

# دیرستان غیردولتی معلم شاہین ڈ



## جزوہ درس تابع نمایی و لگاریتم

مولف : علی فلاح

آموزشگاہ های علمی فلاح - سینا



۴۶۳۳۹۹۵۰

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۴۶۳۳۹۹۵۰



دفترانہ  
پسرانہ



تابع نمایی: هر تابعی که ضابطه آن به صورت  $y = a^x$  باشد بطوریکه در آن

$a$  عددی ثابت و مثبت و مخالف یک باشد را یک تابع نمایی میگویند.

مثال:  $y = 2^x$  و  $y = (\frac{1}{2})^x$  و  $y = (\sqrt{2})^x$

تصحیح یا چنانچه بگفت جدول: اگر طول نقاط تشکیل دنباله همین رده

لازم است عرض نقاط تشکیل دنباله هندسی رده

$x$	-1	0	1	2
$y$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

$y = 2^x$

مثال:

مثال: اگر جدول مقابل بیانگر تابع نمایی  $f(x) = a^x$  باشد  $a$  کدام است؟

$x$	-3	0	3	4
$y$	$\frac{1}{5\sqrt[3]{2}}$	1	$5\sqrt[3]{2}$	$5\sqrt[3]{2}$

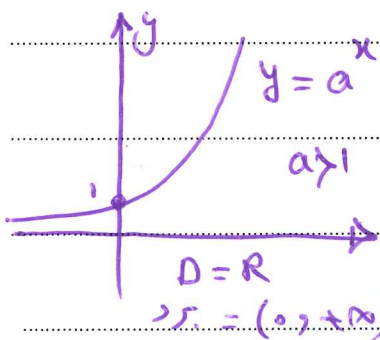
می توانیم از نقاط جدول را در تابع

$5\sqrt[3]{2} = a^3 \rightarrow a = \sqrt[3]{5\sqrt[3]{2}}$

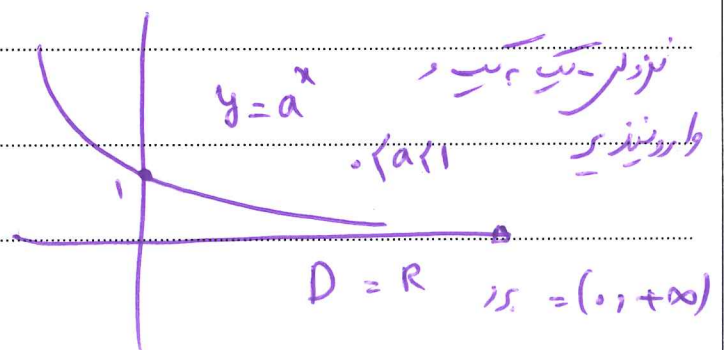
$y = a^x \rightarrow = \sqrt[3]{2^3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{3}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} = 2 \times 2^{\frac{1}{6}} = 2\sqrt[6]{2}$

نمودار تابع نمایی: نمودار تابع نمایی در حالت کلی فقط به یکی از دو صورت

زیر می باشد



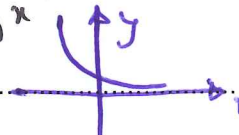
محوری  
و مثبت  
دوار و رو به بالا



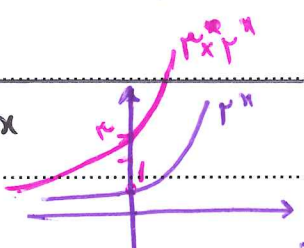
نزولی  
و مثبت  
و رو به پایین

نکته: \* تمام توابع نمایی از نقاط (۱، ۱) عبور می کنند  
 \* اگر مبنا یعنی  $a$  بین صفر و یک باشد نزولی و اگر  $a > 1$  باشد صعودی است  
 \* توابع نمایی همواره مثبت اند

