کتاب کار و آموزش

تالیف،تدوین و گردآوری : فرامرز سپهری

سال تحصیلی ۹۷-۹۶

فهرست

بارم بندی حسابان۱ (پایه‌ی یازدهم رشته‌ی ریاضی فیزیک)

فصل	عناوین	پایان نوبت اوّل تا آخر صفحه۷۹	پایان نوبت دوّم تا آخر کتاب	شهریور و دی تا آخر کتاب
اوّل	کل فصل	۱۰	۴	۴
دوّم	کل فصل	۸	۳	۴
سوّم	درس ۱	۲	۳	۳
	درس۲ و ۳	–		
چهارم	کل فصل	–	۴	۴
پنجم	کل فصل	–	۶	۵
	جمع	۲۰	۲۰	۲۰

فصل ۱
جبر و معادله

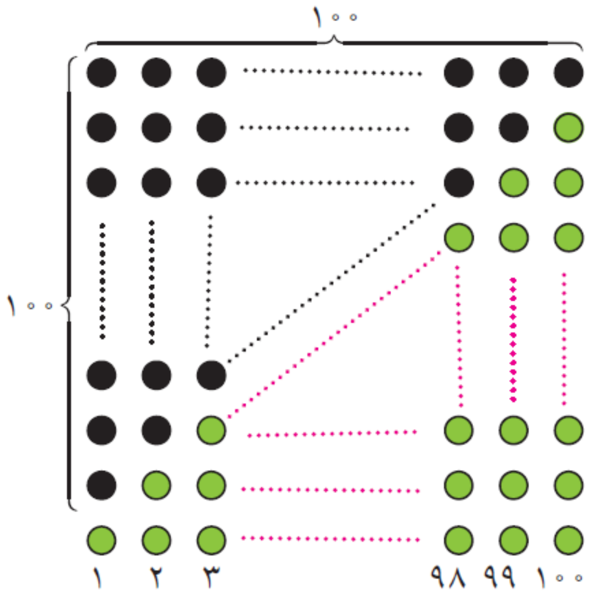
۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۲ معادلات درجه دوم
۳ معادلات گویا و گنگ
۴ قدر مطلق و ویژگی‌های آن
۵ آشنایی با هندسه تحلیلی

درس ۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

در سال قبل با مفهوم دنباله و دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدید و می‌دانید که مجموعهٔ اعداد طبیعی ... , ۳ , ۲ , ۱ یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت یک می‌باشد. چگونگی به‌دست آوردن مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n می‌تواند الگوی مناسبی باشد تا به یک دستور برای محاسبهٔ مجموع جملات هر دنبالهٔ حسابی برسیم.

گاوس یکی از دانشمندان ریاضی قرن هیجدهم است که داستان جالبی در زمان مدرسه خود دارد. یک روز معلم برای سرگرم کردن دانش‌آموزان از آن‌ها می‌خواهد اعداد ۱ تا ۱۰۰ را با هم جمع بزنند و نتیجه را به‌دست آورند. در حالی که دانش‌آموزان مشغول این کار کسل کننده بودند، گاوس نتیجه را به‌سرعت به‌دست می‌آورد و به‌معلم ارائه می‌کند.

آیا شما هم می‌توانید این عمل جمع را به‌سرعت انجام دهید؟ شکل مقابل می‌تواند ایده‌ای برای این کار به شما بدهد.



به روش گاوس نشان دهید:

$$۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

فرمول مجموع جملات دنباله حسابی

دنبالهٔ حسابی زیر را، که در آن a جمله اول، d قدر نسبت و n تعداد جملات آن است، در نظر بگیرید.

$$a\,,\,a+d\,,\,a+۲d\,,\;\ldots\;,\;a+(n-۲)d\;,\;a+(n-۱)d$$

مجموع جملات این دنباله را S_n می‌نامیم و می‌نویسیم :

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]$$

اثبات :

✤ **مثال :** مجموع صد جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی ......, ۱۵, ۱۱, ۷, ۳ را به‌دست آورید.

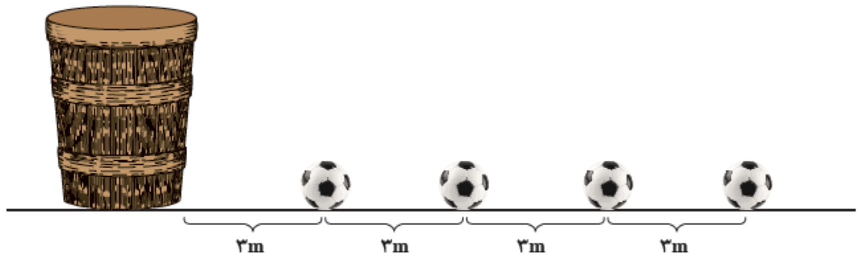
✤ **مثال :** روی محیط دایره‌ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به‌دست آورید.

کار در کلاس

۱ نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر a_1 و a_n به‌ترتیب جملات اول و آخر باشند آنگاه : $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

۲ مجموع همهٔ عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به‌دست آورید.

مثال : در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هریک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



نشان دهید $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) = n^۲$.

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی هفتم برابر ۳ و جمله‌ی دهم برابر ۹ است. مجموع ۲۰ جمله‌ی اول را بیابید.

ایستگاه آموزشی

نکته : مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی به صورت $S_n = \alpha n^۲ + \beta n$ است. برای یافتن جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی از طریق S_n، کافی است $S_۱$ و $S_۲$ را به دست آوریم. داریم:

$$\begin{cases} S_۱ = a_۱ & (*) \\ S_۲ = a_۱ + a_۲ \end{cases} \Rightarrow S_۲ - S_۱ = a_۲ \xrightarrow{(*)} d = a_۲ - a_۱ = S_۲ - ۲S_۱ \quad (**)$$

نکته : روش دیگر برای یافتن جمله‌ی عمومی از روی S_n، استفاده از رابطه‌ی $a_n = S_n - S_{n-۱}$ است.

تمرین :

اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی و جمله‌ی دوم آن ۶ باشد و داشته باشیم $S_n = ۲(۱+S_{n-۱})$ جمله‌ی اول و مجموع ۲۰ جمله‌ی اول دنباله را به‌دست آورید.

تمرین : اگر $S_n = ۲n^۲ - ۴n$ باشد، جمله‌ی عمومی دنباله را تعیین کنید.

ویژگی‌های مجموع جمله‌های دنباله‌های حسابی

① مجموع n عدد طبیعی متوالی که از عدد ۱ شروع شده باشد برابر است با:

$$۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

② مجموع n عدد طبیعی فرد متوالی که از عدد ۱ شروع شده برابر است با:

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$$

③ مجموع n عدد طبیعی زوج متوالی که از عدد ۲ شروع شده برابر است با:

$$۲+۴+۶+\cdots+۲n=n(n+۱)$$

④ اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول تصاعد حسابی و $S_{n-۱}$ مجموع $n-۱$ جمله‌ی اول همان تصاعد باشد، جمله‌ی n اُم یا همان a_n برابر است با: $a_n=S_n-S_{n-۱}$

۱ – در دنباله حسابی ...‚ ۲‚۶‚۱۰ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود.

۲ – در یک دنباله حسابی مجموع یازده جمله اول با مجموع پانزده جمله اول برابر است. مجموع بیست و شش جمله ی اول را بدست آورید.

۳ – مجموع اعداد دو رقمی بخشپذیر بر ٦ را بیابید.

٤ – حداقل چند جمله از دنباله $-۷, -۱۲, -۱۷, ...$ را باید جمع کنیم تا حاصل از ۱۰۰ بیشتر شود.

۵ – مجموع n عدد زوج متوالی شروع از ۲ را بیابید.

٦ – نشان دهید : $۲ + ٤ + ٦ + ... + ۲n = n(n+۱)$.

۷ - مجموع چند جمله دنباله حسابی $۱۲,۱۰,...$ برابر صفر است.

۸ - مجموع چند جمله از دنباله حسابی $۲a-۱, ۷a-۹, a+۵, ...$ برابر ۱۶۸ است.

۱۰ - نشان دهید : $n \in N \quad , \quad ۴+۷+۱۰+...+(۳n+۱)=\frac{n(۳n+۵)}{۲}$.

۱۱ - حاصل $۱۱+۱۳+۱۵+...+۲۹$ را بیابید.

۱۲ - در یک دنباله حسابی مجموع n جمله اول، $S_n = n(n-۳)$ می‌باشد. جمله‌ی عمومی این دنباله را بیابید.

۱۳ - حاصل $۲^۲-۱^۲+۴^۲-۳^۲+۶^۲-۵^۲+\ldots+۱۰۰^۲-۹۹^۲$ را بدست آورید.

● مجموع چند جمله از دنباله‌ی زیر ۸۷ می‌شود؟

۲ و ۷ و ۱۲ و ...

مجموع جمله‌های دنباله‌ی هندسی

مجموع n جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی را با S_n نمایش می‌دهیم.

$$S_n=a_۱+a_۲+\cdots+a_n=a_۱+a_۱q+\cdots+a_۱q^{n-۱}$$

اگر a جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی و q قدرنسبت همان دنباله باشد، مجموع n جمله‌ی اول این دنباله‌ی هندسی برابر است با: $S=\dfrac{a(۱-q^n)}{۱-q}=\dfrac{a(q^n-۱)}{q-۱}$

نشان دهید در حالت $q\neq ۱$ مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با $a\dfrac{۱-q^n}{۱-q}$

اثبات:

کار در کلاس

در داستان مخترع شطرنج اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دوبرابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم :

الف) این جایزه چند گرم می‌شود[1]؟

ب) نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تُن خواهد شد.

مجموع چند جمله از دنباله ی $6,-12,24,\ldots$ برابر ۱۰۲۶ است.

در دنباله هندسی $1,3,9,\ldots$ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم (با شروع از جمله اول) تا مجموع آن از ۱۰۰۰ بیشتر شود.

مجموع هشت جمله ی اول یک دنباله هندسی ۱۷ برابر مجموع چهار جمله اول آن است قدرنسبت دنباله رابیابید.

مثال: برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌هایی محافظتی ساخته شده‌است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش بیابد؟

نکته آموزشی

در یک دنباله هندسی نامتناهی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت q که در آن $|q|<1$ است، مجموع **تمام** جمله‌های دنباله از رابطه‌ی $S_\infty=\frac{a}{1-q}$ محاسبه می‌شود.

توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی رها شود پس از زمین خوردن به اندازه ی یک چهارم ارتفاع اولیه خود بالا می رود. فرض کنید :

الف) این توپ را از زمین به هوا پرتاب کنیم تا به ارتفاع ۵ متری برسد.می خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن،این توپ چقدر مسافت طی می کند؟

ب) این توپ را از ارتفاع ۵ متری رها کنیم تا به به زمین برسد.می خواهیم بدانیم پس از شروع تا زمان ایستادن،این توپ چقدر مسافت طی می کند؟

حد مجموع $S=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}+\frac{1}{4}-\frac{1}{27}-\dots$ را حساب کنید.

معرفی چند اتحاد

نکته :

اگر n عددی طبیعی باشد، داریم: $(x^n-1)=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$

اگر n عددی فرد باشد، داریم: $(x^n+1)=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots+1)$

حالت کلی تر:

اگر n عددی طبیعی باشد، داریم: $(x^n-a^n)=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1})$

اگر n عددی فرد باشد، داریم: $(x^n+a^n)=(x+a)(x^{n-1}-x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1})$

مثال :

برای یک عدد حقیقی a و عدد طبیعی n عبارت $S=1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{n-1}$ را در نظر بگیرید.

۱ــ عبارت $aS-S$ را حساب کنید و اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+\cdots+a^2+a+1)$$

۲ــ اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل a به $-a$ نتیجه بگیرید :

$$a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\cdots-a+1)$$

به کمک اتحاد $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1)$ اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

عبارت زیر را ساده کنید.

$$A = \frac{x^{10} - 1}{(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}$$

$$B = \frac{x^4 - 1}{(x^3 + x^2 + x + 1)}$$

$$C = \frac{(1 - t + t^2 - t^3 + t^4)(t+1)}{(x^{10} - 1)}$$

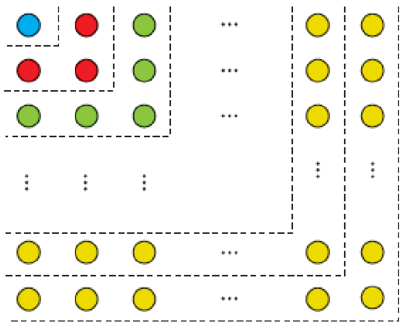
تمرین

۱ در دنباله حسابی ... , ۱۱ , ۸ , ۵ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

۲ الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.



۳ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می‌شود؟

۴ در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

۵ جمله عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n = ۲^{n-۱}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

۷ برای عدد حقیقی a $(a \neq ۱)$ و عدد طبیعی n ؛

الف) حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$۱ + a + a^۲ + \cdots + a^{n-۱}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که :

$$a^n - ۱ = (a - ۱)(a^{n-۱} + \cdots + a^۲ + a + ۱)$$

درس ۲ معادلات درجه دوم

در سال‌های قبل با معادله‌های درجه اول و درجه دوم و حل آنها آشنا شده‌اید. صورت کلی معادلات درجه دوم به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ است $(a\neq 0)$ که جواب‌های آن، در صورت وجود، از رابطهٔ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ به‌دست می‌آید. اینک، در این بخش، با برخی از انواع معادلات درجه دوم، روابط بین ریشه‌ها و ضرایب این معادلات و دیگر نکات تکمیلی آشنا خواهید شد.

کار در کلاس

۱ معادله $3x^2=5x-2$ را حل کنید.

۲ اگر $x=-1$ یک ریشهٔ معادله $4x^2-mx-7=0$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

روش تغییر متغیر برای حل معادله

در کلاس دهم روش‌های مختلفی را برای حل معادلهٔ درجه ۲ آموختیم. یک جنبهٔ اهمیت این معادلات آن است که معادلات دیگری نیز وجود دارند که قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دوم‌اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که درس بعدی به آنها اختصاص یافته است. در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل معادله آشنا می‌شویم که یک شیوهٔ کارآمد و نسبتاً متداول برای حل انواع معادله است.

معادلات دو مجذوری

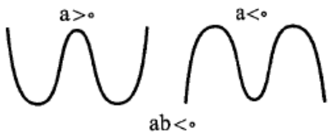
معادلاتی به فرم $ax^4+bx^2+c=0$ که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند را معادله‌ی دو مجذوری می‌گوییم.

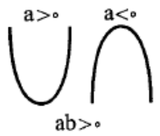
روش حل: برای حل معادله‌ی دو مجذوری از تغییر متغیر $t=x^2$ استفاده می‌کنیم که در این صورت خواهیم داشت.

$$ax^4+bx^2+c=0\Rightarrow a(x^2)^2+bx^2+c=0\xrightarrow{x^2=t}at^2+bt+c=0$$

پس معادله‌ی دو مجذوری، تبدیل به معادله‌ی درجه‌ی دوم فوق می‌شود که با حل این معادله به ریشه‌های معادله‌ی دو مجذوری می‌رسیم.

◀ **نمودار تابع دو مجذوری:** $y = ax^۴ + bx^۲ + c$





◀ اگر بخواهیم معادله‌ی دو مجذوری دارای دو ریشه باشد باید $\frac{c}{a} < ۰$ باشد.

◀ اگر بخواهیم معادله‌ی دو مجذوری دارای چهار ریشه باشد، باید معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه مثبت باشد یعنی:

❶ $\frac{c}{a} > ۰$ ❷ $-\frac{b}{a} > ۰$ ❸ $\Delta > ۰$

مثال : معادلهٔ مقابل را حل کنید. $(۳x^۲-۱)^۲ - ۱۳(۳x^۲-۱) + ۲۲ = ۰$

۱ معادله‌های مقابل را حل کنید.

الف) $۲x^۴ - ۷x^۲ - ۴ = ۰$

ب) $(x + \frac{۱}{x})^۲ + ۲(x + \frac{۱}{x}) = ۸$

۲ الف) یک معادلهٔ درجهٔ چهار بنویسید که ریشه نداشته باشد.

ب) یک معادلهٔ درجهٔ چهار بنویسید که تنها یک ریشه داشته باشد.

پ) یک معادلهٔ درجهٔ چهار بنویسید که تنها دو ریشهٔ متمایز داشته باشد.

ت) یک معادلهٔ درجهٔ چهار بنویسید که دقیقاً سه ریشهٔ متمایز داشته باشد.

ث) یک معادلهٔ درجهٔ چهار بنویسید که چهار ریشهٔ متمایز داشته باشد.

ج) آیا معادلهٔ درجه چهار می‌تواند بیش از چهار ریشه داشته باشد؟

معادلهٔ مقابل را حل کنید. $x^۴-۱۰x^۲+۹=۰$

معادله‌های مقابل را حل کنید.

الف) $۲x^۴-۷x^۲-۴=۰$　　ب) $x^۴+۳x^۲+۲=۰$

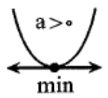
مثال : معادله $(x^۲-۱)^۴+(x^۲-۱)^۲-۲=۰$ را حل کنید.

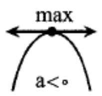
مثال : معادله $(x^۳-۲)^۲-۵(x^۳-۲)+۴=۰$ را حل کنید.

تابع درجه دو ، معادله درجه دو و روابط بین ریشه های آن

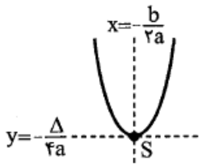
فرم کلی تابع درجه‌ی دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد که دارای ویژگی‌های زیر است.

- نمودار تابع درجه‌ی دوم یک سهمی قائم است.
- اگر $a > 0$ باشد سهمی رو به بالا و دارای می‌نیمم است و اگر $a < 0$ باشد سهمی رو به پایین و دارای ماکزیمم است.





- مختصات نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم همان رأس سهمی می‌باشد که به صورت زیر است:



$$S = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$: رأس سهمی و معادله‌ی محور تقارن : $x = -\frac{b}{2a}$

- مختصات رأس سهمی در خود منحنی صدق می‌کند.
- اگر خط افقی $y = k$ بر نمودار تابع درجه‌ی دوم مماس باشد می‌توان نتیجه گرفت که عرض رأس سهمی برابر با k می‌باشد.
- فرم استاندارد تابع درجه‌ی دوم به صورت $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ می‌باشد که نقطه‌ی $S(x_0, y_0)$ رأس سهمی می‌باشد.

مختصات رأس سهمی به صورت $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ است که $\Delta = b^2 - 4ac$.

فرم کلی معادله‌ی درجه‌ی دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ می‌باشد که حالت‌های خاص آن به صورت زیر می‌باشند.

- اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ضرایب صفر باشد آن‌گاه یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

- اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$، $b = a + c$ باشد آن‌گاه یکی از ریشه‌ها (-1) و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

- شرط این‌که معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه باشد آن است که: $\frac{c}{a} < 0$
- یعنی در این حالت نمودار تابع درجه‌ی دوم از هر چهار ناحیه عبور می‌کند.
- شرط این‌که معادله‌ی درجه دوم دارای دو ریشه‌ی قرینه و حقیقی باشد آن است که: $b = 0 , \frac{c}{a} < 0$

Δ
- $\Delta > 0 \Rightarrow$ معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی ساده‌ی متمایز است.
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ معادله دارای یک ریشه‌ی حقیقی مضاعف $x = -\frac{b}{2a}$ است.
- $\Delta < 0 \Rightarrow$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

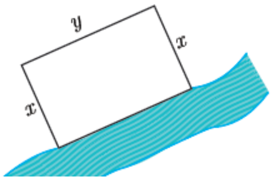
مثال :

۱ تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم دارند و کدام یک مینیمم. سپس ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

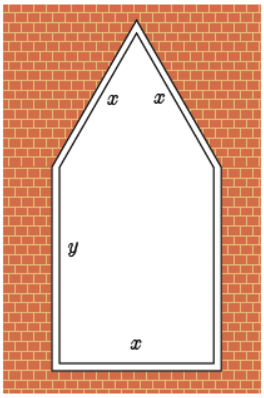
الف) $g(x) = -(x+1)^2+3$

ب) $h(x) = x^2-4x+9$

۲ یک ماهیگیر می‌خواهد در کنار رودخانه محوطه‌ای مستطیل شکل را فنس‌کشی کند. او تنها هزینهٔ ۱۰۰ متر فنس‌کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.



۳ پنجره‌ای به شکل مستطیل با یک مثلث متساوی‌الاضلاع دربالای آن می‌باشد. اگر محیط پنجره $4m$ باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.



تابع درجه‌ی دوم f، با ضابطه‌ی $f(x)=۲x^۲-۴x+۱$ مفروض است. مختصات رأس سهمی و مقدار مینیمم تابع f را بیابید.

تابع f با ضابطه ی $f(x)=x^۲-۴x-۴$ مفروض است . مقدار مینیمم تابع f را تعیین کنید.

بیش ترین مقدار $f(x)=-x^۲+۵x-۷$ را به دست آورید.

کمترین ترین مقدار $f(x)=۲x^۲+۸x-۹$ را به دست آورید.

مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که نقطه‌ی $S(-۱,-۴)$ رأس سهمی $y=ax^۲+۲x+b$ باشد.

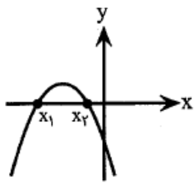
درصورتی‌که بخواهیم بدانیم منحنی تابع درجه‌ی دوم از چه ناحیه‌ای عبور نمی‌کند. کافی است روی چهار پارامتر a، b، c و Δ بحث نماییم.

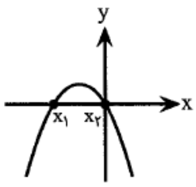
$y=ax^2+bx+c=0$

مجموع ریشه‌ها $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $x_1.x_2=\frac{c}{a}$

شرط آن‌که نمودار تابع درجه‌ی دوم فقط از ناحیه‌ی اول عبور نکند: نمودار این تابع به دو حالت زیر می‌تواند باشد.

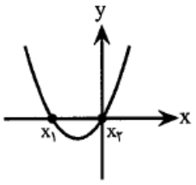


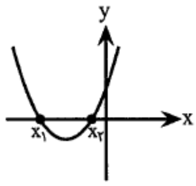


مجموع ریشه‌ها $=x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0 \xrightarrow{a<0} b<0$

ضرب ریشه‌ها : $x_1.x_2=\frac{c}{a}\ge 0 \xrightarrow{a<0} c\le 0$

شرط آن‌که نمودار تابع درجه‌ی دوم فقط از ناحیه‌ی چهارم عبور نکند: نمودار این تابع به دو حالت زیر می‌تواند باشد.





مجموع ریشه‌ها $=x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0 \xrightarrow{a>0} b>0$

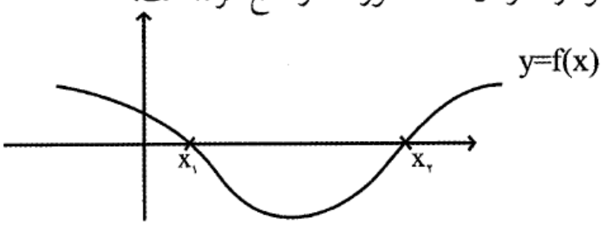
ضرب ریشه‌ها $=x_1.x_2=\frac{c}{a}\ge 0 \xrightarrow{a>0} c\ge 0$

اگر $\frac{c}{a}<0$ باشد، نمودار تابع از هر چهار ناحیه عبور می‌کند.

حدود k چه‌قدر باشد تا نمودار تابع $y=kx^2+(k-3)x+1$ فقط از ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات نگذرد؟

صفر های یک تابع

برای یک تابع با ضابطه ی f(x) جواب های معادله ی f(x)=0 را (در صورت وجود جواب) صفرهای تابع f یا ریشه های معادله ی فوق می نامیم، در واقع صفرهای تابع f مقادیری از دامنه ی f هستند که به ازای آن ها، f(x) صفر می شود.
اگر نمودار y=f(x) را رسم کنیم، ریشه ها طول نقاطی هستند که نمودار f در آن نقاط محور xها را قطع کرده است.
(x_1,x_2 صفرهای تابع f هستند)



۱ برای تشخیص علامت ریشه‌های احتمالی تابع درجه ۲ می‌توانیم از علامت S و P کمک بگیریم. در توابع زیر، تعداد و علامت ریشه‌های توابع داده شده را (در صورت وجود) مانند نمونه مشخص کنید.

الف) $y=x^۲+۶x+۵$

$\Delta=۱۶>۰ \Rightarrow$ سهمی دو ریشه متمایز دارد

$p=\frac{c}{a}=۵>۰ \Rightarrow$ ریشه‌ها هم‌علامت‌اند

$S=-\frac{b}{a}=-۶<۰ \Rightarrow$ هر دو ریشه منفی‌اند

ب) $y=x^۲+۴x-۵$

پ) $y=۳x^۲-۷x+۱$

ت) $y=-۲x^۲+۵x-۴$

۲ــ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^۳-۴x$

ب) $g(x)=(x+\frac{۱}{x})^۲+(x+\frac{۱}{x})$

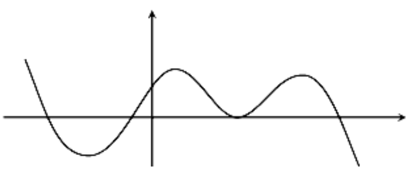
مثال : اگر $x=۲$ یکی از صفرهای تابع $p(x)=x^۳-x^۲-۴x+۴$ باشد سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

کاردرکلاس

مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^3+kx^2-x-2$ برابر (-2) باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به‌دست آورید.

مثال : صفرهای تابع f با ضابطه $f(x)=(x^2-1)^2+(x^2-1)-2$ را به‌دست آورید.

شکل زیر نمودار معادله $y=f(x)$ است ، علامت و نوع معادله $f(x)=0$ را تعیین کنید.



حدود m برای آن‌که نمودار تابع $y=(1-m)x^2+x+m-2$ از چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات بگذرد،

بهینه‌سازی: به عمل ماکزیمم یا می‌نیمم نمودن یک کمیت، در اصطلاح بهینه‌سازی می‌گویند. که عبارت‌های درجه‌ی دوم را با استفاده از مربع کامل می‌توانیم بهینه‌سازی نماییم.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} \begin{cases} \xrightarrow{a>0} y \geq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow \min(y) = -\frac{\Delta}{4a} \\ \xrightarrow{a<0} y \leq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow \max(y) = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

دو نکته‌ی خیلی مهم در مسائل بهینه‌سازی

- اگر $x + y = k$ باشد آن‌گاه حاصل‌ضرب آن‌ها یعنی xy هنگامی ماکزیمم می‌شود که $x = y = \frac{k}{2}$ شود. (k عددی ثابت است)
- اگر $xy = k$ باشد آن‌گاه مجموع آن‌ها یعنی $x + y$ هنگامی می‌نیمم می‌شود که $x = y = \sqrt{k}$ شود. $(k > 0)$

- **بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟**

مجموع دو عدد مثبت برابر ۱۰ می‌باشد. آن دو عدد را چنان بیابید که حاصل‌ضربشان ماکزیمم شود.

کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{4}{x}$ را برای xهای مثبت بیابید.

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} \Rightarrow \min(y) = 2\sqrt{ab}$$

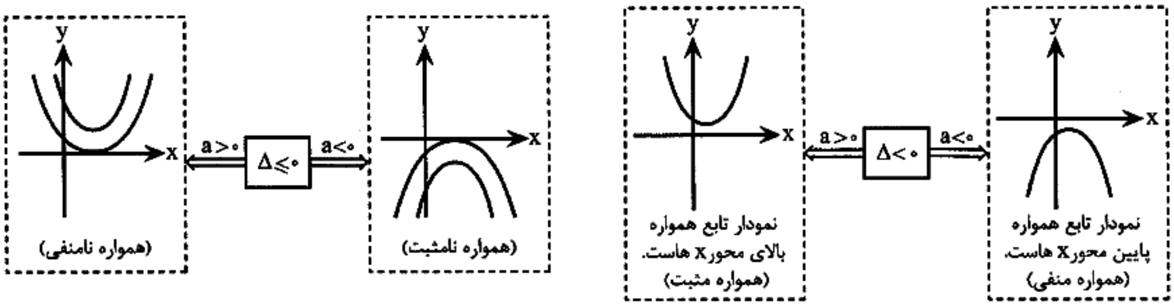
$$f(x) = x + \frac{4}{x} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \qquad \min(y) = 2\sqrt{1 \times 4} = 4$$

مثال : استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که

الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

- سهمی محور xها را قطع نکند به آن همواره مثبت یا همواره منفی گوییم.
- سهمی محور xها را قطع نکند یا بر محور xها مماس باشد در این صورت به آن همواره نامثبت یا همواره نامنفی گوییم.



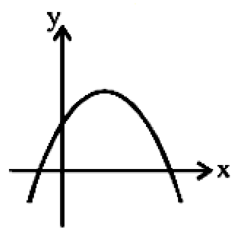
به ازای چه مقادیری از m، عبارت $mx^2-2(m-1)x+m-1$ همواره منفی است؟

به ازای چه مقادیری از m، عبارت $(m+2)x^2+2x+4\ge 3$ برقرار می‌باشد؟

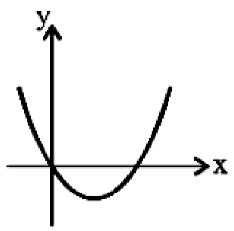
علامت ضرایب در تابع درجه دوم :

هر یک از نمودارهای زیر مربوط به سهمی $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ است. علامت **a** و **b** و **c** را تعیین کنید.

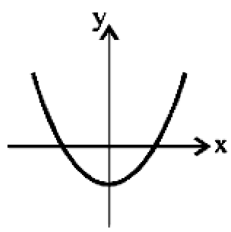
الف)



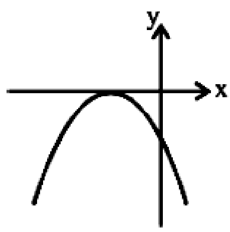
ب)



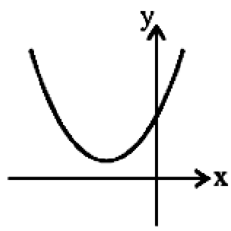
پ)



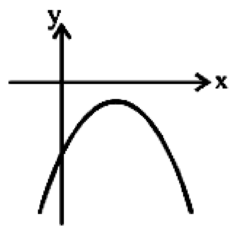
ت)



ث)

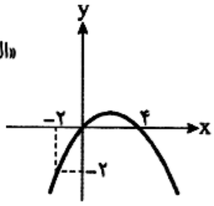


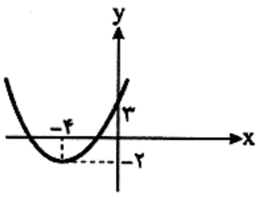
ج)



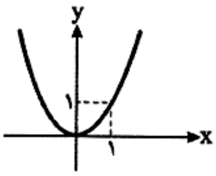
مثال : در تابع درجه دوم $P(x)=ax^{2}+bx+c$ در هر یک از حالت‌های زیر علامت ضرایب a، b و c را تعیین کنید.

«الف»





«ب»



«پ»

نوشتن معادله درجه ۲ با داشتن S و P

اگر s مجموع ریشه‌ها و p حاصل‌ضرب ریشه‌ها باشد در این صورت معادله‌ی درجه‌ی دوم به صورت زیر می‌باشد.

$$x^2 - Sx + p = 0$$

◀ اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم با ضرایب گویا، یکی از ریشه‌ها برابر با $a+\sqrt{b}$ باشد ریشه‌ی دیگر برابر با $a-\sqrt{b}$ است. و برعکس

کار در کلاس

۱ دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها $-۱/۵$ و حاصل ضربشان -۷ باشد.

۲ آیا مستطیلی با محیط $۱۱\,cm$ و مساحت $۶cm^۲$ وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را مشخص کنید.

۳ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ باشند.

معادله درجه دومی را بنویسید که ریشه های اعداد زیر باشند.

الف) $۳ \pm \sqrt{۲}$

ب) $\frac{۱}{۳}, \frac{۴}{۳}$

ج) $۵ \pm ۲\sqrt{۳}$

روابط بین ریشه های تابع درجه دوم (متقارن)

اگر β و α ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند آن‌گاه داریم:

۱ $\alpha+\beta=S=-\frac{b}{a}$

۲ $\alpha.\beta=P=\frac{c}{a}$

۳ $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۴ $\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P$

۵ $\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS$

۶ $\alpha^۴+\beta^۴=(S^۲-۲P)^۲-۲P^۲$

مثال : اگر $x=-1$ یک ریشهٔ معادلهٔ $4x^2-mx-7=0$ باشد ریشه دیگر و مقدار m را با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها به‌دست آورید.

مثال : محیط یک مستطیل ۳۳ سانتی‌متر و مساحت آن ۶۵ سانتی‌مترمربع است. ابعاد مستطیل را به‌دست آورید.

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-6x+1=0$ باشند، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید. $(\alpha>\beta)$

الف) $A=\alpha^4\beta+\alpha\beta^4$

ب) $B=\beta\sqrt{\alpha}+\alpha\sqrt{\beta}$

ج) $C=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$

د) $D=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

هـ) $E=\frac{1}{\alpha^2+1}+\frac{1}{\beta^2+1}$

و) $F=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$

ز) $G=3\alpha^2+5\beta^2$

نکته : هرگاه در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ یکی از ریشه‌ها k برابر ریشه‌ی دیگر باشد، بین ضرایب رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$$

نکته : هرگاه در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$، یکی از ریشه‌ها k واحد از ریشه‌ی دیگر بیشتر یا کم‌تر باشد، داریم:

$$\Delta=k^2a^2$$

روابط بین ریشه های تابع درجه دوم (نا متقارن)

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-2x-4=0$، اگر ریشه‌ها α و β باشند، حاصل $(\alpha^2-4)^2+4\beta^2$ چقدر است؟

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-3x-10=0$ اگر ریشه‌ها α و β باشند، حاصل $\frac{(\alpha^2-10)^3+27\beta^3}{3(\alpha\beta+1)}$ چقدر است؟

اگر β,α ریشه های معادله $x^2-(m-1)x+m=0$ باشد و داشته باشیم $(\alpha+1)(\beta+1)=14$ مقدار m را تعیین کنید.

اگر β,α ریشه های معادله $x^۲+x-۵=۰$ باشند بدون حل معادله مقدار عددی عبارت زیر را بیابید.

الف) $\alpha^۳+\beta^۳$

ب) $\alpha^۲\beta+\beta^۲\alpha$

اگر β,α ریشه های معادله درجه دوم $۲x^۲-۸x+۱=۰$ باشند حاصل $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ را بیابید.

اگر β,α ریشه های معادله $x^۲-x-۴=۰$ باشد بدون حل معادله مقدار عددی $\frac{۱}{\alpha^۲\beta}+\frac{۱}{\alpha\beta^۲}$ را تعیین کنید.

اگر β,α ریشه های معادله درجه دوم $x^۲-۳x-۱=۰$ باشد مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید.

الف) $(۲\alpha+\beta)(۲\beta+\alpha)$

ب) $(\alpha^۲-۲\alpha)(\beta^۲-۲\beta)$

مقدار m را طوری بیابید که یکی از ریشه های معادله $mx^{۲}-۴x+۱=۰$ سه برابر دیگری باشد.

در معادله $۴x^{۲}-۱۶x+m=۰$ یکی از ریشه ها ۲ واحد بزرگتر از ریشه دیگر باشد m و هر دو ریشه را بیابید.

مقدار a را چنان بیابید که رابطه $\frac{۵}{۶}=\frac{۱}{\beta+۱}+\frac{۱}{\alpha+۱}$ میان ریشه ها ی معادله ی $x^{۲}-(a+۲)x+a+۱=۰$ برقرار باشد.

اگر β,α ریشه های معادله $۳x^{۲}-۶x-۱۴=۰$ باشند معادله ی درجه ی دومی بنویسید که ریشه های آن به صورت $\frac{۱}{\beta}$ و $\frac{۱}{\alpha}$ باشد.

کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x بیابید.

اگر در معادله $(m+۱)x^{۲}-۲x+m=۰$ اگر یکی از جواب ها برابر ۲ باشد مقدار m و هر دو جواب را بیابید.

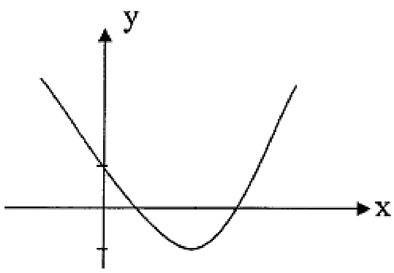
در معادله $۲x^{۲}-۸x+m=۰$ اگر یکی از جواب ها دو واحد کمتر از جواب دیگر باشد m چقدر است؟

اگر $x>۰$ ، کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{۴}{x}$ را X بیابید.

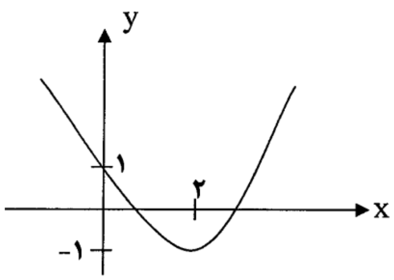
ابعاد مستطیلی را بیابید که محیط آن ۲۶ سانتی متر و مساحت آن ٤٠ سانتی متر مربع باشد.

بیشترین مساحت از بین مستطیل هایی با محیط ۶۰ واحد را به دست آورید.

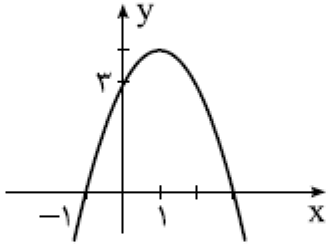
اگر نمودار سهمی $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ بصورت زیر باشد آنگاه علامت a و علامت b را تعیین کنید.



با توجه به نمودار سهمی $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ مقادیر b,a و c را بدست آورید.



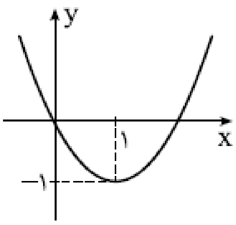
با توجه به نمودار سهمی $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ مقادیر b,a و c را بدست آورید.



در شکل زیر نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است:

الف) مقادیر b,a و c را بدست آورید.

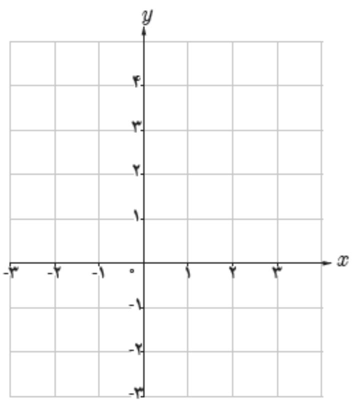
ب) جدول تعیین علامت $f(x)$ را رسم کنید.



روش هندسی حل معادلات

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادله $f(x)=g(x)$ است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.
این روش حل معادله را، که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است، **روش هندسی (نموداری) حل معادلات** می‌نامیم.

فعالیت



۱ معادله $(x-1)^2=\frac{1}{2}x+1$ را حل کنید.

۲ نمودار دو تابع $y=(x-1)^2$ و $y=\frac{1}{2}x+1$ را رسم کنید.

۳ چه ارتباطی بین ریشه‌های معادله $(x-1)^2=\frac{1}{2}x+1$ و طول‌های نقاط تلاقی نمودارها وجود دارد؟

مثال : به روش هندسی معادله $|x|=x^{2}-2x$ را حل کنید.

معادله $\sqrt{2+x}=x+1$ را به روش هندسی حل کنید و در صورت امکان جواب آن را از طریق جبری به دست آورید.

معادله ی $|x+1|+|x-1|=2$ را به روش هندسی و جبری به دست آورید.

مجموعه جواب معادله زیر را به روش هندسی بدست آورید.

$|x|=\sqrt{2-x}$

معادله ی $x^{۲} - \sqrt{x+۱} = ۲x+۱$ را هم به روش هندسی و هم به روش جبری به دست آورید.

معادله زیر را با روش خواسته شده حل کنید.

$x^{۲}+۲x-۲=\frac{۱}{x}$ (روش هندسی)

معادله ی $\left|x^{۲}-۲\right| = ۲$ را به روش هندسی حل کنید.

معادله ی $x^{۲} - \sqrt{x+۲} = ۴x+۴$ را به روش هندسی یا روش جبری به دست آورید.

از طریق جبری و هندسی نشان دهید معادله $\sqrt{x} = x + ۱$ جواب ندارد.

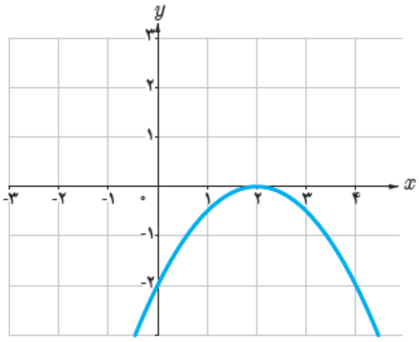
تمرین

۱ معادلهٔ درجه دومی بنویسید که :

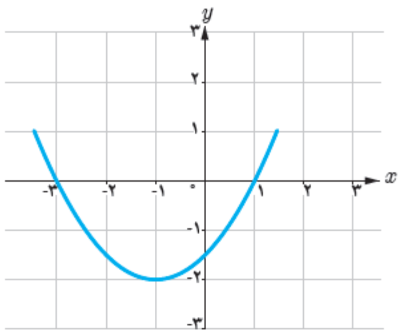
الف) ریشه‌های آن $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ باشند.

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^۲ + bx + c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه آن را مشخص کنید.



(الف)



(ب)

۳ یک موشک با سرعت اولیه ۱۴۴ متر بر ثانیه از زمین به فضا پرتاب می‌شود. ارتفاع این موشک (h) در زمان t، از رابطهٔ $h(t) = -۱۶t^۲ + ۱۴۴t$ به‌دست می‌آید. ارتفاع ماکزیمم آن و همچنین زمانی را که موشک به زمین برخورد می‌کند به‌دست آورید.

۴ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x) = x^۳ - ۴x$

ب) $g(x) = ۲x^۳ + x^۲ + ۳x$

پ) $h(x) = x^۴ + ۳x^۲ + ۵$

۵ معادلات زیر را حل کنید.

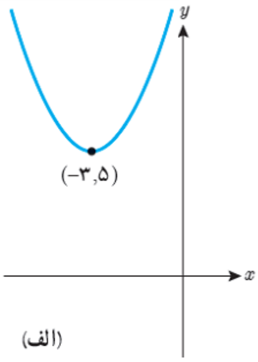
الف) $x^{۴}-۳x^{۲}-۴=۰$

ب) $(\frac{x^{۲}}{۳}-۲)^{۲}-۷(\frac{x^{۲}}{۳}-۲)+۶=۰$

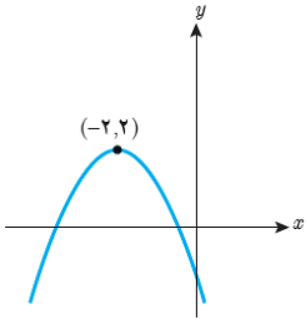
پ) $(۴-x^{۲})^{۲}-(۴-x^{۲})=۱۲$

۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-۱|=x^{۲}-x-۱$ را با استفاده از روش هندسی به‌دست آورید.

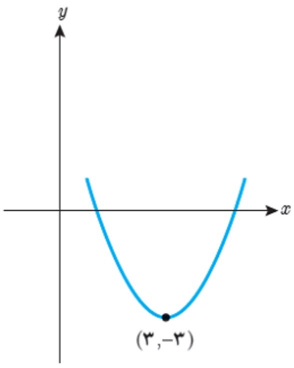
۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ است که در آن $|a| = ۱$ است و نقطهٔ رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به‌دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.



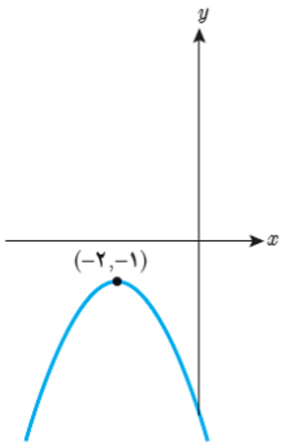
(الف)



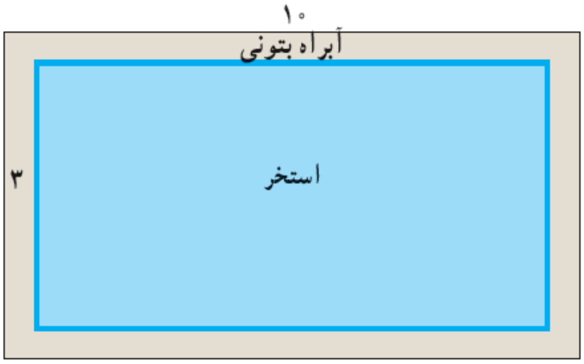
(ب)



(پ)



(ت)



۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.

۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشانیدن دیواری به مساحت ۵۲/۸ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟

درس ۳ معادلات گویا و گنگ

معادلات گویا

الف. معادلات گویا: برای حل این معادلات از مخرج مشترک گرفتن، طرفین وسطین کردن و دیگر خواص کسرها استفاده می‌کنیم.

- دقت کنید تنها ریشه‌هایی مورد قبول هستند که مخرج هیچ کسری را صفر نکند.
- در حل معادلات به خاطر داشته باشید که جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند.

مثال : در یک مزرعه شالیکاری دو کارگر که با هم کار می‌کنند، کار نشاکاری را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اما اگر هر کدام به‌تنهایی کار می‌کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می‌کرد. هر کدام از این دو کارگر به‌تنهایی کار را در چند روز تمام می‌کنند؟

مثال : در یک مغازهٔ ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک با غلظت ۷ درصد نگهداری می‌شوند. به‌علت تازه کار بودن کارگرها، ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته شده است. چگونه می‌توان این محلول را به‌غلظت موردنظر رساند؟

کاردرکلاس

در مسئله ماهی‌های تزیینی حالت سومی هم وجود داشت که نمک به اندازهٔ کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کند تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسد؟

«ب.م.م» و «ک.م.م» دو عبارت

بزرگ‌ترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش‌پذیرند را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (به اختصار ب.م.م) $P(x)$ و $Q(x)$ می‌نامند.

کوچک‌ترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که بر چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ بخش‌پذیر است را کوچک‌ترین مضرب مشترک (به اختصار ک.م.م) $P(x)$ و $Q(x)$ می‌نامند.

تذکر: دو تعریف فوق را می‌توان برای تعداد بیشتری از چندجمله‌ای‌ها نیز تعمیم داد.

مثال: «ب.م.م» و «ک.م.م» چندجمله‌ای‌های $P(x)=x^3+1$ ، $Q(x)=x^6-1$ و $R(x)=4x^2-4$ را تعیین کنید.

پاسخ: ابتدا چندجمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$P(x)=x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

$$Q(x)=x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$$

$$R(x)=4x^2-4=4(x^2-1)=4(x-1)(x+1)$$

ب.م.م $=(x+1)$

ک.م.م $=4(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)=4(x^6-1)$

۱ معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب‌های به‌دست آمده مورد قبول هستند؟

الف) $\frac{۳}{x^{۲}}-۱۲=۰$

ب) $\frac{۲}{k}-\frac{۳k}{k+۲}=\frac{k}{k^{۲}+۲k}$

پ) $\frac{۳}{x}-\frac{۲}{x-۳}=\frac{۱۲}{۹-x^{۲}}$

$\frac{۳x-۲}{x}+\frac{۲x+۵}{x+۳}=۵$

$\frac{x^{۲}-۲x+۲}{x^{۲}-۲x}-\frac{۱+x}{x}=\frac{x-۱}{x-۲}$

$$\frac{x+۱}{x-۱}-\frac{x-۱}{x+۱}=۳x(۱-\frac{x-۱}{x+۱})$$

معادلات زیر را حل کنید .(دامنه پیدا گردد)

$$\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x-۲}=\frac{۴}{x^۲+۱}$$

$$\frac{۳}{x-۳}+\frac{۲}{x+۱}=\frac{۲x-۵}{x^۲-۲x-۳}$$

$$\frac{x}{۱۰}+\frac{۱}{x-۱}=\frac{x+۱}{۲x-۲}$$

$$\frac{۶}{۴x}=\frac{x+۲}{x^{۲}-۳x}$$

$$\frac{۱}{x-۱}-\frac{x+۱}{۲x-۲}=-\frac{x}{۱۰}$$

$$\frac{x-۲}{x+۲}+\frac{x+۲}{x-۲}=\frac{۱۰x}{x^{۲}-۴}$$

$$\frac{x+۲}{x-۱}+\frac{x-۲}{۲x}=\frac{۴}{۲x^{۲}-۲x}$$

مثال : معادله $\frac{۴x-۴}{x^{۲}-۴}=\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x+۲}$ را حل کنید.

