فرض کنید می خواهیم با سه عدد ۲ ، ۳ و ۸ ، به همراه یک عمل ریاضی ، یک تساوی منطقی بنویسیم ، پاسخ شما چیست ؟

حدس می زنم شما بنویسید : $2^3 = 8$

خب این پاسخ در سطح بچه ها هفتم ، هشتم است و من انتظار پاسخ در سطح نهم یا دهم را دارم !

آفرین درست حدس زدید ؛ $\sqrt[3]{8} = 2$

در تساوی $2^3 = 8$ حاصل عمل ، عدد ۸ است و در تساوی $\sqrt[3]{8} = 2$ حاصل عمل ، عدد ۲ می باشد .

در این درس عملی را معرفی می کنیم که برای اعداد فوق ، حاصل آن عدد ۳ باشد .

این عمل **لگاریتم** نام دارد ، به این صورت که می نویسیم : $\log_2 8 = 3$

و می خوانیم : لگاریتم ۸ در پایه ی (مبنای) ۲ برابر ۳ است .

تعریف : به ازای اعداد حقیقی مثبت a و b و با فرض $b \neq 1$ تعریف می کنیم : $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

مثال : تساوی های زیر را به صورت لگاریتمی بنویسید .

الف) $3^4 = 81 \Rightarrow \log_3 81 = 4$

ب) $0/1^3 = 0/001 \Rightarrow \log_{0/1} 0/001 = 3$

پ) $(\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}) = -2$

ت) $5^0 = 1 \Rightarrow \log_5 1 = 0$

مثال : تساوی های لگاریتمی زیر را به صورت نمایی بنویسید .

الف) $\log_2 32 = 5 \Rightarrow 2^5 = 32$

ب) $\log_2 0/125 = -3 \Rightarrow 2^{-3} = 0/125$

پ) $\log_5 \sqrt{125} = 1/5 \Rightarrow 5^{1/5} = \sqrt{125}$

ت) $\log_a a = 1 \Rightarrow a^1 = a$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

تست: اگر $\log_{50} A = \frac{1}{2}$ و $\log_{32} B = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\frac{A+B}{A-B}$ کدام است؟ ۸ ۴ ۵ ۹

$\log_{50} A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 50^{\frac{1}{2}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\log_{32} B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 32^{\frac{1}{2}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{A+B}{A-B} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 9 \longrightarrow$ گزینه‌ی ۴

مثال: معادله‌ی $\log_3 (x-1) = 4$ را حل کنید.

$x-1 = 3^4 \Rightarrow x-1 = 81 \Rightarrow x = 82$

تست: اگر $\log_{10}(98 + \log_5 (x-1)) = 2$ مقدار $\log_3 (x+1)$ کدام است؟ ۳ ۲ ۴ $\frac{3}{2}$

فرض $\Rightarrow 98 + \log_5 (x-1) = 10^2 = 100 \Rightarrow \log_5 (x-1) = 100 - 98 = 2$

$\Rightarrow x-1 = 5^2 = 25 \Rightarrow x = 26$

$\log_3 (x+1) = \log_3 27 = 3 \longrightarrow$ گزینه‌ی ۱

دامنه‌ی توابع لگاریتمی:

همانطور که در تعریف اشاره شد، $\log_b a$ وقتی تعریف شده است که $a>0$ ، $b>0$ و $b \neq 1$ باشد.

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = \log_{(3-x)} (x+2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2>0 \Rightarrow x>-2 \\ 3-x>0 \Rightarrow x<3 \\ 3-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_f = (-2,3) - \{2\}$$

ب) $g(x) = \log_3 (2-|x|)$

می دانیم $3>0$ و $3 \neq 1$ است، لذا کافی است $2-|x|>0$ باشد:

$\Rightarrow |x|<2 \Rightarrow -2<x<2 \Rightarrow D_g = (-2,2)$

نکات مقدماتی از لگاریتم:

۱- از تساوی های $a^0=1$ و $a^1=a$ می توان نتیجه گرفت:

لگاریتم ۱ در هر مبنای تعریف شده ای برابر صفر است یعنی: $\log_a 1 = 0$

و لگاریتم هر عدد در مبنای خودش برابر یک است یعنی: $\log_a a = 1$

۲- قرار داد می شود به جای $\log_{10} a$ می نویسیم $\log a$.

۳- اگر مبنای لگاریتم e ($e \simeq 2/7$ عدد نپر) باشد، آن را با $\ln$ نمایش می دهیم به عبارت دیگر به جای $\log_e a$ می نویسیم: $\ln a$.

۴- اگر $ab=1$ آنگاه $\log_b a = -1$ است. (زیرا $ab=1$ نتیجه می دهد $a=\frac{1}{b}$ یعنی $a=b^{-1}$)

مثال: حاصل هر عبارت را بنویسید.

الف) $\log 100 = 2$

ب) $\ln 1 = 0$

پ) $\ln e = 1$

ت) $\log 0/1 = -1$

ث) $\log_{\cot\theta} \tan\theta = -1 \longrightarrow$ زیرا $\tan\theta \cot\theta = 1$ بوده و طبق نکته ی ۴ جواب ۱- است

ج) $\log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = -1 \longrightarrow$ زیرا $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 1$ است

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log(2x-1) = 2$

$$\Rightarrow 2x-1 = 10^2 = 100 \Rightarrow 2x = 101 \Rightarrow x = \frac{101}{2}$$

ب) $\ln(x-2)=3$

$\Rightarrow x-2=e^3 \Rightarrow x=e^3+2$

پ) $\ln(\log(x+7))=0$

$\Rightarrow \log(x+7)=e^0=1 \Rightarrow x+7=10^1 \Rightarrow x=3$

مثال: نشان دهید توابع زیر وارون پذیرند، سپس تابع وارون آنها را بنویسید.