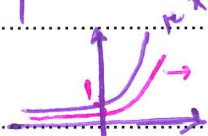
- نمودار  $y = \frac{a^x}{a^x}$  به چه صورتی است؟ (ارحمت کله)  
 نزولی  $\rightarrow a < 1$   
 $y = \frac{a^x}{a^x} = \left(\frac{a}{a}\right)^x \rightarrow 1$



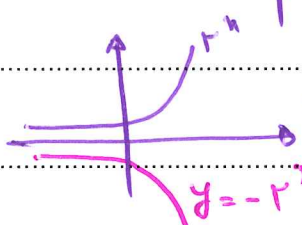
- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید  
 $y = 2 \times 2^x$  : انبساطی  
 عرضها برابر می شود



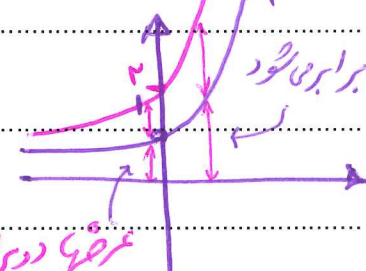
ب)  $y = \frac{1}{2} 2^x$   
 عرضها نصف می شود



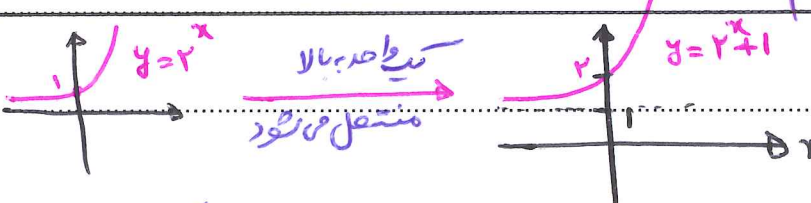
ج)  $-2^x$   
 عرضها منفرجه می شود



د)  $y = 3 - 2^x \Rightarrow f(x) = 3 - 2^x = 2^x(3 - 1) = 2 \times 2^x$   
 عرضها دوبرابر می شود

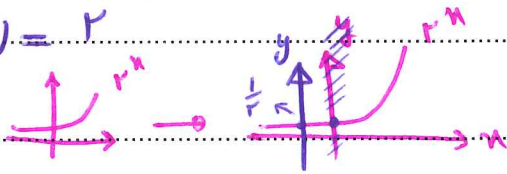


$y = 2^x + 1$   $y = 2^x$   $y = 2^x + 1$   
 واحد بالا منتقل می شود



ادامه: می توان به جای این نمودارها را یک واحد بالا منتقل کنیم محور x ها را یک واحد پایین آوریم

$$f(x) = 2^{x-1}$$



- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید  
به جای اینکده نمودار به راست منتقل بشود

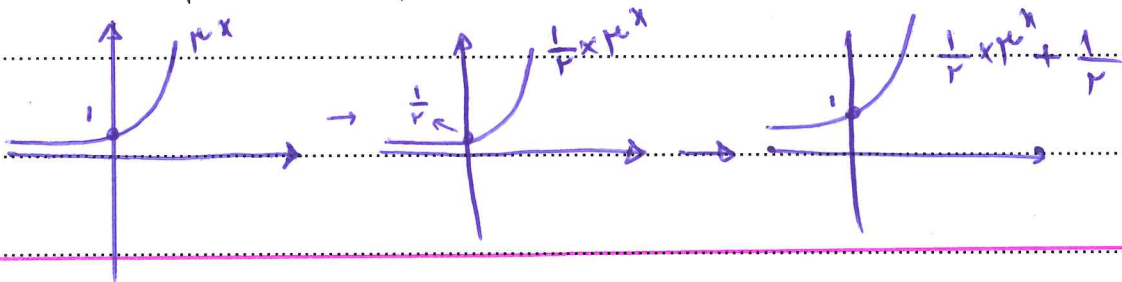
محور عرض را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم! (توجه داشته باشید)

$$f(x) = -2^{x-1} + \frac{1}{2}$$

- رسم کنید!