کار در کلاس

۱ معادله $۳=\frac{۲}{x-۲}+\frac{۱}{(x-۲)^{۲}}$ را حل کنید.

۲ اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم : $\frac{w+L}{L}=\frac{L}{w}$ آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.
اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل‌شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

به ازای چه مقدار a، معادله‌ی $\frac{۴a}{x+a}=\frac{x+a}{x}-\frac{x}{x+a}$ دارای جواب $x=۱$ است.

به ازای چه مقدار k معادله‌ی $\frac{۳x}{x+۲}=\frac{۸}{k}+\frac{۱}{x-۲}$ دارای جواب $x=۱$ است ؟

اگر $x=۲$ یک جواب معادلهٔ $\frac{a}{x}=\frac{a-x}{x}+\frac{۲x^۲}{a+x}$ باشد،

الف) a را تعیین کنید. ب) به ازای $a=۰$ ریشهٔ دیگر این معادله را در صورت وجود به دست آورید.

معادلات گنگ

الف. معادلات گنگ: در معادلات گنگ، رادیکال‌هایی شامل x وجود دارند که برای حل این‌گونه معادلات دو حالت زیر را داریم.

۱ **اگر معادله شامل یک رادیکال باشد:** رادیکال تنها را یک طرف برده و بقیه‌ی مقادیر و متغیرها را به طرف دیگر معادله می‌بریم، سپس دو طرف معادله را به توان فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم.

۲ **اگر معادله شامل بیش از یک رادیکال باشد:** یک رادیکال را در یک طرف معادله نگه می‌داریم و بقیه رادیکال‌ها و مقادیر و متغیرها را به طرف دیگر معادله می‌بریم، سپس دو طرف معادله را به توان فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم و تا جایی ساده می‌کنیم که دیگر در معادله، رادیکالی نماند.

برخی از معادلات که دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آنها با به توان‌رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده باید در معادله اصلی این عمل آزمایش شوند، زیرا عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.

مثال : معادله $\sqrt{x+۲} = x-۴$ را حل کنید.

مثال) نقطه‌ای روی محور xها بیابید که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $P(۲و۳)$ برابر ۵ باشد. مسئله چند جواب دارد؟

کار در کلاس

۱ آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر شش باشد؟

۲ معادله $\sqrt{x^۲-۴}+۲\sqrt{x}=۰$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

(ث) $۲+\sqrt{۲x^{۲}-۵x+۲}=x$

تمرین

معادلات زیر را حل کنید.

۱ $\frac{۶}{x}=۲+\frac{x-۳}{x+۱}$

۲ $\frac{P}{۲-P}+\frac{۲}{P}=\frac{-۳}{۲}$

۳ $\frac{۳y+۵}{y^{۲}+۵y}+\frac{y+۴}{y+۵}=\frac{y+۱}{y}$

۴ $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x+۴}$

۵ $\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x$

۶ $\frac{۵}{\sqrt{x}+۲}=۲-\frac{۱}{\sqrt{x}-۲}$

۷ $\sqrt{x+۳}+\sqrt{۳x+۱}=۴$

۸ پدربزرگ برای اهدا به مهدکودک چند اسباب‌بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب‌بازی هزار تومان به پدربزرگ تخفیف می‌داد او می‌توانست با همان پول چهار اسباب‌بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

۹ ماشین A کاری را به‌تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. درصورتی‌که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

ابتدا دامنه‌ی متغیر هر یک از معادله‌های زیر را تعیین کنید و سپس آن‌ها را حل کنید.

الف) $۳+\sqrt{x-۷}=۸$

ب) $\sqrt{x}-x=-۲۰$

ج) $۵-۲\sqrt{۲x-۱}=۱$

د) $\sqrt{۲x+۳}-\sqrt{x-۳}=۰$

ه) $\sqrt{x}+\sqrt{x+۵}=۵$

و) $\sqrt{x}+۵=-\sqrt{۷x+۱}$

ز) $\frac{۱}{\sqrt{x-۵}}=۳$

ح) $\frac{۱}{\sqrt{x}+۲}+\frac{۱}{۲-\sqrt{x}}=۲$

ط) $\sqrt{x\sqrt[۳]{x}}=\sqrt[۳]{۴}$

ی) $\frac{۸}{\sqrt{۱۰-۲x}}-\sqrt{۱۰-۲x}=۲$

تمرین : معادله های اصم زیر را حل کنید.

$\sqrt{۴x-۴}+\sqrt{x-۱}=۳$

$\sqrt{۲+\sqrt{x+۳}}=\sqrt{۵-x}$

$x + \sqrt{x} = ۶$

$\sqrt{x - ۳} = ۳ - \sqrt{x}$

نقطه ای روی خط $y = ۲x$ بیابید که از دو نقطه ی $A(۱,۱)$ و $B(۳,-۱)$ به یک فاصله باشد.

بدون حل معادلهٔ $\sqrt{۱-x} + \sqrt{۲-x} + ۳ = ۰$ توضیح دهید چرا مجموعهٔ جواب تهی است؟

درس ۴
قدر مطلق و ویژگی‌های آن

تعریف: برای هر عدد حقیقی x ، قدرمطلق x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|x|=\begin{cases} x & ; \ x \geq 0 \\ -x & ; \ x < 0 \end{cases}$$

نکته: برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$|x| = \sqrt[2k]{x^{2k}} = \operatorname{Max}\{x, -x\} \quad (k \in \mathbb{N})$$

کار در کلاس

۱ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

الف) $|-5-(-3)| =$

ب) $|\sqrt{3}-\sqrt{5}| =$

پ) $\left|1/5-1\frac{1}{2}\right| =$

۲ عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\sqrt{a^4+2a^2+1} =$

ب) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} =$

با فرض $-1 < x < 0$ حاصل $A = |2x-1| + |2-x|$ چقدر است؟

در صورتی‌که $a<0<b$ و $|a|<|b|$ حاصل $P=|a+b|+|a-b|+|a|-|b|$ چقدر است؟

ویژگی های قدرمطلق

۱) $|x|=|-x|$

۲) $|x|^2=|x^2|=x^2$

۳) $|x-y|=|y-x|$

۴) $|x.y|=|x||y|$

۵) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

۶) $|x|=|y| \Leftrightarrow x=\pm y$

۷) $|x| = a \xleftrightarrow{a>0} x = \pm a$

۸) $|x| = a \xleftrightarrow{a<0} x \in \varnothing$

مثال : هریک از معادلات قدرمطلقی زیر را حل کنید و مجموعهٔ جواب آن را مشخص کنید.

الف) $|2t-1|-3=0$

ب) $|y^2-2| = 7$

ج) $|2x-3| = 3-2x$

مثال : معادله $|x-4| = |3x-2|$ را حل کنید.

معادلات قدرمطلقی زیر را حل کنید.

الف) $||x|-1| = 5$

ب) $x|x| = -4$

۹) $|x| = x \Rightarrow x \in [0, +\infty)$

۱۰) $|x| = -x \Rightarrow x \in (-\infty, 0]$

۱۱) $|x| \geq 0 \Rightarrow x \in R$

۱۲) $|x| > 0 \Rightarrow x \in \phi$

۱۳) $|x| < 0 \Rightarrow x \in \phi$

۱۴) $|x| \leq 0 \Rightarrow x = 0$

۱۵) $-|x| \leq x \leq |x|$

۱۶) $x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow |x| \leq a \xleftrightarrow{a>0} -a \leq x \leq a$

۱۷) $x^۲ > a^۲ \Leftrightarrow |x| > a \Leftrightarrow x > a \cup x < -a$

۱۸) $|x+y| \le |x| + |y|$

نامساوی مثلث

۱۹) $|x-y| \le |x| + |y|$

۲۰) $|x| - |y| \le |x-y|$

اگر a و b اعدادی مثبت باشند مجموعه جواب نامعادله‌ی $a<|x|<b$ برابر است با:

۲۱) $-b<x<-a$ یا $a<x<b$

۲۲) $|x+y|\le|x|+|y|$ (نامساوی مثلثی) $\Rightarrow \begin{cases} xy\ge \circ \xrightarrow[\text{باشند}]{\text{هم‌علامت } y,x} |x+y|=|x|+|y| \\ xy<\circ \xrightarrow[\text{باشند}]{\text{مختلف‌العلامه } y,x} |x+y|<|x|+|y| \end{cases}$

اگر $|-۶-۲x|+|x-۲|=|۳x+۴|$، حدود x چقدر است؟

اگر مجموعه جواب معادله‌ی $|x-۲|+|x+۷|=|۲x+۵|$ به صورت $(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$ باشد، مقدار $b-a$ چقدر است؟

۲۳) $|x-y|\ge|x|-|y|\Rightarrow \begin{cases} xy\ge \circ \xrightarrow{\text{هم‌علامت باشند } y,x} |x-y|=|x|-|y| \\ xy<\circ \xrightarrow{\text{مختلف‌العلامه‌باشند } y,x} |x-y|>|x|-|y| \end{cases}$

۲۶) $|x|\le x \longrightarrow x\in[\circ,+\infty)$

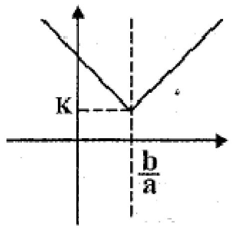
۲۷) $|x|<x \longrightarrow x=\phi$

۲۸) $|x|\ge x \longrightarrow x\in\mathbb{R}$

۲۹) $|x|>x \longrightarrow x\in\mathbb{R}^- =(-\infty,\circ)$

رسم توابع قدر مطلق

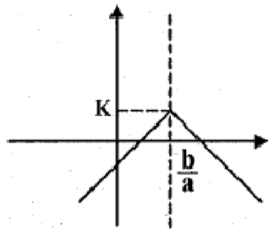
۱) $y=|ax-b|+k$ (نمودار هفت)



محور تقارن : $x=\frac{b}{a}$

برد : $R_f=[k\ ,+\infty)$

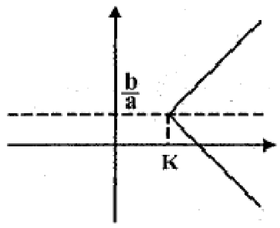
۲) $y=-|ax-b|+k$ (نمودار هشت)



محور تقارن : $x=\frac{b}{a}$

برد : $R_f=(-\infty\ ,\ k]$

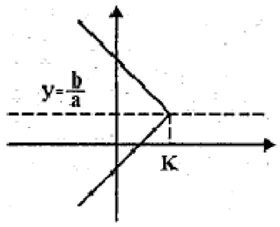
۳) $x=|ay-b|+k$ (نمودار کوچک‌تر)



تقارن : $y=\frac{b}{a}$

دامنه رابطه : $[k,+\infty)$

۴) $x=k-|ay-b|$ (نمودار بزرگ‌تر)

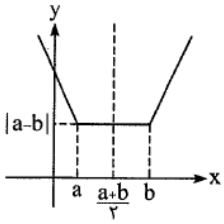


تقارن : $y=\frac{b}{a}$

دامنه رابطه : $(-\infty,k]$

مثال :

بررسی نمودار توابع به فرم $y=|x-a|+|x-b|$



نمودار این توابع به نمودار گلدانی معروف هستند و با فرض $a<b$، شکل کلی آن‌ها به صورت مقابل است:

ویژگی‌های تابع گلدانی:

۱) ریشه‌های درون قدرمطلق، طول نقاط شکستگی نمودار تابع است.

۲) تابع در بازه‌ی $[b,+\infty)$ صعودی اکیداً و شیب آن $m=۲$ و در بازه‌ی $(-\infty,a]$ نزولی اکید و شیب آن برابر $m=-۲$ است.

۳) خط به معادله‌ی $x=\frac{a+b}{۲}$، محور تقارن نمودار تابع است. بنابراین اگر $a+b=۰$، آن‌گاه محور yها محور تقارن نمودار تابع است و لذا تـابع زوج خواهد بود.

۴) مینیمم تابع برابر $|a-b|$ است و لذا برد تابع برابر است با $R_f=[|a-b|,+\infty)$.

نکته: برای حل معادله‌ی $|x-a|+|x-b|=k$ کافی است نمودار $y=|x-a|+|x-b|$ را با خط $y=k$ تقاطع دهیم، که در نتیجه یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

الف) اگر $k<|a-b|$، معادله جواب ندارد.

ب) اگر $k=|a-b|$، معادله بی‌شمار جواب دارد و مجموعه جواب آن بازه‌ی $[a,b]$ است.

ج) اگر $k>|a-b|$، آن‌گاه معادله دو جواب دارد که عبارت‌اند از $x=\frac{a+b\pm k}{۲}$.

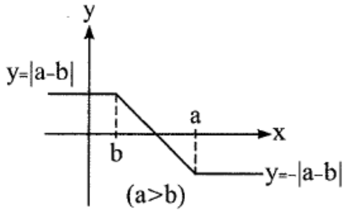
$y=|x+۱|+|x-۲|$

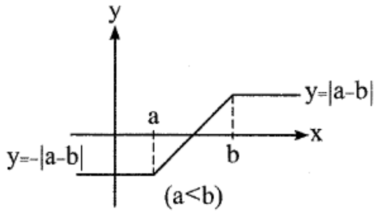
$y=|x|+|x+۳|$

$y=|۲x-۴|+|x|+|۲x+۲|$

بررسی نمودار توابع به فرم $y=|x-a|-|x-b|$

نمودار این توابع به نمودار آبشاری یا سُرسُره‌ای معروف هستند و شکل کلی آن‌ها به یکی از دو صورت زیر است:





ویژگی‌های تابع آبشاری (سرسره‌ای):

۱) ریشه‌های درون قدرمطلق، طول نقاط شکستگی نمودار تابع است.

۲) تابع در بازه‌ی $[a,b]$ یکنوای اکید با شیب ۲ یا ۲- است. به‌طور کلی این توابع، یکنوا (غیراکید) می‌باشند.

۳) نقطه‌ی $w(\frac{a+b}{۲},۰)$ مرکز تقارن منحنی است. در نتیجه اگر $a+b=۰$، آن‌گاه مبدأ مختصات مرکز تقارن نمودار تابع بوده و لذا تابع فرد می‌باشد.

۴) برد تابع برابر $R_f=[-|a-b|,|a-b|]$ است. یعنی بیشترین مقدار و کم‌ترین مقدار این تابع به ترتیب برابر $|a-b|$ و $-|a-b|$ است.

نکته: برای حل معادله‌ی $|x-a|-|x-b|=k$ کافی است نمودار $y=|x-a|-|x-b|$ را با خط $y=k$ تقاطع دهیم، که در نتیجه یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

الف) اگر $|k|>|a-b|$، آن‌گاه معادله جواب ندارد.

ب) اگر $|k|=|a-b|$، آن‌گاه معادله بی‌شمار جواب دارد.

ج) اگر $|k|<|a-b|$، آن‌گاه معادله یک جواب دارد.

$y=|x-۲|-|x+۱|$

$y=|x+۲|-|x-۳|$

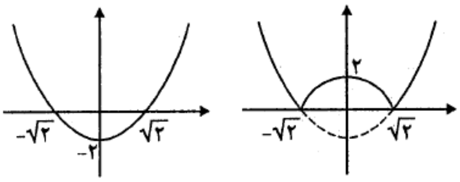
محیط ناحیه‌ی تشکیل شده از برخورد نمودار $y=|x+۱|-|x+۳|$ با محورهای مختصات چقدر است؟

رسم توابع به فرم $y=|f(x)|$

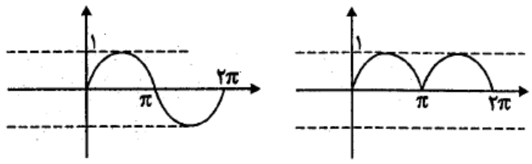
ابتدا $f(x)$ را رسم کرده، سپس قسمت زیر محور xها را به بالا قرینه می‌کنیم؛

مثال‌ها: رسم کنید:

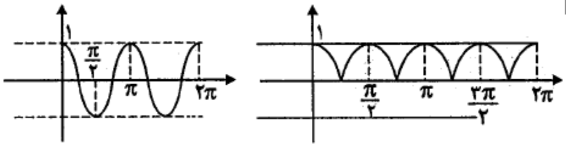
۱) $y=|x^۲-۲|$



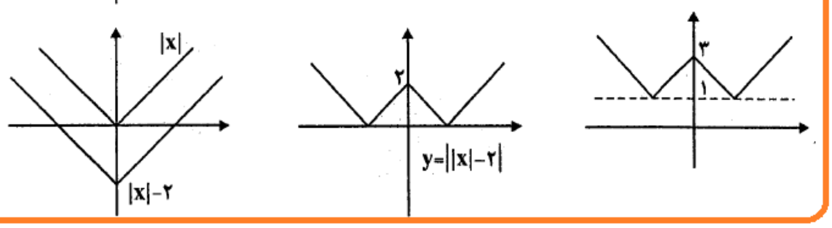
۲) $y=|\sin x|$ ⟶



۳) $y=|\cos ۲x|$



۴) $y=||x|-۲|+۱$ ⟶



@sepehrimath

مثال :

رسم توابع قدر مطلق به فرم : $y=\pm(ax\pm b)\pm|ax\pm b|$

برای رسم چنین توابعی از تعریف قدرمطلق کمک می گیریم.

مثال :

$y=x-|x|$

$y=x-|x-۲|$

$y=x|x|$

$y=x-\frac{|x|}{x}$

$y=x+۱+|x|$

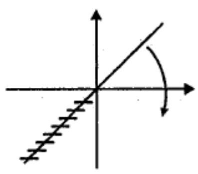
مساحت محدود به نمودار تابع $y=۳-|x+۱|$ و خط به معادله‌ی $y=-۱$ چقدر است؟

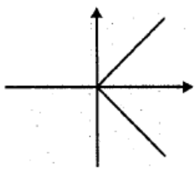
رسم توابع به فرم $|y| = f(x)$

ابتدا $f(x)$ را رسم کرده و چون باید $f(x) > ۰$ باشد، (زیرا $|y| > ۰$) پس قسمت زیر محور x ها، یعنی $f(x) < ۰$ را حذف کرده. در عوض قسمت بالای محور x ها را به زیر x ها قرینه می‌کنیم.

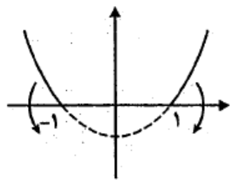
مثال: رسم کنید:

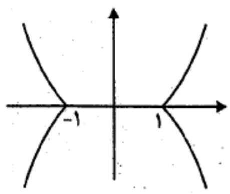
۱) $|y| = x$



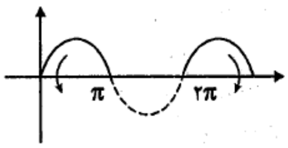


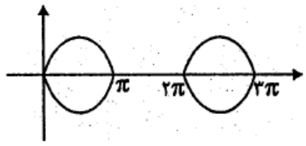
۲) $|y| = x^۲ - ۱$





۳) $|y| = \sin x$





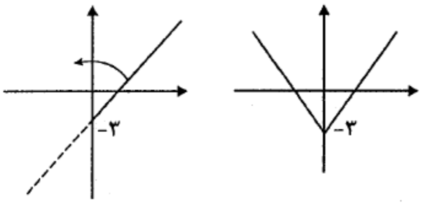
مثال :

رسم توابع به فرم $y = f(|x|)$

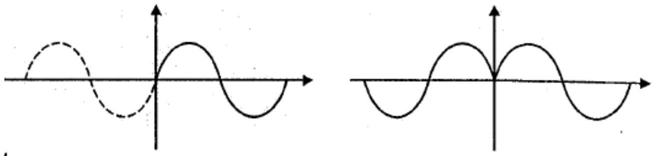
ابتدا $f(x)$ را رسم کرده و چون دامنه f مثبت فرض می‌شود، (یعنی: $|x|$) پس نمودار f در سمت چپ محور yها را حذف کرده و قسمت راست محور yها را در سمت چپ yها قرینه می‌کنیم:

مثال: رسم کنید:

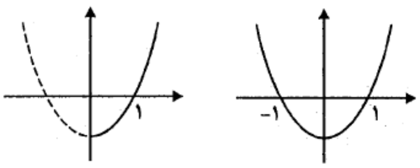
۱) $y = 4|x| - 3$
$\downarrow$
$f = 4x - 3$



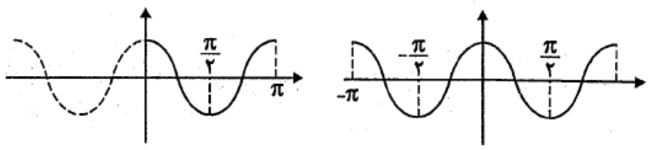
۲) $y = \sin(|x|)$



۳) $y = |x|^2 - 1$

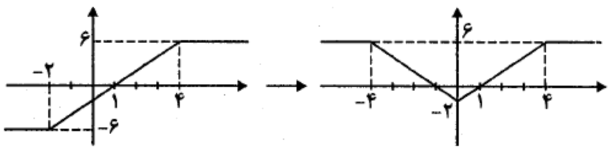


۴) $y = \cos 2|x|$



نکته: توابع ۳ و ۴ چون زوجند، نمودار $f(|x|)$ همان نمودار $f(x)$ خواهد شد.

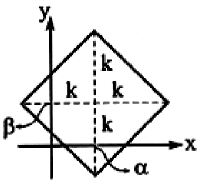
۵) $y = ||x|+2| - ||x|-4|$
پله: $y_1 = |x+2| - |x-4|$



توضیح حل: ابتدا نمودار y_1 (پله) را رسم می‌کنیم و تابع y تابع زوج شده‌ی y_1 خواهد بود.

@sepehrimath

مثال :



نمودار $|x-\alpha|+|y-\beta|=k$ مربعی است به

مرکز (α,β) و طول قطر $2k$ (قطرهای مربع موازی محورهای مختصات هستند) یعنی مثل شکل روبه‌رو:

در حالت کلی هم نمودار ضابطه‌ی $|ax+b|+|cy+d|=k$ (با شرط $a\neq c$) یک لوزی است به مرکز $(-\frac{b}{a},-\frac{d}{c})$

و به طول قطرهای $|\frac{2k}{a}|$ و $|\frac{2k}{c}|$.

مثال :

محیط نمودار معادله‌ی $|x+3|+|y-2|=4$ چقدر است؟

تمرین

۱ با استفاده از تعیین علامت، ضابطهٔ هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف) $f(x)=x|x|$

ب) $g(x)=|x^2-1|$

پ) $h(x)=|x-1|+|x+1|$

۲ بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه به طول‌های ۱− و ۳ روی محور xها برابر ۶ باشد؟

۳ هر یک از عبارت‌های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به‌صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است.

ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است.

پ) فاصله بین x و ۳− بزرگ‌تر از ۲ است.

۴ دو معادلهٔ زیر را حل کنید.

الف) $\dfrac{۲-x}{|x-۳|}=۱$

ب) $\sqrt{x^{۲}-۲x+۱}=۲x+۱$

۵ نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y=۳$ معادله‌های به‌دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y=x-\dfrac{x}{|x|}$

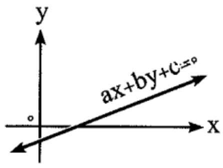
ب) $y=x^{۲}-۶x$

۶ نمودار تابع $f(x) = ||x|-2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = 1$ را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

۷ نمودار تابع $f(x) = |x^2-2x|$ را رسم کنید، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^2-2x| = 2$ را حل نمایید.

درس ۵

آشنایی با هندسه تحلیلی



معادلهٔ یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به شکل $ax+by+c=0$ است که در آن a و b هم‌زمان صفر نیستند.

اگر $b \neq 0$ باشد، با تقسیم طرفین معادلهٔ $ax+by+c=0$ بر b داریم:

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

حواستان باشد که:

اگر $ax+by+c=0 \Rightarrow$ شیب خط : $m=-\frac{a}{b}=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}$

اگر $y=ax+b \Rightarrow$ شیب خط : $m=a$

نوشتن معادلهٔ خط: معادلهٔ خطی که با شیب m از نقطهٔ $P(x_0,y_0)$ می‌گذرد، عبارت است از:

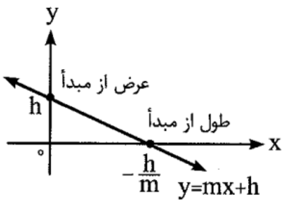
$$\boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$$

* شیب خط مستقیمی که از نقاط $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ می‌گذرد، برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی. به عبارتی می‌توان نوشت:

$$\boxed{m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$$

بنابراین معادلهٔ خطی که از این دو نقطه می‌گذرد، عبارت است از:

$$\boxed{y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)}$$

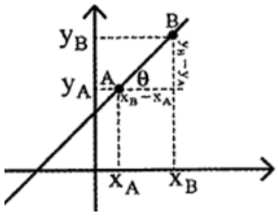


* عرض نقطهٔ تلاقی خط با محور yها را **عرض از مبدأ** می‌نامیم، پس برای به دست آوردن آن کافی است در معادلهٔ خط به جای x، صفر قرار دهید. هم‌چنین طول نقطهٔ تلاقی خط با محور xها را **طول از مبدأ** می‌نامیم و در نتیجه برای به دست آوردن آن کافی است به جای y، صفر قرار دهید.

* *این رو هم بدونید:* معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ $A(a,0)$ و $B(0,b)$ می‌گذرد، به صورت $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ است.

مثال :

شیب خط با استفاده از دو نقطه معلوم A و B از خط :



$$\tan\theta = m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

مثال : به ازای کدام مقدار a خط گذرنداز نقاط (a , ۲) و (۷+a , ۲a-۱) با جهت مثبت محور x ها زاویه °۱۳۵ می سازد؟

مثال : نمودار هندسی خطی به معادله‌ی $y = ۲x + ۴$ را رسم کنید.

مثال : معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن ۷ بوده و محور عــرض را در نقطــه‌ی $A\,(۰,۴)$ قطع کند.

مثال : معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن برابر ۳ و طول از مبدأ آن برابر ۲ باشد.

مثال : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A\,(۴,-۱)$ بگذرد و موازی محور طول باشد.

مثال : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A\ (۴,-۱)$ بگذرد و موازی محور عرض باشد.

مثال : معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A\ (۲,۵)$ و $B\ (۲,-۳)$ بگذرد.

مثال : معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A\ (۱,-۴)$ و $B\ (-۱,-۴)$ بگذرد.

مثال : معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A\ (۳,۵)$ و $B\ (۲,-۱)$ بگذرد.

مثال : مساحت مثلثی را حساب کنید که خط $۳x+۴y=۱۲$ با محورهای مختصات می‌سازد.

مثال : مقدار a را چنان تعیین کنید که خط زیر از نقطه‌ی $A\ (-۱,-۲)$ بگذرد.

$$(a-۲)x-۳y=۲a-۴$$

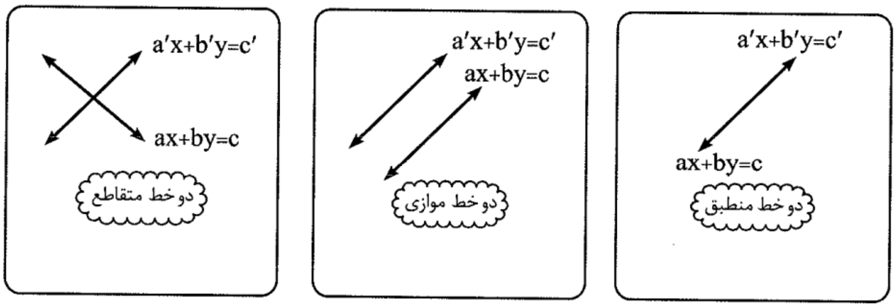
دو خط موازی و عمود بر هم

غیرموازی با محورهای مختصات با هم موازی‌اند، اگر و فقط اگر شیب آن‌ها برابر باشد

دو خط برهم عمودند، اگر و فقط اگر حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 باشد.

وضعیت دو خط نسبت به هم

سه حالت زیر وجود دارد:



$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ 　　 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ 　　 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

* دو خط موازی، شیب‌های برابر دارند (دو خطی که شیب‌های برابر ندارند، متقاطع هستند و نقطهٔ تلاقی از حل دستگاه معادلات دو خط به‌دست می‌آید).

خطوط عمود برهم: دو خط d و d' برهم عمودند، هرگاه: $m_d = -\frac{1}{m_{d'}}$ 　 یا 　 $m_d \times m_{d'} = -1$

* دو خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ وقتی برهم عمود می‌شوند که $aa' + bb' = 0$ باشد.

مثال : معادلـــه‌ی خطـــی را بنویـــسید کـــه از نقطـــه‌ی $A\,(3,-2)$ بگـــذرد و بـــا خط $4x - 2y - 1 = 0$ موازی باشد.

مثال : مقدار n را چنان تعیین کنید که دو خط زیر با هم موازی باشند.

$D : (n-1)x + ny - 1 = 0$

$D' : 4nx + (n-1)y + 2 = 0$

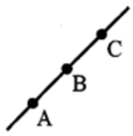
مثال : معادلهٔ خط گذرا از نقطهٔ P (۲،۱-) را بنویسید که با خط $y=$۳$x-$۴ موازی باشد.

به ازای چه مقدار m دو خط $(۱+۳m)y=۵-۳mx$ و $(m+۱)x+my=۳$ موازی‌اند؟

شرط اینکه سه نقطه بر روی یک خط راست واقع شوند یا بریک استقامت باشندویا بر یک راستا واقع شوند :

اگر بخواهیم سه نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$، $B(x_۲,y_۲)$ و $C(x_۳,y_۳)$ بر یک استقامت باشند یعنی بر روی یک خط راست واقع باشند باید شیب جزء با شیب کل برابر باشد.

$$m_{AB}=m_{AC}=m_{BC}$$



مثال : نشان دهید سه نقطه‌ی A (۵،۷) و B (۴،۳) و C (۶،۱۱) روی یک خط راست قرار دارند.

مثال : سه نقطه‌ی A (۲،۵) و B $(m-$۴$,m+$۶$)$ و C (۲،۹-) روی یک خط راست قرار دارند. مقدار m چه‌قدر است؟

مثال : مقدار a را چنان تعیین کنید که سه خط زیر در یک نقطه هم‌دیگر را قطع کنند:

$$D_{۱}: ۳x - y - ۱ = ۰ \quad D_{۲}: (a-۲)x + ۲y - ۲a = ۰ \quad D_{۳}: ۲x + ۳y - ۸ = ۰$$

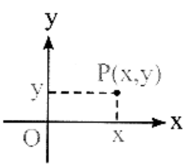
سه خط متقارب :

به ازای کدام مقدار a، سه خط به معادلات $y + ۲x = ۰$ ، $۲y + ax + ۴ = ۰$ و $y + ۳x = a$ متقارب‌اند؟

۱) -۱　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) نشدنی

دستگاه محورهای مختصات

نقطه و دستگاه مختصات



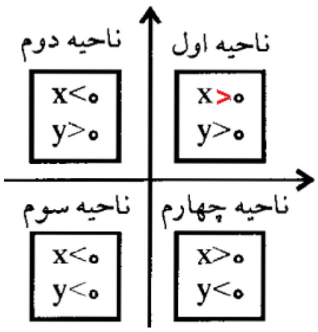
برای تعیین موقعیت یک نقطه در صفحه از دستگاه‌های مختصات استفاده می‌کنند. یکی از این دستگاه‌ها، دستگاه مختصات دکارتی است.

در این دستگاه به هر نقطه‌ی P از صفحه، یک زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی متناظر می‌شود، x را **طول** نقطه و y را **عرض** آن می‌نامند. محورهای مختصات x و y بر هم عمودند. این محورها، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر کدام از آن‌ها را یک **ربع** می‌نامند.

ربع اول، ناحیه‌ای است که در آن x و y نقاط، هر دو مثبت هستند، در **ربع دوم**، x نقاط منفی و y نقاط مثبت است، در **ربع سوم**، x و y نقاط هر دو منفی هستند، بالاخره ربع چهارم متشکل است از نقاطی که x آن‌ها مثبت و y شان منفی است.

* نقطه‌ی $A(x,۰)$ روی محور x ها و نقطه‌ی $B(۰,y)$ روی محور y ها قرار دارد.

* اگر طول نقطه، مثبت باشد، آن‌گاه نقطه، سمت راست محور y ها و اگر طول نقطه، منفی باشد، آن‌گاه نقطه، سمت چپ محور y ها قرار دارد.



فاصله دو نقطه و فاصله مبدا مختصات از یک نقطه

اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات باشند:

۱) $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$

۲) $OA=\sqrt{x_A^۲+y_A^۲}$ فاصله نقطه A تامبدا

۳) $x_B=x_A \rightarrow AB=|x_B-x_A|$

۴) $y_A=y_B \rightarrow AB=|y_B-y_A|$

مختصات وسط پاره خط AB: اگر M وسط پاره خط AB باشد داریم:

$M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})$

مثال :

تذکر۱:

تذکر ۲:

اگر $A(۴,۴)$ و $C(۱,۱)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند، مساحت مربع کدام است؟

۱) ۴	۲) ۸	۳) ۹	۴) ۱۸

مثال : معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خطی را بنویسید که دو نقطهٔ $A(-۲,۱)$ و $B(۳,۴)$ را به هم وصل کرده است.

الف) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات، از نقطهٔ $N(-۶,۸)$ گذشته است. شعاع دایره را محاسبه کنید.

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $E(x_۱,y_۱)$ تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

پ) فاصلهٔ نقطهٔ $N(-۶,۸)$ تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

کاردرکلاس

نشان دهید نقطه $P(-۱۲,۱۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه $A(۰,-۳)$ و $B(۶,۱۵)$ قرار دارد.

مثال: الف) نقطهٔ $N(۵,-۴)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ A و $B(۷,-۲)$ است. مختصات نقطهٔ A را بیابید.

ب) قرینهٔ نقطهٔ $C(۱,۲)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۴)$ را به دست آورید.

پ) قرینهٔ نقطهٔ $P(\alpha , \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات را به‌دست آورید.

نقاط $A(۰,-۱)$ ، $B(۳,۲)$ و $C(-۲,۱)$ سه رأس یک مثلث هستند. نوع مثلث را مشخص کنید.

مثلثی با رئوس $A(۲,۶)$ ، $B(-۲,۵)$ و $C(۲,۳)$ مفروض است. طول میانهٔ AM را بیابید.

در مثلثی با رئوس $A(۴,۳)$ ، $B(۲,۰)$ و $C(۶,-۱)$ معادلهٔ میانهٔ وارد بر ضلع BC را بیابید.

مثال: اگر $A\ (۳,۲)$ و $B\ (-۵,۴)$ دو سر یک پاره‌خط باشند معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

مثال : اگر $A\ (-۲,۳)$ و $B\ (۳,۴)$ و $C\ (-۷,-۲)$ سه رأس یک مثلث باشند، معادله‌ی ضلع AC و میانه‌ی AM را بنویسید.

مثال : اگر $A\ (۳,۵)$ و $B\ (۶,-۲)$ و $C\ (۱۳,۱)$ سه رأس یک مثلث باشند، نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است و میانه‌ی نظیر وتر مثلث نصف وتر است.

مثال : اگر $A\ (-۴,۱)$ و $B\ (۰,۵)$ و $C\ (۴,-۳)$ سه رأس یک مثلث و D و E وسط‌های اضلاع AB و AC باشند، نشان دهید DE با ضلع BC موازی و مساوی نصف آن است.

مثال : اگر $A\ (-۳,-۲)$ و $B\ (۱,۵)$ و $C\ (-۶,۹)$ سه رأس یک مثلث باشند:

اولاً: نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

ثانیاً: معادله‌ی ارتفاع نظیر وتر مثلث را بنویسید.

دایره‌ای به مرکز $O(۲,۱)$ از نقطهٔ $A(۵,۳)$ می‌گذرد. شعاع دایره را به دست آورید.

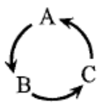
اگر $M\ (۱,-۱)$ و $N\ (۳,۱)$ و $P\ (-۱,۲)$ وسط‌های اضلاع یک مثلث باشند، مختصات رئوس مثلث را به‌دست آورید.

اگر $A(-۱,۲)$ ، $B(۳,۰)$ و $C(۱,-۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادلهٔ ارتفاع وارد بر ضلع BC از رأس A را بیابید.

در مثلثی با رئوس $A(۴,۳)$ ، $B(۲,۰)$ و $C(۶,-۱)$ معادلهٔ میانهٔ وارد بر ضلع BC را بیابید.

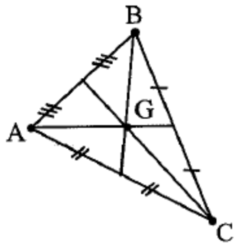
مساحت مثلث با معلوم بودن سه راس :

اگر نقاط $A(x_A , y_A)$ ، $B(x_B , y_B)$ ، $C(x_C , y_C)$ سه رأس مثلث ABC باشند در این صورت مساحت مثلث ABC از رابطه‌ی زیر به‌دست می آید.



$$S=\frac{۱}{۲}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|$$

اگر $A(۲,۱)$ ، $B(۳,-۱)$ و $C(۳,۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث را بیابید.

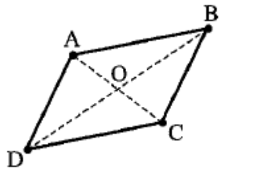


مختصات مرکز ثقل مثلث: مثلث ABC را با سه رأس $A(x_A,y_A)$، $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ در نظر بگیرید. مختصات مرکز ثقل مثلث (محل برخورد سه میانه) از فرمول زیر تعیین می‌شود:

$$G(x_G,y_G):\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{۳} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{۳} \end{cases}$$

مثال:

ویژگی مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع



در متوازی‌الاضلاع ABCD

نقطهٔ O وسط قطرها است، پس چون وسط AC بر وسط BD منطبق شده، داریم:

$$x_A+x_C=x_B+x_D$$
$$y_A+y_C=y_B+y_D$$

مقادیر m و n را طوری تعیین کنید که نقاط $A(۲-m\ ,\ ۲n+۳)$ و $B(-۲,۴)$ و $C(n+۱,۲m)$ و $D(m+۳n,n-۵)$ رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشد.

فاصله یک نقطه از یک خط :

فاصله نقطه $A(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

معادله نیم سازهای زاویه های دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

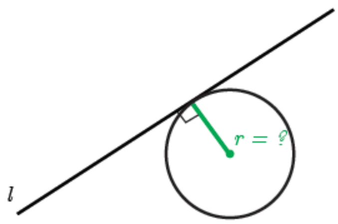
مثال :

کار در کلاس

۱ اگر نقطهٔ $A(۲,۳)$ رأس یک مربع و معادلهٔ یک ضلع مربع $۳x-۴y=۹$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟

۲ دو خط $۳x+۲y=۱$ و $۲x-۳y=۲$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل‌اند و نقطهٔ $A(۲,۵)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

۲ خط $۳x-۴y=۰$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۲,-۱)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.
(راهنمایی : خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است.)



مثال : فاصله‌ی دو خط موازی $D_۱ : ۳x+۴y+۱=۰$ و $D_۲ : ۶x+۸y-۸=۰$ را به‌دست آورید.

مثال : فاصله‌ی نقطه‌ی $M\ (۲,-۳)$ از خط $D: ۳x-۴y+۲=۰$ چه‌قدر است؟

اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱,۲)$ از خط $۳x+my=۱$ برابر ۲ باشد، مقدار m را بیابید.

مثال : اگر $A\ (-۲,۳)$ و $B\ (۴,-۴)$ و $C\ (-۴,۲)$ سه رأس یک مثلث باشند:

اولاً: معادله‌ی میانه‌ی AM را بنویسید.

ثانیاً: معادله‌ی ارتفاع AH را بنویسید.

ثالثاً: فاصله‌ی نقطه‌ی A تا ضلع BC را به‌دست آورید.

رابعاً: مساحت مثلث را حساب کنید.

معادلهٔ قطر مربعی به صورت $۵x+۱۲y-۴=۰$ است. اگر $A(۱,۱)$ یک رأس آن باشد، مساحت مربع چقدر است؟

اگر فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط $۴y - ۳x + ۲a - ۱ = ۰$ برابـر ۳ باشـد مقـادیر a را حساب کنید.

فاصله‌ی نقطه‌ی $A\,(-۲,۲)$ را از خط $\frac{۳+۲y}{۲} - \frac{۲-۳x}{۴} = ۱$ به‌دست آورید.

معادله‌ی یک قطر مربع $۳x + ۴y + ۲ = ۰$ و یک رأس آن $A\,(۲,۳)$ است. مـساحت مربـع را تعیین کنید.

معادله‌ی دو ضلع مجاور یک مستطیل $y - x - ۵ = ۰$ و $x + y - ۷ = ۰$ می‌باشد. اگر مبدأ مختصات یک رأس مستطیل باشد، مساحت آن‌را به‌دست آورید.

دو خط $۳x - ۴y - ۱ = ۰$ و $۸y - ۶x + ۱۷ = ۰$ بر یک دایره مماسند. مـساحت دایـره را حساب کنید.

تمرین

۱ مثلث ABC به رأس‌های $A(-۱,۷)$ و $B(-۶,-۲)$ و $C(۳,۳)$ را در نظر بگیرید.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

پ) معادله عمودمنصف ضلع BC را به‌دست آورید.

ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟

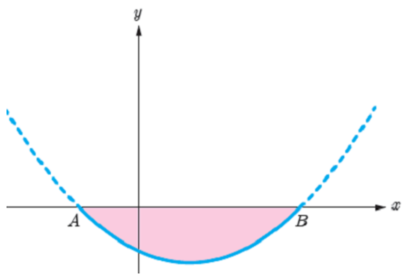
۲ $A(۰,۶)$ و $B(۸,-۸)$ نقاط دوسر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به‌دست آورید.

۳ شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۸x-۲۰$ مطابق شکل زیر مدل‌سازی می‌شود.

الف) مختصات نقاط انتهای عدسی A و B را به‌دست آورید.

ب) اگر x برحسب سانتی‌متر باشد طول AB را به‌دست آورید.

پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y برحسب میلی‌متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟



۴ ثابت کنید فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ می‌باشد.

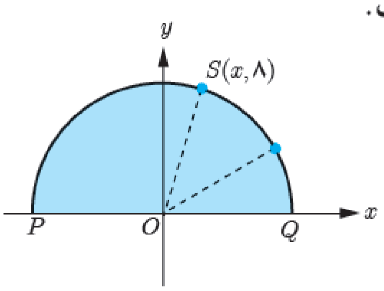
۵ خط $۴x+۳y=۵$ بر دایرهٔ C به مرکز $O(-۱,۲)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

۶ نقطهٔ $S(x,۸)$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱۰ در شکل روبه‌رو داده شده است.

الف) مقدار x را به‌دست آورید.

ب) شیب خط‌های PS و SQ را به‌دست آورید.

پ) نشان دهید $P\hat{S}Q$ قائمه است.



۷ اگر فاصله نقطه $A(۱,۲)$ از خط $ax+۴y=۱$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

۸ سه رأس مثلث ABC ، $A(-۱۱,-۱۳)$ ، $B(-۳,۳)$ ، $C(۳,۱)$ می‌باشند.
الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می‌شود به‌دست آورید.
ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.

۹ نقطه‌ای روی خط $y=۲x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(۲,۴)$ برابر ۵ باشد.

۱۰ نقاط $A(۴,۲)$ و $B(۱,-۱)$ و $C(۸,-۲)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را به‌دست آورید.

تابع

فصل ۲

درس ۱
آشنایی بیشتر با تابع

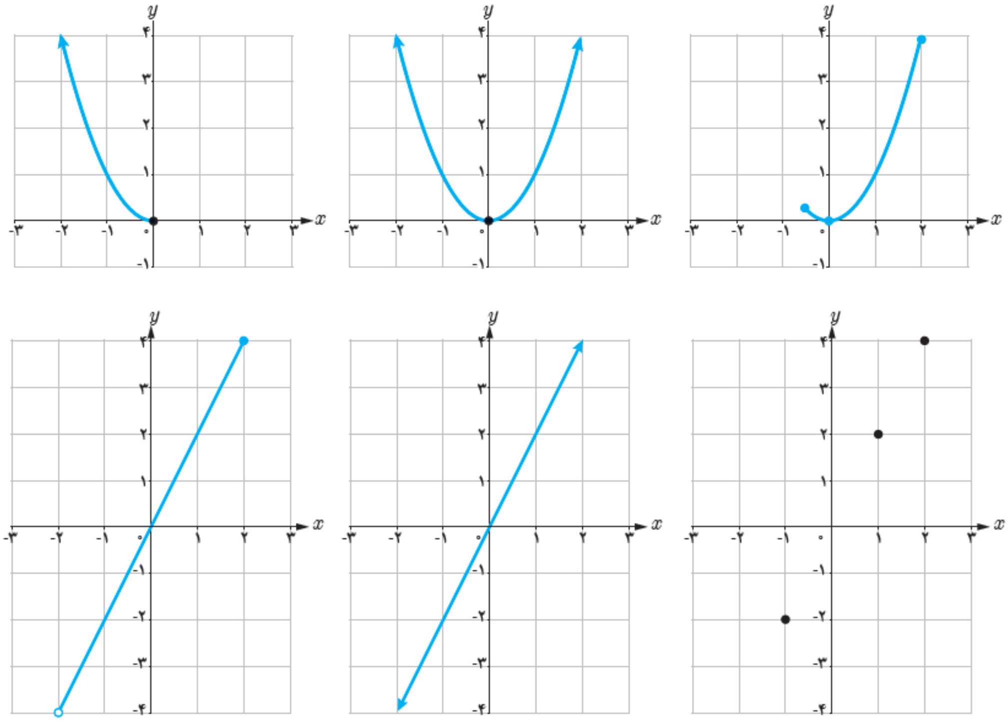
در سال گذشته با مفهوم تابع آشنا شدیم. به دستور یا قانون بیانگر تابع، **ضابطهٔ** آن تابع گفته می‌شود. برای مشخص کردن یک تابع، باید **دامنهٔ** تابع و **ضابطهٔ** آن را داشته باشیم. بنا به قرارداد، اگر ضابطهٔ تابعی داده شده باشد، اما دامنهٔ آن صریحاً گفته نشده باشد، بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که آن تابع در آن قابل تعریف است، به عنوان دامنه در نظر گرفته می‌شود.

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A، دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود. A را دامنهٔ تابع و B را هم‌دامنهٔ تابع می‌نامند. برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه است.

کار در کلاس

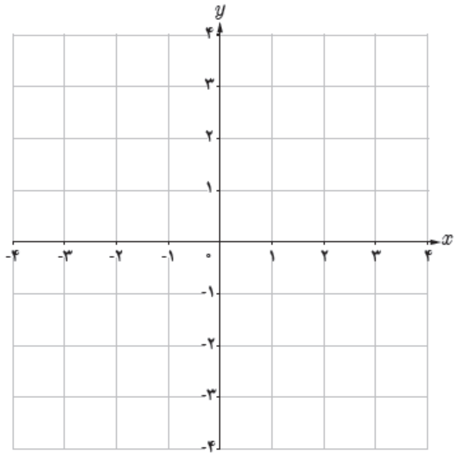
الف) با توجه به توابع داده شده در جدول زیر، مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است و جدول را نیز کامل کنید. شباهت‌ها و تفاوت‌های نمودارها را با هم مقایسه کنید.