الف) $f(x)=\log(3x+1)$

$f(a)=f(b) \Rightarrow \log(3a+1)=\log(3b+1) \Rightarrow 3a+1=3b+1 \Rightarrow 3a=3b \Rightarrow a=b$

$\Rightarrow$ f یک به یک است $\Rightarrow$ f وارون پذیر است

$\log(3x+1)=y \Rightarrow 3x+1=10^y \Rightarrow 3x=10^y-1 \Rightarrow x=\frac{10^y-1}{3}$

$\Rightarrow y=\frac{10^x-1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{10^x-1}{3}$

ب) $g(x)=e^{2x}-5$

$g(a)=g(b) \Rightarrow e^{2a}-5=e^{2b}-5 \Rightarrow e^{2a}=e^{2b} \Rightarrow 2a=2b \Rightarrow a=b$

$\Rightarrow$ g یک به یک است $\Rightarrow$ g وارون پذیر است

$e^{2x}-5=y \Rightarrow e^{2x}=y+5 \Rightarrow \ln(y+5)=2x \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln(y+5)$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\ln(x+5) \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln(x+5)$

تمرین

۱- حاصل هر یک از عبارات زیر را بنویسید.

الف) $\log_2 16=4$

ب) $\log_7 49=2$

پ) $\log_5 125=3$

ت) $\log 10=1$

ث) $\ln e^2=2$

ج) $\ln\sqrt[3]{e}=\frac{1}{3}$

چ) $\log_{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}(5-2\sqrt{6})=\log_{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=2$

ح) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}(\sqrt{2}+1)$

میدانیم: $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1$

$\longrightarrow \log_{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}(\sqrt{2}+1)=\log_{(\sqrt{2}+1)}(\sqrt{2}+1)=1$

۲ـ با فرض $\log_2(x^2-x)=1$ و $x<0$ ، مقدار 3^x+x^3 را محاسبه نمایید.

$\log_2(x^2-x)=1 \Rightarrow x^2-x=2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \rightarrow x=2$ غ ق ق

$x=-1 \Rightarrow 3^x+x^3=3^{-1}+(-1)^3=\frac{-2}{3}$

۳ـ حاصل $A=\log_4(\log_3(\log_2 512))$ را بیابید.

می دانیم $2^9=512$ است بنابراین $\log_2 512=9$ و در نتیجه $A=\log_4(\log_3 9)$ است.

از طرفی $3^2=9$ پس $\log_3 9=2$ بوده و داریم: $A=\log_4 2=\frac{1}{2}$

۴ـ ثابت کنید $\log_2 3+\log_2 5=\log_2 15$

داریم: $\begin{cases}\log_2 3=x \Rightarrow 3=2^x\\ \log_2 5=y \Rightarrow 5=2^y\end{cases} \xrightarrow{\times} 15=2^{x+y} \Rightarrow x+y=\log_2 15 \Rightarrow \log_2 3+\log_2 5=\log_2 15$

نامعادلات ساده‌ی لگاریتمی:

برای حل این نوع نامعادلات، همچون حل معادلهٔ لگاریتمی عمل کرده، فقط با این تفاوت که اگر مبنا کمتر از یک باشد، همراه با حذف نماد log ها، جهت نامساوی نیز عوض می‌شود.

«درضمن شرط دامنه فراموش نشود.»

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_2(x-1)\leqslant 3$

$\Rightarrow x-1\leqslant 2^3 \Rightarrow x-1\leqslant 8 \Rightarrow x\leqslant 9$

شرط دامنه: $x-1>0 \longrightarrow x>1$

$\xrightarrow{\cap} 1<x\leqslant 9 \Rightarrow$ مجموعه جواب $=(1,9]$

ب) $\log_{0/1}(x+2) > 0$

$\Rightarrow x+2 < (0/1)^0 \Rightarrow x+2<1 \Rightarrow x<-1$

شرط دامنه: $x+2>0 \longrightarrow x>-2$

$\xrightarrow{\cap} -2<x<-1 \Rightarrow$ مجموعه جواب $= (-2,-1)$

تست: دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{\log_{0/2}(x-2)}$ کدام است؟ $[2,3)$ $\quad [3,+\infty)$ $\quad (2,3]$ $\quad (3,+\infty)$

$\log_{0/2}(x-2) \geq 0 \Rightarrow x-2 \leq 1 \Rightarrow x \leq 3$

شرط دامنه: $x-2>0 \Rightarrow x>2$

$\xrightarrow{\cap} D_f=(2,3]$

قوانین حاکم بر لگاریتم:

$$\boxed{1}\begin{cases} \log_c A + \log_c B = \log_c (A\times B) \\ \log_c A - \log_c B = \log_c \left(\frac{A}{B}\right) \end{cases}$$

مثال: با فرض $\log 2 = 0/30$ و $\log 3 = 0/47$ مقدار هر یک از عبارات زیر را محاسبه نمایید.

الف) $\log 6 = \log 2\times 3 = \log 2 + \log 3 = 0/30 + 0/47 = 0/77$

ب) $\log 1/5 = \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = 0/47 - 0/30 = 0/17$

پ) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0/30 = 0/70$

ت) $\log 3000 = \log 3\times 1000 = \log 3 + \log 1000 = 0/47 + 3 = 3/47$

ث) $\log 0/02 = \log \frac{2}{100} = \log 2 - \log 100 = 0/30 - 2 = -1/70$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log x + \log(x+3) = 1$

$\Rightarrow \log x(x+3) = 1 \Rightarrow \log(x^2+3x) = 1 \Rightarrow x^2+3x = 10 \Rightarrow x^2+3x-10=0$

$\Rightarrow (x+5)(x-2)=0$

$x=-5 \longrightarrow$ غیرقابل قبول است زیرا $\log(-5)$ تعریف نشده است

$x=2$ جواب

ب) $\ln x - \ln 3 = 2$

$\Rightarrow \ln\frac{x}{3}=2 \Rightarrow \frac{x}{3}=e^2 \Rightarrow x=3e^2$

مثال: از معادلات $\log x = \log 2 + \log y$ و $2^x \times 8^y = 4$ مقدار x و y را بیابید.