$$f(x) = \frac{4^x + 2^x}{(\sqrt{2})^{2x+2}} \Rightarrow f(x) = \frac{4^x + 2^x}{\sqrt{2}^{2x} \times \sqrt{2}^2} = \frac{2^{2x} + 2^x}{2^x \times 2} = \frac{2^x}{2 \times 2^x} + \frac{2^x}{2 \times 2^x}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{2^x}{2^x} \right) + \frac{2^x}{2 \times 2^x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} (2)^x + \frac{1}{2} \rightarrow \text{نمای صعودی}$$



$$f(x) = 2^{|x|}$$

$$f(x) = 2^{-|x|}$$



تست: اگر نمودار تابع  $f(x) = a(b)^x - 1$  از دو نقطه  $A(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  و  $B(1, 1)$  بگذرد

حل:  $f(-1) = \frac{1}{3}$  و  $f(1) = 1$

$$f(x) = ab^x - 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = ab^{-1} - 1 \\ 1 = ab^1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab^{-1} = \frac{4}{3} \\ ab = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \\ ab = 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{ab}{\frac{a}{b}} = \frac{2}{\frac{4}{3}} \Rightarrow b\sqrt{b} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{توان 2}} b^2 b = 4 \Rightarrow b^3 = 4 \Rightarrow b = \sqrt[3]{4} \xrightarrow{(1)} a = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{4})^x - 1 \Rightarrow f(-1) = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{4})^{-1} - 1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 1 = -\frac{1}{3}$$

جواب انتگرال مربع درجه اولی

مثال: پیر تاابع  $f(x) = \frac{(1+2^x)^2}{2^x}$  کدام است؟

$$f(x) = \frac{1 + 2 \cdot 2^x + 2^{2x}}{2^x} = \frac{1}{2^x} + 2 + 2^x$$

نکته: می دانیم برای هر عدد مثبت  $a$  داریم  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  بنابراین

$$\frac{1}{2^x} + 2^x \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2^x} + 2^x + 2 \geq 4 \Rightarrow \text{پیر} = [4, +\infty)$$

سوال: در مورد حداقل و حداکثر مقدار تابع  $f(x) = 4^x + 2^{x+1} + 1$  بحث کنید

مثال: معادله  $x^2 - 49 = 0$  را حل کنید



مثال: فاصله نقطه تلاقی دو منحنی  $y = 2^x$  و  $y = (\sqrt{2})^{2x+1}$  از  $A(0, 2)$  چقدر است؟

حل: ابتدا محل تلاقی دو منحنی را بدست می آوریم

$$y = (\sqrt{2})^{2x+1} = (2^{\frac{1}{2}})^{2x+1} = 2^{\frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{2}} = 2^{x + \frac{1}{2}} \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow 2^x = 2^{x + \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{2} = x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2^x = 2^1 = 2 \Rightarrow A(1, 2) \text{ و } A'(1, 0)$$

$$AA' = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$$

مثال: نامعادله  $8^{\frac{3x}{2} + 1} < (\sqrt{2})^{5x}$  را حل کنید؟

مثال: کدام عدد بین دو عبارت  $(\frac{\sqrt{2}}{3})^{15}$  و  $9^{-\frac{1}{4}}$  واقع است؟

$$(1) (\sqrt{2})^{12} \quad (2) (\frac{1}{\sqrt{2}})^{12} \quad (3) (\frac{1}{\sqrt{2}})^{12} \quad (4) (\sqrt{2})^{12}$$

$$9^{-\frac{1}{4}} = (3^2)^{-\frac{1}{4}} = 3^{-\frac{2}{4}} = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\frac{\sqrt{2}}{3})^{15} = (\frac{2^{\frac{1}{2}}}{3})^{15} = (\frac{1}{3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}})^{15} = (3^{-1} \cdot 2^{-\frac{1}{2}})^{15} = 3^{-15} \cdot 2^{-\frac{15}{2}}$$