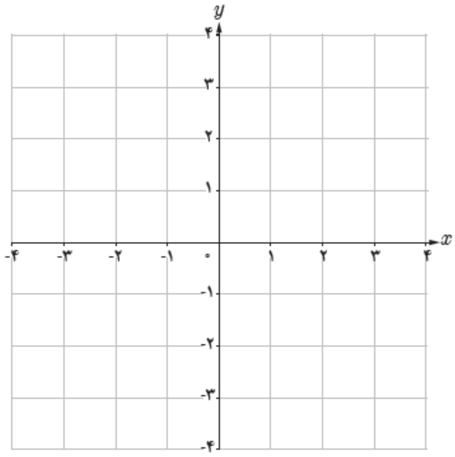
تابع	$k(x)=x^{2}$	$s(x)=x^{2}$	$t(x)=x^{2}$	$h(x)=2x$	$g(x)=2x$	$f(x)=2x$
دامنه تابع	$[-\frac{1}{2},2]$	$(-\infty,0]$	$\mathbb{R}$	$(-2,2]$	$\{-1,1,2\}$	$\mathbb{R}$
برد تابع						



ب) جدول روبه‌رو را به دلخواه (متفاوت از قسمت الف) کامل و نمودار هر تابع را رسم کنید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. چند پاسخ متفاوت برای f و g می‌توان ارائه کرد؟

تابع	$f(x)=2x$	$g(x)=x^2$
دامنه		
برد		





برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه، هم‌دامنه و دستور یا قاعده‌ای که نحوهٔ ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد معلوم باشد.

هم‌دامنهٔ تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

کار در کلاس

برای تابع $\begin{cases} f:[0,\frac{1}{3}]\to[0,\infty) \\ f(x)=x^2 \end{cases}$ کدام‌یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟

(ت) $\begin{cases} f:[0,\frac{1}{3}]\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

(پ) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to[0,\frac{1}{9}] \\ f(x)=x \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} f:[0,\frac{1}{3}]\to[0,\frac{1}{9}] \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

(الف) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

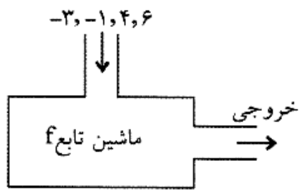
تابع به عنوان یک ماشین

نمایش ماشینی تابع

در تعریف ریاضی، ماشینی تابع است که به‌ازای هر ورودیِ عضو دامنه‌اش، تنها یک خروجی داشته باشد. برای نمونه ماشینی که هر عدد طبیعی را می‌گیرد و دو برابر آن را تحویل می‌دهد، یک تابع است:

$$۱,۲,۳,... \longrightarrow \boxed{\text{من ورودی را دو برابر می‌کنم!}} \longrightarrow ۲,۴,۶,...$$

مثال : ماشین تابع f در شکل زیر کارکردی به این‌صورت دارد: هر ورودی را گرفته، به توان ۲ رساند‌ه، یک واحد از آن کم کرده و سپس آن را به قسمت خروجی تحویل می‌دهد. ۴ ورودی برای تابع در نظر گرفته شده است. خروجی‌های آن را تعیین کنید:



با توجه به توضیحات بیان شده از نحوه‌ی کارکرد ماشین تابع f ضابطه‌ی تابع را می‌توان به‌صورت $f(x)=x^۲-۱$ در نظر گرفت. به ازای هر ورودی، خروجی تابع را تعیین می‌کنیم:

$x=-۱ \Rightarrow f(-۱)=(-۱)^۲-۱=۱-۱=۰$ $\qquad$ $x=-۳ \Rightarrow f(-۳)=(-۳)^۲-۱=۹-۱=۸$

$x=۶ \Rightarrow f(۶)=(۶)^۲-۱=۳۶-۱=۳۵$ $\qquad$ $x=۴ \Rightarrow f(۴)=(۴)^۲-۱=۱۶-۱=۱۵$

اگر خروجی از ماشین شکل مقابل $\frac{۴}{۳}$ باشد، ورودی کدام است؟ (سراسری-۸۶)

$$\text{ورودی} \rightarrow \boxed{۲x-۲} \rightarrow \boxed{\frac{x}{۱+\sqrt{x}}} \rightarrow \text{خروجی}$$

۱) $\frac{۱۱}{۹}$ $\qquad$ ۲) $\frac{۷}{۲}$ $\qquad$ ۳) ۳ $\qquad$ ۴) ۴

با توجه به ماشین $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow ۳x+۱$ اگر $f(x)=۲x-۱$ باشد، حاصل $g(۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲}$ $\qquad$ ۲) ۵ $\qquad$ ۳) ۷ $\qquad$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

درس ۲ انواع توابع

توابع گویا

به هر تابعی که ضابطه‌اش را بتوان به‌صورت $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ نوشت به طوری‌که $p(x)$ و $q(x)$ دو تابع چندجمله‌ای باشند و $q(x)\neq 0$ (یعنی $q(x)$ چندجمله‌ای صفر نباشد)، تابع گویا می‌گویند.

هر یک از توابع روبه‌رو یک تابع گویا می‌باشد:

$$f(x)=\frac{x}{x-2}\ ,\ g(x)=\frac{x^2}{x^3+5}\ ,\ h(x)=5$$

امّا توابع $y=\frac{2x}{|x|+1}$ و $y=\frac{\sqrt{x}}{2-x}$، تابع گویا نمی‌باشند، زیرا $\sqrt{x}$ و $|x|+1$ چندجمله‌ای نیستند.

نکته : هر تابع چندجمله‌ای را می‌توان یک تابع گویا در نظر گرفت.

دامنه توابع گویا

اگر مخرج یک کسر برابر صفر باشد، آن‌گاه آن کسر تعریف نشده است و به ازای بقیهٔ مقادیر، مقدار کسر تعریف می‌شود. به عنوان مثال، تابع $y=\frac{1}{x-1}$ به ازای $x=1$ تعریف نشده است، زیرا عبارت $\frac{1}{x-1}$ به ازای $x=1$ به‌صورت کسر بی‌معنی $\frac{1}{0}$ درمی‌آید. بنابراین:

نکته : اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای و $y=f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ تابع کسری گویا باشد، آن‌گاه دامنهٔ f، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی به غیر از ریشه‌های $q(x)$ (مخرج کسر) است، یعنی:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid q(x)\neq 0\}=\mathbb{R}-\{x\mid q(x)=0\}$$

پس برای به‌دست آوردن دامنهٔ توابع کسری گویا، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های مخرج (در صورت وجود) را از $\mathbb{R}$ حذف می‌کنیم.

توابع حقیقی و دامنه آنها

الف)دامنه توابع چند جمله ای

ب)دامنه توابع گویا

مثال : دامنه هریک از توابع زیر را بیابید؟

الف) دامنه توابع چند جمله ای

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x+۵$$

$$f(x)=x^{۳}+۲x-۷$$

$$f(x)=\sqrt{۳}x+۲$$

$$f(x)=\frac{۱}{-۷}x^{۲}-۶x+۴$$

ب) دامنه توابع کسری

$$f(x)=\frac{۱}{x-|x|}$$

$$f(x)=\frac{۱}{x^{۲}+۱}$$

$$f(x)=\frac{x+۵}{۲-|x|}$$

$$f(x)=\frac{۱}{x^{۲}-۷}$$

$$f(x)=\frac{x+۱}{x^{۳}-x}$$

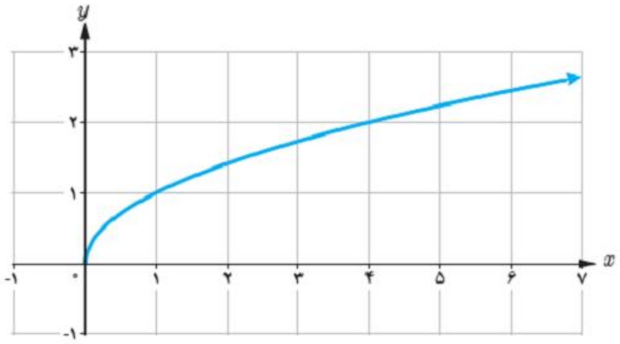
$$f(x)=\frac{x}{x^{۲}-۹}$$

$f(x)=\dfrac{۱}{۳+|x|}$

$f(x)=\dfrac{۱}{x^{۲}+x-۲}$

دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=\dfrac{x+۵}{x^{۲}-۲x-۳}$ را تعیین کنید.

توابع رادیکالی (تابع ریشه دوم)



تابعی را که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد تابع ریشه دوم می‌نامند و به‌صورت $f(x)=\sqrt{x}$ یا $y=\sqrt{x}$ نمایش می‌دهند. نمودار تابع در شکل نشان داده شده است. دامنه و برد این تابع، بازهٔ $[۰,+\infty)$ است. تابع $f(x)=\sqrt{x}$ یک تابع رادیکالی است.

مثال : نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید. سپس دامنه و برد را مشخص کنید.

$f(x)=\sqrt{-x}$

$f(x)=-\sqrt{x}$

$f(x)=-\sqrt{-x}$

کاردر کلاس

به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار چهار تابع :

الف) $f(x)=\sqrt{x}+۳$, ب) $h(x)=\sqrt{x}-۳$, پ) $g(x)=\sqrt{x-۳}$, ت) $r(x)=\sqrt{x+۳}$

رسم کنید. و دامنه و برد آن را معلوم کنید.

کاردر کلاس

الف) دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲x+۶}$ را به‌دست آورید. سپس به کمک نقطه‌یابی نمودار آن را رسم کرده و برد تابع رانیز معلوم کنید.

ب) نمودار تابع $g(x)=\sqrt{۲x+۶}-۲$ رابه کمک انتقال رسم کنید.

فعالیت

۱) با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$، نمودار مربوط هر یک از توابع زیر را رسم کنید. سپس دامنهٔ آنها را تعیین کنید.

الف) $g(x)=\sqrt{x-۲}$　$D_g=$ ....

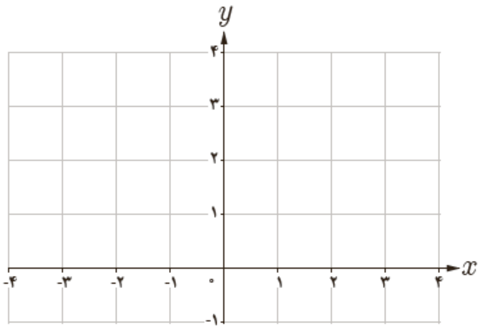
ب) $h(x)=\sqrt{x}+۲$　$D_h=$ ....

پ) $k(x)=\sqrt{x+۲}$　$D_k=$ ....

ت) $l(x)=\sqrt{x}-۲$　$D_l=$ ....

۲) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-۲+\sqrt{x+۳}$ را رسم کنیم.

۳) نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=۱+\sqrt{x+۱}$ را رسم کنید؛ سپس دامنهٔ آن را بیابید.



به کمک انتقال، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن‌ها را به‌دست آورید.

آ) $y=۱+\sqrt{x-۲}$

ب) $y=-۲+\sqrt{x+۱}$

ت) $f(x)=-\sqrt{x-۳}+۱$

دامنه توابع رادیکالی

در عبارت‌های رادیکالی با فرجهٔ زوج، عبارت زیر رادیکال نمی‌تواند منفی شود. بنابراین برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt[۲k]{P(x)}$ کـه در آن $P(x)$ یک عبارت گویا می‌باشد، نامعادلهٔ $P(x)\geq ۰$ را حل می‌کنیم. حدود x دامنهٔ تابع f خواهد بود، یعنی: $\mathbf{D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid P(x)\geq ۰\}}$

در عبارت‌های رادیکالی با فرجهٔ فرد، عبارت زیر رادیکال می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. بنابراین دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ فرد، با دامنـهٔ عبـارت زیـر رادیکال برابر است. به عبارت دیگر در تعیین دامنهٔ تابع رادیکالی با فرجهٔ فرد، رادیکال را در نظـر نمی‌گیـریم و فقـط دامنـهٔ تـابع زیـر رادیکـال را به‌دسـت می‌آوریم. پس دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt[۲k+۱]{P(x)}$ برابر است با: $\mathbf{D_f=D_P}$

مثال : دامنه توابع رادیکالی زیر را بیابید.

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۴}}$$

$$f(x)=\sqrt{x-|x|}$$

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}+\frac{۱}{\sqrt{۵-x}}$$

$$y=\frac{\sqrt{۹-x^{۲}}}{[x+۱]+۲}$$

$$y=\sqrt{\frac{-۱}{۳-x}}$$

$$y=\sqrt{x-\sqrt{۱-x}}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{[x]-۲}$$

$$y=\sqrt{x-\sqrt{x}}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{۱-x}{x+۱}}$$

معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند x و y هستند یک رابطه را نشان می‌دهند؛ مثلاً معادلهٔ $x+y=۲$ شامل همه زوج‌های مرتبی است که مجموع مؤلفه‌های آنها برابر ۲ است. نمودار این معادله یک خط است. این معادله را به‌صورت $y=-x+۲$ یا $f(x)=-x+۲$ نیز نمایش می‌دهند. بسیاری از توابع با یک معادله بیان می‌شوند، اما الزاماً یک معادله با دو متغیر برحسب x و y یک تابع را مشخص نمی‌کند.

مثال

الف) در معادله $-x^۲+y=۴$، y را برحسب x به‌دست آورید. آیا y تابعی از x است؟

حل : داریم $y=x^۲+۴$. این معادله یک سهمی را مشخص می‌کند که همان تابع $f(x)=x^۲+۴$ است.

ب) آیا در معادله $x-y^۲=۴$، y تابعی از x است؟

حل : اگر y را برحسب x به‌دست آوریم داریم : $y=\pm\sqrt{x-۴}$ به‌ازای $x=۵$ داریم : $y=\pm۱$. یعنی فقط نقاط $(۵,۱)$ و $(۵,-۱)$ روی نمودار تابع قرار دارند. بنابراین، این معادله یک تابع را نمایش نمی‌دهد.

کار در کلاس

کدام‌یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟ دلیل بیاورید.

الف) $y=|x|+۱$

ب) $x=|y|+۱$

تشخیص تابع از روی نمایش جبری:

برای متغیر x یک مقدار دلخواهی را قرار می‌دهیم اگر برای y یک فقط یک مقدار بدست آید، تابع است. در غیر این صورت آن ضابطه بیانگر تابع نیست.

مثال: کدام یک از ضابطه‌های زیر یک تابع است:

الف) $x^۲+y^۲=۴$

ب) $|x|+|y|=۰$

ج) $|x|+|y-۱|=۳$

توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

تعریف :

هر تابعی که بتوان دامنه آن را به تعدادی بازه تقسیم‌بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها تابع ثابت باشد یک تابع پله‌ای می‌نامند.

گونه خاصی از توابع پله‌ای تابع جزء صحیح می‌باشد. ابتداجزء صحیح یک عدد را تعریف می‌کنیم و بعد تابع جزء صحیح را تعریف می‌کنیم.

تعریف :

برای هر عدد حقیقی x جزء صحیح آن، بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نیست. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.

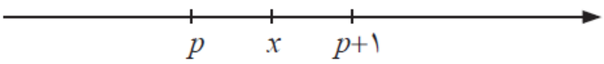
برای مثال داریم :

$[\sqrt{۳}]=۱$ $\quad [۷]=۷ \quad [۴/۹]=۴ \quad [۳/۲]=۳$

$[-۲/۹۵]=-۳ \quad [-۲]=-۲ \quad [۱-\sqrt{۲}]=-۱ \quad [-۱/۵]=-۲$

جزء صحیح یک عدد به شکل زیر نیز مشخص می‌شود.

برای هر عدد حقیقی x، یک عدد صحیح p موجود است که $p \le x < p+۱$. p همان جزء صحیح x است.



تعریف :

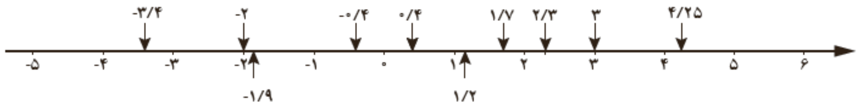
تابعی که به‌هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و با $f(x)=[x]$ نمایش داده می‌شود.

دامنه تابع جزء صحیح مجموعه‌اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد صحیح می‌باشد.

تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۵ & x\le -۳ \\ -۱ & -۱\le x<۴ \\ ۲ & ۴\le x \end{cases}$$

۱ با کمک گرفتن از محور اعداد، جزء صحیح اعداد خواسته شده را به‌دست آورید.



$[-۳/۴]=$ $\qquad$ $[-۲]=$ $\qquad$ $[-۱/۹]=$ $\qquad$ $[۰/۴]=$ $\qquad$ $[-۰/۴]=$

$[۴/۲۵]=$ $\qquad$ $[۳]=$ $\qquad$ $[۲/۳]=$ $\qquad$ $[۱/۷]=$ $\qquad$ $[۱/۲]=$

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$\left[\frac{۴۱}{۳۷}\right]=$ $\qquad$ $\left[-\frac{۱۳}{۵۱}\right]=$

تابع جز صحیح ، جزصحیح و ویژگی های آن

تابع جزء صحیح: تابعی که به هرعدد حقیقی، جزء صحیح آن عدد را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و به صورت $f(x)=[x]$ تعریف می‌شود. دامنه‌ی تابع جزء صحیح، مجموعه اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد صحیح می‌باشد.

۱) $[x]=\max\{n \mid n\in\mathbb{Z}, n\le x\}$

۲) $[x]=k, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\le x<k+۱$

۳) $[x+k]=[x]+k$

مقدار تابع $f(x)=[[|x|]-\frac{۱}{۲}|[x]|]$ را به ازای $x=-\frac{۷}{۳}$ به‌دست آورید.

حاصل $A=\left|[-۲x]-[۳x]\right|$ به ازای $x=-\frac{۷}{۲}$ را به دست آورید.

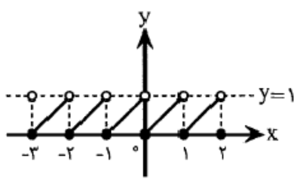
مثال: مجموعه جواب معادله‌ی $[x+3]=5$ را بیابید.

هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

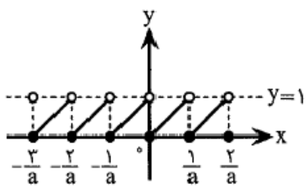
آ) $[x]=-3$　　ب) $\left[\frac{2x+1}{3}\right]=2$　　پ) $[x^2-x]=1$　　ت) $\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{3}{2}$

۴) $[x]\le x<[x]+1$

۵) $0\le x-[x]<1$

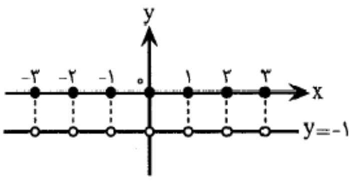


۶) $0\le ax-[ax]<1$



اگر $y = x - ۳\left[\frac{x}{۳}\right]$، در این صورت حدود y کدام است؟

۷) $[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & :x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & :x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$



اگر $[۴-x]+[x-۳]=۰$، آن‌گاه x به کدام مجموعه تعلق دارد؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $[۰,+\infty)$

۸) $[kx]\neq k[x]\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

۹) $[-x]=\begin{cases} -[x] & x\in\mathbb{Z} \\ -[x]-۱ & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$

۱۰) $\begin{cases} x=[x]+p \\ y=[y]+p' \end{cases}\Rightarrow [x+y]=\begin{cases} [x]+[y] & ۰\le p+p'<۱ \\ [x]+[y]+۱ & p+p'\ge ۱ \end{cases}$

۱۱) $[\frac{x}{n}]=[\frac{[x]}{n}] \quad (n\in\mathbb{N})$

۱۲) $[۲x]=[x]+[x+\frac{۱}{۲}]$

۱۳) $[۳x]=[x]+[x+\frac{۱}{۳}]+[x+\frac{۲}{۳}]$

۱۴) $[nx]=[x]+[x+\frac{۱}{n}]+[x+\frac{۲}{n}]+\ldots+[x+\frac{n-۱}{n}]$

مثال: مجموعه جواب معادله‌ی $[x]-[-x]=۳$ را به‌دست آورید.

مثال: جزء صحیح عدد $(۲+\sqrt{۳})^۲$ را به‌دست آورید.

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $[\frac{۳x+۱}{x}]=۵$

ب) $[x]+[x+۳]-[۴-x]=۲$

نکته: برای حل نامعادلات شامل جزءصحیح از ویژگی‌های زیر استفاده می‌کنیم: $(n\in\mathbb{Z})$

۱) $[u]\geq n \Rightarrow u\geq n$

۲) $[u]\leq n \Rightarrow u<n+۱$

۳) $[u]>n \Rightarrow [u]\geq n+۱ \xrightarrow{(۱)} u\geq n+۱$

۴) $[u]<n \Rightarrow [u]\leq n-۱ \xrightarrow{(۲)} u<n$

مثال:

رسم توابع جزصحیح

برای رسم نمودار توابع شامل جزء صحیح در یک بازه‌ی مشخص، ابتدا می‌بایست حدود تغییرات عبارت داخل جزء صحیح را به دست آوریم و سپس با توجه به فاصله‌ی به دست آمده برای عبارت داخل جزء صحیح، آن فاصله را به گونه‌ای تقسیم‌بندی کنیم که عبارت داخل جزء صحیح بین دو عدد صحیح متوالی قرار گیرد تا مقدار آن معلوم باشد. با محاسبه‌ی مقدار جزء صحیح و قرار دادن آن در ضابطه‌ی تابع، معادله‌ی به دست آمده را در بازه‌ی مربوطه رسم می‌کنیم.

برای رسم نمودار تابع $y=[f(x)]$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

مرحله‌ی اول: ابتدا تابع داخل جزء صحیح را رسم می‌کنیم. (یعنی نمودار f)

مرحله‌ی دوم: خطوط افقی $y=k\ (k\in\mathbb{Z})$ را یک واحد - یک واحد رسم کرده و محل تلاقی آن‌ها با تابع f را توپُر می‌کنیم.

مرحله‌ی سوم: قسمتی از منحنی f که بین دو خطوط $y=k$ و $y=k+1$ قرار دارد را روی خط پایینی یعنی $y=k$ تصویر می‌کنیم (یعنی از بالا نور بتابانیم تا سایه‌ی آن قسمت روی خطوط پایینی بیافتد)

≪ برای رسم نمودار تابع $y=k[ax]$، اگر $a>0$ باشد تابع صعودی و اگر $a<0$ باشد تابع نزولی است و همچنین طول پله‌ها $\frac{1}{|a|}$ و ارتفاع پله‌ها k واحد می‌باشد.

نمودار تابع $f(x)=x-[x]$ را رسم کنید.

کار در کلاس

۱ نمودار تابع $f(x)=[2x]$ را در بازهٔ $[-1,2]$ رسم کنید (جدول و نمودار داده شده را کامل کنید).

۲ نمودار تابع $f(x)=\left[\frac{۱}{۳}x\right]$ را در بازهٔ $[-۳ , ۳]$ رسم کنید (کامل کنید).

هر یک از توابع زیر را در فاصله های داده شده رسم کنید.

$y=۲x+[x]-۱ \qquad x\in[-۲,۲)$

$y=|x|-[x] \qquad x\in[-۱,۲)$

$y=[۲x+۱]$　　$x\in[-۱,۱)$

$y=x[x]$　　$x\in[-۲,۲]$

$y=[x]+۲$　　$x\in[-۱,۲)$

تساوی دو تابع

دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه :

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

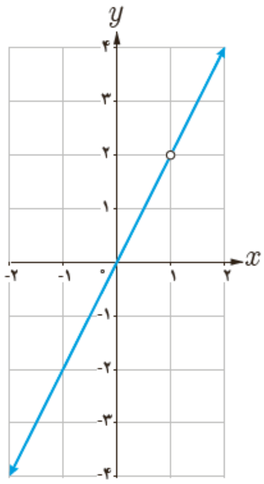
ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم : $f(x)=g(x)$

بنابراین در صورت رسم نمودارهای دو تابع مساوی در یک دستگاه مختصات، باید نمودارهای آنها دقیقاً بر هم منطبق شوند.

کار در کلاس

۱ آیا دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲}{x}$ و $g(x)=x$ با هم برابرند؟ چرا؟

۲ نمودار مقابل مربوط به کدام‌یک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟



الف) $D_g=\mathbb{R}$ $\quad g(x)=۲x$

ب) $D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$ $\quad g(x)=۲x$

پ) $D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$ $\quad g(x)=۲x$

ت) $D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$ $\quad g(x)=\frac{۲x^۲-۲x}{x-۱}$

ث) $D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$ $\quad g(x)=\frac{۲x^۲-۴x}{x-۲}$

آیا دو تابع $f(x)=\sqrt{x(x-۲)}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-۲}$ برابرند؟ چرا؟

تساوی یا عدم تساوی توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{۱-\cos^۲ x}$ را بررسی کنید

اگر $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{۴x^۲-۱}{۲x+۱} & x\neq -\dfrac{۱}{۲}\\ ۱-k & x=-\dfrac{۱}{۲}\end{cases}$ مساوی باشند مقدار k را طوری بیابید که به ازای هر x از دامنه ، $f(x)=g(x)$.

اگر $f(x)=x-۴$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۱۶}{x+۴} & x\neq -۴\\ k+۳ & x=-۴\end{cases}$ مساوی باشند مقدار k را بیابید.

آیا دو تابع $f(x)=x^۳$ و $g(x)=\sqrt{x^۶}$ مساویند؟

آیا دو تابع $f(x)=\sqrt{x(x-۱)}$ و $g(x)=\sqrt{x}.\sqrt{x-۱}$ مساویند؟

آیا دو تابع $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+۱}+۱}$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}-۱$ مساویند؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

تساوی دو تابع $f(x)=\dfrac{x-۱}{\sqrt{x}+۱}$ و $g(x)=\sqrt{x}-۱$ را بررسی کنید.

تمرین

۱ دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\dfrac{x-۱}{۲-x}$

ب) $f(x)=\dfrac{-۳x}{x^{۲}+۱}$

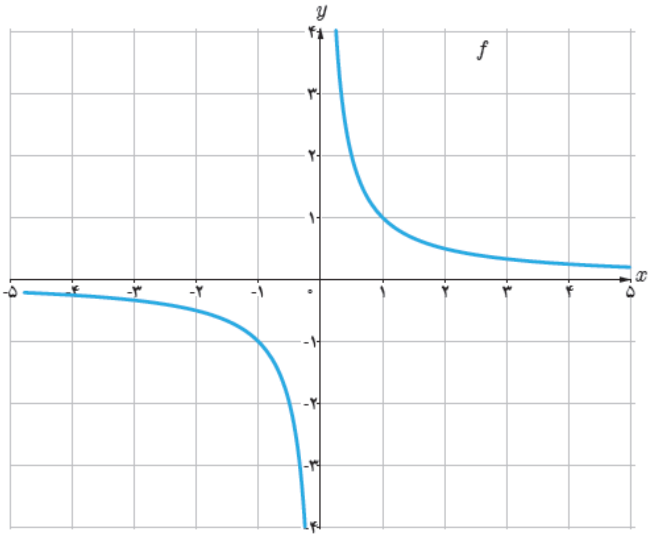
پ) $f(x)=\dfrac{۲x+۳}{x^{۲}+x-۱۲}$

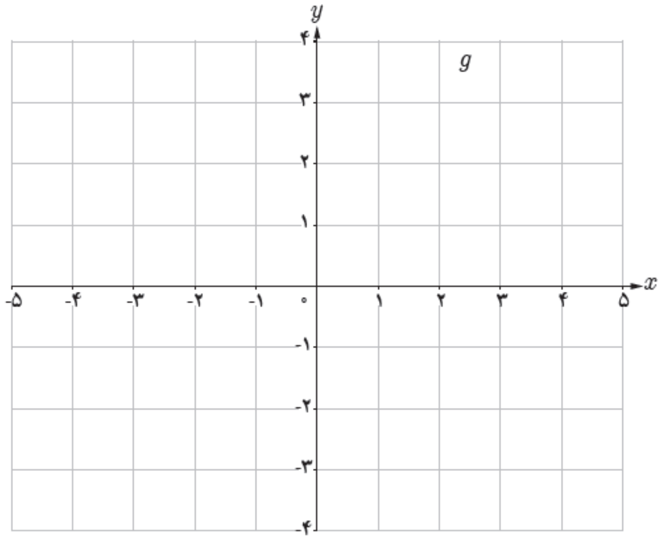
ت) $f(x)=\sqrt{۳x+۱}$

ث) $f(x)=۲\sqrt{x}-۳$

ج) $f(x)=\sqrt{۸-x}$

۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x)=-\frac{۱}{x}$ را رسم کرد.





۳ نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

۴ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x>۰\\ x-۲ & x\leq ۰\end{cases}$

ب) $f(x)=\sqrt{x-۲}+۵$

پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲ & x>۰\\ \sqrt{x+۲} & -۲\leq x\leq ۰\end{cases}$

ت) $f(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{x} & x<۰\\ -\sqrt{x+۲} & x\geq ۰\end{cases}$

۵ کدام‌یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟

الف) $۳x+۲y=۱۲$ ب) $x=۱$ پ) $y=-۲$ ت) $f(x)=\begin{cases} x+۳ & x\leq ۰ \\ x-۱ & x\geq ۰ \end{cases}$ ث) $y^۲=x^۲$ ج) $y=|x|$

۶ هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به‌وسیله تابع $f(x)=\dfrac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک‌سازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟

ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

۷ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = [x]+۱ \quad , \quad -۲ \leq x < ۳$　　　ب) $f(x) = [\frac{۱}{۲}x] \quad , \quad -۴ \leq x < ۴$

۸ نمودارهای دو تابع $y = [x-۳]$ و $y = [x]-۳$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟

۹ اگر تعداد افرادی که،طی یک مدت معین، به‌وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند با دستور $n(t) = \frac{۹۵۰۰t - ۲۰۰۰}{۴ + t}$ به‌دست آید که در آن $t > ۰$ زمان برحسب ماه است :

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

درس ۳

وارون توابع

وارون تابع و تابع یک به یک

هر تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ بیان می‌کند که متغیر y چه ارتباطی با متغیر x دارد و چگونه می‌توان با در دست داشتن مقدار x، مقدار y را به‌دست آورد. اما گاهی مهم است که بدانیم چگونه می‌توان از مقدار y به مقدار x رسید. تبدیل یکای اندازه‌گیری نمونه‌ای ساده از این حالت است.

به خاطر دارید که یک تابع را می‌توان با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داد.

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب (a,b) می‌توان زوج مرتب (b,a) را به‌دست آورد. حال اگر مؤلفه‌های همهٔ زوج‌های مرتب تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطهٔ جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم.

برای مثال وارون تابع $f=\{(۶,۴),(۵,۳),(۲,۱)\}$ برابر با $f^{-1}=\{(۴,۶),(۳,۵),(۱,۲)\}$ است.

وارون تابع‌های داده شده را حساب کنید.

$s=\{(۴,۱),(۱,۴),(۳,۳),(۲,۵)\}$	$s^{-1}=$
$t=\{(۵,۱),(۱,۴),(۴,۳),(۲,۳)\}$	$t^{-1}=$
$u=\{(۲,۳),(۵,۲),(۴,۱),(۳,۴)\}$	$u^{-1}=$

وارون تابع: اگر در تابع f که به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است، جای مؤلفه‌ها را عوض کنیم، مجموعهٔ جدیدی از زوج‌های مرتب به‌دست می‌آید که به آن وارون تابع f می‌گوییم و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

توجه کنید که f^{-1} را نباید با $\frac{۱}{f}$ اشتباه گرفت.

وارون هر یک از تابع‌های زیر را به‌دست اورید.

آ) $f=\{(۰,-۱),(۱,۲),(۳,۵)\}$

ب) $g=\{(۱,۲),(۳,۲),(۴,۵)\}$

در مثال بالا، f^{-1} یک تابع است ولی g^{-1} تابع نیست (در g^{-1} دو زوج‌مرتب متمایز با مؤلفهٔ اول یکسان (عدد۲) وجود دارد)، پس:

تذکر مهم وارون یک تابع ممکن است تابع نباشد.

می‌خواهیم بدانیم وارون یک تابع در چه شرایطی تابع است. می‌دانیم در تابع هیچ x ای از دامنه نباید به دو y متمایز در برد نسبت داده شود. امّا می‌توان x های متفاوت را به یک عدد در برد نسبت داد. به عنوان مثال، در نمایش تابع با زوج‌های مرتب، مؤلفه‌های اول باید متمایز باشند ولی مؤلفه‌های دوم می‌توانند با هم برابر باشند (تابع g مثال بالا).

در وارون تابع f، مقدارهای تابع f، دامنهٔ f^{-1} می‌باشند. برای آن‌که f^{-1} تابع باشد، باید مؤلفه‌های اول f^{-1}، متمایز باشند، پس می‌توان گفت:

نکتهٔ مهم وارون تابع f، خود یک تابع است، اگر در زوج‌های مرتب تابع f، هیچ دو زوج‌مرتب متمایزی، مؤلفهٔ دوم یکسانی نداشته باشند.

ویژگی های تابع وارون (معکوس)

تابع معکوس: تابع f با دامنه‌ی D_f و برد R_f را به صورت زوج‌های مرتب $f=\{(x,y)\,|\,y=f(x)\}$ در نظر می‌گیریم.

از تعویض جای مؤلفه‌های اول و دوم زوج مرتب‌ها به رابطه‌ی جدیدی می‌رسیم که آن را معکوس تابع f می‌نامند و آن را با نماد f^{-1} نشان می‌دهند.

$$f^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}\Rightarrow\begin{cases}f:D_f\longrightarrow R_f\\ f^{-1}:R_f\longrightarrow D_f\end{cases}\Rightarrow R_f=D_{f^{-1}},D_f=R_{f^{-1}}$$

- شرط لازم و کافی برای آن‌که تابع f وارون‌پذیر باشد آن است که f یک‌به‌یک باشد.
- هرگاه f و g وارون‌پذیر باشند آن‌گاه: $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$
- تابع f و معکوس آن یعنی f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ قرینه‌اند.
- در تست‌ها برای تشخیص ضابطه‌ی f^{-1} از این نکته که اگر $(a,b)\in f$ باشد آنگاه $(b,a)\in f^{-1}$ است استفاده می‌کنیم.

در تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{ax+d}$ اگر $a+d=0$ باشد f با f^{-1} برابر می‌باشد.

اگر f^{-1} تابع معکوس تابع f باشد، آن‌گاه: $(f^{-1})^{-1}=f$

برای تعیین ضابطه‌ی تابع معکوس یک تابع، ابتدا x را برحسب y حساب کرده، سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

هرگاه $A\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ روی f باشد، $A'\left|\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\right.$ روی f^{-1} است و بالعکس.

تابع f با ضابطهٔ $f(x)=3x-1$ با دامنهٔ $[-2,4]$ مفروض است. دامنه و برد f^{-1} را به‌دست آورید.

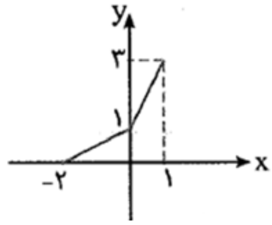
اگر $f(x)=x+۱$ و $g(x)=۲x-۱$ باشد، مقدار $g^{-۱}(f^{-۱}(۴))$ را حساب کنید.

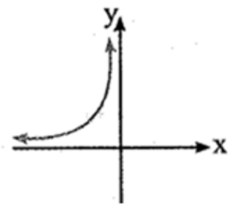
در تابع $f(x)=۲+\frac{۳}{x-۲}$ ، $f^{-۱}(۴)$ را بیابید.

اگر در تابع خطی f ، $f(۲)=۰\,,\ f^{-۱}(۳)=-۱$ داده شده باشد، مقدار $۲f(۵)-f(-۱)$ چقدر است؟

اگر در تابع خطی f ، $f(۲)=-۳\,,\ f^{-۱}(۰)=۱$ داده شده باشد، مقدار $f^{-۱}(۳)$ چقدر است؟

در هر یک از شکل‌های زیر، نمودار تابعی رسم شده است. نمودار وارون آن‌ها را رسم کنید.

آ) 

ب) 

توابع یک‌به‌یک

همان‌طور که دیدید وارون هر تابع ، لزوماً یک تابع نمی‌باشد. تنها، توابعی وارون پذیر هستند که یک به یک باشند.

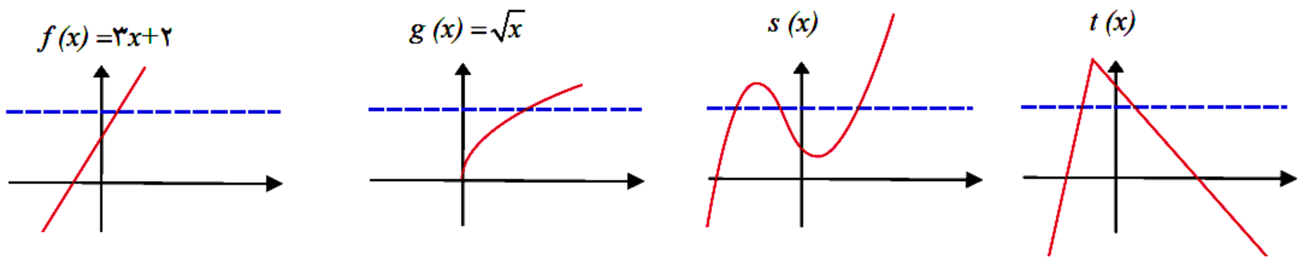
این از جمله دلایلی است که باعث می‌شود توابع یک به یک را با دقت بیشتری مطالعه کنیم.

از قبل می‌دانید که تابع f یک به یک است هر گاه دو عضو متمایز x_1, x_2 در دامنه به دو عضو متمایز $f(x_1), f(x_2)$ در برد نظیر شوند به بیان ریاضی می‌توان نوشت :

تعریف :

تابع f یک به یک است هرگاه $x_1, x_2 \in D_f \ , x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

اگر نمودار تابع f داده شده باشد، f در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در شکل‌های داده شده توابع f و g یک به یک و در نتیجه وارون پذیر می‌باشند. توابع t و s یک به یک نیستند و در نتیجه وارون پذیر هم نیستند.



یک به یک بودن تابع به این معنی است که هیچ دو نقطه متمایزی مانند x_1, x_2 یافت نمی‌شود که برای آن‌ها : $f(x_1) = f(x_2)$.

به بیان دیگر اگر برای دو نقطه x_1, x_2 داشته باشیم $f(x_1) = f(x_2)$ آن گاه $x_1 = x_2$. تابع یک به یک را به روش زیر نیز می‌توان مشخص کرد.

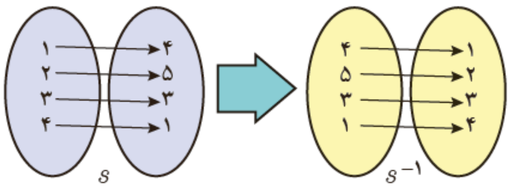
تذکر :

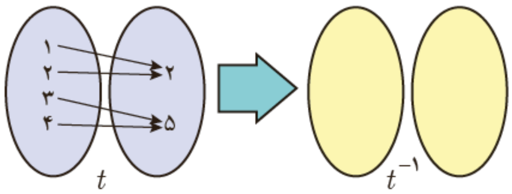
تابع f یک به یک است، اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از دامنه f داشته باشیم :

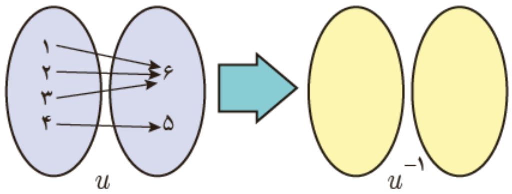
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

فعالیت

۱ الف) به نمونهٔ داده شده دقت کنید. با کمک نمودار پیکانی، وارون توابع داده شده را به‌دست آورید.







ب) در جدول مقابل گزینه‌های درست را انتخاب کنید.

s^{-1} یک تابع است.	بله☐ خیر☐
t^{-1} یک تابع است.	بله☐ خیر☐
u^{-1} یک تابع است.	بله☐ خیر☐

پ) عبارت زیر را کامل کنید.

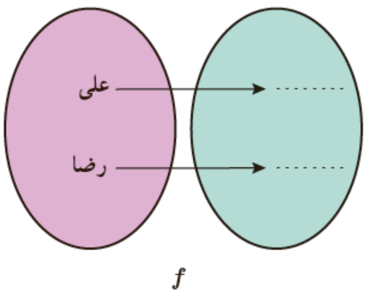
وارون تابع f، خود یک تابع است؛ هرگاه در زوج‌های مرتب متفاوت تابع f مؤلفه‌های .... تکراری وجود نداشته باشد.

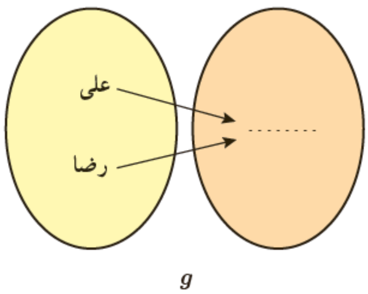
> به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع **یک‌به‌یک** می‌گوییم.

تذکر : وارون هر تابع یک‌به‌یک، خود یک تابع است.

ت) تابعِ $f=\{(1,2),(-2,4),(2,-1),(-1,2)\}$ را در نظر بگیرید. بدون محاسبهٔ f^{-1}، تعیین کنید که این تابع یک‌به‌یک است یا خیر؟

۲ نمودارهای پیکانی زیر بیانگر تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی علی و رضا است.





الف) مشخص کنید که کدام نمودار پیکانی مربوط به اثر انگشت و کدام نمودار پیکانی مربوط به گروه خونی است.

ب) آیا f و g هر دو تابع‌اند؟

پ) در مورد تابع بودن f^{-1} و g^{-1} چه می‌توان گفت؟

ت) کدام‌یک از دو تابع f و g یک‌به‌یک هستند؟

ث) عبارت‌های زیر را کامل کنید.

با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین ....

با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین ....

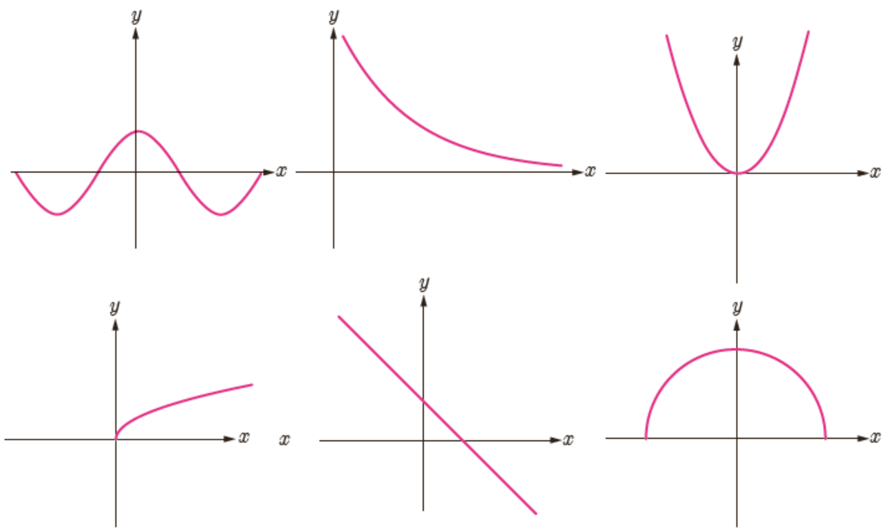
نکته اگر یک تابع به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌ها داده شده باشد، هنگامی تابع یک‌به‌یک است که مؤلفه‌های دوم آن دوبه‌دو متمایز باشند. و اگر دو زوج‌مرتب دارای مؤلفه‌های دوم یکسان باشند، باید مؤلفه‌های اول آن‌ها نیز برابر باشند.

اگر تابع $f = \{(-۲,۲),(m,۳),(-۱,۳),(۲m,a)\}$ یک‌به‌یک باشد، a را به‌دست آورید.

نکته اگر تابعی با نمودار نمایش داده شده باشد، آن‌گاه از آزمون زیر که به آزمون خط افقی مشهور است، استفاده می‌کنیم:

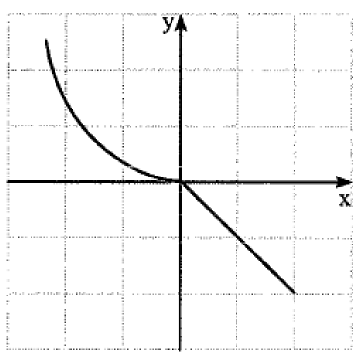
آزمون خط افقی: اگر هر خط موازی محور x ها، نمودار یک تابع را **حداکثر** در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه آن تابع یک‌به‌یک است.

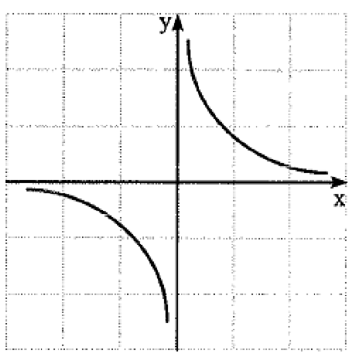
۲ کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟

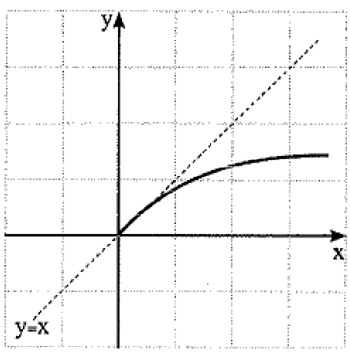


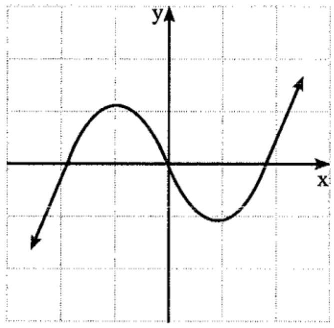
اگر f یک تابع یک به یک باشد، برای به‌دست آوردن نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینهٔ f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) به‌دست آوریم.

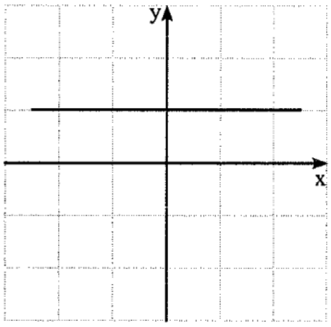
توابعی که وارون‌پذیرند را مشخص کرده و سپس تابع وارون آن‌ها را در همان دستگاه مختصات رسم کنید.

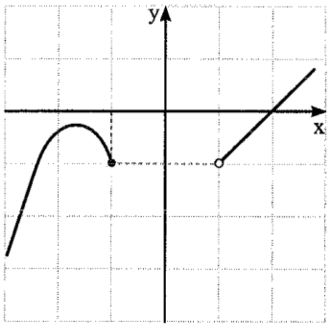


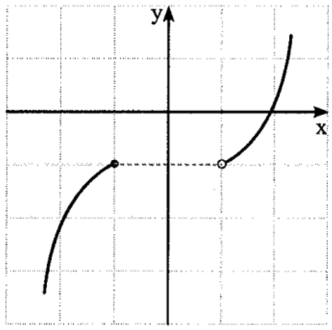


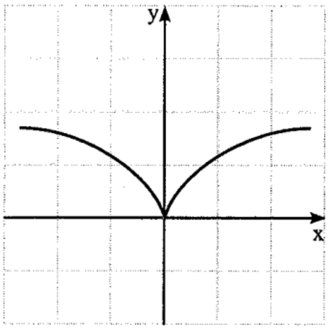












محاسبه وارون یک تابع

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادله $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

۱ هر تابع خطی غیرثابت یک‌به‌یک است. (چرا؟) وارون هر یک از توابع خطی زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x+۵$

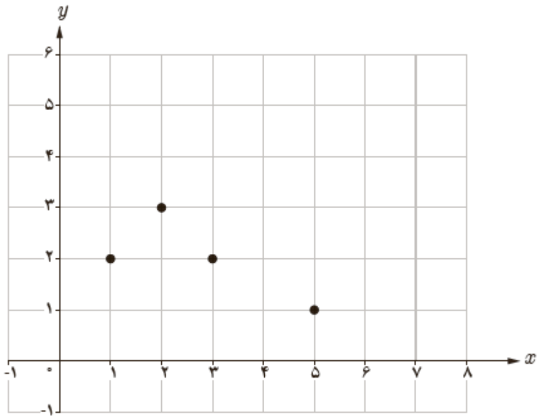
ب) $g(x)=۴x$

پ) $u(x)=۲x+۳$

ت) $v(x)=\frac{۲}{۳}x-۴$

۲ الف) چرا نمودار داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک نیست؟

ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنید.
مسئله چند جواب دارد؟



محدود کردن دامنه تابع و ساختن تابع یک به یک

اگر تابعی یک به یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست، اما با کوچکتر کردن دامنه یک تابع ممکن است بتوانیم تابعی یک به یک بسازیم.