$\log x = \log 2 + \log y \Rightarrow \log x = \log 2y \Rightarrow x=2y$

$2^x\times 8^y = 4 \xrightarrow[2^3=8]{x=2y} 2^{2y}\times 2^{3y}=2^2 \Rightarrow 2^{5y}=2^2 \Rightarrow 5y=2 \Rightarrow y=\frac{2}{5} \xrightarrow{x=2y} x=\frac{4}{5}$

تست: اگر $\log(2x-1)+\log(2x+1)=\log 3+\log 5$ باشد $\log(x^3+2)$ کدام است؟

۱   ۲   ۳   صفر

جواب: $\Rightarrow \log(2x-1)(2x+1)=\log 3\times 5 \Rightarrow 4x^2-1=15 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \longrightarrow x=2$

$\log(x^3+2)=\log(8+2)=\log 10=1 \longrightarrow$ گزینه ۱

تست: اگر $4\sqrt{2}=4^x$ و $1+\log\sqrt{x+1}=\log y$ باشد، مقدار y کدام است؟

۷/۵   ۱۲/۵   ۱۵   ۳۵

$\Rightarrow 2^2\times 2^{\frac{1}{2}}=(2^2)^x \Rightarrow 2^{\frac{5}{2}}=2^{2x} \Rightarrow 2x=\frac{5}{2} \Rightarrow x=\frac{5}{4}$

$1+\log\sqrt{x+1}=\log y \Rightarrow 1+\log\sqrt{\frac{5}{4}+1}=\log y \Rightarrow 1+\log\sqrt{\frac{9}{4}}=\log y \xrightarrow{1=\log 10} \log 10+\log\frac{3}{2}=\log y$

$\Rightarrow \log 10\times\frac{3}{2}=\log y \Rightarrow \log 15=\log y \Rightarrow y=15 \longrightarrow$ گزینه ۳

$$\boxed{2}\begin{cases}\log_C A^n = n\log_C A \\ \log_{C^n} A = \frac{1}{n}\log_C A\end{cases}$$

مثال: حاصل $\log_{\sqrt{8}} 2 + \log_4 \sqrt{2}$ را بدست آورید.

$\log_4\sqrt{2}=\log_{2^2}2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{4}$ و $\log_{\sqrt{8}}2=\log_{2^{\frac{3}{2}}}2=\frac{2}{3}\log_2 2=\frac{2}{3} \xrightarrow{+}$ عبارت $=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{11}{12}$

مثال: از دو معادلهٔ $\log_3 x+\log_3 y=2$ ، $x^2+y^2=46$ ، لگاریتم $x+y$ در پایهٔ ۴ را بیابید.

$$\log_3 x+\log_3 y=2 \Rightarrow \log_3 xy=2 \Rightarrow xy=3^2 \Rightarrow xy=9$$

$$x^2+y^2=46 \Rightarrow (x+y)^2-2xy=46 \xrightarrow{xy=9} (x+y)^2=64 \Rightarrow x+y=8$$

$$\log_4(x+y)=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=3\times\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$$

تست: اگر $\log 2=k$ ، حاصل $2\log(1+\sqrt5)+\log(6-2\sqrt5)$ کدام است؟

۱) $2k$ ۲) $4k$ ۳) $k+1$ ۴) $2+4k$

$$\log(6-2\sqrt5)+\log(1+\sqrt5)^2=\log(6-2\sqrt5)+\log(6+2\sqrt5)=\log(6-2\sqrt5)(6+2\sqrt5)$$

$$=\log(36-20)=\log 16=\log 2^4=4\log 2=4k \longrightarrow$$ گزینهٔ ۲

تمرین (۱) الف) نشان دهید: $\log_b a=\log_{b^n}a^n$ $(b\neq1 , b>0 , a>0)$

$$\log_{b^n}a^n=n\times\frac{1}{n}\log_b a=\log_b a$$ = راست

از این تساوی نتیجه می‌شود که در عبارت $\log_b a$ می‌توان همزمان a و b را به توان یک عدد رساند.

ب) حاصل $\log_{2\sqrt[3]{0.5}}\sqrt[3]{4}$ چقدر است؟

عدد لگاریتمی و پایه را همزمان به توان ۳ می‌رسانیم:

$$\log_{2\sqrt[3]{0.5}}\sqrt[3]{4}=\log_{8\times0.5}4=\log_4 4=1$$

تمرین (۲) اگر لگاریتم $2\sqrt[3]{0.25}$ در مبنای ۸ برابر B باشد، آنگاه لگاریتم $(\frac{1}{B}-1)$ در پایهٔ ۴ چقدر است؟

$$B=\log_8 2\sqrt[3]{0.25} \xrightarrow{\text{توان ۳}} B=\log_{8^3}8\times0.25=\log_{2^9}2=\frac{1}{9}\log_2 2=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \log_4\left(\frac{1}{B}-1\right)=\log_4(9-1)=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=3\times\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$$

$$\boxed{3}\quad \frac{\log_C A}{\log_C B}=\log_B A$$

توجه : از دو دیدگاه می توان به رابطه ی $\boxed{3}$ توجه کرد :

* دیدگاه اول : این رابطه بیان کننده تقسیم دو لگاریتم است که به شرط یکسان بودن مبنا، این کار صورت می گیرد .