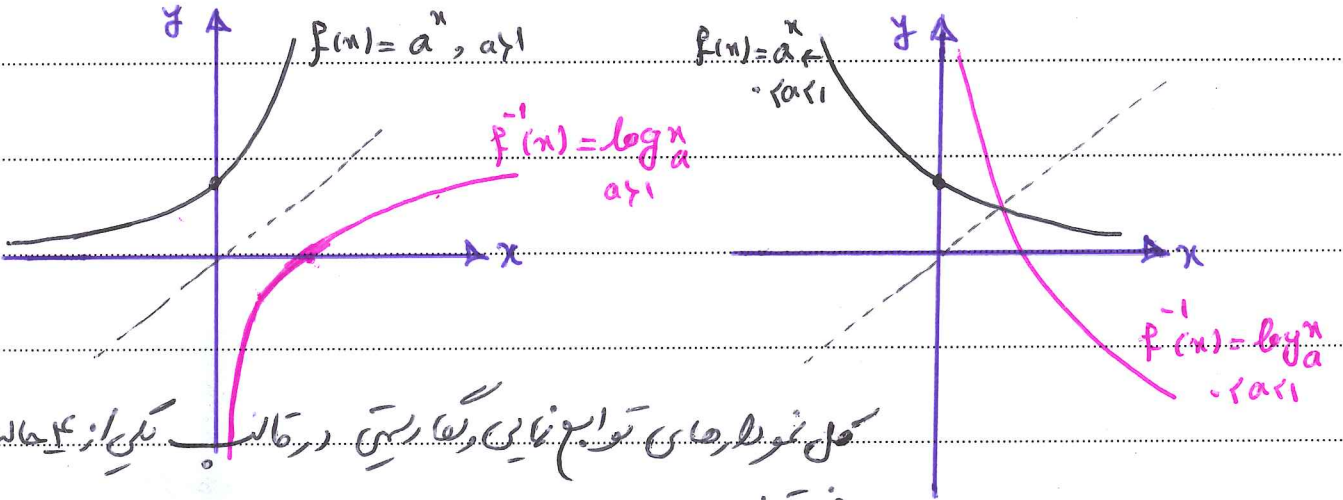
حال تک تک بر حسب توان به صورت پارچه ای از ۳ می نویسیم و تطبیق می دهیم

$$\sqrt{3}^{12} = (3^{\frac{1}{2}})^{12} = 3^6 \quad (\frac{1}{\sqrt{3}})^{12} = (3^{-\frac{1}{2}})^{12} = 3^{-6}$$

$$(\frac{1}{\sqrt{3}})^{12} = (3^{-\frac{1}{2}})^{12} = 3^{-6} \quad (\sqrt{3})^{12} = (3^{\frac{1}{2}})^{12} = 3^6$$

تمرین: نمودار تابع  $y = (\frac{\sqrt{2}}{3})^{2x}$  و  $y = 3^x + \frac{1}{3}$  در نقطه ای همدی را قطع می کنند؟

وارون تابع نمایی را تابع عکس‌رسانه‌ی آن می‌گویند:  $f(x) = a^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$



کل نمودارهای توابع نمایی و عکس‌رسانه‌ی در مقابل یکدیگر از لحاظ فوق است.

مثال: وارون تابع  $f(x) = 2^{x-1} + 1$  را بیابید؟ نکته

حل: طبق معمول برای بدست آوردن وارون تابع ابتدا  $x$  را بر حسب  $y$  بدست آورده

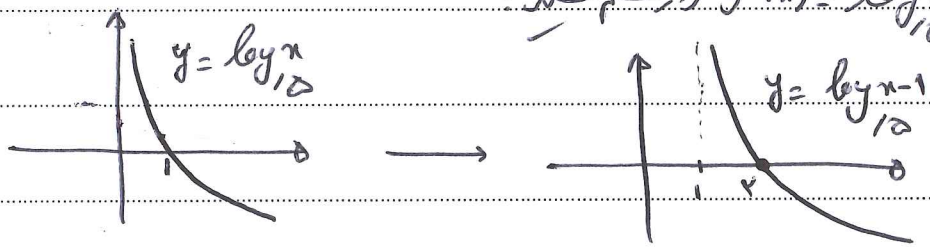
پس جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم

$$y = 2^{x-1} + 1 \Rightarrow 2^{x-1} = y - 1$$

تعویض

$$\Rightarrow \log_2 y^{-1} = x - 1 \Rightarrow x = \log_2 y^{-1} + 1 \Rightarrow y = \log_2 x^{-1} + 1 = f^{-1}(x)$$