مثلاً تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست اما می‌توانیم دامنه تابع را به بازه $(-\infty, 0]$ محدود کنیم و در این صورت تابعی یک به یک به‌دست آوریم.

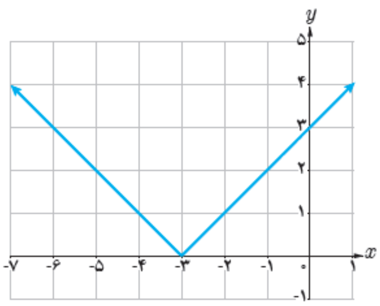
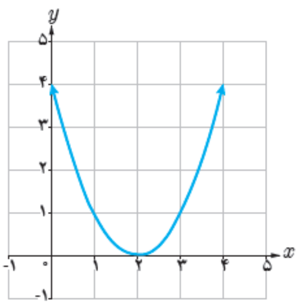
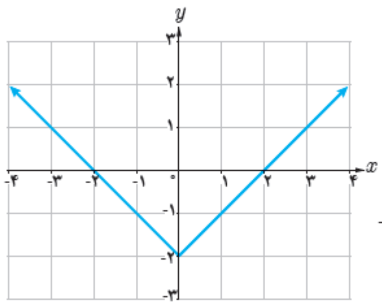
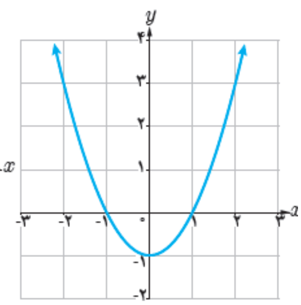
همچنین می‌توانیم دامنه آن را به بازه $[0, \infty)$ محدود کنیم و تابعی یک به یک به دست آوریم.

محدود کردن دامنه یک تابع را تحدید کردن تابع می‌نامند. این عمل، از روی تابع داده شده، تابع جدیدی می‌سازد و ممکن است تابع جدید خواصی داشته باشد که تابع قبلی نداشته باشد. در جمع و ضرب و تقسیم توابعی که دامنه یکسان ندارند، ابتدا این توابع روی دامنه یکسان تحدید می‌شوند و سپس این توابع تحدید یافته هستند که با هم جمع، ضرب، یا تقسیم می‌شوند.

کار در کلاس

تابع‌های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y = |x+3|$　　ب) $y = (x-2)^2$　　پ) $y = |x|-2$　　ت) $y = x^2-1$

با محدود کردن دامنه هر یک از توابع زیر روی یک بازه، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y = |x-۲|$　　ب) $y = (x+۳)^۲$

تمرین

۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک‌به‌یک نباشد.

۲ آیا تابع $f(x) = \frac{۲}{۵}$ وارون تابع $g(x) = \frac{۵}{۲}$ است؟

۳ به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند، به‌دست آورید :

الف) $f(x)=(x+۵)^۲ \quad , \quad x\geq -۵$

ب) $f(x)=-|x-۱|+۱ \quad , \quad x\geq ۲$

پ) $f(x)=(x-۳)^۲$

ت) $f(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h برحسب متر) بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t)=۱۰۰-۵t^۲$ به‌دست می‌آید.

الف) دامنه و برد h را به‌دست آورید.

ب) چرا h تابعی یک به یک است؟

پ) تابع وارون h را به‌دست آورید.

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون‌پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x، $x < f(x)$.

۶ وارون تابع $f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۳$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

تمرینات بیشتر

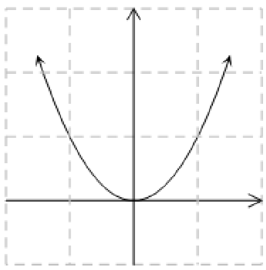
مقدار a را چنان بیابید که $f = \{(۵, a+۱), (a^۲ + ۳a \;,\; ۲), (۴,۲)\}$ یک به یک باشد.

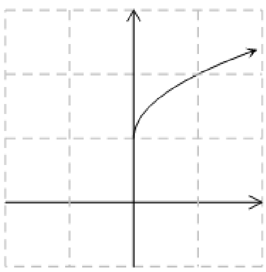
a و b را طوری بدست اورید که $R = \{(a^۲ - ۱, ۱۱), (۳.۷), (۱۵, ۲b - ۱۱)\}$ تابعی یک به یک باشد.

نشان دهید $f(x)=\dfrac{۵x-۱}{۳x-۷}$ وارون پذیر است سپس ضابطه وارون را بدست آورید.

اگر تابع $f=\{(۲,a),(۴,a^۲),(a,b-۱)\}$ یک به یک باشد و $f(۴)-۳f(۲)=-۲$ مقادیر a و b را بدست آورید.

در هر مورد که تابع معکوس پذیر است نمودار تابع معکوس آن را رسم کنید.





الف) نشان دهید تابع $f(x)=\sqrt{۴x-۵}$ یک‌به‌یک است.

ب) ضابطه تابع معکوس آن را بیابید.

ثابت کنید $x \geq ۲$ ، $f(x) = (x - ۲)^۲$ یک‌به‌یک است. سپس ضابطه تابع معکوس f رابنویسید.

تابع $f(x) = \sqrt{x + ۲}$ مفروض است. اولاً: ثابت کنید f یک‌به‌یک است. ثانیاً: ضابطه‌ی معکوس f را بنویسید

ثابت کنید تابع $f(x) = x^۲ + ۱$ در بازه‌ی $(-\infty, ۰]$ یک‌به‌یک است. سپس ضابطه‌ی تابع معکوس تابع f را تعیین کنید.

ابتدا یک‌به‌یک بودن تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x+۱ & ، \quad x<۰ \\ x^۲+۱ & ، \quad x\geq ۰ \end{cases}$ را بررسی کنید، سپس در صورت وجود، معکوس تابع f را تعیین کنید.

نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=(۱-x)^۳$ یک‌به‌یک است. سپس ضابطه تابع معکوس آن را بنویسید.

معکوس تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۱ \\ ۲x-۱ & x<۱ \end{cases}$ را بدست آورید.

معکوس تابع $y=\sqrt{x+۲}+۱$ را بدست آورید.

نشان دهید تابع $f(x)=(۱-۲x)^{۳}$ معکوس پذیر است سپس ضابطه معکوس آنرا بدست آورید.

ثابت کنید تابع $f(x)=x^{۲}-۲x+۳$ در فاصله $x\geq ۱$ یک به یک راست سپس ضابطه معکوس آنرا بیابید.

یک به یک بودن تابع $f(x)=\begin{cases} x^{2}-1 & x\geq 1 \\ 2x-3 & x<1 \end{cases}$ را بررسی کرده سپس ضابطه معکوس آنرا بیابید.

نشان دهید تابع $f(x)=\sqrt{4x-5}$ یک به یک است . سپس ضابطه معکوس آن را بیابید.

ضابطهٔ وارون هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.

آ) $f(x)=2x-1$

ب) $f(x)=\sqrt{x}+3$

درس ۴

اعمال روی توابع

اعمال جبری روی توابع

اگر f و g توابعی با دامنه‌ی D_f و D_g باشند، آن‌گاه:

الف) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \Rightarrow D_{f\pm g} = D_f \cap D_g$

ب) $(f.g)(x) = f(x).g(x) \Rightarrow D_{f.g} = D_f \cap D_g$

ج) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\}$

د) $(kf)(x) = kf(x) \Rightarrow D_{kf} = D_f$

تعیین $f \pm g$: برای تعیین $f \pm g$ ابتدا اشتراک دامنه‌های f و g را تعیین می‌کنیم، سپس برای هر x مشترک، yها را با هم جمع یا از هم کم می‌کنیم.

تعیین $f.g$: برای تعیین $f.g$ ابتدا اشتراک دامنه‌های f و g را تعیین می‌کنیم، سپس برای هر x مشترک، yها را در هم ضرب می‌کنیم.

تعیین $\frac{f}{g}$: برای تعیین $\frac{f}{g}$ ابتدا اشتراک دامنه‌های f و g را تعیین می‌کنیم، سپس برای هر x مشترک، yهای تابع f را بر yهای تابع g تقسیم می‌کنیم.

کار در کلاس

۱ اگر $f(x) = x + ۲$ و $g(x) = \sqrt{x - ۱}$، $f+g$ را محاسبه کنید. دامنهٔ تابع $f+g$ را به‌دست آورید.

۲ اگر $f = \{(۱,۲), (-۲,۵), (۰,۷)\}$ و $g = \{(۱,۵), (۲,۴), (۰,-۱)\}$
ابتدا دامنهٔ $f+g$ را به‌دست آورید و سپس $f+g$ را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x+2}$ و $g(x)=\sqrt{3-x}$ و $h(x)=\dfrac{x+2}{2x+1}$ توابع $f+g$، $g-h$، gh و $\dfrac{f}{g}$ را محاسبه کنید و دامنهٔ آنها را به‌دست آورید. کدام‌یک از مقادیر $(f+g)(2)$ و $(f+g)(5)$ وجود دارند؟

کار در کلاس

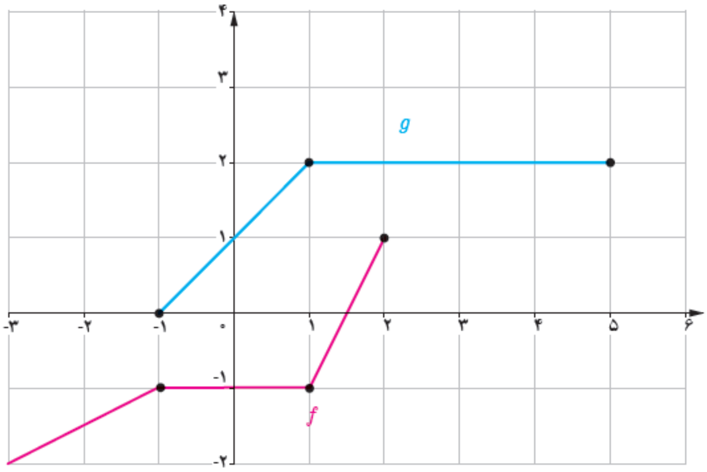
نمودارهای توابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر $(f+g)(1)$ و $(f+g)(-1)$ را به‌دست آورید.

ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

پ) ضابطه توابع $f+g$ و f ، g را به‌دست آورید.

ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطه آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.



توابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۲,۲),(۳,۷),(-۱,۲)\}$ مفروض‌اند. توابع $f+g$، $f-g$، $f.g$ و $۳f$ را تشکیل دهید.

اگر $f=\{(-۲,۱)(۱,-۱)(۲,۲)\}$ و $g=\{(۱,۰)(۲,-۱)(۳,۲)\}$ دو تابع باشند، توابع زیر را به صورت زوج مرتب بنویسید.

$۳f$

$۲g$

$f-۳g$

$۲f\times g$

$\frac{f}{g}$

$۳f+۲g$

اگر $f(x)=x^۲-۱$ و $g(x)=x+\frac{۱}{x}$ باشند ، $f+g$, $f-g$, $f.g$ و دامنه ی آنها را بیابید.

اگر $f(x)=\sqrt{x-۲}$ و $g(x)=x-۳$ باشد ضابطه و دامنه $\frac{f}{g}$ را بیابید؟

اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\geq ۱ \\ ۲-x^{۲} & x<۱ \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} ۲-۲x & x\geq ۱ \\ x^{۲}+۵ & x<۱ \end{cases}$ باشد $f+g$, $f-g$, $f.g$ را محاسبه کنید؟

اگر $f(x)=۳x+۲$, $g(x)=x^{۲}-۱$ در تابع باشند، مقدار x را از معادله $(f-g)(x)=۰$ بدست آورید.

اگر $f(x)=\begin{cases} x-۱ & x\geq ۳ \\ x & x<۰ \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} ۳x & x\geq ۱ \\ x^۲ & x<۱ \end{cases}$ باشد مطلوبست $f+g$ و دامنه آن.

دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\sqrt{x+۳}$ مفروضند. ضابطه و دامنه $\frac{g}{f}$ را بیابید.

اگر $f(x)=\frac{۳}{x-۲}$, $g(x)=\frac{۴}{x}$ باشد ، مقدار $(\frac{۲f}{g})(۴)$ را بدست آورید.

اگر $f(x)=\sqrt{x-۳}$ و $g=\{(۰,۴)(۳,۲)(۵,۶)\}$ دو تابع باشند.دامنه $\frac{f}{g}$ را بیابید.

اگر $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$, $g(x)=۳x-۲$ باشد ، مقدار $(۳f+۲g)(۴)$ را بدست آورید.

ترکیب توابع

تابع مرکب: اگر f و g دو تابع با دامنه‌های معلوم D_f و D_g باشند در این صورت ترکیب آن‌ها را با نماد $fog(x)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

(یعنی در تابع f به جای مقدار x، تابع $g(x)$ را قرار می‌دهیم) $y = fog(x) = f(g(x))$

- شرط تشکیل fog آن است که: $D_f \cap R_g \neq \varnothing$
- در حالت کلی ترکیب توابع خاصیت جابه‌جایی ندارند یعنی: $(fog)(x) \neq (gof)(x)$
- ترکیب توابع خاصیت شرکت‌پذیری دارند یعنی: $(fog)oh = fo(goh)$
- در تابع هموگرافیک $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a + d = ۰$ باشد آن‌گاه:

$$\overbrace{fofofo......of}^{\text{n مرتبه}}(x) = \begin{cases} x & : \text{n زوج} \\ f(x) & : \text{n فرد} \end{cases}$$

دامنه‌ی تابع مرکب: برای تعیین دامنه‌ی توابع مرکب از دستورات زیر استفاده می‌کنیم.

$$D_{fog} = \{x \mid x \in D_g \,,\, g(x) \in D_f\} \quad , \quad D_{gof} = \{x \mid x \in D_f \,,\, f(x) \in D_g\}$$

کار در کلاس

اگر $f(x) = x^۲ + ۱$ و $g(x) = ۲x + ۳$

الف) دامنه و ضابطه تابع‌های fog و gof را به‌دست آورید.

ب) آیا تابع‌های gof و fog مساوی‌اند؟

مثال : اگر داشته باشیم $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=x^2+3$، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

کار در کلاس

اگر $f=\{(2,-5),(3,-5),(-2,4),(11,7)\}$ و $g=\{(3,2),(6,3),(4,-2),(2,11)\}$ ، ابتدا D_{fog} و D_{gof} و سپس توابع fog و gof را محاسبه کنید.

تمرین

۱ اگر $f(x)=4x$ و $g(x)=2-x$، توابع $\frac{f}{g}$ ، $f-g$ و fog را به همراه دامنهٔ آنها به‌دست آورید.

۲ برای دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{۴}{x}$ تابع fog و دامنهٔ آن را به‌دست آورید.

۳ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $g(۴)=۷$ و $f(۷)=۵$ آن‌گاه $(fog)(۴)=۳۵$

ب) اگر $f(x)=x+۴$ و $g(x)=۳x$ آن‌گاه $(\frac{f}{g})(۲)=۱$

پ) اگر $g(x)=۲x-۱$ و $f(x)=\sqrt{x}$ آن‌گاه $(fog)(۵)=g(۲)$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $fog=gof$

ث) اگر $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ ، آن‌گاه $(fog)(۵)=-۲۵$ و $(fog)(x)=-x^۲$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $fg=gf$

۴ فرض کنیم $\begin{cases} g:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ g(n)=۲n \end{cases}$ و $f:A\to\mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود : $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷)\}$ که در آن : $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، توابع $g+f$ و gof را به‌دست آورید.

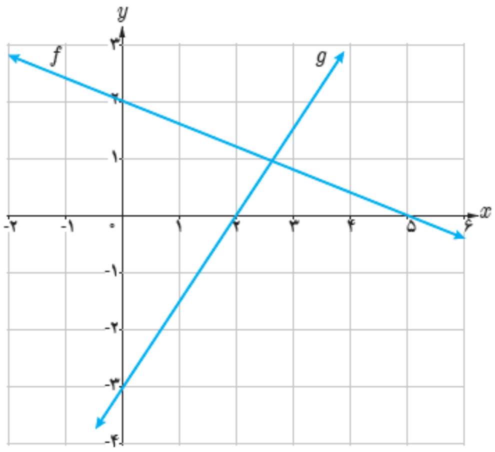
۵ اگر $f=\{(-۴,۱۳),(-۱,۷),(۰,۵),(\frac{۵}{۲},۰),(۳,-۵)\}$ و $g=\{(-۴,-۷),(-۲,-۵),(۰,-۳),(۳,۰),(۵,۲),(۹,۶)\}$
توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

۶ اگر $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۵}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^{۲}}$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

۷ اگر $f(x)=x^{۲}-۹$ و $g(x)=x+۳$، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنهٔ آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^{۲}-۹}{x+۳}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=x-۳\quad,\quad D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}$$

۸ اگر $f(x)=2x+5$ ، $f^{-1}(x)$ ، fof^{-1} و $f^{-1}of$ را به‌دست آورید.

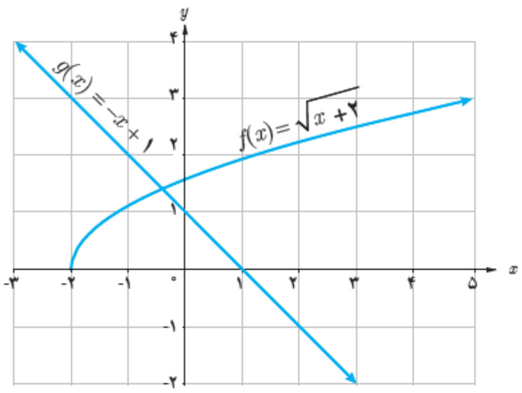


۹ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f+g$ ، $f-g$ و fg را محاسبه کنید.

۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هرکدام از عبارت‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(2)$ ب) $(f+g)(-3)$ پ) $(fg)(\frac{1}{2})$

ت) $(fog)(-4)$ ث) $(\frac{f}{g})(0)$ ج) $(gof)(-1)$



۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به‌صورت $y = ax + b$ $(a \neq ۰)$ باز هم یک تابع خطی است.

۱۲ تابع $f(x) = \frac{۵}{۹}(x - ۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی‌گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

توابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$, $g(x)=x+۲$ مفروض اند .

الف- دامنه fog ب- ضابطه $fog(x)$ را در صورت وجود بیابید.

توابع $f(x)=x-۱$, $g(x)=\frac{۱}{x}$ مفروض اند .

الف- دامنه fog بدون تشکیل ضابطه ب- ضابطه $fog(x)$ را در صورت وجود بیابید.

توابع $f(x)=x-۱$, $g(x)=\frac{۱}{x-۱}$ مفروض اند .

الف- دامنه f,g را محاسبه کنید. ب- ضابطه gof را در صورت وجود بیابید.

توابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$, $g(x)=\sqrt{x+۳}$ مفروض اند .

الف- دامنه f,g را محاسبه کنید. ب- ضابطه fog را در صورت وجود بیابید.

توابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$, $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$ مفروض اند .

الف- دامنه gof را محاسبه کنید. ب- ضابطه gof را در صورت وجود بیابید.

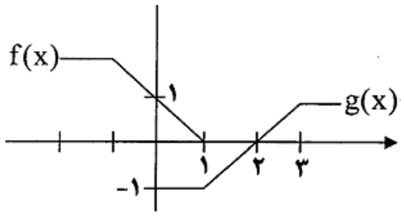
اگر $f=\{(۱,۲),(۳,۴),(۰,۱)\}$, $g=\{(۱,۵),(۰,۰),(-۲,۱),(۳,۳)\}$ دو تابع باشند:

الف) تابع $(f+g)(۱)$ را بدست آورید.

ب) تابع $\frac{f}{g}$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ج) دامنه gof را مشخص کنید.

با استفاده از نمودار توابع f,g در شکل روبرو عبارات داده شده را محاسبه کنید.



الف) $(f+g)(۱)$
ب) $(fog)(۲)$

اگر $f(x)=۴x-۳$, $g(x)=x+۲$ ، تابع $(gof)^{-۱}$ را حساب کنید.

اگر $f(x)=۳x+a$, $g(x)=۲-x$ باشد $fog(x)-gof(x)=۶$ مقدار a چقدر است.

دو تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$, $g(x)=\sqrt{۲-x}$ داده شده‌اند:

الف- مقدار $fog(-۱۴)$　ب- دامنه تابع gof

توابع $f(x)=x^۲+۳x-۱$, $g(x)=x+۱$ می باشند. a را چنان بیابید که $fog(a)=gof(a)$.

اگر $f(x)=x^۲+۲x+۲$, $fog(x)=x^۲-۴x+۵$ دو تابع باشند تابع $g(x)$ را بیابید.

اگر $g(x)=x^۳-۱$, $fog(x)=۲g(x)$ باشد $f(x)$ را بیابید.

دوتابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$, $g(x)=\sqrt{x+۳}$ داده شده است.

الف- دامنه f , g را بیابید.　ب- دامنه تابع fog و ضابطه gof.

اگر $f(x)=۳x+۲$, $g(x)=x^۲-۱$ باشد مقدار x را از $gof(x)=۸۰$ بدست آورید.

اگر $f(x)=x+۹$, $g(x)=ax^۲+bx+c$ باشد c,b,a را طوری تعیین کنید که $fog(x)=x^۲-۳x+۴$ باشد.

توابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$, $g(x)=x^۲+۱$ مفروضند،دامنه توابع f , g , $\frac{g}{f}$, gof را بیابید.

اگر $f(x)=x-a$, $g(x)=ax^{۲}+bx+c$ باشد ضرایب c,b,a را طوری محاسبه کنید که : $fog(x)=x^{۲}+۵x+۶$.

توابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$, $g(x)=\sqrt{۴-x^{۲}}$ مفروضند مطلوب است:

الف- دامنه gof　ب- ضابطه $fog(x)$

اگر $f(x)=\sqrt{۱-x^{۲}}$, $g(x)=Sin x$ باشد ضابطه تابع fog را مشخص کنید.

توابع g, f با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{x-۳}$, $g(x)=\dfrac{x+۱}{x-۱}$ مفروضند:

الف- دامنه توابع gof, g, f را تعیین کنید.

ب- ضابطه gof را بنویسید.

دو تابع $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$, $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x+۲}}$ مفروضند دامنه تابع $\frac{fog}{f}$ را تعیین کنید.

تابع g, f با ضابطه‌های $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$, $g(x)=\sqrt{x+۲}$ مفروضند.

الف- دامنه gof, g, f را تعیین کنید.

ب- ضابطه تابع gof را در صورت وجود تعیین کنید.

توابع g, f با ضابطه‌های $f(x)=\frac{۲}{x+۱}$, $g(x)=\sqrt{x}$ مفروضند:

اولاً: دامنه تابع fog را تعیین کنید.

ثانیاً: در صورت وجود ضابطه تابع fog را بنویسید.

اگر $f(x)=۲(x+۳)^۲$, $g(x)=\frac{f(x-۱)-۱۰}{x-۱}$ و مقدار عددی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $gof(-۲)$ ب) $fog(۰)$

اگر $f(x)=x^۲-۵x+۶$ و $g(x)=x^۲-۱$، تعداد نقاط تلاقی تابع fog با محور xها را به‌دست آورید.

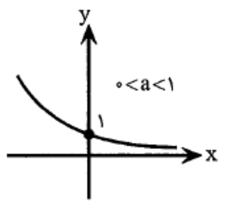
توابع نمایی و لگاریتمی

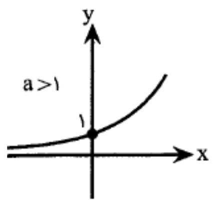
فصل ۳

درس ۱ تابع نمایی

تعریف: هر تابع به صورت $y = a^x$ که a عدد حقیقی و $a \neq 1$ ، $a > 0$ و x یک متغیر است، یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

◀ در نمودار تابع نمایی دو حالت کلی زیر را داریم:





◀ برای به‌دست آوردن دامنه‌ی تابع $f(x) = a^{g(x)}$ کافی است دامنه‌ی تابع $g(x)$ را به‌دست آوریم. $D_f = D_g$

کار در کلاس

الف) نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید و آن را با نمودار $y = 2^x$ مقایسه کنید.

ب) دامنه و برد تابع را به‌دست آورید.

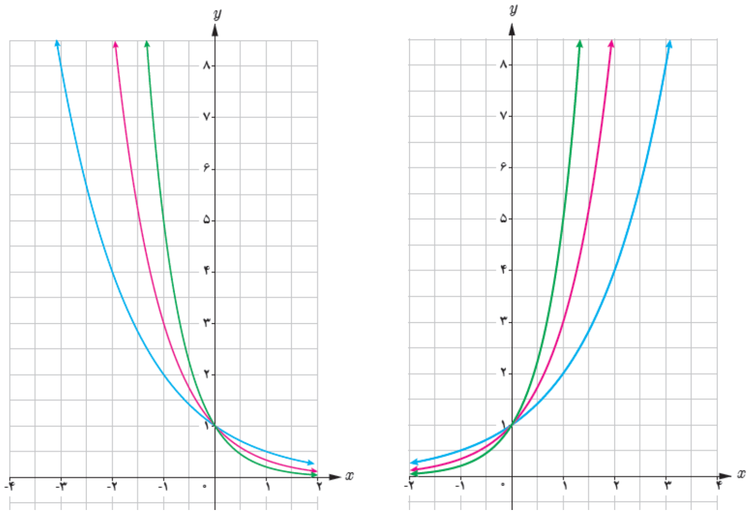
کار در کلاس

۱ نمودارهای سه تابع $f(x)=2^x$، $g(x)=3^x$ و $h(x)=5^x$ در شکل (۱) رسم شده‌اند. ضابطه هر تابع را روی نمودار آن بنویسید.

۲ دامنه و برد هر تابع را بنویسید.

۳ آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟ چرا؟

۴ نمودارهای توابع $u(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$، $v(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $t(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ در شکل (۲) رسم شده‌اند. ابتدا ضابطه هر یک را روی نمودار آن بنویسید و سپس دامنه و برد آنها را به‌دست آورید. آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟



شکل (۲)　　شکل (۱)

۵

الف) اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$2^4, (\frac{1}{2})^2, 2^2, 2^3, (\frac{1}{2})^4, (\frac{1}{2})^3$

ب) جاهای خالی را پر کنید :

در تابع $f(x)=a^x$،

ـ اگر $a>1$، با افزایش مقدار x، مقادیر f .... می‌یابند.

ـ اگر $0<a<1$، با افزایش مقدار x، مقادیر تابع f .... می‌یابند.

مثال : توابع زیر همگی نمایی هستند :

$$g(x)=(\frac{۱}{۲})^x \ , h(x)=(\frac{۳}{۲})^x \ , \ f(x)=(۳/۱۴)^x$$

تذکر : در حالت کلی هر تابع با ضابطه $h(x)=ka^x$ $(k\neq ۰ , a>۰ , a\neq ۱)$ **رفتار نمایی** دارد.

به‌عنوان مثال، توابع $f(x)=۳\times ۲^x$ یا $g(x)=(\frac{۲}{۵})^{x-۱}$ رفتار نمایی دارند.

تمرین : الف) سه عدد بین اعداد $۳^{۲/۵}$ و $۳^{\sqrt{۱۰}}$ پیدا کنید.

ب) نامعادلهٔ توانی $\frac{۱}{۱۰۲۴}>۴^{۲x-۱}$ را حل کنید.

پ) اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، به‌طوری که $a^x>a^y>a^z$ ، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ $(a>۱)$.

مثال ۲ : آیا عبارت $(-۲)^x$ را می توان به ازای هر عدد حقیقی x محاسبه کرد.چرا؟

مثال ۳ : دامنه و برد تابع $y=a^x$ را مشخص کنید.

مثال ۴ : آیا تابع $y=a^x$ یک به یک است. چرا؟

مثال ۵ : نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید، سپس دامنه و برد هریک را بیابید.

$y = ۲^x$	$y = (\frac{۱}{۳})^x$	$y = (\frac{۱}{۲})^x - ۲$	$y = ۰/۵ \times ۳^x$
$y = ۲^{x-۲} + ۱$	$y = ۳ \times ۲^x$	$y = (\frac{۱}{۳})^{-x} + ۲$	$y = (\frac{۳}{۲})^x$
$y = ۲^{x+۱}$	$y = ۲^{\vert x \vert}$	$y = ۵^x - ۳$	$y = ۲^{-\vert x \vert}$

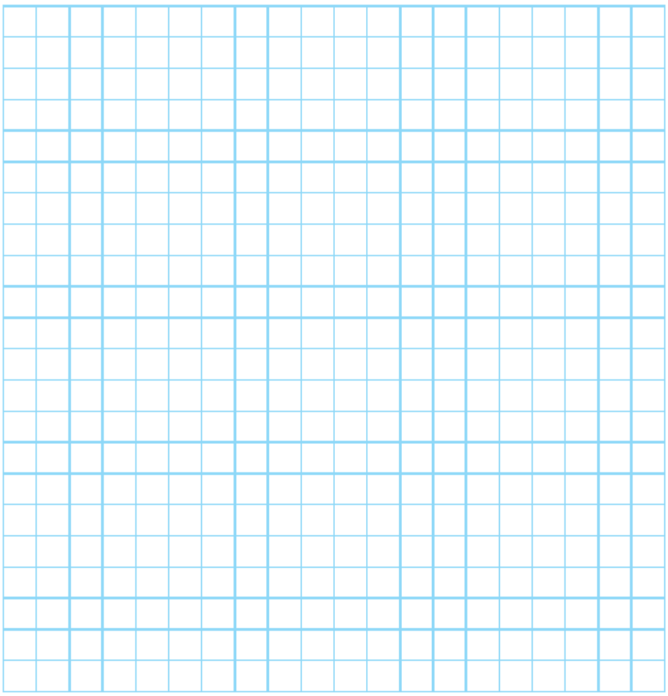
در تابع نمایی $f(x) = a + b \times c^x$ مقادیر a، b و c را چنان بیابید که داشته باشیم:

$f(۴) = ۹۰$ $\quad$ $f(۲) = ۳۰$ $\quad$ $f(۰) = ۱۵$

مثال ۶ : کدام یک از توابع زیر نمایی است و کدام یک رفتار نمایی دارد. نوع توابع زیر را مشخص کنید.

$y=2^x$	$y=(\frac{1}{3})^x$	$y=(\frac{1}{2})^x-2$	$y=0.5\times 3^x$
$y=2^x+1$	$y=3\times 2^x$	$y=(\frac{1}{3})^x+2$	$y=(\frac{3}{2})^x$
$y=2^{x+1}$	$y=2^{\lvert x\rvert}$	$y=5^x-3$	$y=2^{-\lvert x\rvert}$
$y=x(x+1)$	$y=(\frac{1}{3})^x$	$y+2x=3$	$y=0.5\times 3^x$
$y=x^3+1$	$y=3\times 2^x$	$y=x-\frac{1}{2}$	$y=(\frac{3}{2})^{-x}$

مثال ۷ : نمودار هر یک از توابع $y=3\times 2^x$ و $y=2^x$ را رسم کرده وجه مشترک و وجه اختلاف آنها را مشخص کنید.



ویژگی‌های توان و رادیکال

① $a^m\times b^m=(ab)^m$

② $\frac{a^m}{b^m}=(\frac{a}{b})^m$

③ $a^m\times a^n=a^{m+n}$

④ $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

⑤ $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$ $\qquad (a\neq 0)$

⑥ $(a^m)^n=a^{mn}$

⑦ $a^0=1$

⑧ $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow a=b^n$

⑨ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

نمودار توابع زیر را رسم نمائید و دامنه و برد آنها را بنویسید.

الف) $y-1=\frac{1}{2}^{x+3}-2$

ب) $y=2^{x-3}+1$

حدود m را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=(m^2-m-1)^x$:

آ) صعودی باشد.

ب) نزولی باشد.

مثال : نمودار تقریبی هریک از توابع زیر را رسم کنید.

$y=|5^x-1|$

$y = ۴^{x+۱} - ۱$

$y = ۴^{-x+۱} - ۱$

$y = ۳^{|x|}$

$y = ۳^{-x} + ۱$

$y = ۵^{-|x|}$

$y = (\frac{۱}{۲})^{x+۱}$

$y = -\left|۲^{-|x|}\right|$

معادلات نمایی: در معادلات نمایی پارامتر مجهول در توان دیده می‌شود. برای حل معادلات نمایی کافی است در دو طرف تساوی دو عبارت نمایی هم‌پایه ایجاد کنیم و سپس توان‌ها را برابر قرار داده و مقدار مجهول را به‌دست آوریم.

مثال : معادلات زیر را حل کنید.

$$۲^{x}+۲^{x+۱}+۲^{x+۲}+۲^{x+۳}=۱۲۰$$

$$(۳-۲\sqrt{۲})^{x^{۲}}=(۳+۲\sqrt{۲})^{-۳x}$$

$$(۲۵)^{x-۱}=\left(\frac{۱}{۱۲۵^{x-۱}}\right)^{۲x+۲}$$

$$۲^{-۲x-۱}+۴\left(\frac{۱}{۴}\right)^{x}-۷۲=۰$$

$$۸^{۲x-۱}\times ۲^{-۲x}=۳۲^{x}$$

$$۱۰^{۱+x^۲} - ۱۰^{۱-x^۲} = ۹۹$$

$$(\sqrt[x]{۲۵})^{۲x^۲+۱} = (۱۲۵)^{\frac{۱}{۳}x+۱}$$

حل نامعادلات نمایی

$$a^x \geq a^k \begin{cases} \xrightarrow{\text{اگر } ۰<a<۱} x \leq k \\ \xrightarrow{\text{اگر } a>۱} x \geq k \end{cases}$$

در نامساوی‌های زیر، حدود x را بیابید.

$$۳^x > ۲۷$$

$$(\frac{۱}{۲})^{|x|} > \frac{۱}{۴}$$

$$۳^{۲x-۱} > \frac{۱}{۲۴۳}$$

$$۳^{x+۱} < ۲^{x+۱}$$

$$(\sqrt{۲}-۱)^{x^{۲}+۲} > (\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}})^{۳x}$$

$$(\frac{۷}{۵})^{۳-۲x} < (\frac{۵}{۷})^{x+۲}$$

$$(\sqrt{۲}-۱)^{۳x-۱}+۱ > \sqrt{۲}$$

$$(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۲x+۱} > (\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{x+۲}$$

$$۳^{-\sqrt{x^{۲}-۶x+۲۵}} > (\frac{۱}{۳})^{۴}$$

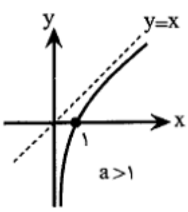
درس ۲ تابع لگاریتمی و لگاریتم

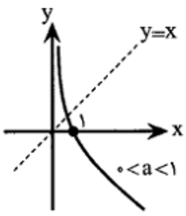
تعریف: تابع $y=a^x$ $(a\neq 1, a>0)$ تابعی یک‌به‌یک و درنتیجه دارای معکوس است، معکوس آن را با نماد $y=\log_a x$ نشان داده و آن را تابع لگاریتم می‌گویند و می‌نویسند.

$$x=a^y \Leftrightarrow y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$$

مثال :

◀ نمودار تابع $y=\log_a x$، قرینه‌ی نمودار $y=a^x$ نسبت به خط $y=x$ است. پس نمودار تابع به صورت زیر خواهد بود.





◀ چون $\log_e x=\ln x$، بنابراین نمودار و ویژگی‌های تابع $y=\ln x$ مشابه تابع $y=\log_a x$ است.

مثال : تساوی‌های زیر را به صورت توانی بیان کنید.

الف) $\log_7 1=0$

ب) $\log_3 \frac{1}{27}=-3$

✤ **مثال :** مقادیر زیر را محاسبه کنید :

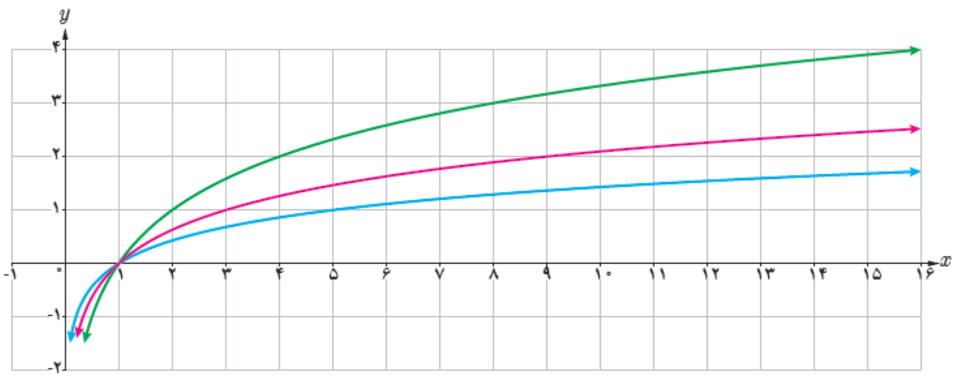
الف) $\log_{۲} ۸$ ب) $\log_{۶} ۶$ پ) $\log_{۴} ۱$

کار در کلاس

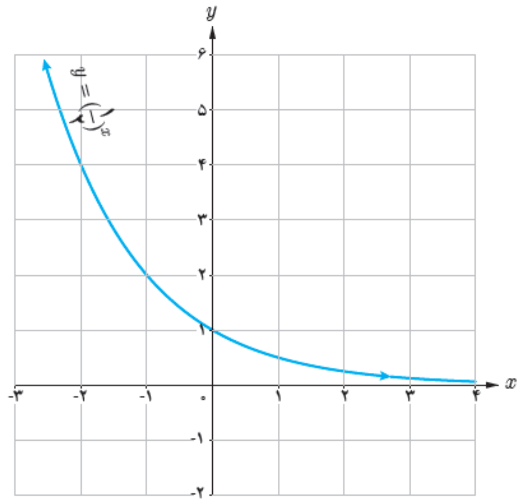
۱ الف) نمودار سه تابع $f(x)=\log_{۲} x$ ، $g(x)=\log_{۳} x$ و $h(x)=\log_{۵} x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. ضابطه هریک را روی نمودار آن بنویسید.

ب) محل دقیق هریک از نقاط زیر را روی نمودار متناظرش نشان دهید.

(۱۶ , ۴) و (۹ , ۲) و (۵ , ۱)

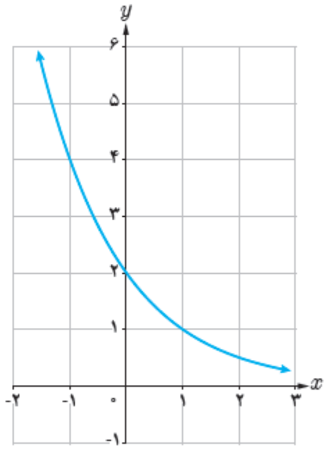


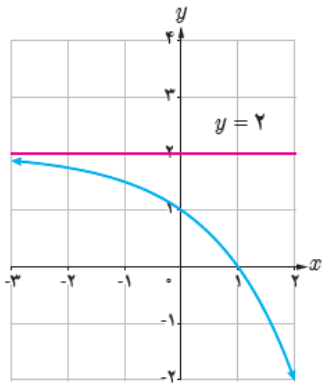
پ) با توجه به نمودار $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ نمودار $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

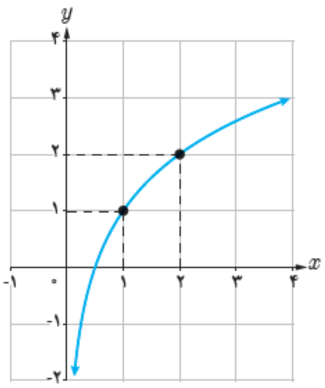


۲ مشخص کنید هریک از نمودارهای زیر به کدام‌یک از ضابطه‌های زیر تعلق دارد؟

الف) $y=-2^x+2$ ب) $y=\log_2(x+1)$ پ) $y=(\frac{1}{2})^{x-1}$







۳ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_3 81$ ب) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6}$ پ) $\log_2 8$

تمرین

۱ با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید :

$\log_{10} 0/01$

$\log_6 \frac{1}{6}$

$\log_2 \sqrt{2}$

$\log_7 \sqrt[3]{7^2}$

۲ نمودار تابع $y=\log_a x$ را برای دو حالت $a>1$ و $0<a<1$ با هم مقایسه کنید.

۳ الف) خط $y=27$ نمودار تابع $y=3^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ب) خط $y=10$ نمودار تابع $y=(0/01)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۴ نمودار دو تابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=2^x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

۵ عبارت درست را با ✓ و عبارت غلط را با × علامت بزنید.

ـ لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است.

ـ لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

ـ تابع لگاریتم، تابعی یک‌به‌یک است.

ـ تابع لگاریتم محور y ها را قطع می‌کند.

ـ اگر نقطه (b,d) روی نمودار $y=a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه (d,b) روی نمودار $y=\log_a x$ قرار دارد.

ـ اگر $a>b>0$ آنگاه $\log_{10} a<\log_{10} b$.

۶ نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۱ + \log_۲ x$

ب) $y = -۳^x - ۲$

پ) $y = ۴(\frac{۱}{۳})^x$

تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $\log_۳ \square = -۴$

ب) $\log ۰/۰۰۱ = \square$

ج) $\log_{\square}^{۲} = \frac{۲}{۳}$

د) $\log \sqrt{\square} = \frac{۳}{۲}$

مثال : توابع زیر را رسم کنید.

آ) $y = \log(x - ۲)$

ب) $y = \log_{۰/۲}(x) + ۱$

پ) $y = \log_۳(x + ۱) - ۱$

ت) $y = \log_{۰/۴} |x|$

ث) $y = |\log(x) - ۱|$

حل نامعادلات لگاریتمی

در حل نامعالات لگاریتمی باید حواسمون باشه که اگر مبنا بین صفر و یک باشد علامت نامعادله عوض می‌شود به عبارتی:

$$a > ۱ \rightarrow \begin{cases} \log_a^x < \log_a^y \rightarrow x < y \\ \log_a^x < b \rightarrow x < a^b \end{cases}$$

$$۰ < a < ۱ \rightarrow \begin{cases} \log_a^x < \log_a^y \rightarrow x > y \\ \log_a^x < b \rightarrow x > a^b \end{cases}$$

مجموعه جواب نامعادلات زیر را بیابید.

$\log_{۰/۵}^{(x-۵)} < -۲$

$۳^{\log_۳^{۲x}} + ۲^{\log_۲^{x^۲}} \leq ۳$

$\log_۴^x \geq ۲$

$\log(\log x) > ۰$

$\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱) \geq ۲$

$\log_۳(۱۰-x) \leq ۲$

$\log(x+۲) > \log(۲x+۱)$

دامنه توابع لگاریتمی

برای محاسبهٔ دامنهٔ عبارت $\log_B A$ باید سه شرط $A > ۰$، $B > ۰$ و $B \neq ۱$ را لحاظ کنیم. سپس از جواب‌های به دست آمده اشتراک بگیریم.

دامنه توابع لگاریتمی زیر را بیابید.

$$f(x) = \log(x + ۳)$$

$$f(x) = \log(x - ۱)^۲$$

$$f(x) = \log(۱۶ - x^۲)$$

$$f(x) = \sqrt{\log(x - ۵)}$$

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{۱}{۲}}(x - ۵)}$$

$$f(x) = \log_{-x}(۱ - x^۲)$$

$$f(x) = \frac{\log(x - ۱)}{\log(۴ - x^۲)}$$

$f(x)=\log_{x-۲} ۹-x^{۲}$

$f(x)=\log(x^{۲}-۳x+۲)$

$f(x)=\log\frac{۱-x}{x+۱}$

$y=\log_{۲x-۱۰}^{\frac{x-۴}{۲}}$

$y=\log_{x-۱}(-x^{۲}+۴x-۳)$

درس ۳ — ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

لگاریتم اعشاری: اگر پایه لگاریتم عدد ۱۰ انتخاب شود، به آن لگاریتم اعشاری می‌گوییم. در لگاریتم اعشاری معمولاً پایه لگاریتم را نمی‌نویسیم:

$\log_{10} x = \log x$

لگاریتم طبیعی: اگر پایه‌ی لگاریتم عدد نپر (e) انتخاب شود، به آن لگاریتم طبیعی می‌گوییم و آن را با lnx نمایش می‌دهیم: $\log_e x = \ln x$

قوانین لگاریتم

① $\log_a^1 = 0$

② $\log_a^a = 1$

③ $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b \quad (a,b,c \in \mathbb{R}^+, c \neq 1)$

④ $\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b \quad (a,b,c \in \mathbb{R}^+, c \neq 1)$

$\boxed{\log 5 = 1 - \log 2}$

مثال : فرض کنیم $a=\log 2$. نشان دهید $\log 5 = 1 - a$.

کار در کلاس

۱ نشان دهید که اگر $a, b, c>0$ و $c\neq 1$، آنگاه

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

۲ اگر $a=\log 2$ و $b=\log 3$، حاصل عبارت‌های زیر را برحسب a و b بنویسید.

الف) $\log 0/75$

پ) $\log 0/005$

ب) $3\log \sqrt[3]{4} - \log 250$

⑤ $\log_b a^n = n\log_b a$

⑥ $\log_{b^m} a = \frac{1}{m}\log_b a$

$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n}\log_b a$

۷) $\log_b^a = \dfrac{1}{\log_a^b}$

۸) $\log_b^a = \dfrac{\log_c^a}{\log_c^b}$

۹) $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$

$a^{\log_a^x} = x$

۱۰) $\log_d \log_c \log_b \log_a x = e \Rightarrow x = a^{b^{c^{d^e}}}$

مثال: اگر $\log_b a = \frac{3}{2}$، آن‌گاه حاصل $\log_{\sqrt{b}} ab^2$ را به‌دست آورید.

اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، مقادیر تقریبی لگاریتم‌های زیر را بیابید.

الف) $\log 0/75$

ب) $\log 0/005$

ج) $3\log \sqrt[3]{4} - \log 250$

اگر $\log_{9} \sqrt[3]{3} = x$ باشد، مقدار $\log_{2} 1 - x$ را به‌دست آورید.

اگر $m = \log_{2}^{3}$ و $n = \log_{2}^{5}$، آن‌گاه حاصل عبارت $\log_{8}^{45} + \log_{2}^{\frac{\sqrt[3]{15}}{12}}$ را برحسب m و n محاسبه کنید.

با حل دستگاه معادلات زیر مقدار x و y را بیابید.

الف) $\begin{cases} \log_{3} x - \log_{9} 64 = 0 \\ 2x - y = 11 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \log x . \log y = 16 \\ \log xy = 10 \end{cases}$

عبارات لگاریتمی زیر را ساده کنید.

$$A = \log_{۲} \frac{۱}{۸} - ۴\log \sqrt{۱۰}$$

$$B = \log ۲۴ - \frac{۱}{۲}\log ۹ + \log ۱۲۵$$

$$C = \log_{۲}(\log_{۳}(\log_{۳}^{۲۷}))$$

$$D = \frac{\log_{۳}^{۱۶}}{\log_{۳}^{۲} + \log_{۳}^{۴}}$$

$$E = \frac{۱}{\log_{a}^{b} + ۱} + \frac{۱}{\log_{b}^{a} + ۱}$$

اگر $\log ۲ = ۰/۳$ و $\log ۳ = ۰/۴$ باشد، حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$N = \frac{۵}{۴}\log \sqrt[۵]{۶۴} + \log \frac{۱۰۸}{۵\sqrt{۵}}$$

$$\log \frac{۲۷\sqrt[۳]{۱۶}}{۲۵}$$

اگر $A = \sqrt{۲+\sqrt{۳}} - \sqrt{۲-\sqrt{۳}}$، در این صورت لگاریتم A در پایهٔ ۸ را بیابید.

حل معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی، با استفاده از خواص لگاریتم، عبارت‌های طرفین را ساده کرده تا نهایتاً به معادله‌ای شبیه یکی از دو معادله زیر برسیم.

الف) $\log_a f(x) = b \Rightarrow f(x) = a^b$ ب) $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$

بعد از حل معادلات لگاریتمی، حتماً باید جواب‌های به‌دست آمده را در معادله‌ی اولیه امتحان کنیم و جوابی قابل قبول است که جلوی لگاریتم را صفر یا منفی نکند و مبنای لگاریتم را نیز صفر یا یک یا منفی نکند.

مثال : معادلهٔ لگاریتمی $\log_5(x^2-2) = \log_5 x$ را حل کنید.

مثال : معادله لگاریتمی $3\log_5 x - \log_5 4 = \log_5 16$ را حل کنید.

معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید :

الف) $\log_5(2x-1) = \log_5 x$

ب) $\log_3(x-1) + \log_3\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2$

پ) $\log x + \log(x+3) = 1$

معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\log_x(x+۲)=\log_x(۴-x)+۱$$

$$\log(۴-x)=\log(۶-x)-\log x$$

$$\log(x-۳)=۲\log\sqrt{۸}-\log(x-۱۰)$$

$$\log_x(x^۳-۴)-\log_x(x-۱)=\log_x(x^۲+۴)$$

$$\log_۲(۵x-۱)+\log_۲^x=۱+۲\log_۲^{\sqrt{۲}}$$

$$\log_۳\log_۴(x+۵)=۲\log_۴^۲-۱$$

کاربردهای لگاریتم

تابع جمعیت در انتهای هر سال به صورت $g(x)=0/008(1/01376)^x$ برآورد می‌شود.

به سادگی دیده می‌شود که جمعیت در پایان سال ۲۰۱۶ تقریباً برابر است با :

$$g(2016)=0/008\,(1/01376)^{2016} \simeq 7,385,074,512\ .$$

در اینجا می‌توان حدس زد که در چه سالی جمعیت جهان به ۸ میلیارد خواهد رسید، زیرا داریم :

$$g(x)=8\times10^{-3}\,(1/01376)^x=8\times10^{9}$$

$$\Rightarrow (1/01376)^x=10^{12} \Rightarrow x\log 1/01376=\log 10^{12} \Rightarrow x=\frac{12}{\log 1/01376}\simeq 2021$$

$$(\log 1/01376 \simeq 0/005935)$$

مثال : ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه و نماد میزان انرژی آزاد شده در زلزله است. اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده بر حسب ارگ (Erg) از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود :

$$\log E=11/8+1/5M.$$

از این رابطه می‌توان محاسبه کرد که مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله ۶/۶ ریشتری برابر است با :

$$\log E=11/8+1/5\,(6/6)=21/7 \Rightarrow E=10^{21/7}\,Erg.$$

مثال : زلزله‌ای که در سال ۱۳۶۹ در منطقهٔ رودبار رخ داد ۷/۳ ریشتر بود. میزان انرژی آزاد شده در مرکز زلزله را تخمین بزنید. (بزرگی زمین لرزه از رابطهٔ $\log E=11/4+1/5M$ به‌دست می‌آید که در آن M بزرگی زلزله در مقیاس ریشتر و E انرژی آزاد شده در واحد ارگ می‌باشد.)

مثال : نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای حدود ۲۵ سال است. اگر جرم نمونه‌ای از این ماده، ۲۴ میلی‌گرم باشد جدول زیر تغییرات جرم نمونه پس از t سال را نشان می‌دهد.

با توجه به جدول جرم باقی‌مانده از این نمونه بعد از گذشت t سال از رابطه $m(t)=\frac{۱}{۲^{\frac{t}{۲۵}}}(۲۴)=۲۴\times۲^{\frac{-t}{۲۵}}$ به‌دست می‌آید.

بنابراین، به‌عنوان مثال جرم باقی‌مانده پس از ۴۰سال برابر است با :

$m(t)$ (جرم برحسب میلی‌گرم)	t (زمان برحسب سال)
۲۴	۰
$\frac{۱}{۲}(۲۴)=۱۲$	۲۵
$\frac{۱}{۲^۲}\times۲۴=۶$	۵۰
$\frac{۱}{۲^۳}\times۲۴=۳$	۷۵
$\frac{۱}{۲^۴}\times۲۴=۱/۵$	۱۰۰

$m(۴۰)=۲۴\left(۲^{-\frac{۴۰}{۲۵}}\right)\simeq$ ۷/۹۰ میلی‌گرم

$m(t)=\mathbf{M}\times۲^{\frac{-t}{\mathbf{T}}}$

تمرین

۱ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_۴ m^۲-\log_۴ m-۳=۰$

ب) $\log_۲(۱۲b-۲۱)-\log_۲(b^۲-۳)=۲$

پ) $\log_{\frac{۱}{۱۰}}(x^۲-۱)=-۱$

۲ الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل، دیدیم که جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t)=۲^t$ به‌دست می‌آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟

$\log ۲ \simeq ۰/۳۰۱$

۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $a^{\log_b a}=a \quad (b\neq ۱ \,,\, a \,,\, b>۰)$

ب) $\log_d abc=\log_d a+\log_d b+\log_d c \quad (d\neq ۱ \,,\, a \,,\, b \,,\, c \,,\, d>۰)$

پ) $\log x \log y=\log x+\log y$

ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.

۴ نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می‌ماند، بیابید.

ب) طی چند روز، این جرم به ۰/۰۱ گرم کاهش می‌یابد؟

۵ عبارات زیر را ساده کنید. $(\log ۳\simeq ۰/۴۷۷۱ \,,\, \log ۲\simeq ۰/۳۰۱)$.

الف) $\log(۱۸\times ۳۷۵)$

ب) $\log\sqrt{۰/۷۵}$

پ) $\log_۲ \dfrac{\sqrt{۸}}{\sqrt[۴]{۲}}$

۶ گزینه‌های درست را با ✓ و گزینه‌های نادرست را با × علامت بزنید.

■ $\log_b a \times \log_a b = ۱$

■ $\log ۵ = \log ۳ + \log ۲$

۷ نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟

انرژی آزادشده (E) در یک زمین‌لرزه به بزرگی M ریشتر، از رابطهٔ $\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$ حاصل می‌شود. در یک زلزلهٔ ۶ ریشتری مقدار انرژی آزادشده چه‌قدر است؟

تابع جمعیت جهان در انتهای هر سال به صورت $g(t) = /۰۰۸(۱/۰۱)^t$ برآورده می‌شود. در چه سالی جمعیت جهان ۸ میلیارد نفر خواهد شد؟ $(\log ۱۰۱ = ۲/۰۰۵)$

نیمه‌عمر یک نوع مادهٔ هسته‌ای $\mathbf{M}$ حدود ۵۰ سال است. پس از چند سال از نمونه‌ای از $\mathbf{M}$ که جرم ۳۲ میلی‌گرم دارد، ۴ میلی‌گرم باقی می‌ماند؟

نیمه‌عمر یک نوع ماده حدود ۲۰ سال است. اگر جرم این ماده در ابتدا ۱۹۲ میلی‌گرم باشد، پس از چند سال، ۱۸۰ میلی‌گرم از ماده، از بین می‌رود؟

بعد از ۲۰۰ سال، $\frac{۱۵}{۱۶}$ جرم اولیهٔ یک ماده از بین می‌رود. نیم‌عمر ماده چه‌قدر است؟

نیمه‌عمر یک ماده ۴۰ سال است. اگر در ابتدا ۱۰۰ میلی‌گرم از این ماده موجود باشد، بعد از ۱۰۰ سال تقریباً چند میلی‌گرم از این ماده از بین رفته است؟

مثلثات

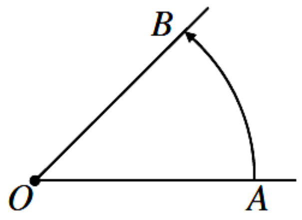
فصل ۴

درس ۱

رادیان

زاویه و واحد های اندازه گیری آن

اگر نقطه ی A را حول نقطه ی O دوران دهیم تا نقطه ی B بدست آید. در این صورت زاویه ی AOB به دست می آید.



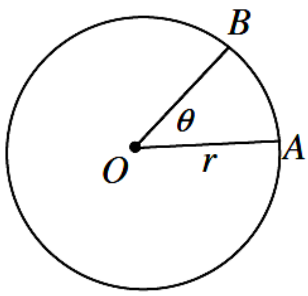
تذکر :

۱ : اگر دوران در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت باشد، زاویه را مثبت و اگر درجهت حرکت عقربه های ساعت باشد، زاویه را منفی در نظر می گیرند.

۲ : اگر نقطه ی A را دوران داده نشود، زاویه صفر می باشد. اگر نقطه ی A را به اندازه ی یک دور کامل دوران دهیم به محل اولیه ی خود بر می گردد. یک دوران کامل زاویه ای برابر ۳۶۰ درجه تشکیل می دهد.

واحد های اندازه گیری زاویه

هر زاویه دارای دو واحد اندازه گیری می باشد.



الف : درجه : یک درجه زاویه ای است که اندازه ی آن برابر $\frac{۱}{۳۶۰}$ دوران کامل است.

ب : رادیان : یک رادیان اندازه ی زاویه ای است که کمان روبروی آن برابر شعاع دایره باشد.

$$\overset{\frown}{AB} = r \rightarrow \angle\theta = ۱\ rad$$

نتیجه : یک دوران کامل (دایره) برابر ۳۶۰ درجه و ۲π رادیان است.

برای تبدیل واحد های اندازه ی زاویه از رابطه ی زیر استفاده می شود.

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$$

مثال : زاویه‌ی ۱۵° را بر حسب رادیان و زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۶}$ رادیان را بر حسب درجه بنویسید.

تمرین : اندازه ی زاویه ای ۳۰ درجه است، اندازه ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

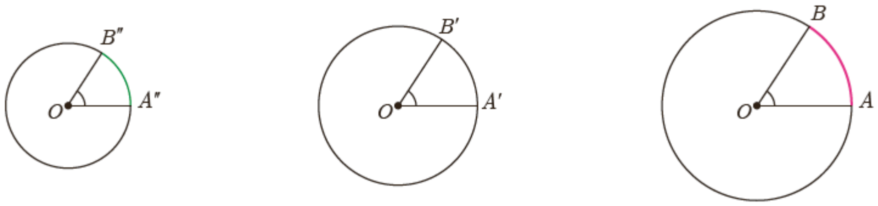
تمرین : اندازه ی زاویه ای ۹۰- درجه است، اندازه ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین : اندازه ی زاویه ای $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان است، اندازه ی این زاویه را بر حسب درجه به دست آورید.

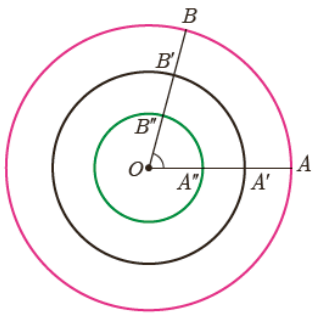
● **دایرهٔ مثلثاتی** دایره‌ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است. به این جهت، **جهت مثلثاتی** می‌گوییم. معمولاً مرکز این دایره مبدأ مختصات است.

۱ رادیان برابر است با اندازهٔ زاویه مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.

در تمام دایره‌های زیر اندازهٔ زاویهٔ مشخص شده ۱ رادیان است. در هر کدام با استفاده از نقاله اندازهٔ زاویه را بر حسب درجه مشخص کنید.



به عبارت دیگر اگر اندازهٔ $\widehat{AOB}$، ۱ رادیان باشد، در شکل مقابل داریم :

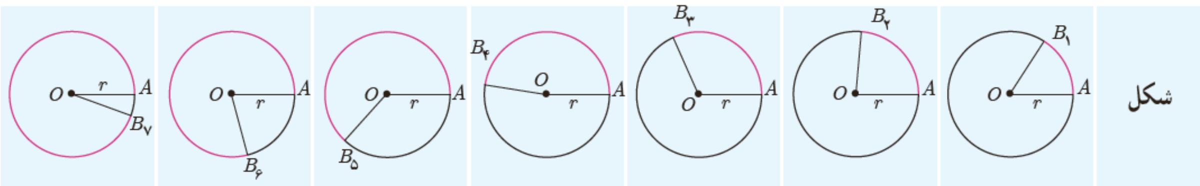


$OA = \widehat{AB}$

$OA' = \widehat{A'B'}$

$OA'' = \widehat{A''B''}$

۴ جدول زیر را کامل کنید.



شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
طول کمان AB_i ۱≤i≤۷	r	$\frac{۳}{۲}r$	۲r		۴r		۶r
اندازهٔ زاویه $\angle AOB_i$ ۱≤i≤۷	۱ رادیان	$\frac{۳}{۲}$ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان		۵ رادیان	

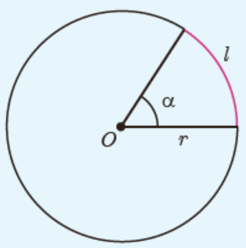
همان‌طور که می‌بینید در هر ستون با تقسیم طول کمان به شعاع دایره (r)، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مربوط به آن بر حسب رادیان به‌دست می‌آید.
با توجه به جدول صفحهٔ قبل می‌توان گفت :

$$\frac{\text{طول کمان روبه‌روی زاویه}}{\text{شعاع دایره}} = \text{اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان}$$

اگر l طول کمان روبه‌روی زاویه، r شعاع دایره و α اندازهٔ زاویه برحسب رادیان باشد، آنگاه رابطهٔ بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

در رابطهٔ بالا l و r هم واحدند.



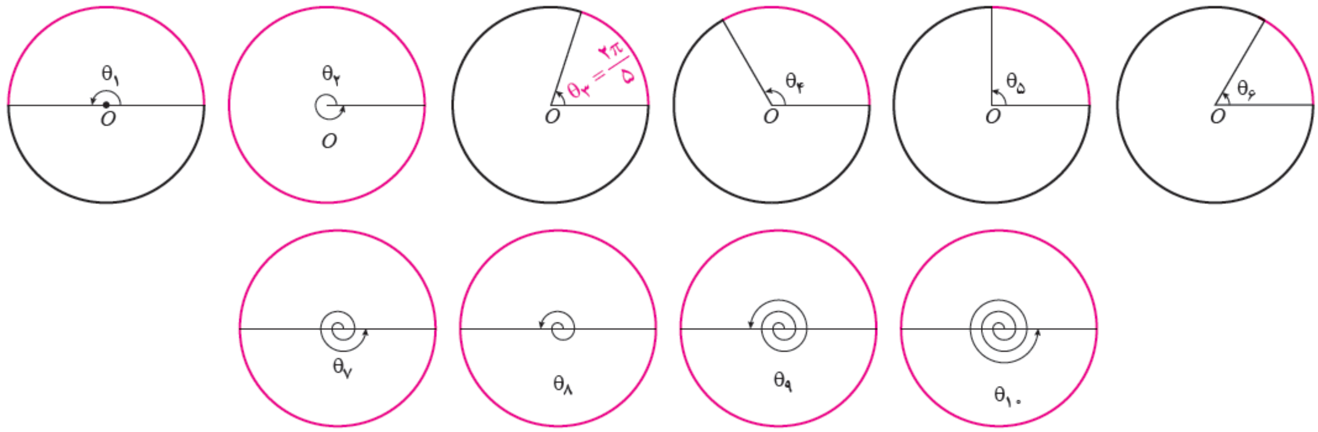
کار در کلاس

۱ در جدول روبه‌رو جاهای خالی را پر کنید.

زاویه برحسب درجه	۰°	۳۰°			۹۰°		۲۷۰°		۳۹۰°	
زاویه برحسب رادیان	۰		$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$		π		۲π		$\frac{۷\pi}{۳}$

۲ در زیر، اندازهٔ برخی از زاویه‌ها بر حسب رادیان داده شده است. مانند نمونه، آنها را با زوایای داده شده در دایره‌های مثلثاتی زیر نظیر کنید.

الف) $\frac{۲\pi}{۶}$ ب) $\frac{۲\pi}{۵}$ پ) $\frac{۲\pi}{۴}$ ت) $\frac{۲\pi}{۳}$ ث) $\frac{۲\pi}{۲}$ ج) ۲π چ) ۳π ح) ۴π خ) ۵π د) ۶π

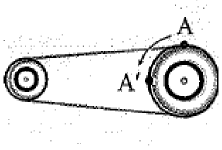


۳ در جدول روبه‌رو، که سال گذشته آن را بر حسب درجه کامل کرده‌اید، مقدار نسبت‌های مثلثاتی خواسته‌شده را در جاهای خالی بنویسید.

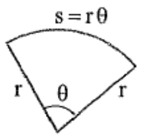
θ(رادیان) / نسبت	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinθ	0				1		
cosθ			$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
tanθ		$\frac{\sqrt{3}}{3}$					
cotθ	تعریف نشده				0		

مثال : در دایره‌ای به شعاع $10\ cm$، طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۲ رادیان چه‌قدر است؟

مثال : در شکل مقابل، یک تسمه، دو قرقره به شعاع‌های $2\ cm$ و $6\ cm$ را به هم وصل کرده است. وقتی قرقرهٔ بزرگ‌تر $\frac{\pi}{2}$ رادیان می‌چرخد (یعنی نقطهٔ A به موقعیت A' می‌رود)، آن‌گاه قرقرهٔ کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟



محیط قطاع : محیط هر قطاع از دو شعاع دایره و یک طول کمان تشکیل شده است. همان‌طور که گفتیم اگر زاویهٔ مرکزی کمان برحسب رادیان θ باشد، طول این کمان برابر با $\ell = r\theta$ است، پس محیط قطاع با زاویهٔ مرکزی θ (برحسب رادیان) و شعاع r برابر است با:



$$\text{محیط قطاع} = 2r + r\theta = r(2 + \underset{\text{(برحسب رادیان)}}{\theta})$$

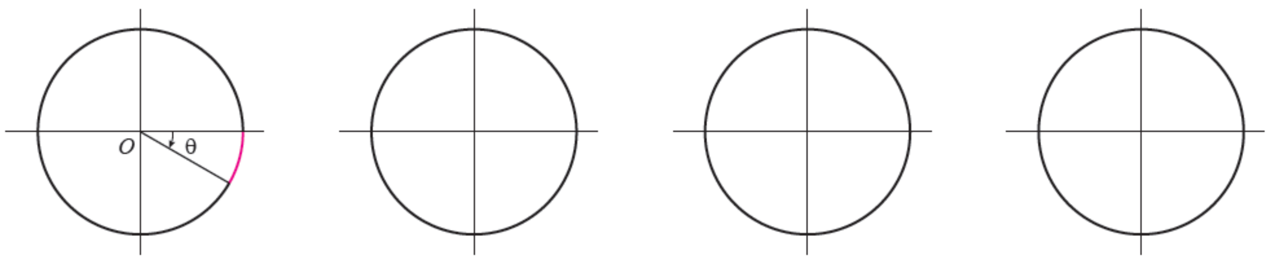
مساحت قطاع : اگر زاویهٔ مرکزی یک قطاع، θ (رادیان) باشد، سهم این زاویه از کل دایره $\frac{\theta}{2\pi}$ است. پس به همین مقدار هم از مساحت کل دایره سهم دارد!

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{\theta}{2\pi} \times S_{\text{دایره}} = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 \Rightarrow \text{مساحت قطاع} = \frac{\overset{\text{(برحسب رادیان)}}{\theta}}{2} r^2$$

مثال : محیط و مساحت قطاعی به زاویهٔ مرکزی 120° و شعاع ۳ cm را به دست آورید.

تمرین

۱ برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.



$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} =$ انتهای کمان در ربع .... است.

$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} =$ انتهای کمان در ربع .... است.

$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} =$ انتهای کمان در ربع .... است.

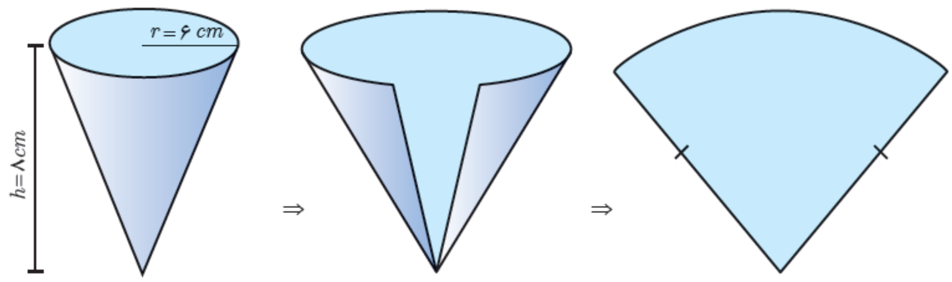
$\theta = -\frac{\pi}{6}$ انتهای کمان در ربع چهارم است.

۲ طول برف پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف پاک‌کن، کمانی به اندازه ۱۲۰° طی می‌کند. $(\pi \simeq ۳/۱۴)$

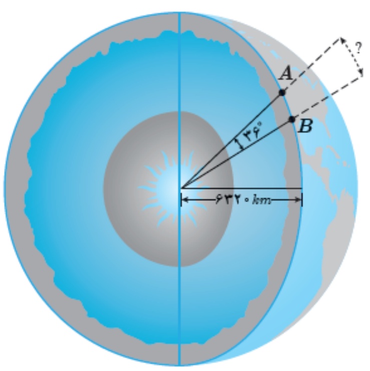
الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به‌دست آورید.

ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

۳ شکل فضایی و نیز شکل گستردهٔ یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r=۶\ cm$ و ارتفاع آن $h=۸cm$ می‌باشد. اندازه زاویه قطاع[۱] حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟



۴ فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از کرهٔ زمین، که بر روی یک نصف‌النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه‌رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازهٔ شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطهٔ داده شده را بیابید.



دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟

تذکر : یک زاویه در دستگاه مختصات در موقعیت استاندارد است، اگر رأس آن در مبدأ و ضلع اولیه‌اش روی قسمت مثبت محور xها باشد،

اندازه‌ی یک زاویه که ضلع انتهایی آن دقیقا یک دور کامل بچرخد، ۳۶۰ درجه است.

زاویه ۲۲۵° را در موقعیت استاندارد رسم کنید.

شعاع دایره‌ای برابر ۱۲ است. در این دایره طول کمان روبه‌روی زاویه‌ی مرکزی ۶۰° را حساب کنید. ($\pi \simeq ۳/۱۴$)

فرض کنید سوار چرخ و فلکی شده اید که ۴۰ کابین دارد و کابین های آن شماره گذاری شده اند. اگر در آغاز حرکت روی کابین شماره ۵ نشسته باشید بعد از $\frac{۴۷\pi}{۱۰}$ ردیان دوران ، شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید؟

تذکر

دقیقه شمار $= M$ و ساعت شمار $= H$ و $|\alpha = |5/5M - 30H$ = زاویه‌ی بین عقربه‌ی ساعت شمار و دقیقه‌ی شمار

اندازه‌ی زاویه‌ای راکه عقربه‌ی ساعت‌شمار از ساعت ۳ صبح تا ۸ شب طی می‌کند، برحسب درجه و رادیان بیابید.

یک دوچرخه سوار دور یک میدان دایره ای شکل به قطر ۲۰ متر دور می زند . اگر زاویه ۲۲۵ درجه نسبت به میدان چرخیده باشد ، چه مسافتی را طی کرده است ؟

طول پاندول ساعتی ۳۰ سانتی‌متر است که با زاویه‌ی 50° نوسان می‌کند مسافتی که انتهای پاندول در هر نوسان می‌پیماید را حساب کنید. $(\pi \simeq 3)$

در دایره به شعاع ۵ سانتی متر اگر θ زاویه مرکزی برابر 240° باشد طول کمان روبرو با این زاویه چقدر است؟

۲۰۰ درجه چند رادیان است؟ -72 درجه معادل چند رادیان است؟

شخصی در پیست دوچرخه سواری به شکل دایره و به شعاع یک کیلومتر مسافت $\frac{۷\pi}{۲}$ را طی کند مقدار زاویه ای که چرخیده است بر حسب رادیان تعیین کنید.

در یک دایره ای به شعاع ۳ سانتی متر توسط زاویه ی θ کمانی به طول ۶ سانتی متر پریده می شود مقدار زاویه ی θ به رادیان چه قدر است؟

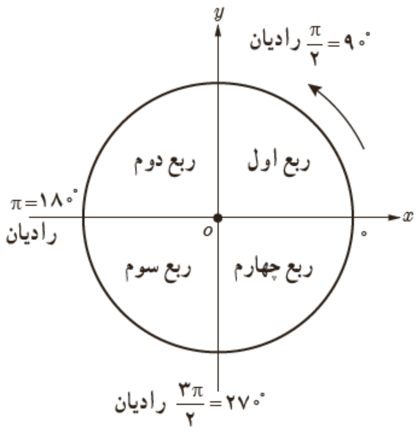
اندازه ی زاویه ای که عقربه ی ساعت شمار از ۲ بعد از ظهر تا ۵ بعد از ظهر حرکت می کند را بر حسب درجه و رادیان بیان کنید.

چه مدت طول می کشد تا عقربه ی دقیقه شمار به اندازه ی $۲/۵\pi$ رادیان دوران کند؟

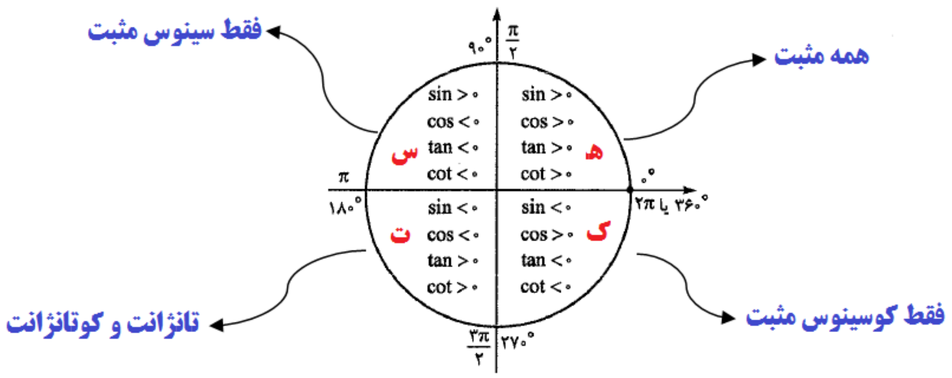
درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

در شکل مقابل، یک دایرهٔ مثلثاتی با چهار ربع آن مشخص شده است. جدول زیر علامت چهار نسبت مثلثاتی در هر ربع را نشان می‌دهد.

نسبت مثلثاتی \ ربع	اول $\circ<\alpha<\frac{\pi}{۲}$	دوم $\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi$	سوم $\pi<\alpha<\frac{۳\pi}{۲}$	چهارم $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−



قاعده هستک و یاد گیری آسان علامتهای نسبتهای مثلثاتی

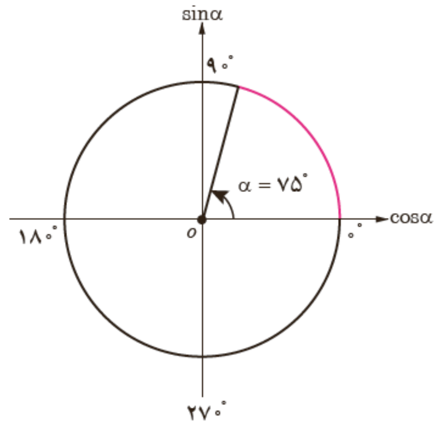


نسبت \ زاویه	۰°	$۳۰^\circ=\frac{\pi}{۶}$	$۴۵^\circ=\frac{\pi}{۴}$	$۶۰^\circ=\frac{\pi}{۳}$	$۹۰^\circ=\frac{\pi}{۲}$	$۱۸۰^\circ=\pi$	$۲۷۰^\circ=\frac{۳\pi}{۲}$	$۳۶۰^\circ=۲\pi$
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	−۱	صفر
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	−۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف‌نشده	۰	تعریف‌نشده	۰
cot	تعریف‌نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف‌نشده	۰	تعریف‌نشده

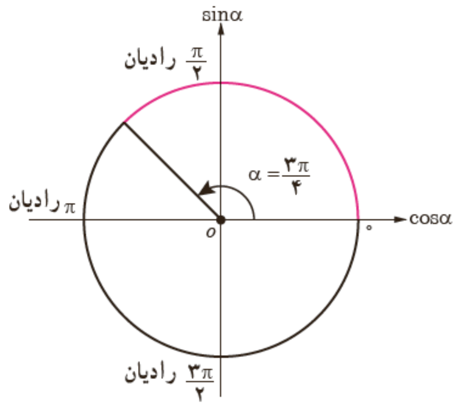
فعالیت

۱ جداول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان روبه‌روی α	زاویه α
$\tan\alpha > ۰$	ربع اول	۷۵°
$\sin\alpha$		۱۵۰°
$\cos\alpha$		۲۱۰°
$\cot\alpha$		۲۴۰°
$\tan\alpha$		۲۸۵°



علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان روبه‌روی α	زاویه α
$\cos\alpha < ۰$	ربع دوم	$\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان
$\sin\alpha$		$\frac{۴\pi}{۵}$ رادیان
$\tan\alpha$		$\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان
$\cos\alpha$		$\frac{۵\pi}{۱۲}$ رادیان
$\cot\alpha$		$\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان



۷۷

۲ اگر $\sin\alpha = \frac{-۱}{۳}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع سوم باشد، محاسبات زیر را کامل کنید :

$$\cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha = \cdots\cdots \xrightarrow{\cos\alpha<۰} \cos\alpha = -\frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \cdots\cdots\cdots\cdots \longrightarrow \tan\alpha = \cdots\cdots$$

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = \cdots\cdots\cdots \longrightarrow \cot\alpha = ۲\sqrt{۲}$$

۳ اگر $\cot\alpha = -۲$ و $\cos\alpha > ۰$ سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

حل : چون $\cos\alpha > ۰$ و $\cot\alpha < ۰$ لذا انتهای کمان α در ربع .... واقع است. بنابراین :

$$\frac{۱}{\sin^۲\alpha} = ۱ + \cot^۲\alpha = \cdots\cdots\cdots \longrightarrow \sin^۲\alpha = \cdots\cdots\cdots \longrightarrow \sin\alpha = \frac{-۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha = \cdots\cdots\cdots \longrightarrow \cos\alpha = \cdots\cdots\cdots$$

$$\tan\alpha = \frac{۱}{\cot\alpha} \longrightarrow \tan\alpha = \cdots\cdots\cdots$$

کار در کلاس

۱ اگر $\cos x = \frac{-۴}{۵}$ و $\sin x > ۰$، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویهٔ x را بیابید.

۲ جدول زیر را کامل کنید.

زاویه α / نسبت	۰ = ۰° رادیان	$\frac{\pi}{۶}$ = ۳۰° رادیان	$\frac{\pi}{۴}$ = ۴۵° رادیان	$\frac{\pi}{۳}$ = ۶۰° رادیان	$\frac{\pi}{۲}$ = ۹۰° رادیان	π = ۱۸۰° رادیان	$\frac{۳\pi}{۲}$ = ۲۷۰° رادیان	۲π = ۳۶۰° رادیان
$\sin\alpha$		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$			-۱	۰
$\cos\alpha$	۱		$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$			-۱		
$\tan\alpha$					تعریف نشده		تعریف نشده	
$\cot\alpha$			۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$				

۳ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\cot\frac{\pi}{۶} - \tan\frac{\pi}{۳} \times \sin\frac{\pi}{۴} =$

ب) $\frac{\tan^{۲}(\frac{\pi}{۶}) + \sin^{۲}(\frac{\pi}{۴})}{\cot^{۲}(\frac{\pi}{۴}) - \cos^{۲}(\frac{\pi}{۳})} + \cos^{۲} ۷۵^\circ + \sin^{۲} ۷۵^\circ =$

اگر $\sin\theta = \frac{۳}{۵}$ و θ زاویه‌ای منفرجه باشد سایر نسبتهای مثلثاتی θ را بیابید.

اگر θ زاویه ای درناحیه سوم و $\tan\theta = \frac{\sqrt{۷}}{۳}$ باشد ، مقدار $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را بدست آورید.

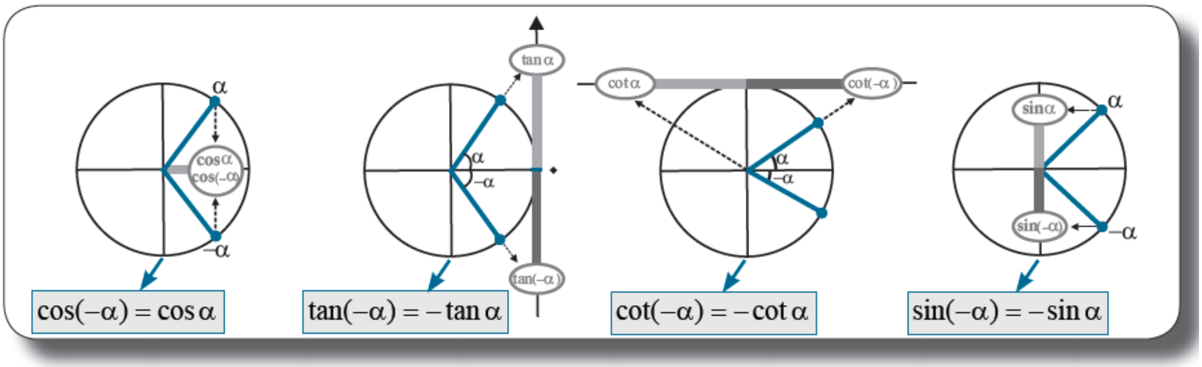
اگر θ زاویه ای منفرجه و $\cos\theta = -\frac{۱۵}{۱۷}$ باشد ، مقدار $۲\sin\theta - \tan\theta$ را بدست آورید.

اگر θ زاویه ای درناحیه دوم و $\sin\theta = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$ باشد ، حاصل عبارت $\frac{۳\cos^{۲}\theta}{۱+\tan\theta}$ را بدست آورید.

اگر $Cos\theta \neq ۰$ و $\tan\theta = ۵$ باشد حاصل عبارت $\frac{۴\cos\theta - ۲\sin\theta}{۳\sin\theta + \cos\theta}$ را بدست آورید.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

بچه‌ها! می‌خوام رابطه‌ی بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $(-\alpha)$ رو به دست بیارم. دایره‌ی مثلثاتی این رابطه‌رو خیلی واضح به ما نشون می‌ده. دقت کنید:



در حالت کلی :

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

فعالیت

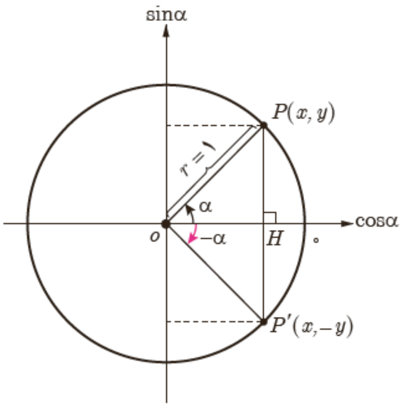
دو زاویهٔ α و $-\alpha$ را قرینه یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل مقابل، $\alpha=۳۰^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ -۳۰° در $O\overset{\Delta}{P'}H$ عبارت‌اند از :

$\sin(-۳۰^\circ)=\frac{-y}{r}=-\sin ۳۰^\circ=\frac{-۱}{۲}$

$\cos(-۳۰^\circ)=\dots\dots=\dots\dots=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\tan(-۳۰^\circ)=\frac{-y}{x}=\dots\dots=\dots\dots$

$\cot(-۳۰^\circ)=\dots\dots=\dots\dots=\dots\dots$



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور افقی نقطه‌ای به مختصات $(x,-y)$ است.

۱ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $-\frac{\pi}{۴}$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.

$\sin(-\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}$

۲ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\cot(\frac{-\pi}{۳})\times\cos(\frac{-\pi}{۶})+\tan(\frac{-\pi}{۴})=-\cot\frac{\pi}{۳}\times\cos\frac{\pi}{۶}-\tan\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱=\frac{-۳}{۲}$$

الف) $\dfrac{\cos(-۹۰^\circ)+\sin(-۲۷۰^\circ)}{\sin(-۱۸۰^\circ)-\cos(-۳۶۰^\circ)}=\dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=\cdots\cdots$

ب) $\cot(\frac{-\pi}{۶})+\tan(\frac{-\pi}{۳})=\cdots\cdots$

پ) $\cos(-۴۵^\circ)\times\cos(-۶۰^\circ)+\sin(-۴۵^\circ)\times\sin(-۶۰^\circ)=\cdots\cdots+\cdots\cdots=\cdots\cdots$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

فعالیت

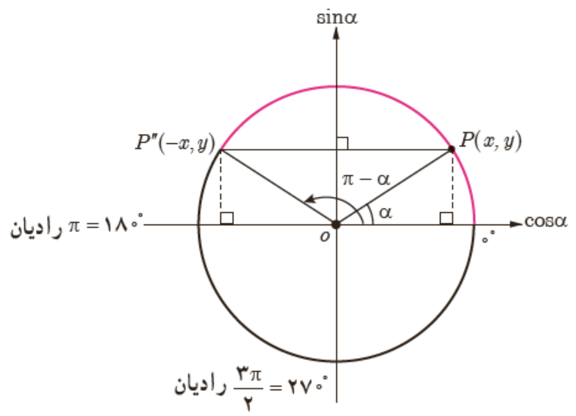
دو زاویهٔ α و β را مکمل گوییم؛ هرگاه مجموع آنها ۱۸۰° یا π رادیان شود. مثلاً دو زاویهٔ ۳۰° و ۱۵۰° مکمل یکدیگرند. همچنین دو زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان مکمل یکدیگرند (چرا؟). در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر $\alpha=۳۰^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطهٔ P'' و انتهای کمان زاویهٔ ۱۵۰° که در ربع دوم واقع است، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۵۰° عبارت‌اند از :

$\sin ۱۵۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=y=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$

$\cos ۱۵۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=-x=-\cos ۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\tan ۱۵۰^\circ=\cdots\cdots=\cdots\cdots$

$\cot ۱۵۰^\circ=\cdots\cdots=\cdots\cdots$



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور عمودی نقطه‌ای به مختصات $(-x,y)$ است.

در حالت کلی :

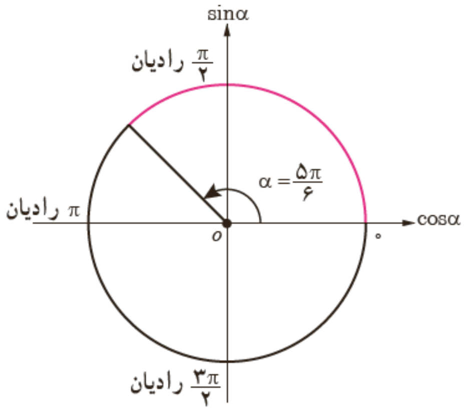
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

کار در کلاس

۱ مکمل هریک از زاویه‌های زیر را مشخص کنید :

الف) ۷۵° ب) -۲۵° پ) $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان   ت) $\frac{-\pi}{۴}$ رادیان

۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{5\pi}{6}$ رادیان را مطابق نمونه به‌دست آورید.



$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \dots\dots\dots\dots$$

$$\tan\frac{5\pi}{6} = \dots\dots\dots\dots$$

$$\cot\frac{5\pi}{6} = \dots\dots\dots\dots$$

فعالیت

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\tan\frac{2\pi}{3} = \tan(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos(\dots\dots) = \dots\dots$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - \dots) = \dots\dots = \dots\dots$$

$$\cot(-120^\circ) = -\cot(\dots) = -\cot(180^\circ - \dots) = \dots\dots$$

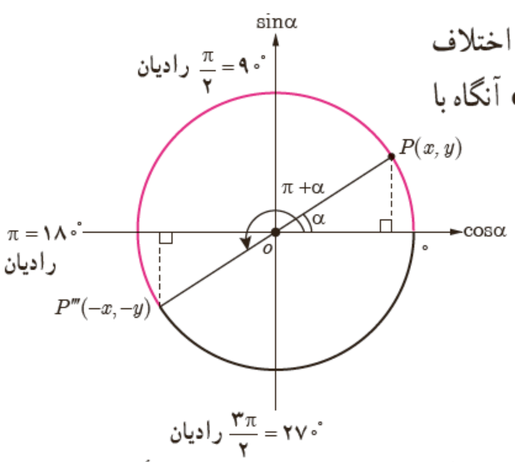
$$\cos(135^\circ) = \dots\dots = \dots\dots = \dots\dots$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

فعالیت

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 210° را به دست آورید.

انتهای کمان زاویه 210° در ربع سوم واقع است. در ضمن $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$، یعنی اختلاف دو زاویهٔ 210° و 30° برابر با π رادیان است. در دایره مثلثاتی مقابل، اگر $\alpha = 30^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P'''، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 210° عبارت‌اند از :



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ای به مختصات $(-x,-y)$ است.

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -y = -\sin 30^\circ = \frac{-1}{2}$$

$$\cos 210^\circ = \dots\dots\dots = -x = \dots\dots$$

$$\tan 210^\circ = \frac{\sin 210^\circ}{\cos 210^\circ} = \dots\dots$$

$$\cot 210^\circ = \dots\dots = \dots\dots$$

در حالت کلی :

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$

مثال : مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.

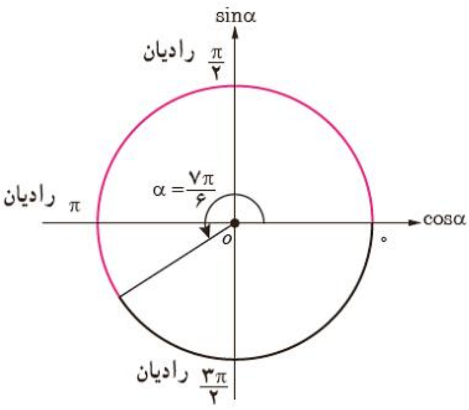
$\sin(-\frac{۷\pi}{۶}) =$

$\tan(۲۲۵^\circ) =$

$\cos(۱۲۰^\circ) =$

کار در کلاس

سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۷\pi}{۶}$ رادیان را مطابق نمونه مشخص کنید.



$$\sin\frac{۷\pi}{۶} = \sin(\pi + \frac{\pi}{۶}) = -\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲}$$

فعالیت

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه بیابید.

$\sin ۲۲۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\sin ۴۵^\circ = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$

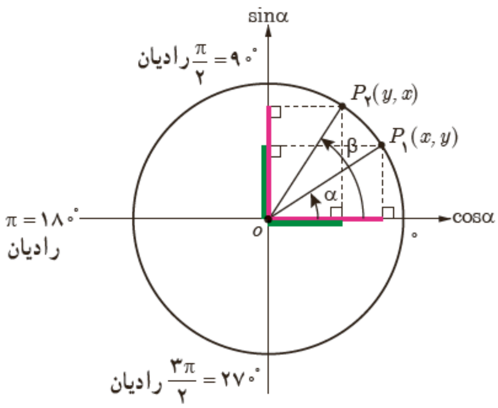
$\tan ۲۲۵^\circ =$ ....

$\cos(\frac{-۴\pi}{۳}) = \cos$ ... $= \cos(\pi +$ ... $) =$ .... $=$ ....

$\sin(\frac{-۷\pi}{۶}) =$ ....

$\cot(\frac{۵\pi}{۴}) =$ ....

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان



فعالیت

دو زاویهٔ α و β را متمم گوییم؛ هرگاه مجموع آنها °۹۰ یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان شود. مثلاً دو زاویهٔ $\alpha=۳۰°$ و $\beta=۶۰°$ در دایره مثلثاتی مقابل متمم یکدیگرند. در این حالت :

$$\sin ۳۰° = \cos ۶۰° = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰° = \sin ۶۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰° = \cot ۶۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۳۰° = \tan ۶۰° = \sqrt{۳}$$

زاویه‌ای معرفی کنید که با متمم خودش برابر باشد. برای چنین زاویه‌ای داریم :

sin ...... = cos...... = ...

tan...... = cot...... = ...

همچنین زاویه ...... و $\frac{\pi}{۲}$ رادیان متمم یکدیگرند؛ بنابراین :

$\sin\frac{\pi}{۲}=\cos$ ...... = ...

$\tan\frac{\pi}{۲}=\cot$ ...... = ...

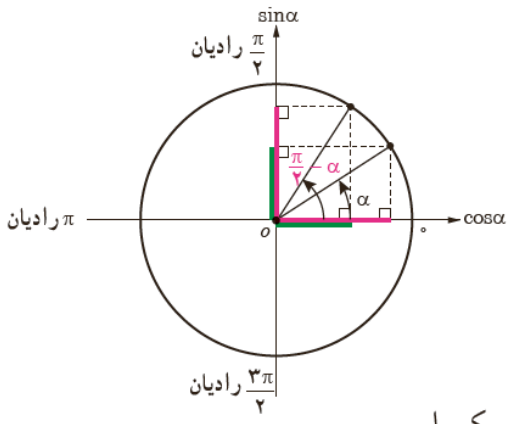
در حالت کلی :

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$$



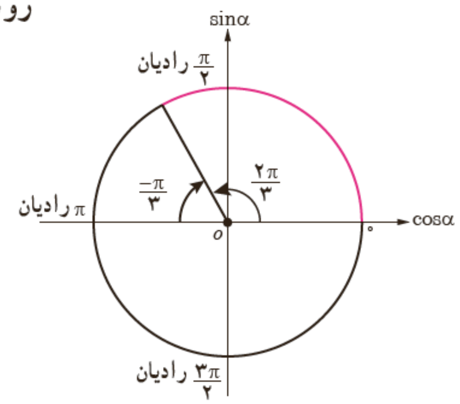
به عبارت دیگر : اگر دو زاویهٔ α و β متمم باشند(رادیان $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$) آنگاه سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است. به بیان دیگر :

$\sin\alpha=\cos\beta$, $\tan\alpha=\cot\beta$

$\cos\alpha=\sin\beta$, $\cot\alpha=\tan\beta$

فعالیت

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان را به‌دست آورید.



روش اول ــ زاویه $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۳}$ رادیان مکمل یکدیگرند؛ یعنی $\frac{۲\pi}{۳}=\pi-\frac{\pi}{۳}$. بنابراین :

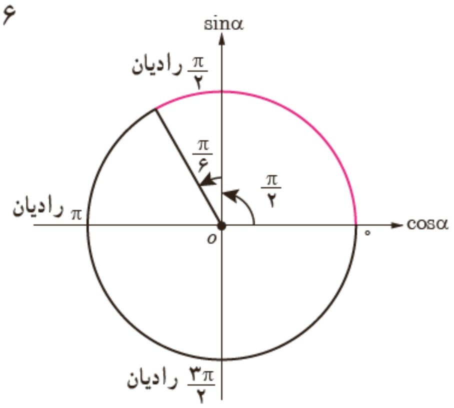
$$\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۳})=\text{..............}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\text{.........}=-\cos\frac{\pi}{۳}=\text{..........}$$

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}=\text{.........}=\text{.........}=\text{.........}$$

$$\cot\frac{۲\pi}{۳}=\text{.........}=\text{........}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

روش دوم ــ اختلاف دو زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۶}$ رادیان برابر با $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است؛ یعنی $\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$. بنابراین با توجه به علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع دوم :



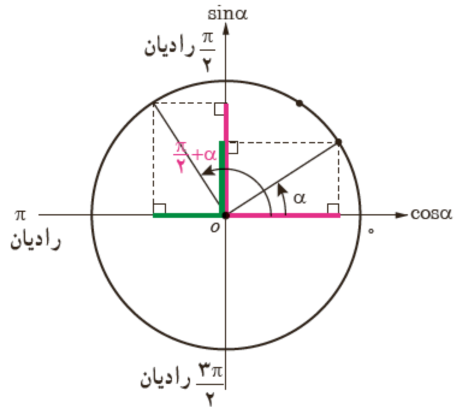
$$\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos(\text{..........})=-\sin\text{..........}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}=\text{..........}=-\cot\frac{\pi}{۶}=\text{..........}$$

$$\cot\frac{۲\pi}{۳}=\text{...........}=\text{...........}=\text{...........}$$

در حالت کلی :



$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$$

کار در کلاس

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۳۵° را به دو روش به‌دست آورید.