مثال : اگر $\frac{1+\log_x^2}{\log_x^3+1}=\log_{3x}^{20}$ ، مقدار $\log x$ را بدست آورید .

میدانیم : $1=\log_x^x$

$$\Rightarrow \frac{\log_x^x+\log_x^2}{\log_x^3+\log_x^x}=\log_{3x}^{20}\rightarrow\frac{\log_x^{2x}}{\log_x^{3x}}=\log_{3x}^{20}\xrightarrow{\boxed{3}}\log_{3x}^{2x}=\log_{3x}^{20}\Longrightarrow 2x=20$$

$$\xrightarrow{\div 2} x=10\Longrightarrow \log x=\log 10=1$$

* دیدگاه دوم : کافیست از راست به چپ ، به این رابطه توجه کرد، $\log_B A$ را می توان به مبنای دلخواه C تغییر مبنا داد و آن را به صورت $\frac{\log_C A}{\log_C B}$ نوشت .

مثال : با فرض $\log 7=0/84$ و $\log 3=0/47$ و $\log 2=0/30$ ، مقدار $\log_6 14$ را بدست آورید.

با توجه به این که فرض سؤال در مبنای ۱۰ بود لذا $\log_6 14$ را نیز به مبنای ۱۰ می بریم :

$$\log_6^{14}=\frac{\log 14}{\log 6}=\frac{\log 2\times 7}{\log 2\times 3}=\frac{\log 2+\log 7}{\log 2+\log 3}=\frac{0/30+0/84}{0/30+0/47}=\frac{114}{77}$$

مثال : الف) نشان دهید $\log_b^a=\frac{1}{\log_a^b}$.

$$\text{راست}=\frac{1}{\log_a^b}=\frac{\log_a^a}{\log_a^b}\overset{\boxed{3}}{=}\log_b^a$$

ب) حاصل $\frac{1}{\log_3^2}-\frac{1}{\log_{12}^2}$ را بدست آورید .

$$\frac{1}{\log_{12} 2} - \frac{1}{\log_{3} 2} \overset{\text{الف}}{=} \log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$$

مثال: الف) نشان دهید $\log_b a \times \log_c b = \log_c a$.

به قانون $\boxed{3}$ دقت کنید، $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$ کافیست این تساوی را طرفین وسطین کنیم:

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a$$

ب) با فرض $\log 2 = x$ و $\log 3 = y$ حاصل $\log_9 7 \times \log_7 8$ را بدست آورید.

$$\log_9 7 \times \log_7 8 \overset{\text{الف}}{=} \log_9 8 = \log_{3^2} 2^3 = 3 \times \frac{1}{2} \log_3 2 = \frac{3}{2} \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{3}{2} \times \frac{x}{y} = \frac{3x}{2y}$$

تست: حاصل $\log_{\sqrt{3}} 8 \times \log_{0/2} 7 \times \log_{2\sqrt{2}} 9 \times \log_{49} 25$ چقدر است؟ ۴ ۸ ‎-۸ ‎-۴

$$= \log_{3^{1/2}} 2^3 \times \log_{5^{-1}} 7 \times \log_{2^{3/2}} 3^2 \times \log_{7^2} 5^2$$

$$= 3 \times 2 \log_3 2 \times (-1) \log_5 7 \times \frac{2}{3} \times 2 \log_2 3 \times 2 \times \frac{1}{2} \log_7 5 = 6(-1)\left(\frac{4}{3}\right) \log_3 2 \times \log_2 3 \times \log_5 7 \times \log_7 5$$

$$= -8 \log_2 2 \times \log_7 7 = -8 \times 1 \times 1 = -8 \longrightarrow$$ گزینه‌ی ۳

تست: با فرض $\log_{12} 3 = a$ حاصل $\log_3 2$ کدام است؟

$\frac{a-1}{2a}$ $\quad$ $\frac{1-a}{2a}$ $\quad$ $\frac{1-a}{a}$ $\quad$ $\frac{a-1}{a}$

$$\log_3 12 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3 (3 \times 2^2) = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3 3 + 2 \log_3 2 = \frac{1}{a} \Rightarrow 1 + 2 \log_3 2 = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow 2 \log_3 2 = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} \xrightarrow{\div 2} \log_3 2 = \frac{1-a}{2a} \longrightarrow$$ گزینه‌ی ۲

$$\boxed{4} \quad A^{\log_C B} = B^{\log_C A}$$

مثال: حاصل هریک از عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $9^{\log_3 \sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\log_3 9} = \sqrt{2}^{2} = 2$

ب) $10^{(2+\frac{1}{2}\log 16)} = 10^{2} \times 10^{\frac{1}{2}\log 16} = 100 \times 16^{\frac{1}{2}\log 10} = 100 \times 16^{\frac{1}{2}} = 100 \times \sqrt{16} = 100 \times 4 = 400$

پ) $81^{(\log_3 \sqrt{5} + \log_3 \sqrt[4]{2})} = 81^{\log_3(\sqrt{5} \times \sqrt[4]{2})} = (\sqrt{5} \times \sqrt[4]{2})^{\log_3 81} = (\sqrt{5} \times \sqrt[4]{2})^{4} = 25 \times 2 = 50$

ت) $e^{-\ln 8} = 8^{-\ln e} = 8^{-1} = \frac{1}{8}$

تست: حاصل $a^{\left(\frac{\log(\log a)}{\log a}\right)}$ کدام است؟ $\log a$ a $\frac{1}{a}$ $-\log a$

طبق قانون $\underline{2}$ می‌توان نوشت: $\frac{\log(\log a)}{\log a} = \log_a(\log a)$

$\Longrightarrow$ عبارت $= a^{\log_a(\log a)} \overset{\boxed{4}}{=} (\log a)^{\log_a a} = (\log a)^{1} = \log a \rightarrow$ گزینه‌ی $\underline{1}$

تعیین محدوده‌ی لگاریتم:

می‌خواهیم تعیین کنیم $\log_2 5$ بین کدام دو عدد صحیح واقع است.