مثال: نمودار تابع  $f(x) = \log_{10}(x-1)$  را رسم کنید.



مثال: دامنه تابع  $f(x) = \log_{x+1} x^2$  را بیابید. حل: با توجه به اینکه فقط

دو نوع تابع عکس‌رسانه داریم (شکل‌های فوق) و در هر دو حالت  $x > 0$  و  $a > 0, a \neq 1$  برقرار است. بنابراین:



کلمات در کورس هم تباریم ها. صفر = تباریم از هر بنیادی خارج  $\Rightarrow \log_a 1 = 0$  ۱)

$$۲) \log_c ab = \log_c a + \log_c b \quad ۳) \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$۴) \log_c a^b = \frac{b}{c} \log_c a \quad ۵) a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$۶) a^{\log_a b} = b^{\log_a a} = b^1 = b \quad ۷) \log_a a = \frac{\log_c a}{\log_c c} = \frac{\log_a k}{\log_b k}$$

(این قانون به قانون تغییر مبنای معروف است)

$$۸) \log_a a = \frac{1}{\log_a a}$$

$$۹) \log_a a \times \log_a b = \log_a a \rightarrow \text{قانون ادغام}$$

$$\log a - b = \log \frac{a}{b}$$

اشتباقات رایج: !؟

$$\log a + b = \log a \times \log b$$

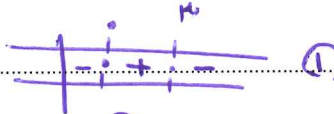
مثال: حاصل ضرب عبارات زیر را بدست آورید.

$$۱) \log_2 \sqrt[3]{125} =$$

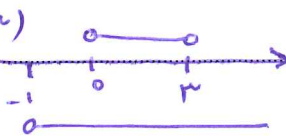
$$۲) \log_2 \frac{\sqrt[4]{8} \sqrt{32}}{2 \sqrt[4]{4}} =$$

$$۳) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2} + \log_2 9 =$$



$$\begin{cases} x^2 - x^2 = 0 \\ x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x(x-x) > 0 \quad \text{①}$$


$$x + 1 > 0 \rightarrow x > -1 \quad \text{②}, \quad x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \quad \text{③}$$

$$\text{①} \cap \text{②} \cap \text{③} = (0, 1)$$


مثال: به کمک رسم تابع  $f(x) = \log_2(x+2)$  بردارهای را بدست آورید؟

نکته: شاید بتوان رسم هر عددی را دقیق بدست آورد ولی می توان حدید  
که همواره بین کدام دو عدد صحیح واقع است به همین ترتیب می توان حدید  
که کنار رسم هر عددی مابین کدام دو عدد صحیح واقع است.

$$3 < \sqrt{10} < 4 \quad \log_2 1 < \log_2 2 < \log_2 100 \Rightarrow 1 < \log_2 2 < 2 \quad \text{مثال}$$

$$[\log_5 1394] = ? \quad 5^4 = 625, \quad 5^5 = 3125, \quad 5^6 = 15625 \Rightarrow 4 < ? < 5$$

$$\Rightarrow [\log_5 1394] = 4$$

$$[\log_{1/3} 125] = ?$$

$$[\log_{1/4} 224] = ?$$

سوال: فاصله نقطه برخورد تابع  $f(x) = 4^x + 2$  با محور  $y$  و نقطه برخورد معکوس