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان

(برحسب درجه)	(برحسب رادیان)
$\sin(۲۷۰^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(۲۷۰^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = -\sin\alpha$
$\tan(۲۷۰^\circ - \alpha) = \cot\alpha$	$\tan(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = \cot\alpha$
$\cot(۲۷۰^\circ - \alpha) = \tan\alpha$	$\cot(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = \tan\alpha$

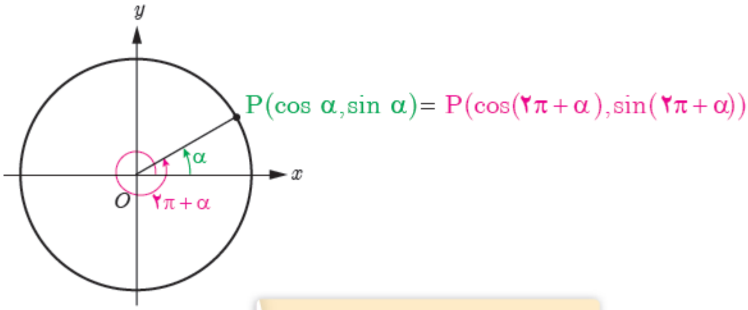
(برحسب درجه)	(برحسب رادیان)
$\sin(۲۷۰^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(۲۷۰^\circ + \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = \sin\alpha$
$\tan(۲۷۰^\circ + \alpha) = -\cot\alpha$	$\tan(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = -\cot\alpha$
$\cot(۲۷۰^\circ + \alpha) = -\tan\alpha$	$\cot(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = -\tan\alpha$

مثال:

اگر $\sin\theta = \frac{۳}{۵}$ باشد و انتهای کمان مربوط به زاویه θ <u>درربع اول</u> باشد، $\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right)$ را بدست آورید.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای با مجموع یا تفاضل $۲k\pi$ رادیان

زاویه‌هایی مانند α و $۲\pi+\alpha$ در شکل زیر که انتهای کمان‌های آنها برهم منطبق می‌شود را زوایای هم انتها گویند. از آنجا که نقطه P انتهای هر دو کمان می‌باشد لذا نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه باهم برابرند.

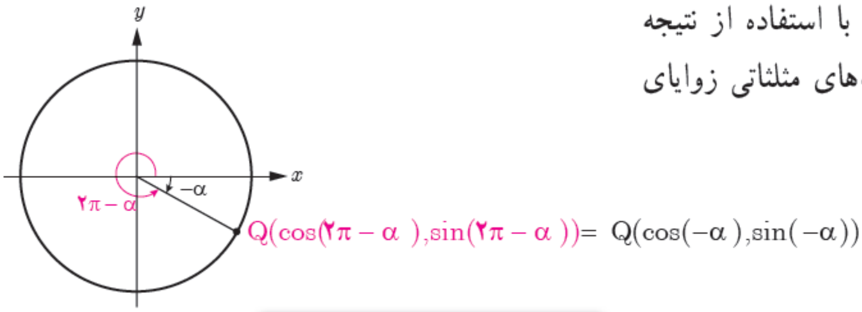


$$\sin(۲\pi+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(۲\pi+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(۲\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(۲\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

این حالت برای بیش از یک دوران کامل، یعنی زوایای به‌صورت $۲k\pi+\alpha$، نیز برقرار است. $(k\in\mathbb{Z})$

$$\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(۲k\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(۲k\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

از آنجا که زوایای $-\alpha$ و $۲k\pi-\alpha$ $(k\in\mathbb{Z})$ نیز هم انتها هستند (چرا؟)، با استدلالی مشابه بالا و با استفاده از نتیجه فعالیت صفحه قبل نشان دهید که نسبت‌های مثلثاتی زوایای $۲k\pi-\alpha$ به‌صورت زیر برقرارند.

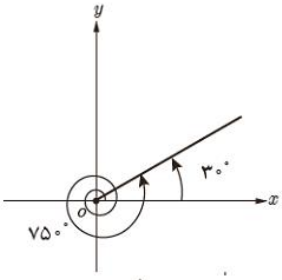


$$\sin(۲k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(۲k\pi-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(۲k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(۲k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

تذکر :

کار در کلاس

مطابق نمونه هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های زیر را مشخص کنید.



$\sin 750^\circ = \sin(2\times 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\tan(-315^\circ) = -\tan(315^\circ) = -\tan(360^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$

۱) $\cos 300^\circ =$ ....

۲) $\sin 420^\circ =$ ....

۳) $\tan(-225^\circ) =$ ....

۴) $\cot(-330^\circ) =$ ....

۵) $\sin\frac{11\pi}{4} =$ ....

۶) $\cos(\frac{-7\pi}{4}) =$ ....

مثال : مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.

الف) $\tan(\frac{5\pi}{3}) =$

ب) $\sin(405^\circ) =$

کار در کلاس

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

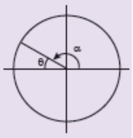
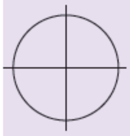
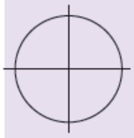
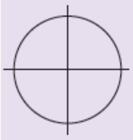
الف) $\sin(۲۱۰^\circ) =$

ب) $\tan(-\frac{۷\pi}{۴}) =$

پ) $\cot(۱۳۵^\circ) =$

ت) $\sin(\frac{۳\pi}{۴}) =$

۲ جدول زیر را همانند نمونه کامل کنید. $(۰ < \theta < \frac{\pi}{۲})$

زاویه / نسبت	$\alpha = \pi - \theta$	$\alpha = \pi + \theta$	$\alpha = ۲k\pi - \theta$	$\alpha = ۲k\pi + \theta$
انتهای کمان	ربع دوم	.....	.....	.....
ترسیم زاویه α و تشخیص علامت نسبت‌ها	 نسبت | + | − sinα | ✓ | cosα | | ✓ tanα | | ✓	 نسبت | + | − sinα | | cosα | | tanα | |	 نسبت | + | − sinα | | cosα | | tanα | |	 نسبت | + | − sinα | | cosα | | tanα | |
$\sin\alpha$	$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$			
$\cos\alpha$	$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$			
$\tan\alpha$	$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$			
$\cot\alpha$	$\cot(\pi-\theta) = -\cot\theta$			

۳ برای زوایای قرینهٔ $(\alpha = -\theta)$ از کدام ستون جدول بالا می‌توان کمک گرفت؟ چرا؟

تمرین

۱ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید :

الف) $\tan 135^\circ + \cot 120^\circ =$

ب) $\cos(-210^\circ) + \cot(240^\circ) =$

پ) $\sin 630^\circ + \tan(-540^\circ) =$

ت) $\cos(-720^\circ) + \cot(-600^\circ) + \tan 720^\circ - \tan(-600^\circ) =$

ث) $\sin(\frac{25\pi}{3}) - \cos(\frac{23\pi}{4}) =$

ج) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{6}}{\sin(\frac{-3\pi}{4}) + \tan(\frac{-4\pi}{3})} =$

تمرین

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sin(300^\circ) =$

ب) $\cot(750^\circ) =$

پ) $\cos(-\frac{\pi}{6}) =$

ت) $\cos(-\frac{۲۳\pi}{۴}) =$

ث) $\sin(\frac{۵\pi}{۴}) =$

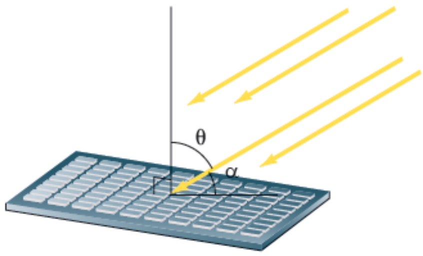
ج) $\tan(-۸۴۰^\circ) =$

چ) $\tan(-۱۵۰^\circ) =$

ح) $\cos(\frac{۹\pi}{۴}) =$

خ) $\tan(\frac{۱۰\pi}{۳}) =$

۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم، رابطهٔ $I = k\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به‌دست می‌دهد.



الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

ب) شدت نور را برای زاویه‌های $\theta = ۰$ ، $\theta = \frac{\pi}{۶}$ و $\theta = \frac{\pi}{۳}$ بر حسب k به‌دست آورید.

پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به‌دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی : از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

۳ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (زوایا برحسب رادیان است).

الف) $\cos\theta + \cos(\pi - \theta) = ۰$

ب) $\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta) + \cos\theta = ۱$

ج) $\cos(۷) = \cos(-۷)$

د) $\tan(\pi - \theta) = \tan\pi - \tan\theta$

۴ در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویهٔ مناسب قرار دهید :

آیا برای زاویهٔ x تنها یک مقدار می‌توان یافت؟ جواب خود را با جواب‌های دوستان خود مقایسه کنید.

الف) $\sin x = \cos(۲۰^\circ + x)$

ب) $\tan(x + \frac{\pi}{۱۸}) = \cot(\frac{۲\pi}{۹} + x)$

مقدار عددی عبارات داده شده را بدست آورید(راه حل الزامی است).

$\sin ۱۵۰^\circ =$

$\tan ۲۴۰^\circ =$

$\cos(-۳۰^\circ) =$

مقدار عددی عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A=\frac{۲\sin ۳۹۰^\circ \tan ۱۳۵^\circ - ۴\tan(-۲۴۰^\circ)\cos ۱۵۰^\circ}{\tan^{۲}(۳۰۰^\circ)\cos(-۶۰^\circ)}$$

اگر $\tan ۱۲^\circ = a$ باشد حاصل کسر مقابل را بر حسب a بنویسید.

$$A=\frac{\sin ۱۹۲^\circ + ۴\cos ۷۸^\circ - \cos ۱۶۸^\circ}{\sin ۳۷۲^\circ + ۲\cos ۳۴۸^\circ}$$

اگر $\tan\alpha=\frac{۳}{۴}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{۵\sin^{۲}(\frac{۷\pi}{۲}+\alpha)+\sin^{۲}(۵\pi-\alpha)}{۸\cos^{۲}(\frac{۹\pi}{۲}-\alpha)-\cos^{۲}(۴\pi-\alpha)}$ را بیابید.

مقدار کسر زیر را به‌دست آورید.

$$A=\frac{\sin(-۱۳۵^\circ)+۲\cos۴۰۵^\circ+۳\sin۲۲۵^\circ}{\tan۳۱۵^\circ}$$

مقدار عددی عبارت زیر را حساب‌کنید :

$$A=\frac{\sin(\frac{۳\pi}{۴}).\cos(\frac{۷\pi}{۶})}{\cot(\frac{۲\pi}{۳}).\tan(\frac{۱۱\pi}{۶})}$$

اگر $\tan\alpha=-\frac{۱}{۲}$ ، آن‌گاه حاصل $A=\dfrac{\sin(\frac{۷\pi}{۲}+\alpha)+۲\cos(\alpha-\frac{\pi}{۲})}{۴\sin(\alpha-\frac{۵\pi}{۲})+۲\cos(۸\pi-\alpha)}$ را بیابید.

حاصل عددی عبارت روبرو را بدست آورید.

$$A=\frac{\sin(-۱۳۵)+۲\cos ۱۲۰+۳\sin ۲۲۵}{\tan(۳۱۵)-\cos(-۳۰)}$$

درستی تساوی زیر را اثبات کنید:

$$\frac{\sin ۱۱۵^\circ-\cos ۳۳۵^\circ+۲\cos ۲۰۵^\circ}{۳\tan(-۶۵^\circ)-\tan ۲۴۵^\circ}=\frac{۱}{۲}\sin ۲۵^\circ$$

حاصل هر یک را بیابید.

$$Cos(۲\pi-\theta)=$$

$$Sin\left(\theta-\frac{\pi}{۲}\right)=$$

$$\tan(\pi+\theta)=$$

$$Sin(۲\pi-\theta)=$$

$$Cos\left(\theta-\frac{\pi}{۲}\right)=$$

نسبت های مثلثاتی ۲۲۵° را حساب کنید.

نسبت های مثلثاتی زاویه ی ۳۳۰° را به دست آورید.

نسبت های مثلثاتی زاویه ۵۷۰ درجه را به دست آورید .

هر گاه داشته باشیم $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ (α در ناحیه دوم) مطلوبست مقدار $\tan\left(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha\right)$.

تساوی های زیر را کامل کنید .

الف) $\cos(\alpha - \pi) = \cdots\cdots$

ب) $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{۲}\right) = \cdots\cdots$

مقدار $\sin\left(\frac{-۷۰۱\pi}{۳}\right)$ را تعیین کنید.

مقدار عددی هر یک از عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$A=\frac{\mathrm{Cot}(\frac{۵\pi}{۴})+\frac{۱}{۲}\mathrm{Sin}(-۹۰^\circ)}{\mathrm{Cos}(۲۲۵^\circ)+۲\mathrm{Sin}(\frac{۳\pi}{۴})}$$

$$\frac{\mathrm{Sin}۲۲۵-۲\mathrm{Cos}۳۰۰}{۲\tan ۱۳۵+\mathrm{Cot}^۲ ۲۱۰}$$

$$Sin(-۳۰)Cos(۱۵۰)-Cos(-۲۱۰)$$

$$\mathrm{Cos}\frac{۵\pi}{۴}\mathrm{Cos}\left(-\frac{۳\pi}{۴}\right)+\mathrm{Sin}\frac{۵\pi}{۴}\mathrm{Sin}\left(\frac{-۳\pi}{۴}\right)$$

$$Sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right)Cos\left(-\frac{\pi}{۶}\right)+۲\tan\left(-\frac{\pi}{۴}\right)=$$

$$\mathrm{Cos}\left(-\frac{\pi}{۲}\right)\mathrm{Sin}\left(-\frac{\pi}{۲}\right)+۲\mathrm{Cot}\left(-\frac{\pi}{۴}\right)=$$

$p = \text{Sin}۱۳۵\text{Cos}۱۲۰ + \text{Cos}۲۱۰\,\text{Sin}۳۳۰$

$$\frac{\sin ۲۱۰ \cos ۳۰ \tan ۶۰}{\cos \frac{۹\pi}{۴}}$$

$$P = \frac{\sin ۱۲۰^\circ \cos(-۳۰^\circ) - \cos ۱۲۰^\circ}{\sin ۱۳۵^\circ \cos(-۴۵^\circ)}$$

$$P = \frac{\sin\frac{۴\pi}{۳}\cos\frac{۲\pi}{۳} + \cos\frac{۴\pi}{۳}\sin\frac{۲\pi}{۳}}{\cos\frac{۵\pi}{۴}\cos(-\frac{۳\pi}{۴}) + \sin\frac{۵\pi}{۴}\sin(-\frac{۳\pi}{۴})}$$

$$A=\frac{\cos ۶۸^\circ \cos ۸^\circ+\cos ۸۲^\circ \cos ۲۲^\circ}{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ+\cos ۸۰^\circ \cos ۲۰^\circ}$$

$$P=\frac{\cot ۱۳۵^\circ+\tan ۳۱۵^\circ}{\sin(-۱۵۰^\circ)+\cos ۲۴۰^\circ}$$

$$\frac{۴\sin ۱۵۰^\circ-\cos ۱۲۰^\circ}{۲\sin ۲۱۰^\circ}$$

$$P=\frac{\sin ۲۴۰^\circ \cos ۱۲۰^\circ+\cos(-۹۰)\mathrm{Sin}\,۳۹۰}{\cos ۲۲۵\ \cos(-۱۳۵)+\tan ۴۵}$$

$$A=\frac{\sin ۲۱۰^o \cos ۳۰۰^o \tan ۲۴۰^o}{\cos\frac{۹\pi}{۴}-\sin\frac{۱۵\pi}{۴}}$$

$\cos ۱۷۰^{\circ} + \cos ۲۲۵^{\circ} + \cos ۱۰^{\circ}$

$$A = \frac{\sin ۲۱۰^{\circ} \cos ۳۰^{\circ} \tan ۶۰^{\circ}}{\cos \frac{۹\pi}{۴} + \sin \frac{۱۱\pi}{۴}}$$

$$A = \frac{\sin\left(-۱۳۵^{o}\right) + \cos ۱۲۰^{o}}{\tan\left(\frac{۵\pi}{۳}\right)}$$

درستی روابطه زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\operatorname{Sin} ۲۰^{\circ} - \cos ۷۰^{\circ} + \tan ۷۰^{\circ} - \operatorname{Cot} ۱۶۰^{\circ}}{\operatorname{Cos} ۲۰۰^{\circ} + \tan ۷۰^{\circ} + \operatorname{Sin} ۱۱۰^{\circ}} = ۲$$

$$\operatorname{Sin} ۲۰۰^{\circ} + ۲\operatorname{Sin} ۱۶۰^{\circ} - \operatorname{Cos} ۷۰^{\circ} + ۳\operatorname{Sin} ۳۴۰^{\circ} - ۴\operatorname{Cos} ۱۱۰^{\circ} = \operatorname{Sin} ۲۰^{\circ}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)-3\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+2\cos(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\tan(a-5\pi)\cot g(a+7\pi)-\cos(6\pi-a)\cos(a-6\pi)=\sin^2 a$$

$$\sin 220^\circ+2\sin 140^\circ-\cos 50^\circ+3\sin 320^\circ-4\cos 130^\circ=\sin 40^\circ$$

ثابت کنید :

$$\frac{\cos 198^\circ+\sin 162^\circ-3\cos 72^\circ+\cos(-18^\circ)}{7\cot 72^\circ-2\tan 342^\circ}=-\frac{2}{9}\cos 18^\circ$$

$-\sin ۲۰^{\circ} + ۲\sin ۱۶۰^{\circ} - \cos ۷۰^{\circ} = ۰$

$\tan(\alpha - \pi)\cot(\alpha + \pi) - \cos(۲\pi - \alpha)\cos(\alpha - ۲\pi) = \sin^{۲} \alpha$

اگر $\operatorname{Cot} ۱۵^{\circ} = ۲ + \sqrt{۳}$ باشد؛حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{۳\operatorname{Cos} ۷۵^{\circ} + ۲\operatorname{Sin} ۱۰۵^{\circ}}{\operatorname{Cos} ۱۶۵^{\circ} - \operatorname{Cos} ۲۵۵^{\circ}}$$

حاصل $\log(\tan ۱^{\circ} . \tan ۲^{\circ} .... \tan ۸۸^{\circ} . \tan ۸۹^{\circ})$ را بیابید.

هرگاه $\tan ۱۵^{\circ} = ۲ - \sqrt{۳}$ حاصل کسر $\dfrac{۳\sin ۷۵^{\circ} + ۲\sin ۱۰۵^{\circ}}{\cos ۱۶۵^{\circ} - \cos ۲۵۵^{\circ}}$ را محاسبه کنید.

اگر $\sin\alpha = a$ باشد حاصل $\tan\left(\frac{۵\pi}{۲}-\alpha\right)\tan(\pi+\alpha)+\cos(\pi\pm\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)$ را تعیین کنید .

مقادیر هر یک از عبارت های زیر را به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ بیابید.

$y=-۱+\frac{۳}{۴}\cos(۲x-\frac{\pi}{۲})$

$y=۴-\frac{۲}{۳}\sin(۳x-\pi)$

اگر $\pi<\theta<\frac{۳\pi}{۲}$ باشد و فرض کنیم : $\cos\theta=\frac{۲m-۱}{m+۱}$. حدود m را حساب کنید .

اگر $۳۰^\circ \le \theta \le ۹۰^\circ$ و $\sin\theta=\frac{۲m-۱}{۴}$ باشد، حدود m چقدر است ؟

اگر $\sin ۲x = \frac{m-۱}{۳}$ و $۳۰^\circ \le x \le ۷۵^\circ$ باشد، حدود m چقدر است ؟

اگر $\cos\alpha = ۲m+۱$ و $-\frac{\pi}{۳} < \alpha < \frac{\pi}{۳}$ باشد، حدود m چقدر است ؟

اگر $-\frac{\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹}$ و $\cos ۳x = \frac{m-۱}{۲}$، مقادیر m چقدر است ؟

اگر $\frac{\pi}{۲} < \theta < \pi$ باشد، آنگاه حدود m را چنان بیابید که $\tan\theta = ۲-۶m$ گزاره‌ای درست باشد.

درس ۳

توابع مثلثاتی

توابعی نظیر تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ و تابع کسینوس با ضابطهٔ $y=\cos x$ نمونه‌هایی از توابع مثلثاتی‌اند که در این درس با نمودار آنها آشنا می‌شوید.

رسم تابع سینوس

$y=\sin x$

$y=-\sin x$

$y=۲\sin x$

$y=-\sin\frac{x}{۲}$

ویژگی‌های مهم تابع $y=\sin x$:

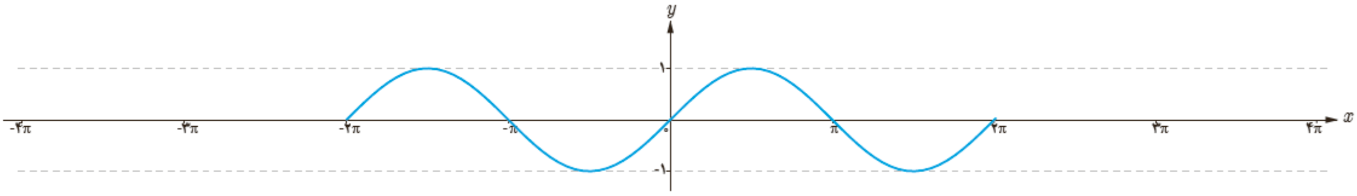
❶ در مضارب صحیح π، این تابع صفر می‌شود.

❷ همان‌طور که در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ به حداکثر مقدار خود می‌رسد و یک می‌شود این اتفاق هر ۲π یک بار رخ خواهد داد یعنی در نقاط $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$.

❸ در نقطهٔ $x=\frac{۳\pi}{۲}$، تابع سینوس مقدارش -۱ است، یعنی کم‌ترین مقدار ممکن برای سینوس. به صورت کلی در $x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}$ تابع سینوس در کم‌ترین مقدار قرار می‌گیرد.

❹ دامنهٔ این تابع شامل تمام اعداد حقیقی است پس به جای x هر عددی می‌توانیم قرار دهیم و بردش $[-۱,۱]$ است.

❺ در درس دوم گفتیم که $\sin(-x)=-\sin x$ است.



با توجه به شکل بالا جاهای خالی را دربارهٔ ویژگی‌های تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ کامل کنید.

الف) دامنهٔ تابع سینوس ...... و برد آن ...... است.

ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x=k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ، برابر با ...... است.

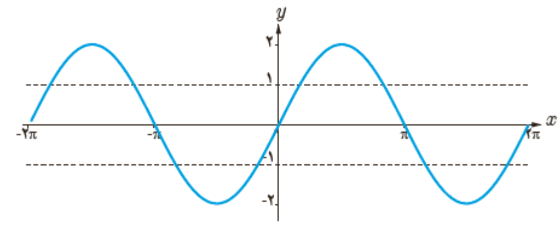
پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با ...... است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{\pi}{۲}$ ، $x=$ ...... ، $x=$ ...... ، $x=$ ...... و در حالت کلی $x=\frac{\pi}{۲}+۲k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ، به‌دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با ...... است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{۳\pi}{۲}$ ، $x=$ ...... ، $x=$ ...... ، $x=$ ...... و در حالت کلی $x=\frac{۳\pi}{۲}+۲k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ، به‌دست می‌آید.

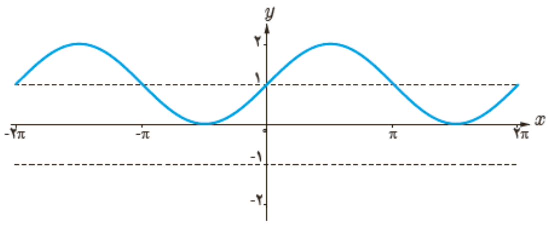
کار در کلاس

هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

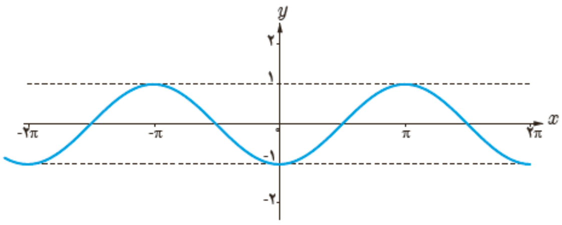
۱ $y=۲\sin x$　　۲ $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$　　۳ $y=\sin x+۱$　　۴ $y=-\sin x+۱$



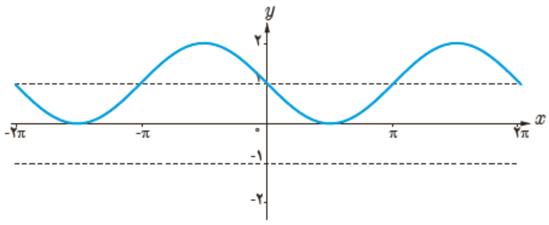
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

رسم تابع کوسینوس

$y=\cos x$

$y=-\cos x$

$y=۲\cos x$

$y=-\cos\frac{x}{۳}$

ویژگی‌های مهم تابع $y=\cos x$:

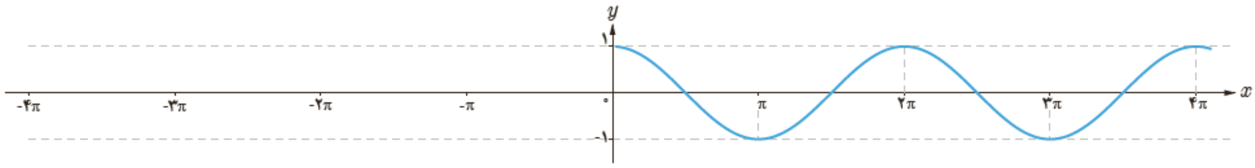
❶ در مضارب زوج π به حداکثر مقدار خود می‌رسد. $(\dots,-۴\pi,-۲\pi,۰,۲\pi,۴\pi,\dots)$

❷ در مضارب فرد π به حداقل مقدار خود می‌رسد. $(\dots,-۳\pi,-\pi,\pi,۳\pi,۵\pi,\dots)$

❸ در مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ صفر می‌شود. $(\dots,-\frac{۳\pi}{۲},-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲},\dots)$

❹ دامنهٔ تابع شامل تمام اعداد حقیقی است و بردش $[-۱,۱]$ است.

❺ در درس دوم گفتیم که $\cos x=\cos(-x)$ است.



⑧ با توجه به شکل صفحهٔ قبل جاهای خالی را در خصوص ویژگی‌های تابع با ضابطهٔ $y=\cos x$ کامل کنید.

الف) دامنهٔ تابع کسینوس .... و برد آن .... است.

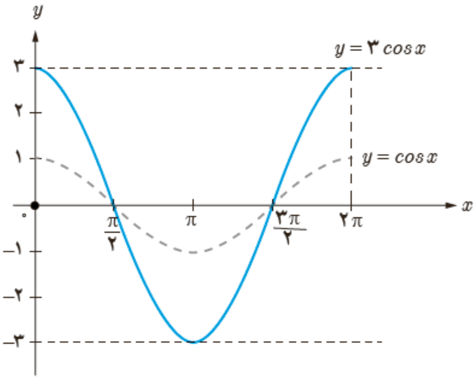
ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های .... برابر با صفر است.

پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس .... است که در طول‌های $x=۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع کسینوس ...... است که در طول‌های .... به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳\cos x$ را نشان می‌دهد. به‌طور مشابه هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را در بازهٔ $[۰ , ۲\pi]$، با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.



۱) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$

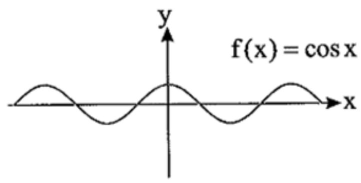
۲) $y=\cos x-۱$

۳) $y=۱-\frac{۱}{۲}\cos x$

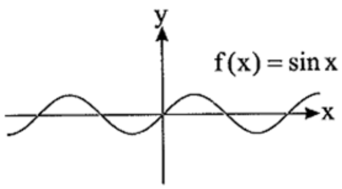
۴) $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})+۱$

ایستگاه آموزشی

دامنه، برد و نمودار توابع مثلثاتی $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ به‌صورت زیر است:



$D_f=\mathbb{R}$, $R_f=[-۱,۱]$



$D_f=\mathbb{R}$, $R_f=[-۱,۱]$

تابع‌های $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را مثلثاتی گویند. دامنه این توابع مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آنها بازه $[-۱,۱]$ است. گاهی به نمودار تابع $y=\sin x$ موج سینوسی و به نمودار تابع $y=\cos x$ موج کسینوسی نیز می‌گویند.

تمرین

۱) آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

۱) $y=\sin x$, $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})$

۲) $y=\cos x$, $y=\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$

۳) $y=\cos x$, $y=\cos(۲\pi-x)$

۴) $y=\sin x$, $y=\sin(۵\pi-x)$

۲ نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

۱) $y=\frac{۱}{۲}\sin x \quad , \quad [۰,۲\pi]$

۲) $y=۲\cos x+۱ \quad , \quad [-۲\pi,۲\pi]$

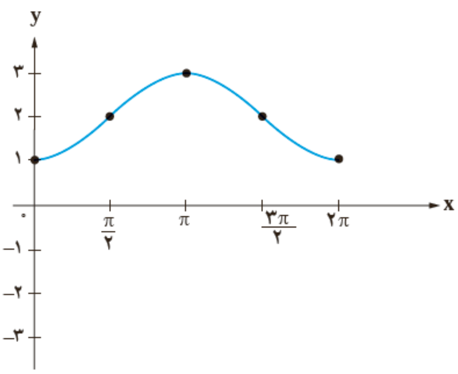
۳) $y=۱-\sin x \quad , \quad [-۲\pi,۲\pi]$

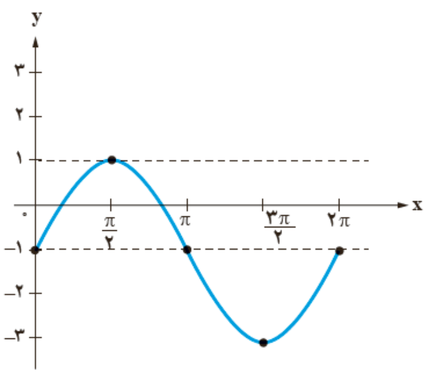
۵) $y=۱+\sin (x+\frac{\pi}{۴}) \quad , \quad [۰,۲\pi]$

۴) $y=-۱+\cos x \quad , \quad [-۴\pi,۴\pi]$

۶) $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲}) \quad , \quad [۲\pi,۴\pi]$

۳ با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر کدام‌یک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.



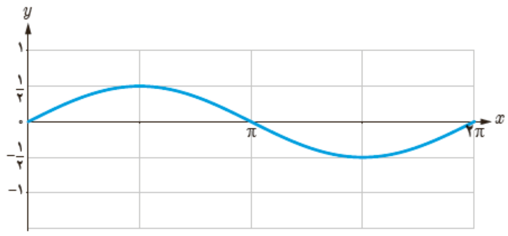


الف) $y=۲\cos x+۱$　　ب) $y=۲\sin x-۱$

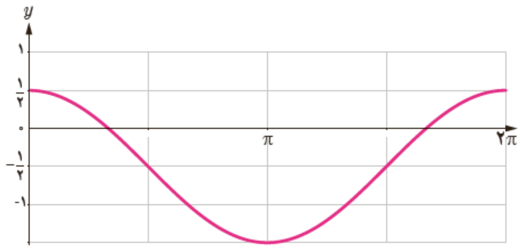
پ) $y=۲-\cos x$　　ت) $y=\sin x-۲$

۴ با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

الف) شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{1}{2}\sin x$ را نشان می‌دهد.



ب) شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\cos x-\frac{1}{2}$ را نشان می‌دهد.



پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=1+\sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازهٔ یک واحد به موازات محور xها انتقال دهیم.

ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

کار در کلاس

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه‌ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد.

ب) $\sin\sqrt{5}$ یک عدد حقیقی است.

پ) $\cos 3=\cos 3^\circ$.

ت) اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ آنگاه $-1<\cos x<0$ است.

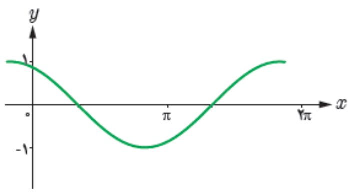
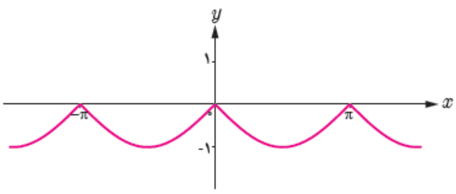
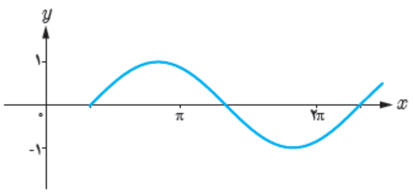
ث) عددی می‌توان یافت که سینوس آن برابر -2 باشد.

ج) $x=\pi$ صفر تابع $f(x)=\cos x$ است.

تمرین

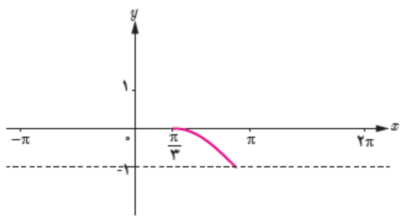
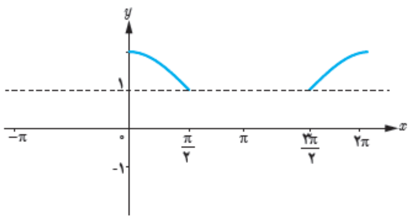
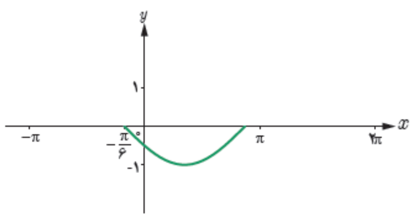
۱ توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

الف) $y=-|\sin x|$ ب) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۶})$ پ) $y=\sin(x+\frac{\pi}{۳})$

۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

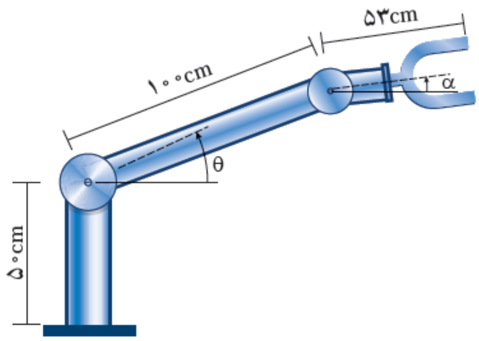
الف) $y=-\sin(x+\frac{\pi}{۶})$ ب) $y=\cos(x-\frac{\pi}{۳})-۱$ پ) $y=۱+|\cos x|$

۳ با توجه به نمودارهای بالا در سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام‌یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازهٔ $(\circ , \pi)$ یک به یک است؟

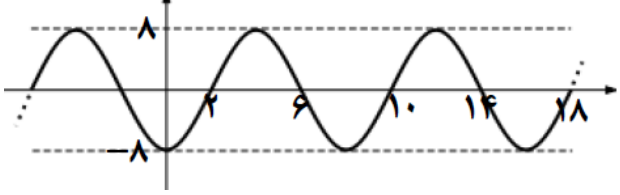
۵ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.



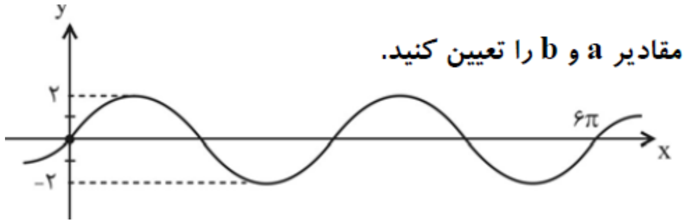
الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید. $(-\frac{\pi}{۲} \le \alpha \le \frac{\pi}{۲}, \circ \le \theta \le \frac{\pi}{۲})$

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع $۲۳/۵\,cm$ مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -۳۰^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟

معادله مربوط نمودار زیر را به صورت تابع مثلثاتی بنویسید



اگر قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin bx$ به صورت زیر باشد، مقادیر a و b را تعیین کنید.



با استفاده از مقادیر حداقلی و حداکثری و دوره تناوب نمودار تابع $y = ۳\sin ۲x$ را رسم کنید.

دوره‌ی تناوب تابع زیر را مشخص کنید.

$$y = ۲\sin(\frac{-x}{۳} + \pi) - ۳$$

مقدار $y = ۱ + ۲\sin ۳x$ را به ازای $x = \frac{\pi}{۶}$ بدست آورید.

حداکثر و حداقل مقدار تابع مقابل را حساب کنید و پس از تعیین دوره تناوب آن را در یک دوره تناوب رسم کنید (با رسم جدول مقادیر).

$$y = -۲\cos\frac{\pi}{۲}x + ۱$$

در تابع زیر ابتدا مقادیر حداکثر و حداقل و دوره تناوب را مشخص کرده و سپس نمودار را در یک دوره تناوب از طریق انتقال رسم کنید .

$$y = ۲\sin\left(x - \frac{\pi}{۳}\right) - ۱$$

هریک از توابع زیر را در یک دوره تناوب رسم کنید.

$y = ۲\sin x + ۱$

$y = \cos(x + \frac{\pi}{۶}) + ۱$

$y = |\mathrm{Cos}x| + ۱$

$y = ۲Sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$

$y = ۲Cosx - ۱$

$$\frac{y}{۲}=Sinx+۱$$

$$y=۲\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)-۱$$

$$y=۲\sin\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)+۱$$

ابتدا نمودار $y=\cos x$ را در فاصله $[۰\ ,\ ۲\pi]$ رسم نموده و سپس به کمک آن نمودار $y=-۲Cos(x-\frac{\pi}{۴})+۱$ را رسم کنید .

منحنی نمایش $y=Sinx$ در فاصله $[۰,۲\pi]$ رسم نموده و سپس به کمک آن نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$

ب) $y=Sin۲x$

ج) $y=|\sin x|$

ابتدا نمودار $y=\sin x$ را در بازه $[\circ,\text{۲}\pi]$ رسم کرده سپس با استفاده از آن نمودار $y=\text{۲}\sin\left(x+\frac{\pi}{\text{۶}}\right)-\text{۱}$ را رسم کنید.

تابع $y=\cos x$ را در فاصله $[\circ,\text{۲}\pi]$ رسم کنید و با استفاده از آن $y=\text{۲}\cos\left(x-\frac{\pi}{\text{۴}}\right)+\text{۱}$ را رسم کنید.

دوره تناوب و مقدار حداکثر وحداقل تابع $y=\text{۱}-|\text{۲}\sin x|$ را تعیین کرده سپس آنرا در یک دوره تناوب رسم نمایید.

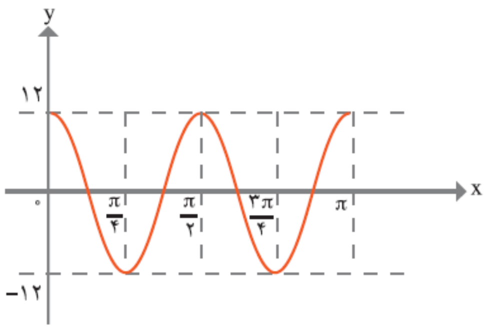
مقدار a را چنان بیابید که نقطه $A\left(\frac{\pi}{\text{۶}},a+\text{۲}\right)$ روی تابع $y=\text{۲}\sin x$ واقع باشد.

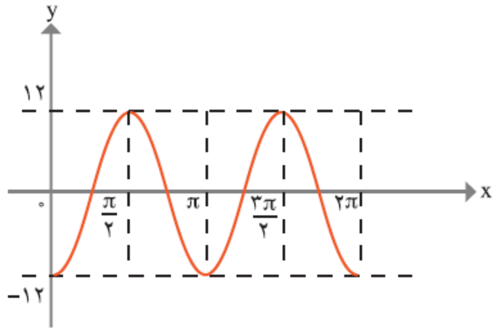
مقادیر a و b را چنان بیابید که نقاط $A\begin{vmatrix}۰\\۱\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}\frac{\pi}{۲}\\۲\end{vmatrix}$ روی تابع $y=a\sin x+b\cos x$ قرار گیرد.

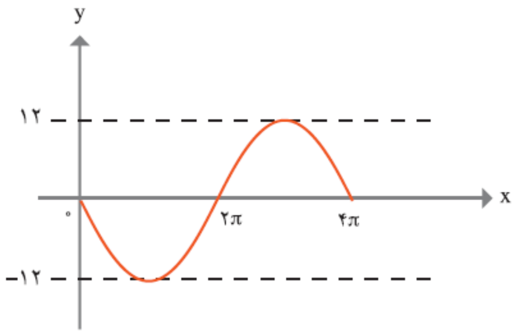
به ازای چه مقادیری از θ توابع $y=\sin ۳\theta$ و $y=\cos(-۲\theta)$ برابر صفر می شود.

نمودار $y=۲\sin \pi x$ را رسم کنید.

با توجه به نمودار های زیر در هر مورد معادله نمودار را بنویسید.



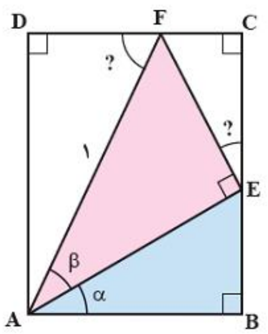

y
۱۲
-۱۲
x
۰
$\frac{\pi}{۲}$
π
$\frac{۳\pi}{۲}$
۲π


y
۱۲
-۱۲
x
۰
۲π
۴π

درس ۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

در سال گذشته با تعدادی از اتحادهای مثلثاتی مانند $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ و $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$ آشنا شدید. این اتحادها تنها شامل یک زاویه هستند. اکنون در این درس، روابطی را که در آنها دو زاویه مختلف به‌کار رفته است فرا می‌گیرید.

فعالیت



۱ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. اندازه پاره خط AF برابر ۱ و زوایای α و β داده شده است.

الف) با تکمیل روابط زیر اندازه $F\hat{E}C$ و $A\hat{F}D$ را برحسب α و β به‌دست آورید.

$$\left.\begin{array}{ll} F\hat{E}C + 90^\circ + A\hat{E}B = 180^\circ & \text{: زاویهٔ } E \text{ نیم صفحه است.} \\ \alpha + 90^\circ + A\hat{E}B = 180^\circ & \text{: مجموع زوایای داخلی } ABE \end{array}\right\} \Rightarrow F\hat{E}C = \cdots\cdots$$

اضلاع AB و DC باهم موازی و پاره خط AF به‌صورت مورب آن را قطع کرده است. $\Rightarrow A\hat{F}D = \;\cdots\cdots$

ب) اندازه اضلاع AD و DF از $\overset{\Delta}{ADF}$ را با توجه به اینکه $AF=1$، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس $D\hat{F}A$ بنویسید.

پ) اضلاع AE و EF از مثلث قائم‌الزاویه AEF را، که وتر آن برابر ۱ است، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه β بنویسید.

ت) اندازهٔ پاره خط‌های BE، EC، FC و AB را برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه α به‌دست آورید.

ث) از تساوی اضلاع روبه‌رو در مستطیل صفحهٔ قبل روابط زیر به‌دست می‌آید. آنها را باتوجه به قسمت‌های الف تا د کامل کنید.

$$AD = BE+EC \Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \cdots\cdots$$
$$DF = AB-FC \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cdots\cdots$$

۲ توضیح دهید چرا اگر اندازهٔ پاره خط AF برابر یک نباشد کماکان روابط فوق برقرار است.

در فعالیت فوق زوایای به‌کار رفته همگی تند بودند. می‌توان با استفاده از خواص توابع مثلثاتی نشان داد که این روابط برای همه زوایا برقرار است. بنابراین همواره داریم :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta$$

همچنین با تبدیل β به $-\beta$ و استفاده از نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه می‌توان به دست آورد :

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\ \cos(-\beta) + \cos\alpha\ \sin(-\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta$$

و نیز

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\ \cos(-\beta) - \sin\alpha\ \sin(-\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta$$

پس همواره داریم :

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta$$

مثال : مقدار $\sin 75^\circ$ را محاسبه کنید.

مثال : درستی رابطهٔ $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\cot\theta$ را نشان دهید.

تمرین

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

۱) $\cos 15^\circ$

۲) $\tan 105^\circ$

۳) $\sin \frac{\pi}{12}$

۲ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{۴}{۵}$ و $\cos\beta = -\frac{۱۲}{۱۳}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha+\beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

ثابت کنید برای هر دو زاویه α و β داریم :

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha \tan\beta}$$

نسبتهای مثلثاتی ۲α

عبارت $\frac{\sin ۲\alpha}{۱+\cos ۲\alpha}$ راساده کنید.

نسبت های مثلثاتی ۷۵° و ۱۵° را محاسبه کنید.

اگر $\tan\alpha = \frac{۳}{۴}$ و $\text{Cos}\beta = -\frac{۱۲}{۱۳}$ و α حاده و β منفرجه باشد.آنگاه حاصل $\text{Cos}۲\alpha$ و $\text{Sin}(\alpha+\beta)$ را به دست آورید.

اگر α و β دو زاویه حاده باشند و $\text{Sin}\alpha = \frac{۳}{۸}$ و $\text{Sin}\beta = \frac{۸}{۱۷}$ باشد.حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$\text{Cos}(\alpha+\beta) =$

اگر $\text{Cos}\alpha = -\frac{۴}{۵}$ و $\text{Sin}\beta = \frac{۳}{۴}$ و α منفرجه و β حاده باشد . حاصل هر یک را حساب کنید :

$\text{Sin}(\alpha + \beta) =$

$\text{Cos}(\alpha - \beta) =$

اگر $\tan\alpha = \frac{۳}{۴}$ و $\tan\beta = \frac{۵}{۱۲}$ و β , α حاده باشند . عبارت های زیر را محاسبه کنید .

$\text{Sin}(\alpha - \beta) =$

$\tan(\alpha + \beta) =$

اگر $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ و $\cos\beta = \frac{۵}{۱۳}$ و α و β حاده باشند آنگاه حاصل هریک را بدست آورید.

$\cos(\alpha + \beta)$

$\cos ۲\alpha$

$\tan ۲\alpha$

اگر β,α زاویه هایی در ربع سوم باشند و $\sin\alpha = -\frac{۴}{۵}$ و $\cos\beta = -\frac{۵}{۱۳}$ ، مقدار $\sin(\alpha+\beta)$ را محاسبه کنید.

درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

$$\sin(x-\frac{\pi}{۶})+\cos(x+\frac{\pi}{۳})=۰$$

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=۲\sin a\cos b$$

$$\cos^{۴} x-\sin^{۴} x=\cos ۲x$$

$$\cos\alpha = ۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}-۱$$

$$۱-\cos\alpha = ۲\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$$

$$\tan\alpha = \frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}}$$

$$\frac{۲}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \sin ۲\alpha$$

$$\frac{\sin x}{۱+\cos x} = \tan\frac{x}{۲}$$

$$\cot\frac{x}{۲} - \tan\frac{x}{۲} = ۲\cot x$$

$$\frac{۱-\mathrm{Cos}۲x}{۱+\mathrm{Cos}۲x} = \tan^{۲} x$$

$$\tan\alpha = \frac{۱-\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha}$$

$$\frac{\text{Sin}۲\text{x}}{۱+\cos ۲\text{x}}=\tan \text{x}$$

$$\sin ۲\text{x}=۲\sin \text{x}\cos \text{x}$$

$$\sin ۲\alpha =\frac{۲\tan \alpha }{۱+\tan^{۲}\alpha }$$

درستی رابطه مقابل را نشان دهید. $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=۲\cos\alpha\sin\beta$

درستی تساوی روبرو را نشان دهید. $\sin\frac{\pi}{۵}+\cos\frac{\pi}{۵}=\sqrt{۲}\cos\frac{\pi}{۲۰}$

فرض کنید $\sin\alpha = \frac{۴}{۵}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل $\cos ۲\alpha$ را به دست آورید.

عبارت $\sin(x + \frac{\pi}{۴})$ را ساده کنید .

فرض کنید $\tan\alpha = \frac{۳}{۴}$ و α زاویه‌ای حاده باشد.حاصل $\sin ۲\alpha$ را به دست آورید.

اگر $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ و α زاویه‌ای منفرجه باشد، حاصل $\tan ۲\alpha$ را به دست آورید.

فرض کنید $\tan\alpha = -\frac{۱}{۲}$ و α زاویه ای منفرجه باشد، عبارت $\cos ۲\alpha$ را محاسبه کنید.

حاصل عبارات روبرو را تعیین کنید.