میدانیم $\underline{5}$ بین دو عدد 2^2 و 2^3 است.

بنابراین $\log_2 5$ بین $\log_2 2^2$ و $\log_2 2^3$ یعنی بین 2 و $\underline{3}$ قرار دارد

در نتیجه: $2 < \log_2 5 < 3$

مثال: حاصل $[\log_5 200]$ و $[\ln 2]$ را بدست آورید.

میدانیم: $5^3 < 200 < 5^4 \Rightarrow 3 < \log_5 200 < 4 \Rightarrow [\log_5 200] = 3$

میدانیم: $e^0 < 2 < e^1 \Rightarrow 0 < \ln 2 < 1 \Rightarrow [\ln 2] = 0$

مثال: اگر a عدد طبیعی ۷ رقمی باشد $[\log a]$ را حساب کنید.

a عدد ۷ رقمی است $\Rightarrow 10^6 < a < 10^7 \Rightarrow 6 < \log a < 7 \Rightarrow [\log a] = 6$

تست: حاصل $[\log_2 6] + [\log_6 2]$ کدام است؟ ۱ ۲ ۳ صفر

میدانیم: $2^2 < 6 < 2^3 \Rightarrow 2 < \log_2 6 < 3 \Rightarrow [\log_2 6] = 2$

میدانیم: $6^0 < 2 < 6^1 \Rightarrow 0 < \log_6 2 < 1 \Rightarrow [\log_6 2] = 0$

$\xrightarrow{+} 2 \longrightarrow$ گزینه‌ی ۲

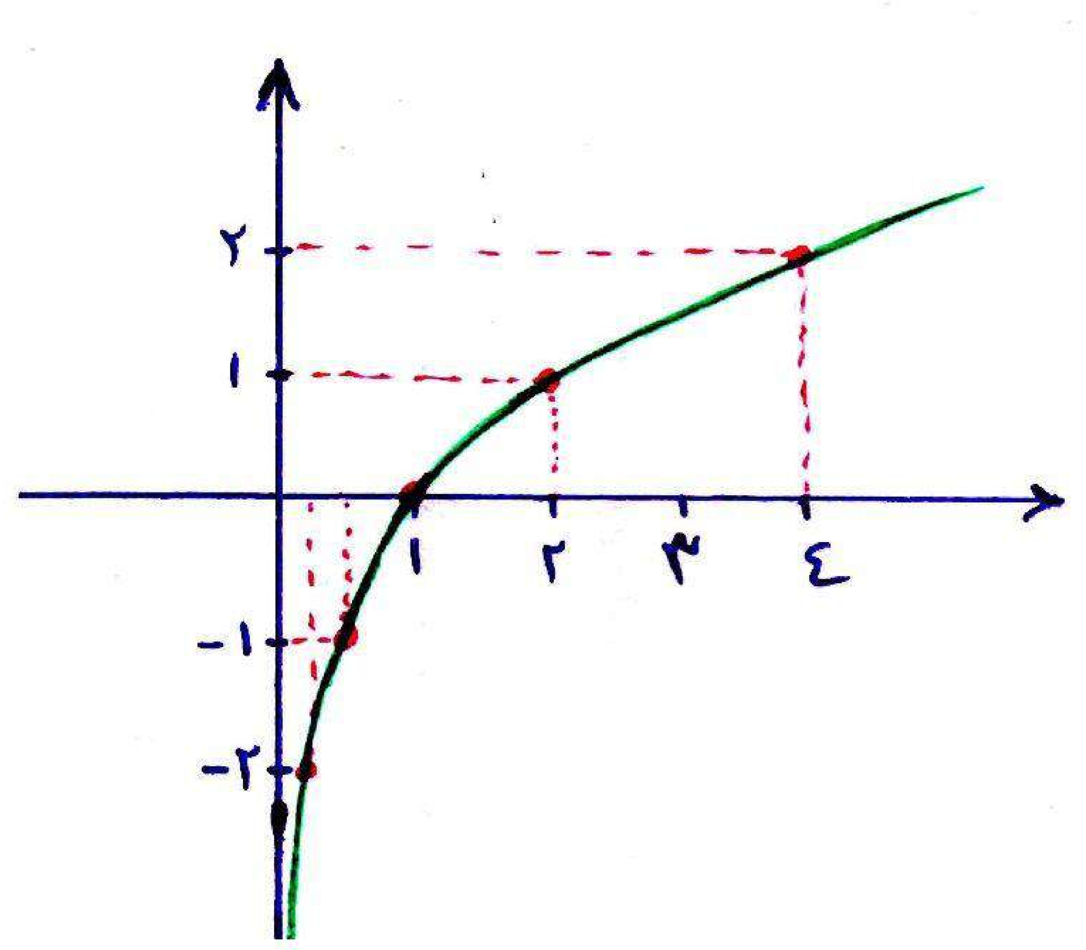
تمرین (۱) حاصل $[\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{5}]$ را بدست آورید.

