطلق حل نمی شوند را با ریشه یابی عبارات درون قدر مطلق و تعیین علامت آنها، حل می کنیم.

مثال۱۳: معادلات زیر را حل کنید.

$۱)x|x| = -۴$

$۲)|۲x - ۱| + |x| = ۷$

$۳)|x - ۲| - |x + ۱| = ۳$

$۴)|۳x - ۱| - |x| = x + ۲$

مثال۱۴: معادلات زیر را حل کنید.

$۱) \sqrt{x-۱} - |x-۱| = ۰$

$۲) \dfrac{۲-x}{|x-۳|} = ۱$

$۳) \sqrt{x^{۲}-۲x+۱} = ۲x+۱$

مثال۱۵: بر روی محور طول ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه به طول های ۱- و ۳ روی محور x ها برابر ۶ باشد.

❋ حل معادلات به روش هندسی:

برای حل معادله $f(x) = g(x)$ کافی است نمودارهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را در یک دستگاه رسم کنید طول نقاط محل تلاقی این دو نمودار جواب های معادله $f(x) = g(x)$ خواهند بود.

در این روش حل معادله، تعداد جواب ها و مقدار تقریبی آنها (و گاهی دقیق) قابل تشخیص است.

مثال۱۶: معادلات زیر را به رو ش هندسی حل کنید.

۱)$\sqrt{x} = -x + ۱$

۲)$|x| = x^{۲} - ۳x$

۳)$|x - ۱| = x^{۲} - x - ۱$

۴)$x - ۲\,sin\,x = ۰$

۵)$|x| = \sqrt{۲ - x}$

۶)$x^{۲} - \sqrt{x + ۲} = ۲x - ۱$

۷)$|x - ۱| + |x + ۱| = ۲$

مثال۱۷: معادله $|x^۲ - ۱| = |۲x - ۱|$ را به دو روش جبری و هندسی حل کنید.

مثال۱۸: نمودار تابع $y = x - \frac{x}{|x|}$ را رسم کنید سپس به ازای $y = ۳$ معادله را به روش جبری و هندسی حل کنید.

مثال۱۹: نمودار $f(x) = \left||x| - ۲\right|$ را رسم کنید سپس معادله $f(x) = ۱$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.

مثال۲۰: نمودار تابع $f(x) = |x^۲ - ۲x|$ را رسم کنید سپس به دو روش جبری و هندسی معادله $|x^۲ - ۲x| = ۲$ را حل کنید.

❋ حل نامعادلات شامل قدر مطلق به کمک ویژگی های قدر مطلق:

$$|U| \leq a \rightarrow -a \leq U \leq a$$

$$|U| \geq a \rightarrow \begin{cases} U \geq a \\ \text{یا} \\ U \leq a \end{cases}$$

مثال(۲): نامعادلات زیر را حل کنید.

$۱)|۲ - ۳x| < ۵$

$۲)|۲x + ۱| > ۳$

$۳)\dfrac{۱}{|۳x - ۱|} > ۲$

$۴)|۲x - ۳| < x$

$۵)|x + ۱| < \sqrt{۳x + ۱}$

$۶)|۲x + ۱| < |x + ۱|$

تمرینات تکمیلی

۱- معادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

الف) $|\sin x| = |\cos x|$

ب) $\sqrt{(x-۲)^۲} = ۲ - x$

پ) $\sqrt{x-۱} - \sin x = ۰$

ت) $\sqrt{x} + ۲x = x^۲ - ۲$

۲- جوابهای معادله $\frac{|۲x|}{|x+۱|} = ۳$ را بدست آورید.

۳- اگر $۲x \geq x^۲$ باشد حاصل $A = \sqrt{x^۲} + \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}$ کدام است.

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) $۲ - ۲x$ ۴) $۲x - ۲$

۴- اگر فاصله ی عدد حقیقی x روی محور اعداد حقیقی تا ۱- ، کم تر از ۲ باشد حاصل $A = |x+۳| + |x-۱|$ کدام است.

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۵

۵- مجموع جوابهای معادله $|x^۲ + x| = |x^۲ + ۳x - ۲|$ کدام است.

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۶- به ازای کدام مقدار k معادله $||x+۲| - ۲| = k^۲ - ۷$ دارای ۳ جواب است.

۱) ± ۱ ۲) ± ۳ ۳) ± ۵ ۴) ± ۹

۷- مساحت ناحیه محدودیه نمودار های دو تابع $y = x + |x|$ و $y = ۲ - |x|$ کدام است.

۱) ۲ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) ۳