الف) $2\cos 165^\circ \cos 105^\circ$

ب) $\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$

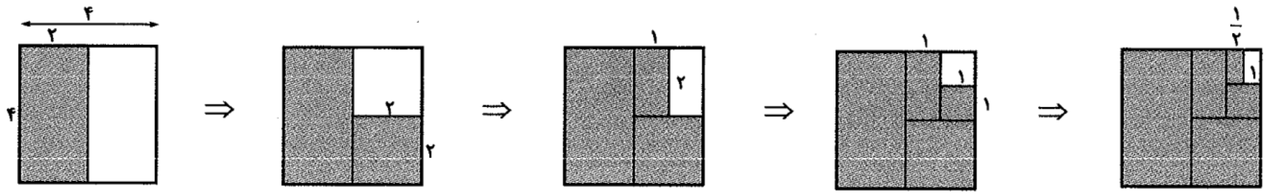
پ) $\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$

حد و پیوستگی

فصل ۵

درس ۱ مفهوم حد و فرایندهای حدی

یک نقاش می‌خواهد دیواری مربعی که ضلعش ۴ است را رنگ کند. او برای این کار ابتدا نصف مربع را رنگ می‌زند، سپس از قسمت باقی‌مانده، نصفش را رنگ می‌کند و با همین روال در هر قسمت نصف جای خالی را رنگ می‌کند:



مرحلهٔ ۱ ⇐ مرحلهٔ ۲ ⇐ مرحلهٔ ۳ ⇐ مرحلهٔ ۴ ⇐ مرحلهٔ ۵

نقاش بعد از هر مرحله کارکردن مساحت ناحیه‌های رنگ‌شده را یادداشت می‌کند:

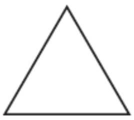
مساحت دیوار	.....	مرحلهٔ ۶	۵	۴	۳	۲	۱	مرحله
	.....	$(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}\times ۱=\frac{۱}{۲}$	$۱^۲=۱$	$۲\times ۱=۲$	$۲^۲=۴$	$۲\times ۴=۸$	مساحت رنگ‌شده در همان مرحله
۱۶	.....	۱۵/۷۵	۱۵/۵	۱۵	۱۴	۱۲	۸	کل مساحت رنگی

بدیهی است که اگر نقاش خوش‌ذوق قصهٔ ما، تا آخر عمرش این روند را ادامه دهد، دیوار به صورت کامل رنگ نمی‌شود، اما مجموع مساحت قسمت‌های رنگ‌شده، به مساحت کل دیوار یعنی عدد ۱۶ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به بیان دیگر هر چه‌قدر که بخواهیم، می‌توانیم مساحت رنگی را به عدد ۱۶ نزدیک‌تر کنیم، به شرطی که تعداد مراحل را بالاتر ببریم.

به این نزدیک‌شدن تدریجی اعداد به عدد ۱۶، میل کردن می‌گویند و می‌نویسند $x \to ۱۶$ و این‌گونه می‌خوانند. «x به ۱۶ میل می‌کند.»

مفهوم میل کردن :

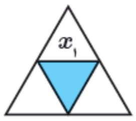
فعالیت



یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ را درنظر بگیرید، اندازه محیط این مثلث برابر ۶ می‌باشد.

۱ مطابق شکل، وسط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود، اندازه ضلع مثلث جدید را $x_۱$ و اندازه محیط آن را $P_۱$ می‌نامیم.

در این صورت داریم : $x_۱=\dots\dots$ و $P_۱=\dots\dots$



۲ اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهیم و در مرحله nام طول ضلع مثلث به‌وجود آمده را با x_n و محیط آن را با P_n نمایش دهیم، با توجه به شکل‌های زیر، جدول داده شده را تکمیل کنید :

(۱) (۲) (۳)

x_n	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$			...	$\frac{۱}{۲^n}$
P_n	۳	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$				...	

۳ اندازه اضلاع مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

۴ اندازه محیط این مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

در فعالیت قبل، اگر طول ضلع اولیه را x درنظر بگیریم و f تابعی باشد که محیط مثلث را برحسب ضلع آن بیان می‌کند، آن‌گاه داریم $f(x)=۳x$.

همان‌طور که مشاهده کردیم، وقتی طول ضلع مثلث ها (مقدار متغیر x) به عدد صفر نزدیک می‌شود، محیط مثلث‌ها، یعنی مقادیر تابع f، نیز به عدد صفر نزدیک می‌شوند.

انواع میل کردن :

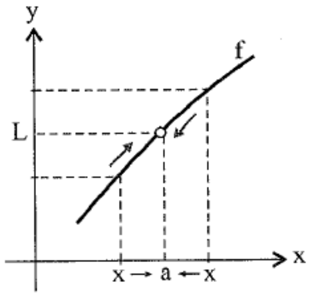
۱) میل‌کردن از راست:

۲) میل‌کردن از چپ:

مفهوم حد و فرآیندهای حدی :

مفهوم حد

نمودار تابع f مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید. در صورتی که اگر روی محور xها، مقادیر x را به عدد a نزدیک کنیم، مقادیر f(x) رفته‌رفته به L نزدیک می‌شوند. در این صورت می‌گوییم حد تابع f در نقطهٔ a برابر L است.



مثال : رفتار تابع f، با ضابطه $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲}$ را در اطراف نقطه $a=۲$ بررسی نمایید.

حل : تابع f، به ازای هر عدد حقیقی x به جز $x=۲$ تعریف شده است. به ازای هر $x\neq۲$، ضابطه تابع را می‌توان ساده کرد و به‌صورت زیر نوشت :

$$f(x)=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=x+۲$$

در جدول زیر، مقادیر تابع f را به ازای برخی مقادیر کوچک‌تر از ۲، که به‌تدریج از سمت چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، و نیز برخی مقادیر بزرگ‌تر از ۲، که به‌تدریج از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شوند، محاسبه کرده‌ایم :

x از چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود　　x از راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود

x	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	→	۲	←	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	→	?	←	۴/۰۰۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۵	۵

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود　　$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود

با توجه به جدول فوق، مشاهده می‌کنیم که، با نزدیک شدن x به عدد ۲ (از راست و از چپ)مقادیر $f(x)$، به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.

برای تابع $f(x)=x+۱$ جدول زیر را تکمیل کنید و سپس حدس بزنید که اگر مقدارهای x را به ۱ نزدیک کنیم مقدارهای $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→	۱	←	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$				→	?	←			

با تکمیل جدول زیر، مقدار حد تابع $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<1\\ 2x & x>1\end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=1$ به دست آورید.

x	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\rightarrow$	۱	$\leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱
$f(x)$			$\rightarrow$	?	$\leftarrow$		

جدول زیر را برای تابع $y=x-[x]$ تکمیل کنید. آیا تابع $x-[x]$ در ۱ حد دارد؟

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\rightarrow$	۱	$\leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$x-[x]$				$\rightarrow$	?	$\leftarrow$			

جدول زیر مربوط به مقادیر تابع f در اطراف $x=0$ است. با توجه به جدول، حد تابع f در $x=0$ کدام است؟ آزمون‌های گاج

x	۱-	۰/۷۵-	۰/۵-	۰/۲۵-	۰/۱-	$\cdots\rightarrow$	۰	$\leftarrow\cdots$	۰/۱	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۵	۱
f(x)	۰	۱	۱/۴	۱/۷	۱/۹	$\cdots\rightarrow$		$\leftarrow\cdots$	۲/۱	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸

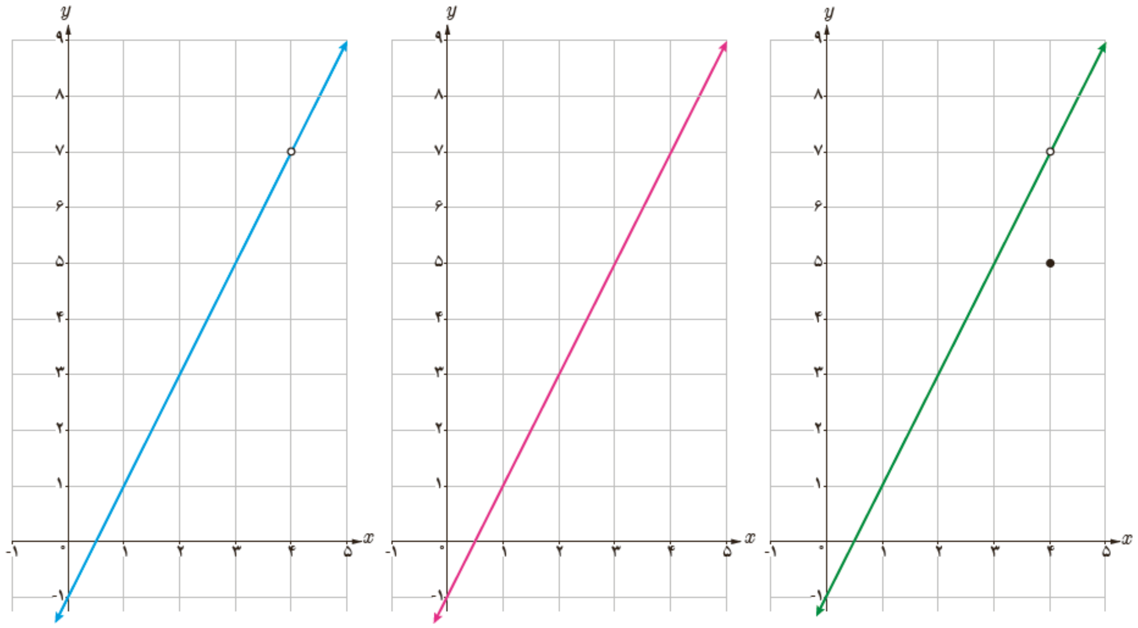
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۱-

فعالیت

نمودار توابع زیر رسم شده‌اند :

$f(x)=۲x-۱$ $\qquad$ $g(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x\neq ۴\\ ۵ & x=۴\end{cases}$ $\qquad$ $h(x)=۲x-۱ \quad (x\neq ۴)$

هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ آیا این سه تابع با یکدیگر برابرند؟ دامنه و برد این سه تابع را معلوم کنید.



می‌خواهیم رفتار این سه تابع را در نزدیکی نقطهٔ ۴ بررسی کنیم. ابتدا جدول را کامل کنید.

x از سمت چپ به ۴ نزدیک می‌شود $\qquad$ x از سمت راست به ۴ نزدیک می‌شود

x	۳	۳/۵	۳/۸	۳/۹	۳/۹۹	$\to$ ۴ $\leftarrow$	۴/۰۱	۴/۱	۴/۲	۴/۵	۵
$f(x)$	۵	۶	۶/۶			$\to$ ۷ $\leftarrow$			۷/۴	۸	۹
$g(x)$						$\to$ $\leftarrow$					
$h(x)$						$\to$ $\leftarrow$					

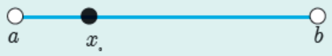
مقادیر f ، g و h را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم به عدد ... نزدیک کنیم؛ به شرط آنکه مقادیر x به قدر کافی به عدد ... نزدیک شود.
حد هر سه تابع وقتی که $x\to ۴$ (بخوانید x به سمت ۴ میل می‌کند) برابر ... است. به عبارت دیگر :

$\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۴} g(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۴} h(x)=$

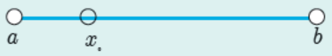
تعریف

اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم.

بنابراین اگر $x_0 \in (a,b)$، آن‌گاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی x_0 است.



اگر نقطه x_0 را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می‌نامیم.



به همین ترتیب :

اگر $r>0$، در این صورت بازه (x_0, x_0+r) را یک همسایگی راست و بازهٔ (x_0-r, x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

کار در کلاس

۱ یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای ۳، مثال بزنید.

۲ آیا بازهٔ (۲,۳) یک همسایگی ۲ می‌باشد؟ چرا؟

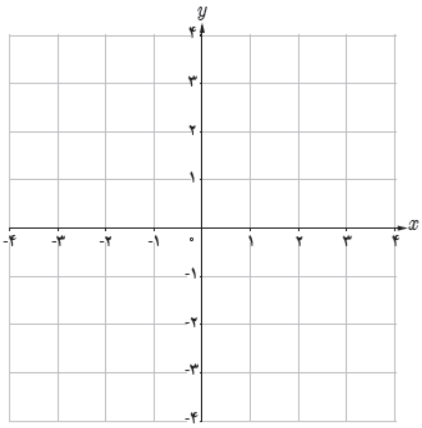
تعریف حد یک تابع

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. می‌گوییم «حد تابع f وقتی x به a نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی L است»، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (با مقادیر مخالف a از دوطرف) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می‌نویسیم :
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

عدد L را حد تابع f در a می‌نامیم.

کار در کلاس

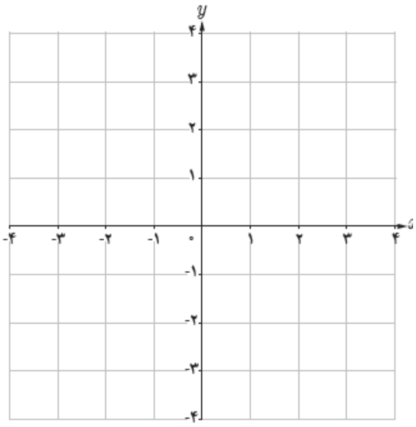

(۱)

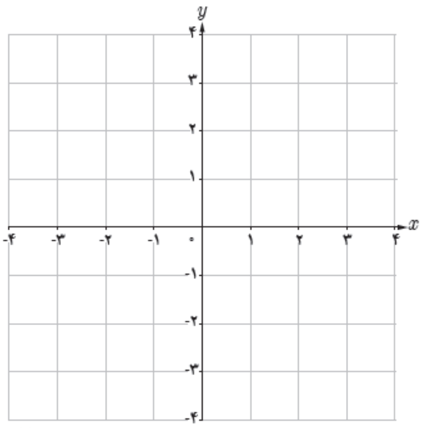
۱ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه ۲– تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

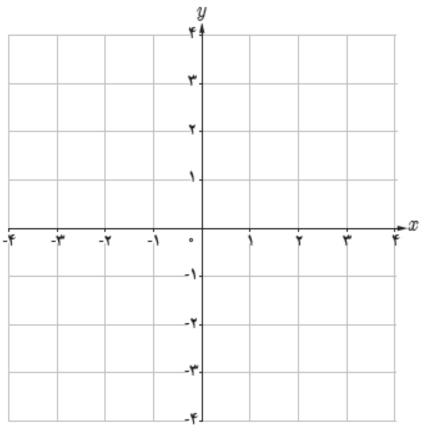
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

۳ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هردو در یک همسایگی نقطه ۳ تعریف شده باشند و $f(۳) \neq g(۳)$.

۴ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه ۲ دارای حد یکسان باشند و f در ۲ تعریف شده باشد اما تابع g در ۲ تعریف نشده باشد.

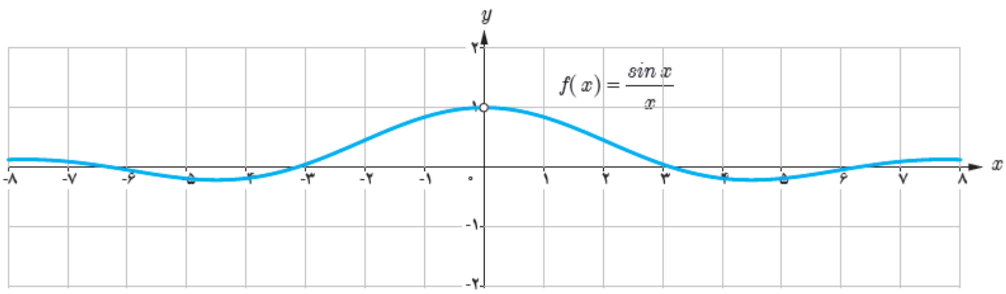

(۴)


(۳)


(۲)

۵ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده است. در جدول روبه‌رو برخی مقادیر این تابع در اطراف صفر داده شده است. با توجه به جدول و نمودار تابع f، مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}$ را به دست آورید. (محور xها برحسب رادیان است).

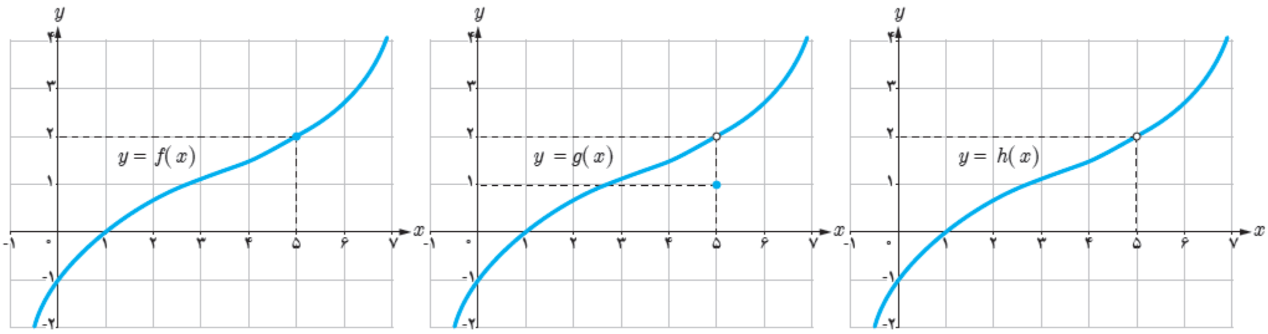
x	$\frac{\sin x}{x}$
±۱	۰/۸۴۱۴۷۰۹۸
±۰/۵	۰/۹۵۸۸۵۱۰۸
±۰/۴	۰/۹۷۳۵۴۵۸۶
±۰/۳	۰/۹۸۵۰۶۷۳۶
±۰/۲	۰/۹۹۳۳۴۶۶۵
±۰/۱	۰/۹۹۸۳۳۴۱۷
±۰/۰۵	۰/۹۹۹۵۸۳۳۹
±۰/۰۱	۰/۹۹۹۹۸۳۳۳
±۰/۰۰۵	۰/۹۹۹۹۹۵۸۳
±۰/۰۰۱	۰/۹۹۹۹۹۹۸۳



مثال : آیا تابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$ در نقطه $x=۲$ حد دارد؟ چرا؟

تمرین

۱ نمودار سه تابع f ، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطهٔ $x=۵$، مشخص کنید.

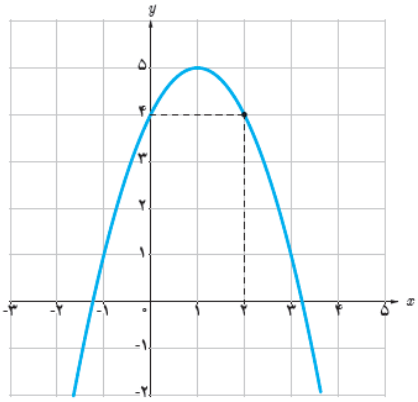


$\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=\dots$

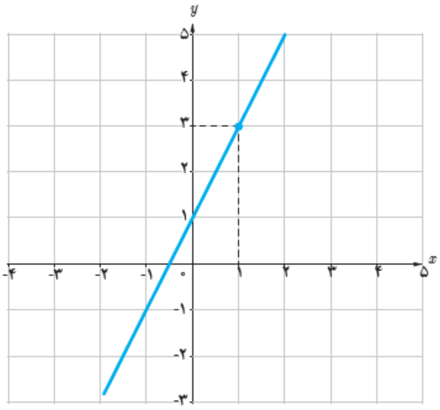
$\lim\limits_{x\to ۵} g(x)=\dots$

$\lim\limits_{x\to ۵} h(x)=\dots$

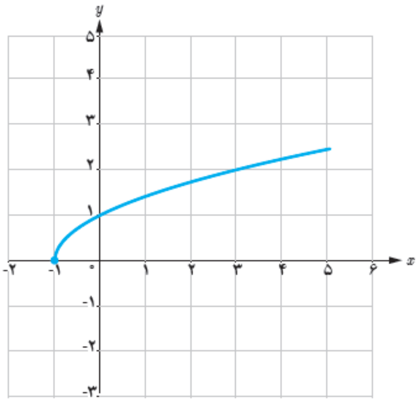
۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



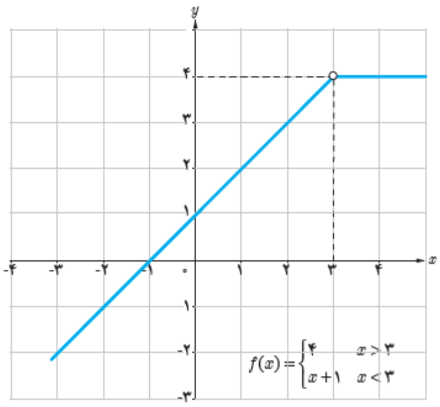
$\lim\limits_{x\to ۲} (-x^{۲}+۲x+۴) =$



$\lim\limits_{x\to ۱} (۲x+۱) =$



$\lim\limits_{x\to -۱} \sqrt{x+۱} =$



$\lim\limits_{x\to ۳} f(x) =$

۳ با تکمیل هر یک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطهٔ موردنظر بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} (-۳x+۴) = \dots$

x	−۱	−۰/۹	−۰/۱	−۰/۰۱	→	۰	←	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
$f(x)$	…	…	…	…	→	?	←	…	…	…	…	…

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) = \dots$ ، $f(x)=\begin{cases} x-۴ & x\neq -۱ \\ ۳ & x=-۱ \end{cases}$

x	−۲	−۱/۵	−۱/۱	−۱/۰۱	−۱/۰۰۱	→	−۱	←	−۰/۹۹۹	−۰/۹۹	−۰/۹	−۰/۸
$f(x)$	…	…	…	…	…	→	?	←	…	…	…	…

۴ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x>۲ \\ x+۳ & x<۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) آیا تابع f در نقطه $x=۲$، تعریف شده است؟

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ را به دست آورید.

۵ تابع g با ضابطه $g(x)=\begin{cases} -۱ & x\in \mathbb{Z} \\ ۲ & x\notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) نمودار g را در فاصله $[-۴,۲]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g، حدود زیر را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}} g(x)=....$　　　$\lim\limits_{x\to ۱} g(x)=....$

۶ تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ را درنظر بگیرید :

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

پ) آیا این تابع در همسایگی ۰/۹ تعریف شده است؟

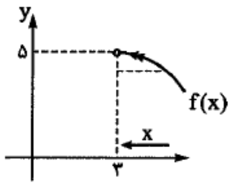
ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x=۱$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=۱$ چطور؟

۷ اگر بازهٔ $(x-۱,۲x+۳)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

درس ۲
حدهای یک‌طرفه (حد چپ و حد راست)

مفهوم حد از روی نمودار :

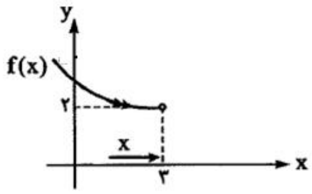
حد راست :



شکل تابع f را نگاه کنید! اگر مقادیر x، از سمت راست به ۳ میل کنند، مقادیر تابع به عدد ۵ نزدیک می‌شوند، در این صورت می‌گوییم، حد تابع $f(x)$ وقتی x از راست به ۳ میل می‌کند برابر ۵ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=۵$$

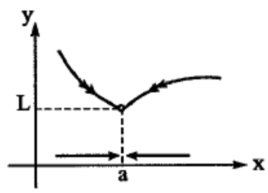
حد چپ :



اگر مقادیر x از اعداد کم‌تر از ۳ به آن نزدیک شوند و یا از سمت چپ به ۳ نزدیک شوند، مطابق شکل مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، در این صورت هم می‌گوییم حد چپ تابع در $x=۳$، برابر ۲ است و می‌نویسیم: $\lim_{x\to ۳^-} f(x)=۲$.

حد :

اگر حد چپ و حد راست یک تابع در نقطهٔ $x=a$ برابر هم باشند، می‌گوییم تابع در $x=a$ حد دارد. از روی نمودار برای فهمیدن این‌که تابع حد دارد یا نه، باید شاخه‌های نمودار در قبل و بعد از این نقطه به هم برسند.



مثلاً در شکل مقابل، هم از سمت راست و هم از سمت چپ، مقادیر تابع به L نزدیک می‌شوند، پس حد تابع در $x=a$ برابر L است و می‌نویسیم: $\lim_{x\to a} f(x)=L$

جمع بندی :

$$\begin{cases}\lim_{x\to a^+} f(x)=L\\ \lim_{x\to a^-} f(x)=L\end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=L$$

برای داشتن حد در یک نقطه باید شرایط زیر وجود داشته باشد:

۱ بتوانیم از هر دو طرف به آن نقطه نزدیک شویم، پس در واقع x باید نقطه‌ای در وسط دامنه باشد.

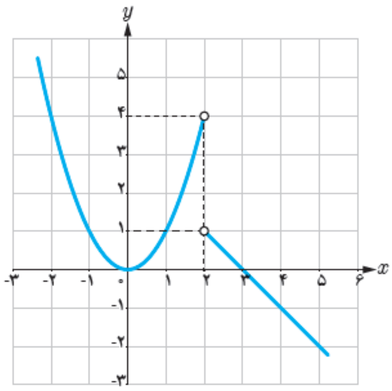
۲ هم حد راست داشته باشیم، هم حد چپ!

۳ حد چپ = حد راست

۴ **از همه مهم‌تر؛** در محاسبهٔ حد اصلاً کاری با خود نقطه نداریم، حتی ممکن است نقطهٔ ما توخالی باشد، یعنی اصلاً در دامنه نباشد.

۵ در نقاط ابتدا و انتهای دامنه چون‌که حداکثر یکی از حدهای راست یا چپ را دارند، تابع حد ندارد.

فعالیت



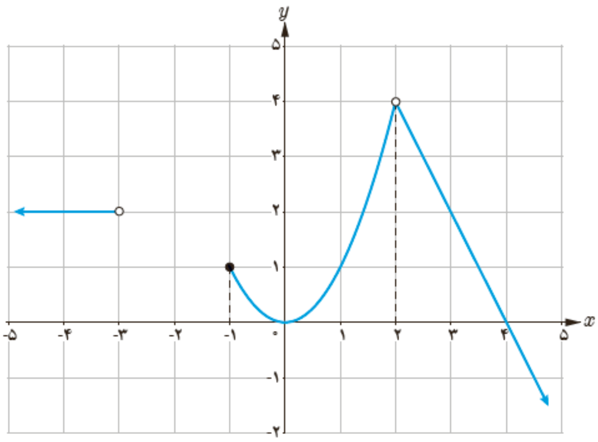
نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x+۳ & x>۲\\ x^۲ & x<۲\end{cases}$ به صورت روبه‌رو است :

الف) اگر متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد . . . نزدیک می‌شوند.

ب) اگر x با مقادیر کوچک‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد . . . نزدیک می‌شوند.

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=۲$ حد دارد؟

مثال ۱ : در شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-۲x+۸ & x>۲\\ x^۲ & -۱\leq x<۲\\ ۲ & x<-۳\end{cases}$ رسم شده‌است.



الف) $f(۲)$ $\qquad \lim\limits_{x\to ۲} f(x)=$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=$ $\qquad \lim\limits_{x\to -۱} f(x)$

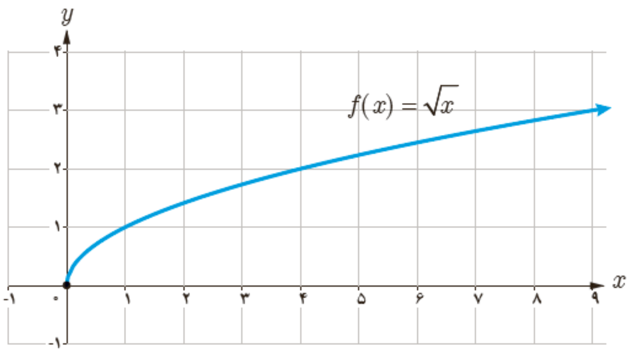
پ) $f(-۱)=$

ت) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=$ $\qquad f(۰)=$

ث) $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=$ $\qquad f(۴)=$

ج) $f(-۳)$ $\qquad \lim\limits_{x\to -۳^+} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x\to -۳^-} f(x)=$

مثال ۲ : برای تابع $g(x)=\sqrt{x}$ داریم :



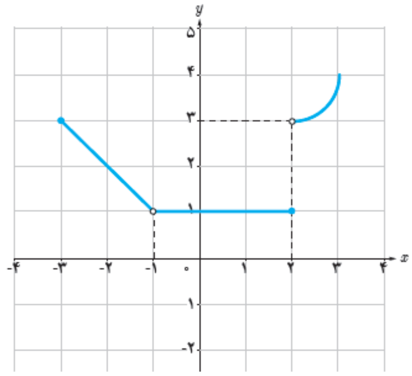
الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \sqrt{x}=$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \sqrt{x}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \sqrt{x}$

کار در کلاس

۱ با توجه به نمودار f، حدهای خواسته‌شده را، در صورت وجود، به‌دست آورید.



$\lim_{x\to ۲} f(x)$ ... $\lim_{x\to ۲^-} f(x)$ ... $\lim_{x\to ۲^+} f(x)$ ...

$\lim_{x\to -۱} f(x)$ ... $\lim_{x\to -۱^+} f(x)$ ... $\lim_{x\to -۱^-} f(x)$ ...

$\lim_{x\to -۳} f(x)$ ... $\lim_{x\to -۳^-} f(x)$ ... $\lim_{x\to -۳^+} f(x)$ ...

$\lim_{x\to ۱} f(x)$ ... $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ ... $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ ...

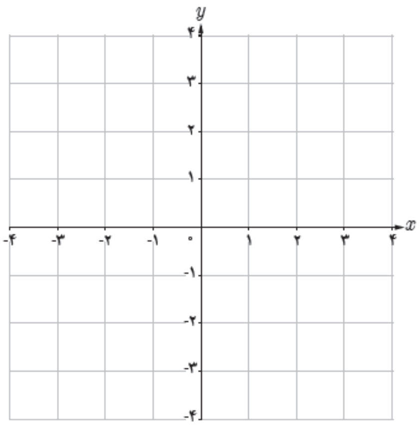
۲ نموداری از یک تابع رسم کنید که :

الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

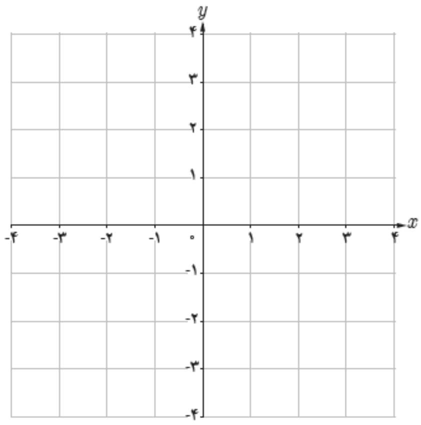
ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.

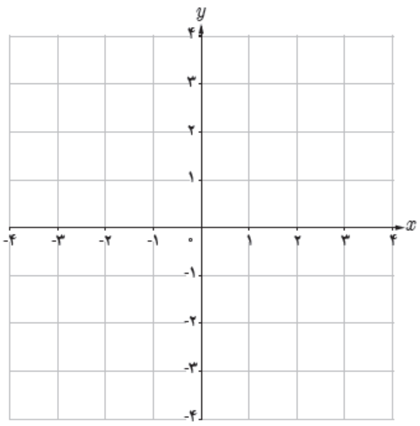
ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



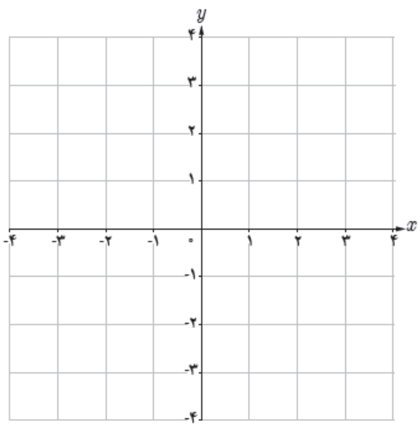
(الف)



(ب)



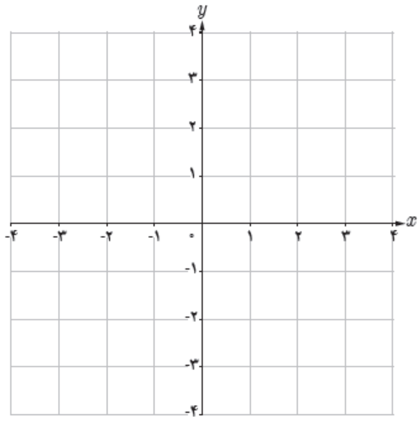
(پ)



(ت)

فعالیت

۱ نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله $[-۱,۲]$رسم کنید.



۲ اگر x از طرف چپ به عدد ۱ نزدیک شود، آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ... نزدیک می‌شوند، بنابراین :

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=.....$$

۳ حد راست تابع f در نقطه $x=۱$ را به دست آورید.

۴ آیا تابع f در نقطه $x=۱$ حد دارد؟ چرا؟

مثال : مقدار حد راست تابع $f(x)=\frac{[x]}{x}$ را در نقطهٔ $x=۰$ به دست آورید.

کار در کلاس

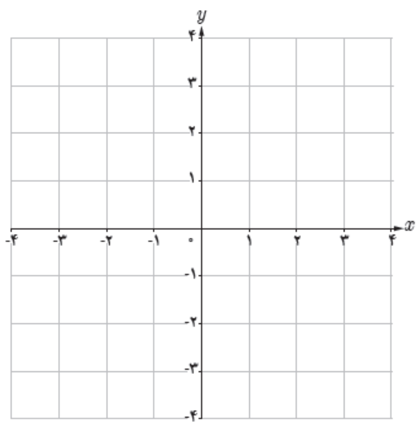
۱ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را درنظر بگیرید :

الف) با استفاده از تعریف قدرمطلق، تابع f را به صورت دوضابطه‌ای بنویسید.

ب) نمودار تابع f را رسم کنید.

پ) با استفاده از نمودار f، حد چپ و حد راست تابع در صفر را به‌دست آورید.

ت) آیا تابع f در نقطهٔ صفر حد دارد؟ چرا؟



تمرین

۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

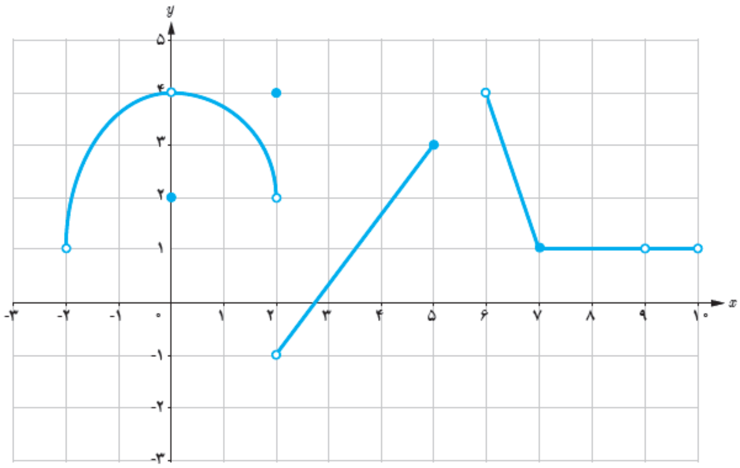
پ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 8} f(x)$

چ) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$



۲ با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x>0 \\ x^2+2x & x<0 \end{cases}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید :

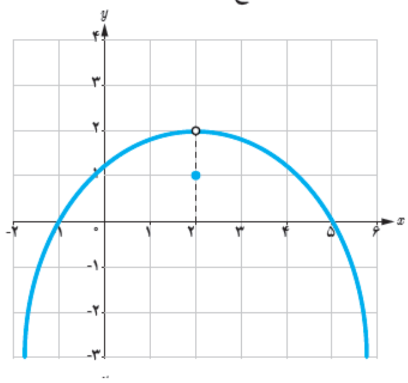
الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد . . .نزدیک می‌شوند، بنابراین :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)= \dots$$

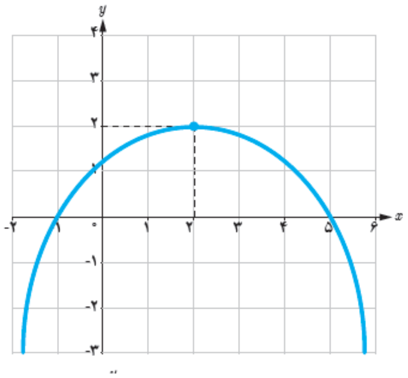
ب) حد راست تابع f در نقطهٔ $x=0$ را به دست آورید.

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=0$ حد دارد؟ چرا؟

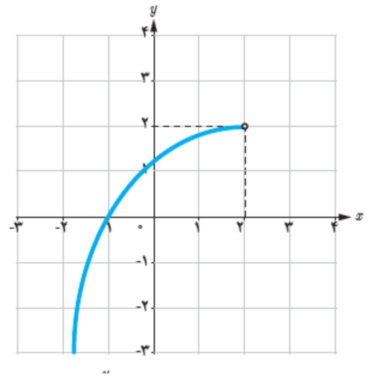
۳ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.



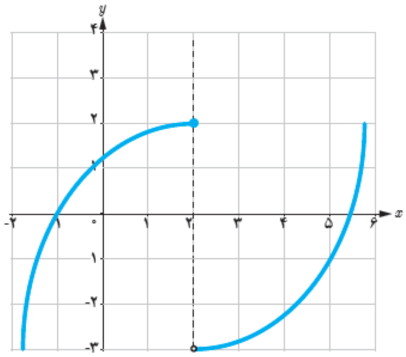
(الف)



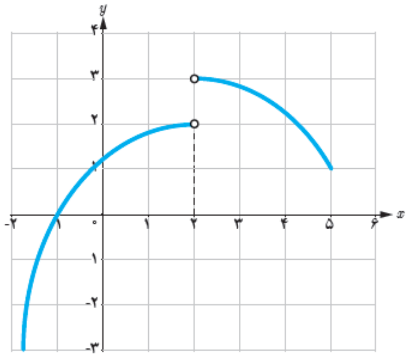
(ب)



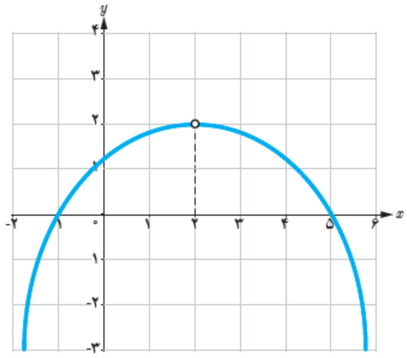
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

ـ تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد.

ـ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست.

ـ تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد.

ـ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است.

ـ تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد.

ـ تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد.

۴ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ در نقطهٔ $x=1$ چه می‌توان گفت؟

۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]-2}$ در نقطه $x=2$ چه می‌توان گفت؟

۶ با رسم نمودار تابع $f(x)=-(x-1)^2+2$، حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)]$

ب) $\left[\lim\limits_{x\to 1} f(x)\right]$

([ ] نماد جزء صحیح است)

۷ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

الف) مقدار $\lim\limits_{x\to 0}|x|$ را به‌دست آورید.

ب) اگر $a\in\mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim\limits_{x\to a}|x|=|a|$ برقرار است؟

با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x>1\\ -x & x<1\end{cases}$، مقادیر $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ را به‌دست آورید. آیا تابع f در $x=1$ حد دارد؟ چرا؟

نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که؛

آ) حد تابع f در نقطهٔ $x = ۲$ برابر ۴ باشد ولی $f(۲)$ وجود نداشته باشد.

ب) حد تابع f در نقطهٔ $x = ۰$ برابر ۱- باشد و $f(۰) = ۲$

پ) حد تابع f در نقطهٔ $x = -۱$ وجود نداشته و $f(-۱) = -۱$ باشد.

ت) حد چپ و راست در $x = -۲$ وجود داشته باشد ولی با هم برابر نباشند.

برای هر یک از موارد زیر مثالی را به همراه نمودار آن ارائه کنید که شرایط گفته‌شده را داشته باشد.

الف تابع در نقطهٔ $x = ۱$ حد داشته باشد و مقدار آن برابر ۲ باشد ولی با مقدار تابع در نقطهٔ $x = ۱$ برابر نباشد.

ب تابع در نقطهٔ $x = -۱$ حد نداشته باشد اما $f(-۱) = ۲$ است.

پ تابع در نقطهٔ $x = ۳$ تعریف نشده باشد ولی حد آن برابر ۲ باشد.

ت تابع در سمت راست عدد ۲ تعریف‌شده باشد ولی در سمت چپ آن تعریف‌نشده باشد و حد راست داشته باشد.

ث تابع در عدد صفر تعریف‌نشده باشد و در این نقطه نیز حد نداشته باشد.

ج تابع در نقطهٔ $x = ۱$ دارای حد چپ باشد اما حد راست نداشته باشد.

حد از به کمک نمودار :

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2 & x>1 \\ -1 & -1<x\le 1 \\ -x-3 & x<-2 \end{cases}$ را رسم کنید. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

آ) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-1$

ب) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-1$

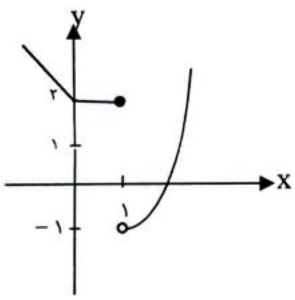
پ) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ وجود ندارد.

ت) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-1$

ث) $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=-1$

ج) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)$

با استفاده از نمودار ،حد توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده مشخص کنید.



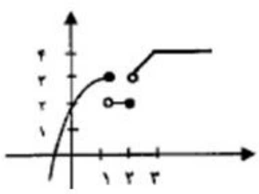
الف) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

با توجه به نمودار تابع f حاصل عبارت زیر را به دست آورید .



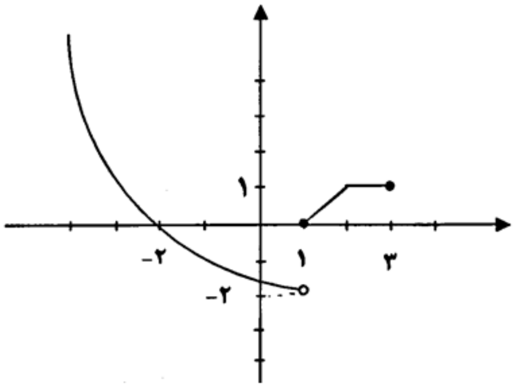
$$2\lim_{x\to2^+} f(x)-\lim_{x\to1^-} f(x)+2f(3)$$

با توجه به نمودار تابع f حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

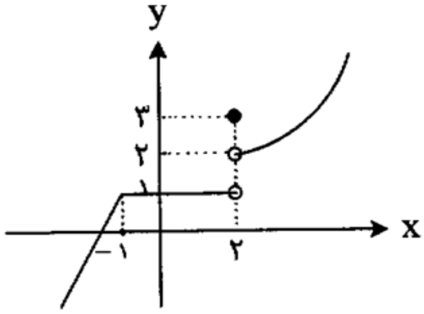
ب) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$



نمودار تابع f به شکل زیر داده شده است ، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)+\lim_{x\to(-1)} f(x)-3f(2)$$

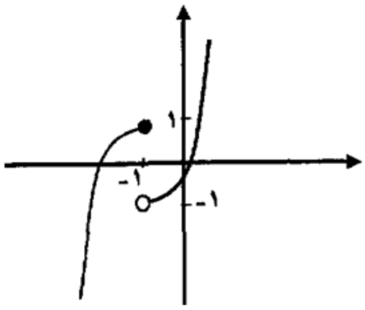


با توجه نمودار تابع f حاصل هر یک از حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$



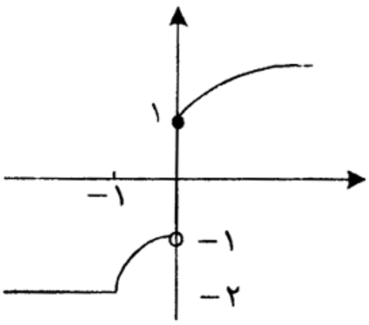
با توجه به نمودار تابع f حاصل هر یک از حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

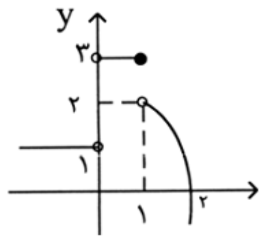
ب) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

د) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$



با توجه به نمودار تابع f حدهای زیر را بدست اورید .

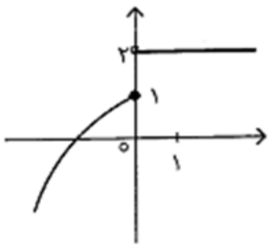


الف) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

با توجه به نمودار تابع f ، حاصل هر یک از حدود زیر را بیابید .



الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

حد توابع چند ضابطه ای:

تابع $f(x)=\begin{cases}(a+2)x-3 & x>2\\ -x^2+1 & x\le 2\end{cases}$ مفروض است a را طوری بیابید که تابع در نقطه ی $x=2$ دارای حـــد باشد.

به ازای چه مقادیری از a و b تابع f با ضابطه زیر در $x=1$ و $x=-1$ حد دارد.

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+2 & x<-1\\ \sqrt{5-x^2} & |x|<1\\ \dfrac{b}{\sqrt{x+2}} & x\ge 1\end{cases}$$

تابع $f(x)=\begin{cases}(a+۱)x+۳ & , \quad x>-۲\\ -۲x^{۲}+۱ & , \quad x<-۲\end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که وقتی $x \to -۲$ تابع حد داشته باشد.

تابع $f(x)=\begin{cases}(a+۱)x+۳ & x>-۳\\ -۲x^{۲}+b & x<-۳\end{cases}$ **مفروض است. مقادیر** a,b **را چنان بیابید که :**

$$\lim_{x\to -۴} f(x)=-۱ \ , \ \lim_{x\to -۱} f(x)=-۴$$

تابع $f(x)=\begin{cases}ax+۲b & , \quad x>۳\\ ax^{۲}+bx+۲ & , \quad x<۳\end{cases}$ مفروض است. عددهای a و b را چنان بیابید که $\lim_{x\to ۳^{+}} f(x)=۶$ و $\lim_{x\to ۳^{-}} f(x)=۲$ باشد.

آیا تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۳x-۱}{x} & x<۱\\ x^{۲}+۱ & x>۱\end{cases}$ **در** $x=۱$ **حد دارد ؟ چرا ؟**

مقادیر a,b را در $f(x)=\begin{cases} ax+b & x\geq -۱ \\ ax^۲-۱ & x<-۱ \end{cases}$ طوری تعیین نمایید که $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=۱$ گردد .

مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ۲ax+۳ & x<۲ \\ ۳x^۲+۱ & x\geq ۲ \end{cases}$ در نقطه $x=۲$ حد داشته باشد .

اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt{۲x^۲-۴a} & x\geq ۲ \\ x+b & -۲\leq x<۲ \\ x^۲+bx+۳a & x<-۲ \end{cases}$ باشد a, b را طوری بیابید که تابع f در نقطه ی $x=-۲$ دارای حد بوده و $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۲$ باشد .

در وجود حد $f(x)=\begin{cases} x+۳ & x\leq -۲ \\ ۳-x & x>-۲ \end{cases}$ در نقطه $x=-۲$ بحث کنید ؟

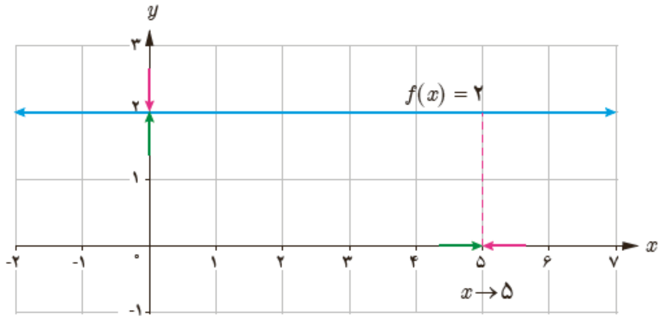
درس ۳

قضایای حد

۱ــ حد تابع ثابت

حد تابع ثابت در هر نقطه برابر مقدار تابع ثابت است.