$\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{5} \xlongequal{\text{به توان ۶}} \log_4 125 \xrightarrow{4^3 < 125 < 4^4} 3 < \log_4 125 < 4 \Rightarrow [\log_4 125] = 3$

تمرین (۲) اگر a عددی مثبت با n رقم صحیح باشد، $[\log a]$ را حساب کنید.

a دارای n رقم صحیح است $\Rightarrow 10^{n-1} < a < 10^n \Rightarrow n-1 < \log a < n \Rightarrow [\log a] = n-1$

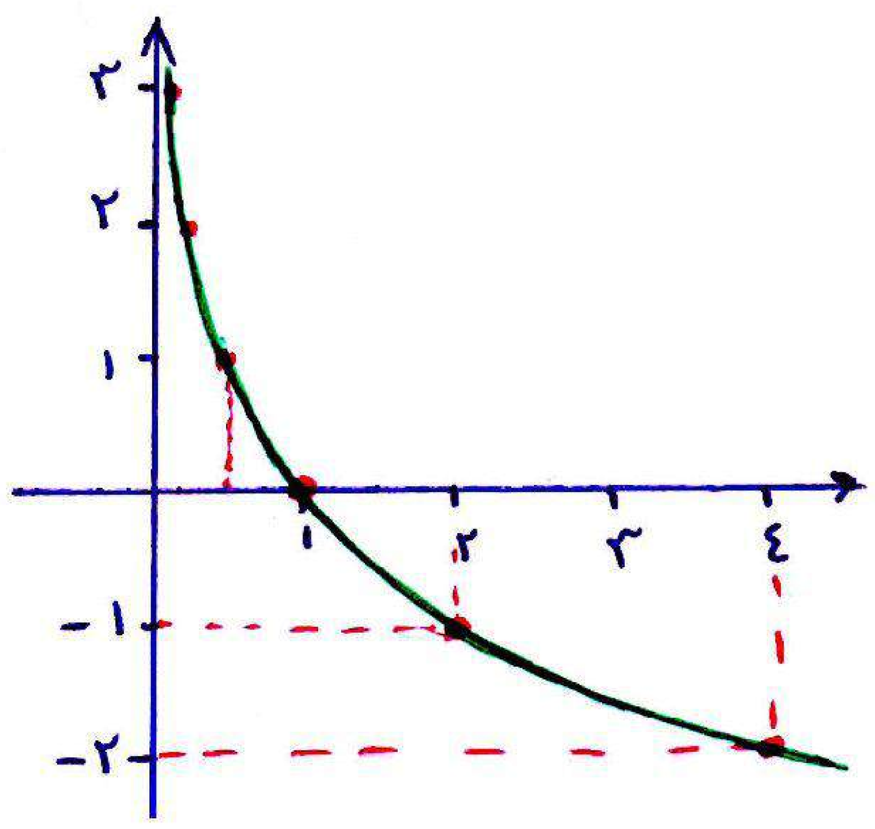
رسم نمودار توابع لگاریتمی ساده:



برای رسم تابعی مثل $f(x) = \log_2 x$، باید جدول مقادیر مانند جدول زیر نوشت، سپس با نقطه‌یابی نمودار را رسم کرد.

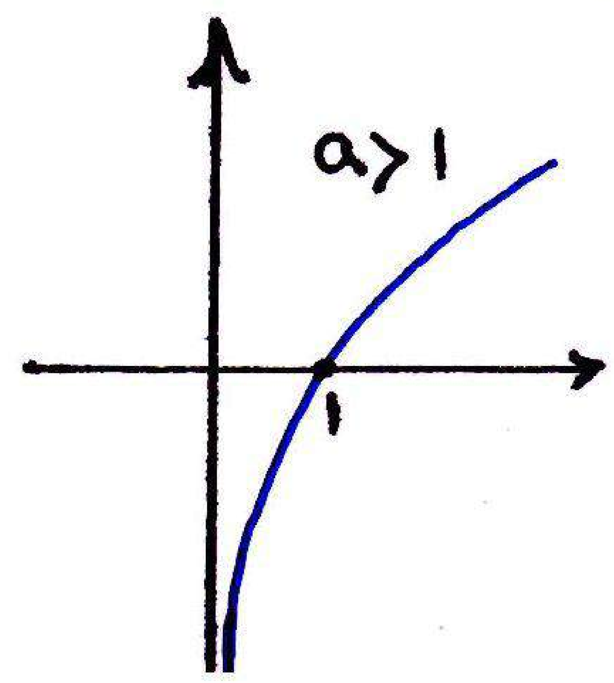
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2

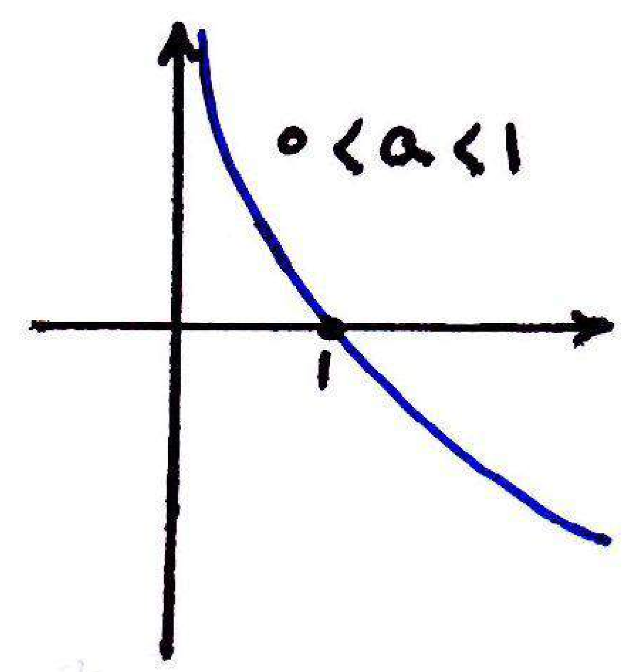
مثال: نمودار تابع $y=\log_{1/2} x$ را رسم کنید.