این تابع با محور  $x$  کجا امت؟  $\sqrt{2}$   $2\sqrt{2}$   $3\sqrt{2}$   $4\sqrt{2}$

سوال: کدام تابع زیر وارون خود را قطع می کند؟  $y = 3^x$   $y = \log_3 x$   $y = (\frac{2}{11})^x$

حل: با توجه به ساختار آنها رسم آنها در گروه صفحه  $y$  فقط تابع  $y = \log_3 x$  معکوس خود را قطع می کند

سوال: وارون تابع  $y = \frac{3^x - 1}{3^x + 2}$  را بدست آورید؟

سوال: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید؟

۱)  $y = |\log|x||$

۲)  $y = \log_{15} \frac{1}{x-1}$



ص ۱

$$۳) y = 3^{\log_3 x}$$

$$۴) y = 2^{\log_2(1-x^2)}$$

سوال: اگر  $\log_3 a = a$  باشد حاصل  $\log_{\sqrt{27}} \frac{1}{12a}$  کدام است؟

$$\text{حل: } \log_{\sqrt{27}} \frac{1}{12a} = \log_{3^{\frac{3}{2}}} 5^{-2} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} \log_3 5 = -\frac{4}{3} \log_3 5 = -\frac{4}{3} a$$

سوال: اگر  $\log_3$  عدد  $\sqrt[3]{12a}$  در مبنای ۸ برابر  $A$  باشد  $\log_8$   $\frac{1}{A} - 1$  در پایه ۳ کدام است؟

سوال: اگر  $\log_2 x = x$  باشد حاصل  $\log_{11} 2x$  بر حسب  $x$  را بدست آورید؟

سوال: اگر  $\log_{10} 5 = a$  باشد آنگاه حاصل  $\log_8 100$  کدام است؟

معادلات لگاریتمی: با استفاده از قواعد ما تم بر توانیم هر طرف

را به یک توانیم تبدیل می کنیم تا به معادله عباری تبدیل و بعد از حل جوابها

را با دامنه تابع یا معادله تطبیق می دهیم.

مثال: از تساوی  $\log \frac{x^2+4}{x} = 1 + \log 5$  مقدار  $x$  بیابیم.  $x$  کدام است؟ (سه براری)

حل:  $\log \frac{x^2+4}{x} - \log 5 = 1 \Rightarrow \log \frac{x^2+4}{5x} = 1 \Rightarrow \frac{x^2+4}{5} = x$

$\Rightarrow x^2+4 = 5x \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x_1=1$  و  $x_2=4$

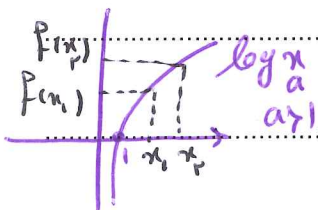
می‌دانیم اگر  $x=1$  را در معادله اصلی جایگذاری کنیم به منهای ۱ می‌رسیم

که غیر قابل قبول است و  $x=4$  قابل قبول است:

$\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 2 \cdot 1 = 2$

مثال: از دو معادله  $4^x + 2^x = 72$  و  $\log(x+1) + \log(2y+x) = 2$  مقدار  $y$  کدام است؟ (سه براری)

نمونه گرافیکی: با توجه به نمودار  $y = \log_a x$  راحت تر می‌توانیم نتایج زیر را به خاطر بسپاریم