به‌طور مثال : $\lim\limits_{x\to ۵} f(x) = ۲$



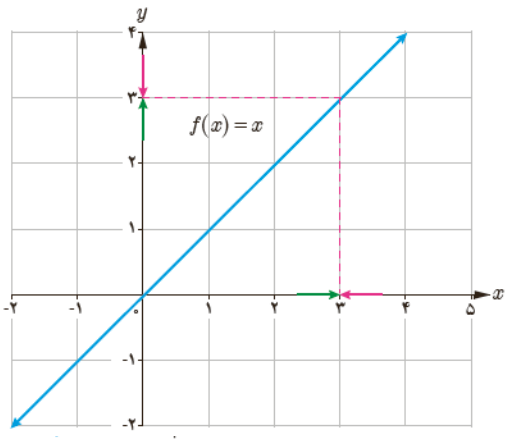
به‌طور کلی اگر c و a دو عدد حقیقی باشند : $\lim\limits_{x\to a} c = c$

مثال :

۲ــ حد تابع همانی

اگر $f(x)=x$، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} x = a$ $(a\in \mathbb{R})$

به‌طور مثال : $\lim\limits_{x\to ۳} x = ۳$



کار در کلاس

حدهای زیر را حساب کنید :

$\lim\limits_{x\to ۰} x = \cdots\cdots\cdots$ 	$\lim\limits_{x\to ۷} ۵ = \cdots\cdots\cdots$ 	$\lim\limits_{x\to ۷} x = \cdots\cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to -۷} x = \cdots\cdots\cdots$ 	$\lim\limits_{x\to ۴} (-۲) = \cdots\cdots\cdots$ 	$\lim\limits_{x\to ۵} ۰ = \cdots\cdots\cdots$

۳ـــ حد مجموع

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim_{x\to a} g(x)=m$ آن‌گاه :

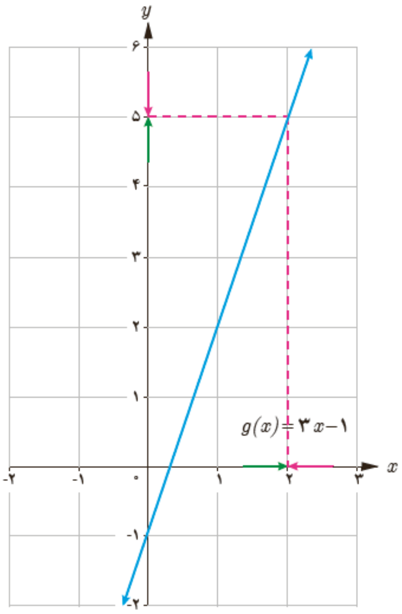
$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=l+m$$

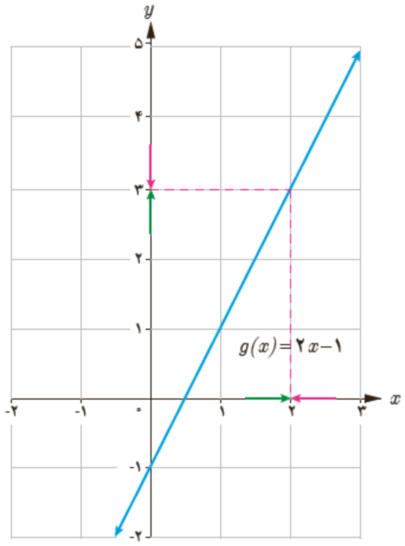
به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد مجموع دو تابع در آن نقطه برابر مجموع حدهای آنها در همان نقطه است.

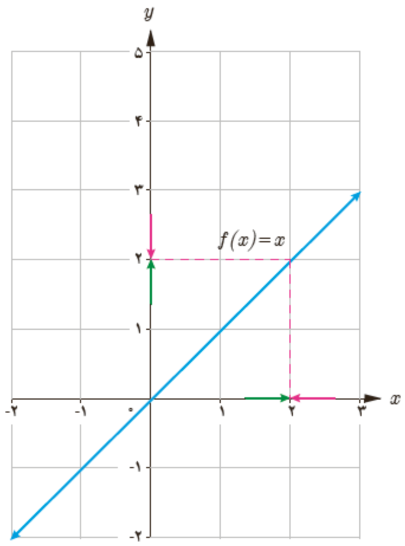
مثال :

کار در کلاس

اگر $f(x)=x$ و $g(x)=2x-1$ آن‌گاه $\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))$ را به کمک قانون بالا محاسبه کنید. جاهای خالی را پر کنید و به کمک نمودارها قانون حد مجموع را نیز توضیح دهید.







$\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))=$ ....+........

$\lim_{x\to 2} g(x)=$ ....

$\lim_{x\to 2} f(x)=$ ....

۴ـــ حد تفاضل

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim_{x\to a} g(x)=m$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=l-m$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد تفاضل دو تابع در آن نقطه برابر تفاضل حدهای آنها در همان نقطه است.

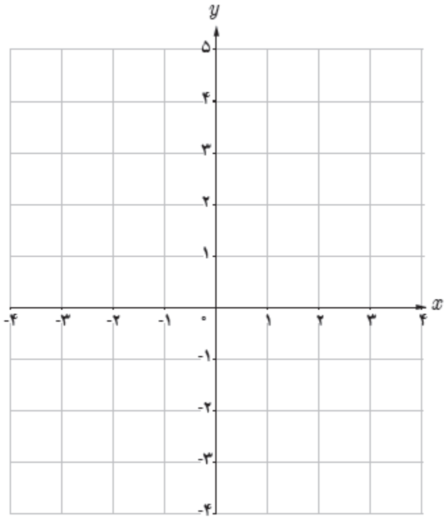
مثال :

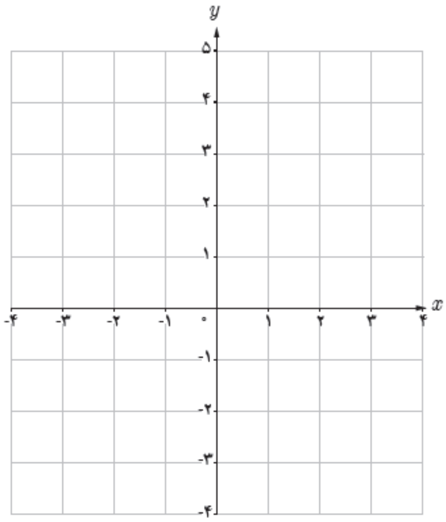
فعالیت

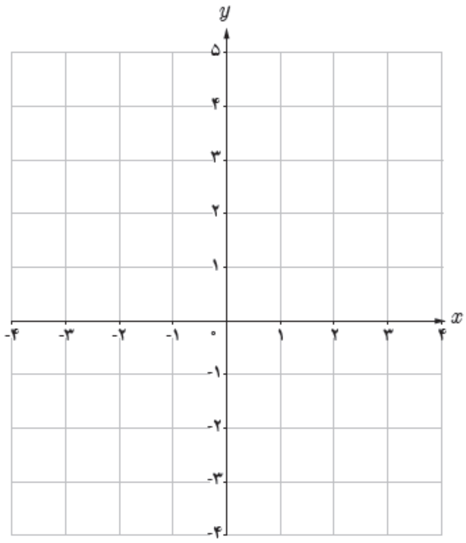
دو تابع $f(x)=\begin{cases} ۴ & x\leq ۲ \\ ۳ & x>۲ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} -۲ & x\leq ۲ \\ -۱ & x>۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) ضابطه تابع $f+g$ را بیابید.

ب) نمودار توابع f، g و $f+g$ را رسم کنید.







پ) آیا حد دو تابع f و g در $x=۲$ وجود دارد؟

ت) آیا حد تابع $f+g$ در $x=۲$ وجود دارد؟

ث) آیا می‌توان از قضیه حد مجموع برای محاسبه حد $f+g$ در $x=۲$ استفاده کرد؟ چرا؟

به‌طور مثال در «کار در کلاس» قبل داریم :

$$\lim_{x\to ۲}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to ۲}f(x)-\lim_{x\to ۲}g(x)=۲-۳=-۱$$

۵ــ حد حاصل ضرب

اگر $\lim_{x\to a}f(x)=l$ و $\lim_{x\to a}g(x)=m$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}(f(x).g(x))=\lim_{x\to a}f(x).\lim_{x\to a}g(x)=lm$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد حاصل ضرب دو تابع در آن نقطه برابر .... آنها در همان نقطه است.

اگر c یک عدد ثابت و $\lim_{x\to a}f(x)=l$ آنگاه

$$\lim_{x\to a}(cf(x))=c\lim_{x\to a}f(x)=cl \quad (a\in \mathbb{R})$$

اگر تابع f در نقطه‌ی $x=۱$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۱$، آن‌گاه $\lim_{x\to ۱}f(x)$ چقدر است؟

اگر تابع f در نقطه‌ی ۲ حد داشته باشد و $\lim_{x\to ۲}\frac{۲(x+۱)^۲-x}{f(x)}=۸$، حاصل $\lim_{x\to ۲}f(x)$ چقدر است؟

اگر تابع‌های f و g در $x=۱$ حد داشته باشند و $\lim_{x\to ۱}(۲f+g)(x)=۳$ و $\lim_{x\to ۱}(f-۳g)(x)=۵$، حاصل $\lim_{x\to ۱}(\frac{f}{g})(x)$ چقدر است؟

کار در کلاس

الف) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ ، به کمک قانون حد حاصل ضرب هریک از حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{2}=\lim_{x\to a}(f(x).f(x))=\ldots\ldots\ldots$$

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{3}=\ldots\ldots\ldots$$

ب) برای محاسبهٔ حد $\lim\limits_{x\to 20}(\frac{2}{5}x-3)$ چگونه از قوانین ۲، ۴ و ۵ استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید.

در حالت کلی اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $n\in\mathbb{N}$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{n}=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^{n}=l^{n}$$

۶ــ حد تقسیم

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ که $m\neq 0$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{l}{m}\qquad (m\neq 0)$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد تقسیم دو تابع در آن نقطه برابر تقسیم حدهای آنها در همان نقطه است؛ به شرط آنکه حد تابع مخرج در آن نقطه صفر نشود.

مثال :

اگر تابع f در نقطه‌ی $x=۱$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۱$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

اگر تابع‌های f و g در $x=۱$ حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to ۱}(۲f+g)(x)=۳$ و $\lim\limits_{x\to ۱}(f-۳g)(x)=۵$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

در صورتی که $f(x+۲)=\frac{x+۴}{x}$ باشد، $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ را به دست آورید.

اگر تابع f در نقطه‌ی $x=۳$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۵$ باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ را به دست آورید.

فعالیت

۱ برای تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۳x^۲+۲x-۷$ ،

الف) با تکمیل جاهای خالی $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}(۳x^۲+۲x-۷)$$
$$=\lim_{x\to ۱}(۳x^۲)+\lim_{x\to ۱}(۲x)-\lim_{x\to ۱}۷$$
$$=۳\lim_{x\to ۱}x^۲+\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

ب) $f(۱)$ را محاسبه کنید و درستی تساوی $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=f(۱)$ را بررسی کنید.

پ) دربارهٔ تابع با ضابطهٔ $g(x)=\frac{۱}{۸}x^۴-x^۳+۵x-\frac{۱}{۲}$ ، درستی تساوی $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=g(۲)$ را بررسی کنید.

> به طور کلی حد یک تابع چندجمله‌ای در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

۲ الف) مطلوب است : $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲x-۱}{x^۲-۴x+۱}$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۲x-۱}{x^۲-۴x+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۳}(۲x-۱)}{\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲-۴x+۱)}=\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

ب) حدهای مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{\frac{۳}{۵}x^۲-۲x+۱}=\ldots\ldots \qquad \lim_{x\to ۱}\frac{x^۴+۲x^۳+۱}{۵x^۲+\frac{۲}{۳}}=\ldots\ldots$$

> به‌طور کلی اگر $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ یک تابع گویا باشد که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند، برای محاسبهٔ حد $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a کافی است که حد $P(x)$ را بر حد $Q(x)$ در آن نقطه تقسیم کنیم؛ به شرط آنکه $\lim\limits_{x\to a} Q(x)\neq ۰$

۷ــ حد ریشه

اگر $\lim\limits_{x\to c}(ax+b)=l>0$ آنگاه :

$$\lim_{x\to c}\sqrt{ax+b}=\sqrt{\lim_{x\to c} ax+b}=\sqrt{l}$$

تذکر : تمام قوانینی که در این درس دربارهٔ حد مطرح شد، برای حد راست و حد چپ تابع نیز برقرار است.

مثال : مطلوب است : $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{2x-6}$

آیا تابع $f(x)=\sqrt{x-3}$ وقتی $x\to 3$ دارای حد است ؟ چرا ؟

اگر $f(x)=\sqrt{2x-1}$ و $g(x)=x^2+3x$ باشد، حد عبارت $\dfrac{3+g(x)}{2-f(x)}$ وقتی $x\to 1$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

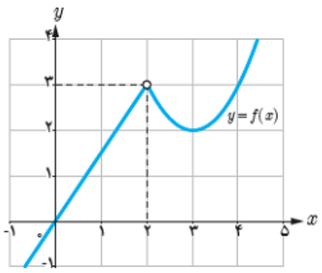
۱) $\lim\limits_{x \to -۱} x^{۴}$

۲) $\lim\limits_{x \to ۱۰} (۵x^{۳} - ۶|x| + ۱)$

۳) $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{x^{۲} + ۴x + ۴}{۴x^{۳} - ۷x + ۱}$

ب) نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است.

مقدار $\lim\limits_{x \to ۲} x\,f(x)$ را بیابید.



۸ - حد توابع قدر مطلق

حد چپ و حد راست $f(x)=x+\frac{\sqrt{x^۲}}{x}$ را وقتی که $x\to ۰$ بدست آورید .

حاصل هر یک از حد های زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲-۴}{|x-۲|}$$

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|}{۱-x}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{|x-۲|}{x}$$

$$\lim_{x\to -۱}\left(\frac{x+۲}{۳x^۲+۴}\times\frac{|x+۳|}{۲x}\right)$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{|x|+۱}{x+۱}$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{|x-۱|}$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x^۲-x-۲|}{x^۲-۴}$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{|x-۳|}{x-۳}$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{|x-۲|}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{|x|-۱}$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{|-x^۲+۳x-۲|}{x^۲-۵x+۶}$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۲+|x|}{x-۴|x|}$$

به ازای کدام چه مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases} ۶ax^۲+۱ & ;x>۲ \\ ۳ & ;x=۲ \\ \frac{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}{-۲x+۴} & ;x<۲ \end{cases}$ در $x=۲$ دارای حد است؟

۹ – حد توابع جزصحیح:

حد چپ تابع $f(x)=\left[\frac{x}{۳}\right]+[۳x]+\frac{\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x^۲-۹}$ را در $x_۰=۳$ به دست آورید.

مقدار حد $\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x-۲}}{[x]+۲}$ را بیابید.

$\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{x-[x]}{۱-x}$

$\lim\limits_{x\to ۳}[۴-x]+[x-۳]$

$\lim\limits_{x\to ۲}[x]+[۴-x]$

$$\lim_{x\to -۳} [x]+[-x]$$

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{x-۲}{[x-۱]}$$

$$\lim_{x\to ۴^-} \frac{[x]-۴}{x-۵}$$

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{x-۳}{[x]+[-x]}$$

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{x-۲}{[x]+۱}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} [x]+[x^۲]+[x^۴]$$

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{x-[x]}{x^۲+۲}=$$

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{[x]+[-x]}{[x]+۱}$$

اگر تابع $f(x)=\frac{|x-۱|}{x^۲-x}+a[x]$ در نقطهٔ $x_۰=۱$ حد داشته باشد، آن‌گاه a را به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{[x]-۱}{x-۱}$$

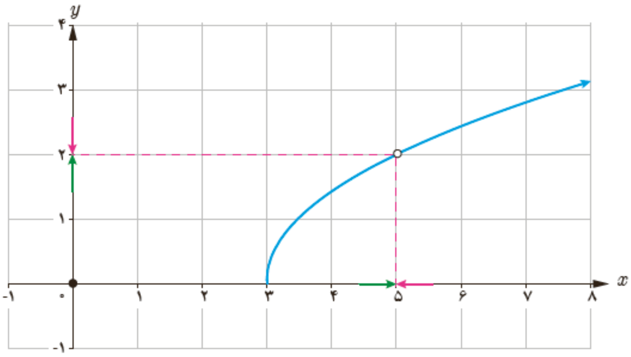
$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{x-[x]}{x^۲+۲}$$

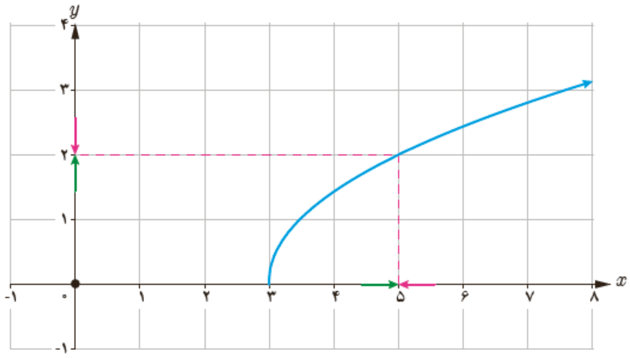
$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{x[x]-۴}{x^۲-۴}$$

به ازای چه کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^۲+[x]}{|x|} & x<-۱ \\ ۳x+a & -۱<x \end{cases}$ در $x=-۱$ حد دارد؟

کار در کلاس

۱ نمودارهای توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{۲x-۶}$ و $(x\neq ۵)$ $g(x)=\sqrt{۲x-۶}$ رسم شده‌اند.





الف) هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟

ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۵} g(x)$ موجودند؟

پ) کدام‌یک از حدهای زیر موجودند؟ آنها را محاسبه کنید.

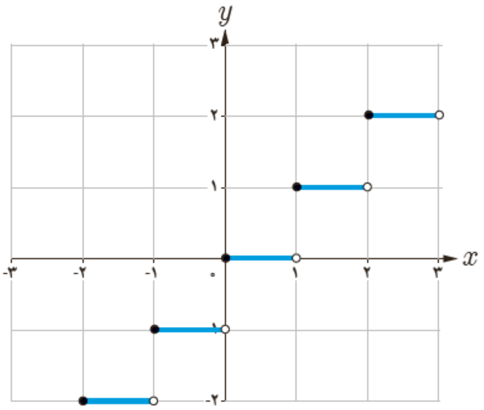
$\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{۲x-۶}=\cdots\cdots$ $\lim\limits_{x\to ۳^-}\sqrt{۲x-۶}=\cdots\cdots$ $\lim\limits_{x\to ۳^+}\sqrt{۲x-۶}=\cdots\cdots$

۲ دربارهٔ تابع $h(x)=\frac{|x|}{x}$ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $h(x)=۱$ ب) $D_h=\mathbb{R}-\{۰\}$ پ) $\lim\limits_{x\to ۰^+} h(x)=۱$

ت) $h(۰)=۰$ ث) $\lim\limits_{x\to ۰} h(x)$ وجود ندارد.

۳ با استفاده از نمودار تابع $f(x)=[x]$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+}[x]$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-}[x]$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲}[x]$ ت) $\lim\limits_{x\to ۱}[x]$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱/۵}[x]$ ج) $\lim\limits_{x\to -\sqrt{۲}}[x]$

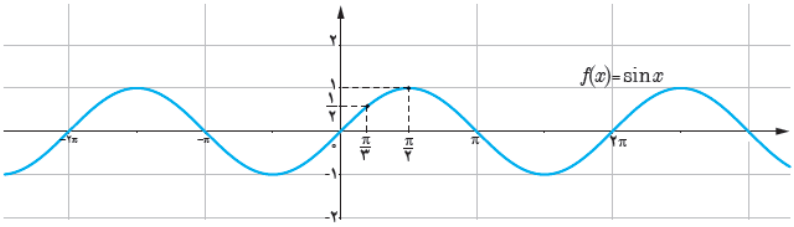
حد راست و چپ تابع $f(x)=x-[x]$ را در $x=۲$ محاسبه کنید.

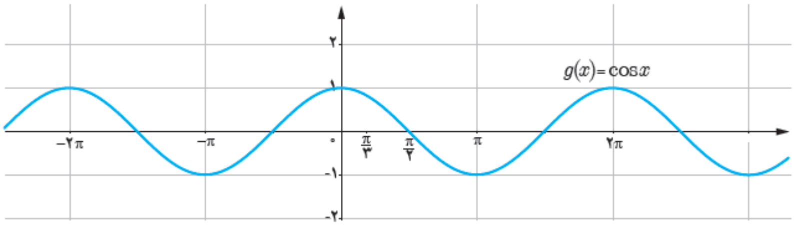
مجموع حدهای چپ و راست تابع $f(x)=\frac{[x]}{[-x]}$ در نقطه‌ی ۲ چقدر است؟

حد توابع مثلثاتی

فعالیت

نمودارهای توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در زیر رسم شده‌اند.





الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin x = \cdots$

۲) $\lim\limits_{x\to\pi} \sin x = \cdots$

۳) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \cos x = \cdots$

۴) $\lim\limits_{x\to\pi} \cos x = \cdots$

ب) آیا مقدار حد تابع $f(x)=\sin x$ در $\frac{\pi}{6}$ با مقدار $\sin(\frac{\pi}{6})$ برابر است؟

پ) آیا مقدار حد تابع $g(x)=\cos x$ در $\frac{\pi}{6}$ با مقدار $\cos(\frac{\pi}{6})$ برابر است؟

قضیه : برای هر عدد حقیقی a،

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

مثال : حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{[x]}{x}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{2+\sin x}$

پ) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{[x]-3}{x}$

ت) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x \cos x}{1+\cos^2 x}$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} (2\cos^2 x-\sin x)=$

$\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x-\sin x)$

کار در کلاس

مقدار حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to -\pi} \frac{\pi \cos x}{x}$

۲) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-(x+3)^2}{\sin x+2\cos x}$

تمرین

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۹}(\sqrt{x}-۹)^{۳}$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱}(-۶x^{۷}-۴x^{۲}+۵)$

پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{۵}{۳}}\dfrac{(x+\pi)(۳x+۵)}{(۳x+۶)(x^{۳}+۱)}$

ت) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}^{+}}\dfrac{۱-x^{۲}}{x^{۲}-۴}$

ث) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\sqrt{۴x^{۲}+۶x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\dfrac{\sin x}{x+\cos x}$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{|\cos x|}{x-\pi}$

۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim\limits_{x\to ۱}f(x)=۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=۳$. آیا می‌توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟

۳ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم : $\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)}{x^{۲}-۱}=۴$.

۴ نشان دهید اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ آن‌گاه $\lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

۵ توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y=۳x+۲ \quad , \quad y=x^{۲}-۱ \quad , \quad y=[x]-۱ \quad\quad y=\begin{cases}-۲ & x<۱\\ ۲ & x>۱\end{cases}$$

الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=۱$ را (در صورت وجود) بیابید.

ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

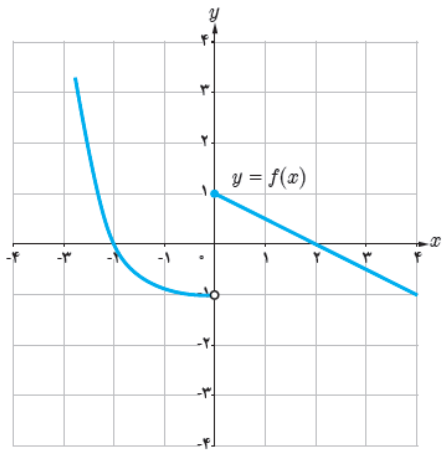
هر سه تابع f ، g و $f+g$ در ۱ حد دارند.	$f(x)=\cdots$	$g(x)=\cdots$	$f(x)+g(x)=\ldots$
تابع $f.g$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\cdots$	$g(x)=\cdots$	$f(x)\ g(x)=\cdots$
توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.	$f(x)=\cdots$	$g(x)=\cdots$	$\frac{f(x)}{g(x)}=\cdots$
تابع $f^{۲}$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\cdots$		$f^{۲}(x)=\cdots$
تابع f در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\cdots$		$\sqrt{f(x)}=\cdots$

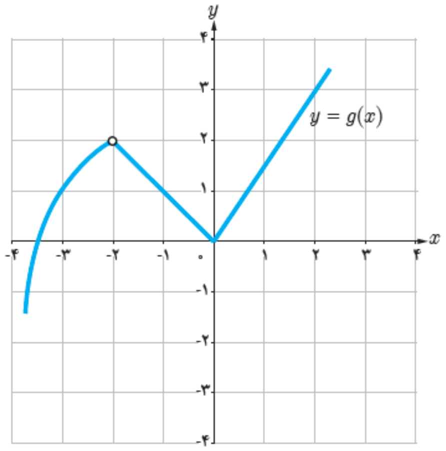
۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟

۷ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-۱$ حد داشته باشد :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}+[x]}{|x|} & x<-۱\\ ۳x+b & x>-۱\end{cases}$$

۸ در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.





$$\lim_{x\to -۲}\left(۲g(x)-f(x)\right)$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)}{f(x)}$$

$$\lim_{x\to -۳} -۳\sqrt{g(x)}$$

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt[۳]{۸g(x)}$$

درس ۴

محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

در این بخش، به محاسبه حد توابعی مانند $\frac{f}{g}$ می‌پردازیم که حد صورت و حد مخرج کسر در نقطه a، هر دو برابر صفر است. در این‌گونه موارد، نمی‌توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم، بنابراین سعی می‌کنیم با تجزیهٔ صورت و مخرج کسر به عامل‌های مناسب، کسر را ساده نماییم. برای این امر از اتحادهای جبری و مثلثاتی استفاده می‌کنیم.

اگر در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند، داشته باشیم : $P(a)=Q(a)=0$ دیگر با قانون اخیر نمی‌توان حد را محاسبه کرد. در این حالت به روش زیر عمل می‌کنیم :
چون $P(a)=Q(a)=0$ بنابراین $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیرند. ابتدا عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را با تقسیم $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ ساده می‌کنیم و سپس امکان استفاده از قانون تقسیم حدها را بررسی می‌کنیم.

رفع ابهام از توابع کسری که به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می آیند.

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ را بیابید.

مثال : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ را محاسبه کنید.

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴x+۴}{x^{۲}-۴}$$

حد توابع زیر را بدست آورید .

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۲x}{x^{۲}-۳x+۲}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^{۲}-۱۲}{x^{۲}-x+۲}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۳}-۸}{۳x^{۲}-۱۲}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۳}+x^{۲}-۲x}{x-۱}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۳}-x^{۲}-۲x}{x-۲}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲x^۳-۴x^۲+۳x-۶}{x^۲-۲x}$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۶x+۹}{x^۲-۹}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+x-۲}{x^۲-۱}$$

$$\underset{x\to ۵}{Lim}\frac{۳x^۲-۱۳x-۱۰}{x^۲-۶x+۵}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{x^۲+۲x-۸}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۵x^۲+x-۶}{۹x^۲+۳x-۱۲}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴x+۴}{۲x^۲+x-۱۰}$$

اگر $\lim\limits_{x\to a} \frac{7x-5}{x+1}=3$ ، مقدار a چقدر است؟

اگر $f(x)=ax^2+bx+c$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(3x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x-1)$ ، مقدار $\frac{a}{b}$ چقدر است؟

a را طوری بیابید که $\lim\limits_{x\to 2a} \frac{x-2a}{x^2-4a^2}=\frac{1}{8}$ باشد.

توابع رادیکالی که به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می آیند.

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$ را بیابید.

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{\sqrt{۳x-۵}-۲}$$

مثال : مقدار $\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x}$ را بیابید.

$$\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{۵-x}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x^۲-۴}$$

$$\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x^۲-۶x+۵}$$

$$\lim_{x\to -۳}\frac{x+\sqrt{۶-x}}{x+۳}$$

$$\lim_{x\to ۴} \frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}$$

$$\lim_{x\to ۹} \frac{x-۹}{\sqrt{x}-۳}$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x-۱}{x-\sqrt{۲-x}}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۳-\sqrt{x+۹}}{x}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{x+۱}-۱}{x}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-۴}{۳-\sqrt{x+۷}}$$

$$\lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x+۱}-۲}{x^۲-۹}$$

$$\lim_{x\to ٤} \frac{x^{٢}-١٦}{\sqrt{x+١٢}-x}$$

$$\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}-۲}{x^{۲}-۱۶}$$

حد عبارت $\frac{|x^{۲}-x-۲|}{۲x-\sqrt{x^{۲}+۱۲}}$ وقتی $x \to ۲^{-}$ کدام است؟

۱) ۳-　　۲) ۲-　　۳) ۲　　۴) ۳

ج) توابع مثلثاتی که به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می آیند.

حد گیری به روش تغییر متغیر

گاهی یک تغییر متغیر متناسب، مسئله را به مسئله‌ای ساده‌تر تبدیل می‌کند.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۶}} \frac{\sin\left(۲x-\frac{\pi}{۳}\right)}{x-\frac{\pi}{۶}}$$

مثال :

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\cos x}{x}=$

۲) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos ۲x}=$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin ۲x}{۳x}$$

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{۲x-\pi}{\cos x}$ را بیابید.

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\sin ۲x-۱}{۴x-\pi}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x-\sin x}{x^{۳}}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x\sin ۳x}{۱-\cos ۲x}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}}\frac{\operatorname{Sin}(x+\frac{\pi}{۶})-۲\operatorname{Cos}(۳x)}{\tan^{۲} x}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\operatorname{Cos} ۲x}{۳x^{۲}}$$

$$\operatorname{Lim}_{x\to ۰}\frac{\tan ۲x\ \operatorname{Sin}۳x}{۵x^{۲}}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲x\tan ۳x}{۱-\cos ۲x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{۲\sin x - ۱}{\cos x + \sin^{۲} x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۳\tan x - \sin ۲x}{x}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x^{۲}}{۱ - \cos ۲x}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x\sin x}{۱ - \cos x}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱ - \cos ۴x}{۳x^{۲}}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{Sin\, ۲x\ Sin\, ۳x}{Sin^{۲} x}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱ - Cos\, ۲x}{۲x^{۲}}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۲x.\tan ۳x}{x^۲}$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{۸}}(tg۲x+Cot۲x)$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\cos ۲x}{\cos x-\sin x}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{x-\frac{\pi}{۴}}{\sin(۴x-\pi)}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x\tan x}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-۱}{۴x-\pi}$$

مقدار k را طوری بیابید که $\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos(kx)}{x\sin x}=۸$ باشد.

اگر $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan(x-a)}{x^۲-a^۲}=\dfrac{۱}{۲}$ مقدار a را تعیین کنید.

a را طوری بیابید که $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x^۲-a^۲}=\dfrac{۱}{۴}$ باشد.

هرگاه داشته باشیم $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan kx}{\cos kx.\sin ۲x}=۳$ مقدار k را بدست آورید .

$\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{x+۴}-۲}{\sin ۳x}$

تمرین

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{۲x^۲+x-۱}{۳x^۲+۳x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{x^۲[x]-۸}{x-۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{\sqrt{x+۲}-۲}{x^۲-۴}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x^۲+x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}$

۲ اگر $f(x)=\dfrac{x+۱}{۲x^۲-x-۱}$ و $g(x)=\dfrac{۲x+۱}{x}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} f(x)g(x)$ را بیابید.

۳ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱-\sin x}{\cos x}$

ب) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos x-\sin x}$

پ) $\lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲}{|۱-\cos x|}$

ت) $\lim_{x\to ۰} \frac{۲-۲\cos ۲x}{x\sin x}$

ث) $\lim_{x\to -\pi} \frac{\cos x+۱}{x+\pi}$

ج) $\lim_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

چ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶x-۲\pi}$

ح) $\lim_{x\to ۱} \frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}$

درس ۵

پیوستگی

تعریف پیوستگی

گوییم تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

بنابراین، برای پیوسته بودن تابع f در نقطه a، باید شرایط زیر برقرار باشند :

الف) تابع f در a تعریف شده باشد.

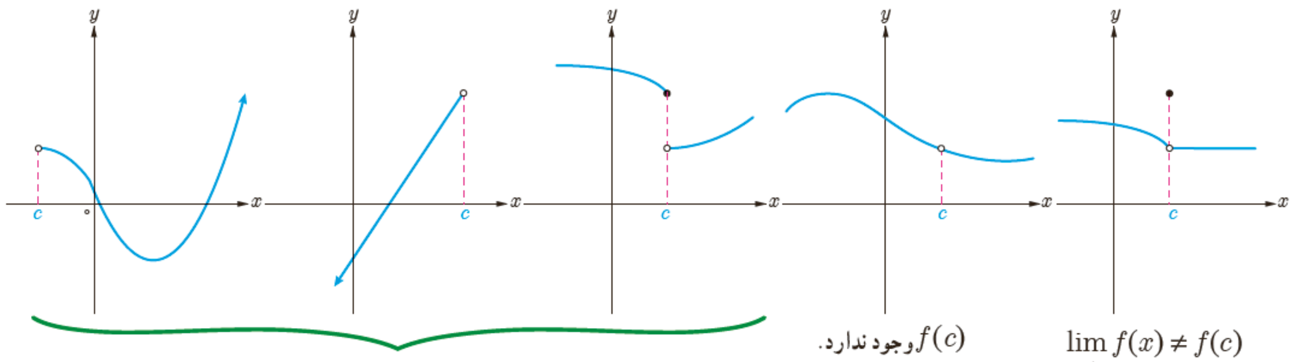
ب) حد تابع f در a موجود باشد.

پ) مقدار حد تابع f در a با مقدار $f(a)$ برابر باشد.

هنگامی که تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته نیست، گوییم f در $x=a$ ناپیوسته است.

تابع f در نقطه $x=c$ را پیوسته نامیم؛ هرگاه $(c\in \mathbb{R})$ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

به عبارت دیگر برای آنکه تابع f در c پیوسته باشد، باید $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ و $f(c)$ هر دو موجود و با هم برابر باشند. در غیر این‌صورت تابع را در c ناپیوسته می‌نامیم. در نمودارهای زیر ناپیوسته بودن یک تابع در نقطهٔ c در شرایط مختلف نمایش داده شده است. شما هم مثال‌های دیگری ارائه کنید.

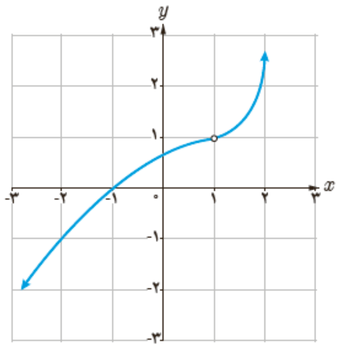


$\lim\limits_{x\to c} f(x)\neq f(c)$

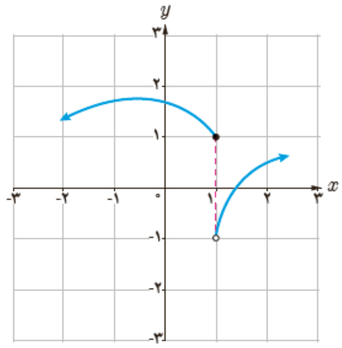
$f(c)$ وجود ندارد.

$\lim\limits_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد.

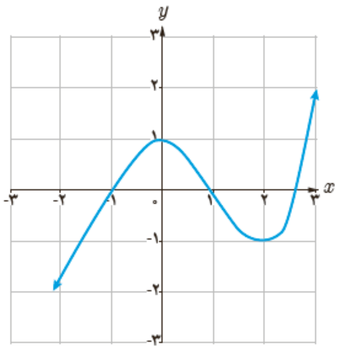
مثال : تابع‌های داده شده با نمودارهای الف و ب پیوسته نیستند، ولی توابع با نمودارهای پ و ت پیوسته‌اند.



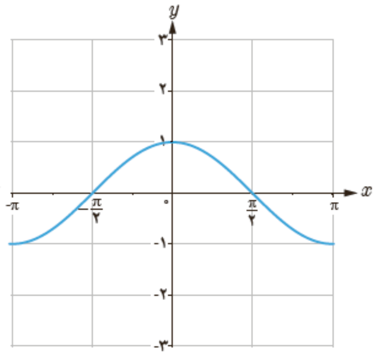
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

مثال : در بخش‌های قبل دیدیم که در هر نقطه a، $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$ و $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a}$. پس توابع $y=\sin x$ و $y=\sqrt[3]{x}$ در هر عدد a، پیوسته‌اند.

همچنین توابع $y=\cos x$ ، $y=|x|$ و $y=x^{۲}$ و نیز چندجمله‌ای‌ها در هر عدد حقیقی a پیوسته‌اند. اما توابع $y=\dfrac{|x|}{x}$ و $y=[x]$ این‌چنین نیستند.

مثال : توابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۹}{x-۳}$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۹}{x-۳} & x\neq ۳\\ ۶ & x=۳\end{cases}$ داده شده‌اند. درباره پیوستگی f و g در نقطه ۳ بحث کنید.

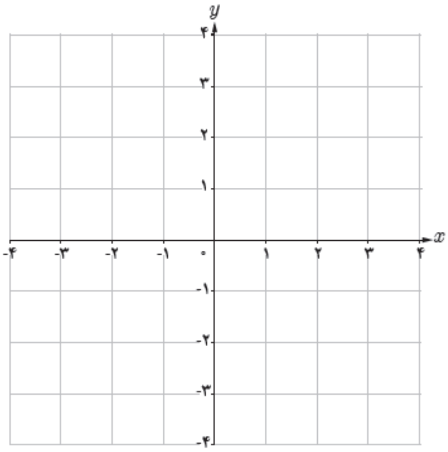
کار در کلاس

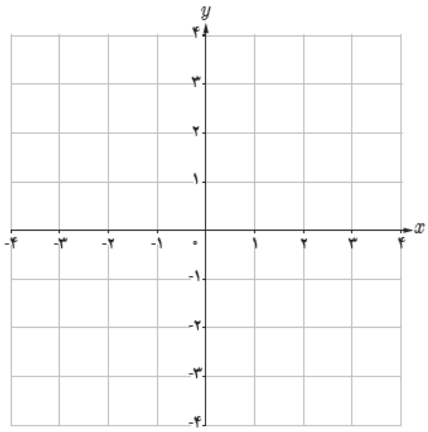
۱ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطهٔ ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در $x=۳$ وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در $x=۳$ پیوسته نیست)

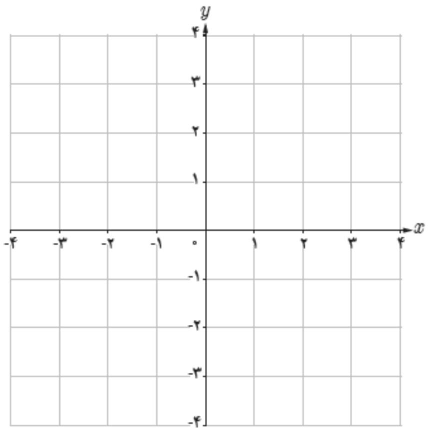
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطه a موجود باشد اما با مقدار تابع در a برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در a پیوسته نیست).

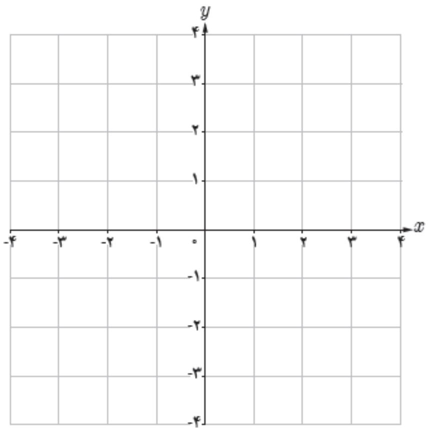
۳ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد به‌جز در دو نقطه.

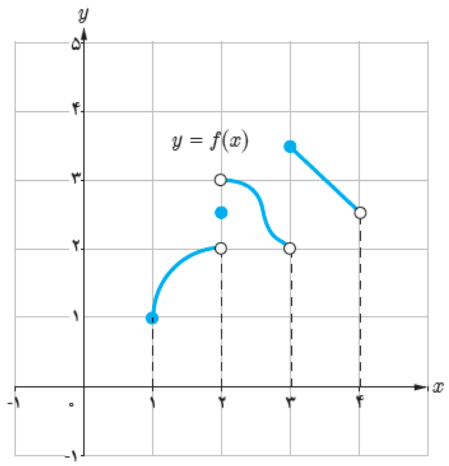

(۱)


(۲)


(۳)


(۴)

فعالیت



نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو رسم شده است.

الف) تابع f در کدام‌یک از نقاط مجموعه $\{۱,۲,۲/۵,۳,۴\}$ ناپیوسته است.

ب) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) = f(۳)$ برقرار است؟

پ) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = f(۳)$ برقرار است؟

ت) در کدام نقطه a از مجموعه $\{۱,۲,۲/۵,۳,۴\}$ تساوی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ برقرار است؟

تعریف

گوییم تابع f در a از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

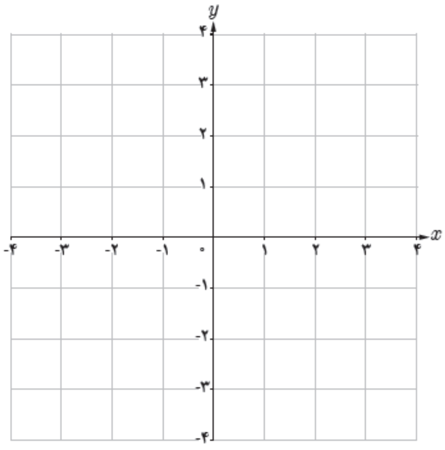
گوییم تابع f در a از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

بنابراین، هرگاه تابع f در یک همسایگی (دوطرفه) a تعریف شده باشد :

f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

مثال : تابع $f(x) = \begin{cases} ۳x^۲ + x & x < ۰ \\ ۲ & x = ۰ \\ ۲\cos x - \sin x & x > ۰ \end{cases}$ داده شده است. پیوستگی تابع f در صفر را بررسی کنید.

کار در کلاس



الف) با رسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ مشخص کنید که در کدام‌یک از نقاط مجموعه $\{۲ , \frac{۱}{۲} , ۰\}$ ،

۱ تابع f پیوسته است.

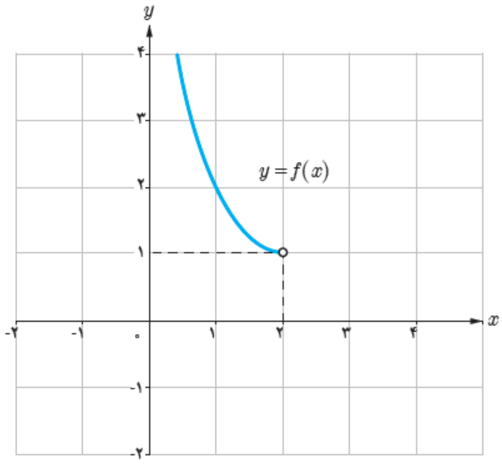
۲ تابع f پیوستگی راست دارد.

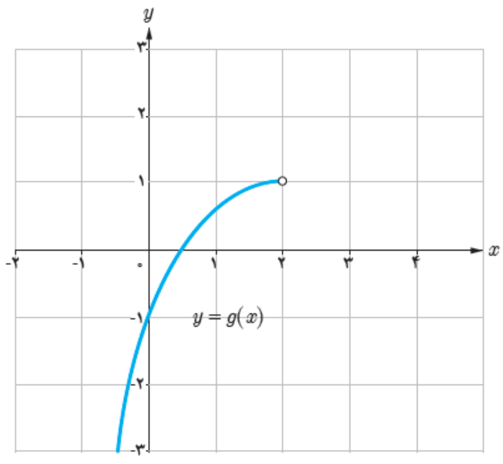
۳ تابع f پیوستگی چپ دارد.

ب) در شکل‌های زیر نمودار دو تابع f و g در طرف چپ نقطه ۲ رسم شده‌اند. در نقطه $x=۲$ و در طرف راست نقطه ۲، نمودارها را طوری تکمیل نمایید که :

۱ تابع f در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشد، اما در ۲ پیوسته نباشد.

۲ تابع g در نقطه ۲ پیوسته باشد.





تعریف (پیوستگی بر بازه)

تابع f را بر بازهٔ باز (a, b) پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد.

تابع f را بر بازهٔ بسته $[a , b]$ پیوسته گوییم هرگاه تابع f در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته و در b از چپ پیوسته باشد.

کار در کلاس

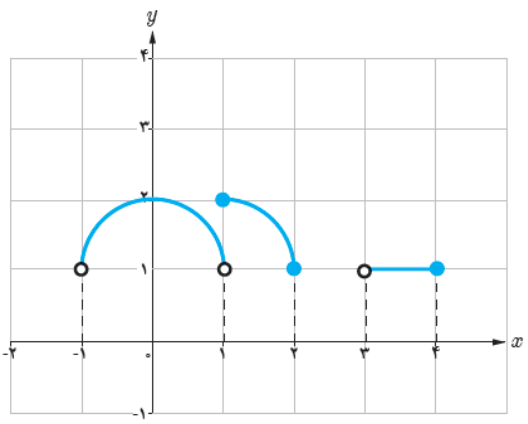
پیوستگی روی بازه‌های $[a , b)$ و $(a , b]$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

کار در کلاس

سه تابع متفاوت مثال بزنید که :

الف) روی بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته باشد.   ب) روی بازه $[-۲,+\infty)$ پیوسته باشد.   پ) روی بازه $(-\infty,۰]$ پیوسته باشد.

کار در کلاس



در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است. کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست هستند؟

الف) تابع f بر بازه $[۱ , ۲]$ پیوسته است.

ب) تابع f در هر نقطه از $[۱ , ۲]$ پیوسته است.

پ) تابع f بر بازه $[۳ , ۴]$ پیوسته است.

ت) تابع f بر بازه $[۰ , ۲]$ پیوسته است.

تمرین

۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y=|x-۱|+۲$

ب) $y=x-[x]$

پ) $y=[x]+[-x]$

ت) $y=\begin{cases} x(x-۱) & x\leq ۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=۱$ پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x<۱ \\ a & x=۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{2}+x-2}{x-1} & x\neq 1\\ a & x=1\end{cases}$

پ) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0<x<1\\ [x]+a & x\geq 1\end{cases}$

ت) $k(x)=([x]-a)[x]$

۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a، توابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

الف) $f(x)=\begin{cases}x & x<0\\ a & x=0\\ 2x+1 & x>0\end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{|x|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$

۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.
ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.
پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

۵ تابع $f(x)=[x]$ در بازه $(۲,k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

۶ بازهٔ بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x)=۲-\sqrt{۳-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

۷ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱-\cos x}{x^۲} & x>۰\\ b-۱ & x=۰\\ x-۲a & x<۰\end{cases}$$

در $x=۰$ پیوسته باشد.

تمرینات بیشتر پیوستگی

حدود a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases} 2a+x^2 & x\geq 2 \\ x^3-x & x<2 \end{cases}$ **در** $x=2$ **پیوسته نباشد.**

پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} 3x+4 & , \quad x\geq -2 \\ \dfrac{|2x+4|}{x+2} & , \quad x<-2 \end{cases}$ **را در نقطه‌ی** $x_0=-2$ **بررسی کنید.**

تابع $f(x)=\begin{cases} |2x-2| & x>1 \\ 3x-1 & x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & x<1 \end{cases}$ **مفروض است ، پیوستگی تابع را درنقطه ی** $x=1$ **بررسی کنید .**

مقادیر عددی b,a را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ۳-۲ax^۲ & x<-۱ \\ ۲x & x=-۱ \\ a\left|x^۲-۱\right|+۲b & x>-۱ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-۱$ پیوسته باشد.

مقادیر b,a راچنان بیابیدکه تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+b}{x-۱} & ,x>-۱ \\ ۰ & ,x=-۱ \\ ax^۲-(a+۱)x-۷ & ,x<-۱ \end{cases}$ در نقطه ی $x=-۱$ پیوسته باشد .

پیوستگی تابع زیر را در نقطه ی $x=۲$ بررسی کنید .

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۳+۳x^۲-۲۰}{x^۲-۴} & , x<۲ \\ ۲x+۲ & , x>۲ \\ ۶ & , x=۲ \end{cases}$$

مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطهٔ $x=۳$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۹}{|x-۳|} & x<۳\\ ۲x^{۲}+ax & x\geq ۳\end{cases}$$

پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}۳x+\dfrac{|۲x|}{x} & x\neq ۰\\ ۲ & x=۰\end{cases}$ را در نقطه $x=۰$ بررسی کنید .

عدد های a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|+ax}{x} & x<۰\\ ۲ & x=۰\\ x^{۳}+۴b & x\geq ۰\end{cases}$ در نقطهٔ $x_۰=۰$ پیوسته باشد.

یک بازه بسته مانند [a,b] بنویسید که در آن $f(x)=۲+\sqrt{x-۳}$ پیوسته باشد.

a و b را چنان بیابید که تابع f در $x=۲$ پیوسته باشد .

$$f(x)=\begin{cases} a+[x]-b & x<۲ \\ ۴ & x=۲ \\ x-\dfrac{a|x-۲|}{x-۲} & x>۲ \end{cases}$$

مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع f در $x=۲$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} [۲x]+a & x<۲ \\ [\sqrt{۳}x] & x=۲ \\ b\dfrac{x^۲-۴}{|۲-x|} & x>۲ \end{cases}$$

اگر $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۲x^۲+x-۱}{x} & |x|>۱ \\ ax+b & |x|\leq ۱ \end{cases}$ در مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، مقادیر a و b را بدست آورید.

مقدار a را به قسمی تعیین کنید که تابع $f(x)=a[x]+[x+۱]$ در نقطه $x_۰=۱$ پیوسته باشد.