x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴
y	۳	۲	۱	۰	-۱	-۲

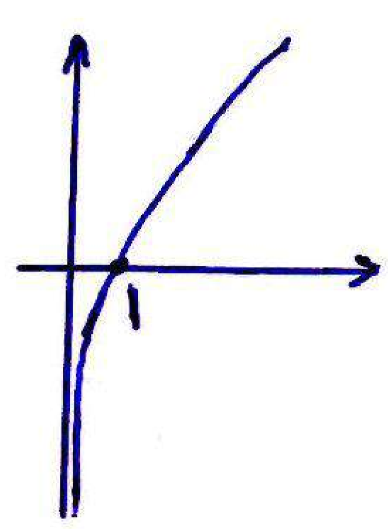
توجه: نمودار تابع $f(x)=\log_a x$ به یکی از دو شکل زیر می‌باشد:



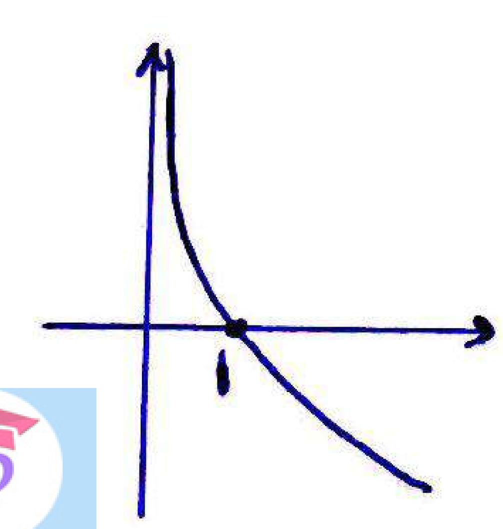


مثال: نمودار توابع زیر را به طور تقریبی رسم کنید.

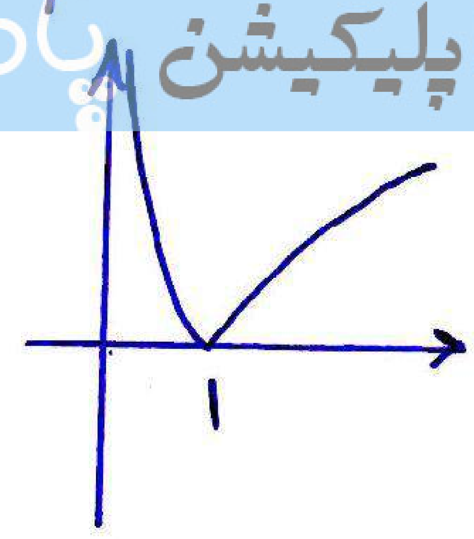
الف) $y=\ln x$



ب) $y=-\ln x$ $\xrightarrow{\text{نمودار الف را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم}}$

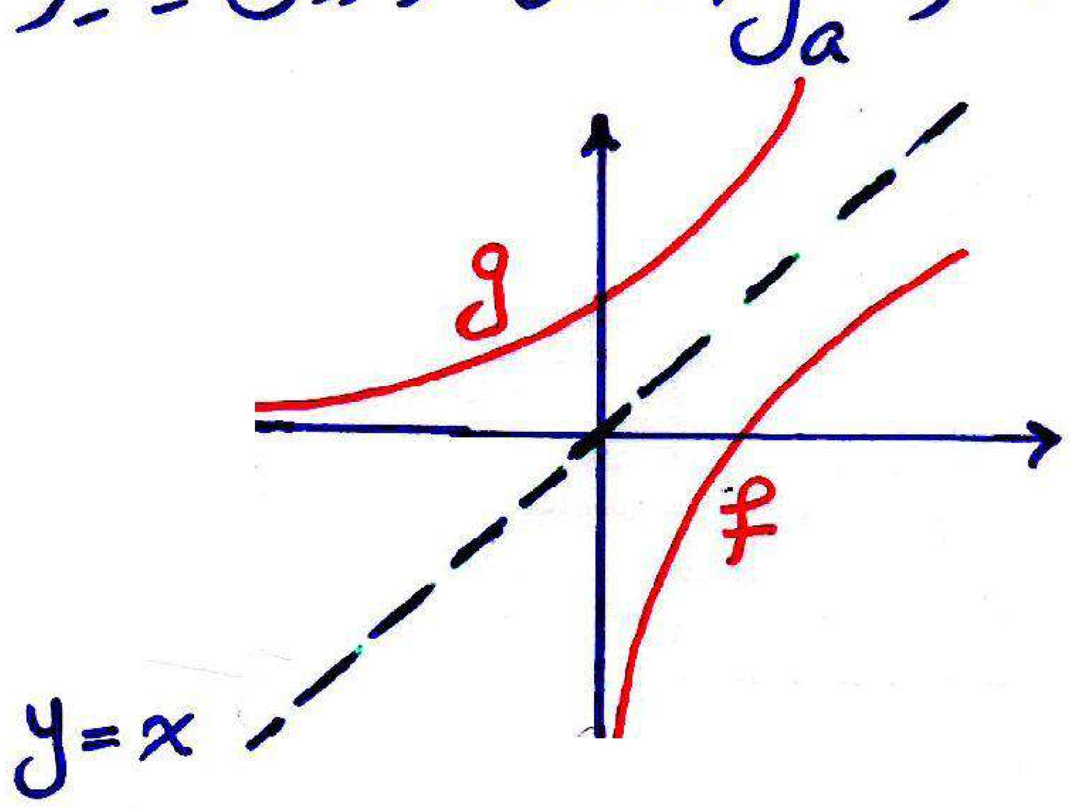


پ) $y=|\ln x|$ $\xrightarrow{\text{با توجه به الف}}$



توجه: طبق آنچه در متن درس گفته شد، دو تابع $f(x)=a^x$ و $g(x)=\log_a x$ وارون یکدیگر می‌باشند لذا نمودار این دو تابع نسبت به خط نیم‌ساز ربع اول و سوم قرینه اند.

به عنوان نمونه $f(x)=3^x$، $g(x)=\log_3 x$ را در شکل روبرو مشاهده فرمایید:



کاربرد هایی از لگاریتم:

۱. مقیاس (ریشتر): ریشتر، مقیاسی برای اندازه گیری زمین لرزه است.

اگر میزان انرژی آزادشده در یک زمین لرزه را E در مقیاس ارگ (Erg) و بزرگی لرزه را M در مقیاس ریشتر در نظر بگیریم، آنگاه رابطه‌ی $\log E = 11{,}8 + 1{,}5M$ برقرار است.

مثال: انرژی آزاد شده در یک زلزله ۶٫۶ ریشتری را حساب کنید.

$$\log E = 11{,}8 + 1{,}5 \times 6{,}6 = 21{,}7 \Rightarrow E = 10^{21{,}7}\ Erg$$

مثال: اگر انرژی آزادشده در یک زلزله 10^{20} باشد، بزرگی زلزله در واحد ریشتر چقدر است؟

$$E = 10^{20} \Rightarrow \log 10^{20} = 1{,}8 + 1{,}5M \Rightarrow 20 \underbrace{\log 10}_{1} = 1{,}8 + 1{,}5M$$

$$\Rightarrow 1{,}5M = 20 - 1{,}8 = 18{,}2 \Rightarrow M = \frac{18{,}2}{1{,}5} \simeq 5{,}46$$

مثال: انرژی آزادشده در یک زلزله ۷ ریشتری چند برابر انرژی آزادشده در یک زلزله ۵ ریشتری است؟

$$\left.\begin{array}{l}\log E_1 = 11{,}8 + 1{,}5 \times 7 = 22{,}3 \Rightarrow E_1 = 10^{22{,}3}\\ \log E_2 = 11{,}8 + 1{,}5 \times 5 = 19{,}3 \Rightarrow E_2 = 10^{19{,}3}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{3} = 1000 \Rightarrow$$ هزار برابر انرژی آزاد شده است

۲. نیمه عمر: اگر جرم یک ماده‌ٔ هسته‌ای پس از مدت زمان n نصف شود، گوییم نیمه عمر آن n است.

اگر m_0 جرم اولیه و $m(t)$ جرم پس از مدت زمان t باشد، آنگاه:

$$m(t) = m_0 \times 2^{-\frac{t}{n}}$$

مثال: نیمه عمر یک نوع ماده‌ی هسته‌ای ۲۵ سال است. اگر جرم اولیه‌ی آن ۲۴ میلی گرم باشد، پس از طی چند سال، جرم باقی ماندهٔ آن ۳ میلی گرم خواهد شد؟

$$n = 25,\ m_0 = 24,\ m(t) = 3 \Rightarrow 3 = 24 \times 2^{-\frac{t}{25}} \xrightarrow{\div 24} 2^{-\frac{t}{25}} = \frac{1}{8} = 2^{-3} \Rightarrow -\frac{t}{25} = -3 \Rightarrow t = 75$$

مثال: نیمه عمر عنصری ۴ روز است. اگر جرم اولیه‌ی آن یک گرم باشد. پس از چه مدتی، این جرم به ۰/۰۱ گرم کاهش می‌یابد؟ ($\log 2 = 0/3$)

$n = 4$ و $m_0 = 1$ و $m(t) = 0/01 \Rightarrow 0/01 = 1 \times 2^{-\frac{t}{4}}$

$\xrightarrow{\text{از طرفین لگاریتم می‌گیریم}} \log 0/01 = \log 2^{-\frac{t}{4}} \Rightarrow -2 = -\frac{t}{4}\log 2 \xrightarrow{\log 2 = 0/3} -2 = -\frac{t}{4} \times \frac{3}{10}$

$\Rightarrow t = \frac{80}{3} \simeq 27 \rightsquigarrow$ طی ۲۷ روز کاهش یافته است

مثال: نیمه عمر یک ماده‌ی هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟

$n = 30$ و $m_0 = 128$ و $t = 300 \Longrightarrow m(300) = 128 \times 2^{-\frac{300}{30}} = 128 \times 2^{-10} = 2^7 \times 2^{-10} = \frac{1}{8}$

تاریخچه‌ی لگاریتم:

کلمه‌ی لگاریتم از دو کلمه‌ی یونانی logos (نسبت) و arithmos (عدد) تشکیل یافته است.

نپر ریاضی‌دان اسکاتلندی در سال ۱۶۱۴ کتاب کوچکی به زبان لاتین منتشر کرد که عنوان آن شرح جدول شگفت‌انگیز لگاریتم‌ها بود و به وسیله‌ی آن، اختراع لگاریتم را به معاصران خود اعلام داشت.

ایشان برای تکمیل اختراع خود در حدود ۲۰ سال کوشش مداوم به عمل آورد.

گفته‌اند: اختراع لگاریتم با کوتاه کردن زمان محاسبات عمر محاسبان را دو برابر کرده است.

از عجایب تاریخ ریاضیات است که: نپر پیش از آن که توان‌ها اعداد مورد استعمال قرار گیرد، لگاریتم را اختراع کرد.

یک سال پس از انتشار کتاب نپر، یک معلم ریاضی انگلیسی به نام هنری بریگز، کار خود را رها کرد و به اسکاتلند نزد نپر رفت تا این اختراع جدید را به وی تبریک بگوید.

و به وی پیشنهاد کرد که جدول‌های لگاریتمی بر اساس مبنای دهگانی تهیه شود و نپر این پیشنهاد را پذیرفت ولی عمرش کفاف نداد و بریگز کار او را ادامه داد و در سال ۱۶۲۴ نخستین جدول لگاریتمی دهگانی را ساخت.