$\log_a x > 0 \Rightarrow x > a$

$\log_a x < 0 \Rightarrow 0 < x < a$

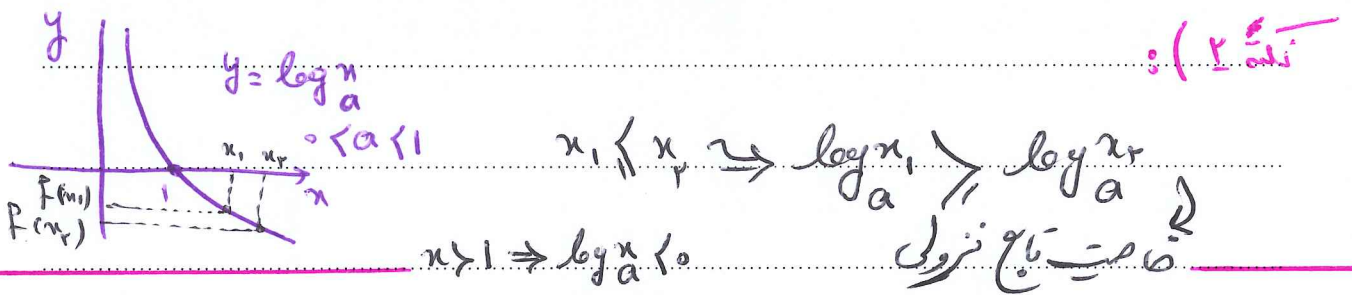
فاصله تابع صعودی  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

مثال: اگر  $\log(x+2) > \log 4x$  صدور  $x$  کدام است؟ چون منهای ۱ است، تابع صعودی است

$\log(x+2) > \log 4x \Rightarrow (x+2) > 4x \Rightarrow 2 > 3x \Rightarrow x < 2/3$

$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$   
 $4x > 0 \Rightarrow x > 0$





مسئله: دامنهٔ تابع باضابطه  $f(x) = \sqrt{-1 - \log \frac{x+2}{5}}$  کدام است؟

$$\frac{x+2}{5} > 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x > -\frac{2}{5} \quad (1)$$

$$-1 - \log \frac{x+2}{5} \geq 0 \Rightarrow \log \frac{x+2}{5} \leq -1$$

چون بزرگتر از ۱ جهت عکس می شود

$$\Rightarrow \frac{x+2}{5} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow x+2 \leq 1 \Rightarrow x \leq -1 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow \text{دامنهٔ صرف } f = \left[-\frac{2}{5}, -1\right]$$

مسئله: به تعاریف قسم و نمودار: مسأله: جواب معادله  $e^{2x} = e^x + 2$  کدام است؟

$$(1) \quad -1, 2, \ln \frac{1}{2}, \ln \sqrt{2}, \ln 2, \ln 4$$

تایید شود زوال: بدیهه‌های مانند میزان رشد یا کتری یا میزان رشد سرمایه بانس

یا جهت کسوری معمولاً هم تابع نمایی و از قانون زیر طبیعت می‌کنند

$$f(t) = A(t) = A_0 \cdot e^{kt}$$

$A_0$ : مقدار یا اندازه اولیه،  $f(t)$  و  $A(t)$ : مقدار یا اندازه بعد از مدت زمان  $t$

مقدار یا اندازه بعد از مدت زمان  $t$

**مسئله:** در شروع یک نوع کت ۱۴۰۰ باتری موجود است و تعداد باتری‌ها پس از  $t$

رضیفه به صورت  $f(t) = A e^{0.04t}$  می‌باشد پس از چند رضیفه ۷۰۰۰ باتری

موجود است؟  $(\ln 2 = 0.693)$  ۳۲

حل:  $f(t) = A e^{0.04t} \rightarrow 7000 = 14000 e^{0.04t} \xrightarrow{\ln}$

$\ln 2 = \ln e^{0.04t} \Rightarrow \ln 2 = \frac{0.04}{100} t \Rightarrow \frac{0.693}{100} = \frac{0.04}{100} t \Rightarrow$

$t = \frac{0.693}{0.04} = 17.325$  رضیفه

**مسئله:** تعداد باتری‌ها در یک نوع کت بعد از  $t$  رضیفه به صورت  $f(t) = A e^{kt}$  است

اگر تعداد این باتری‌ها در شروع کت ۸۰۰۰ و در رضیفه بیستم برابر ۳۲۰۰ باشد

در رضیفه‌ی بیستم تعداد آن‌ها کدام است؟ ۳۱

۷۲۰۰ ۶۴۰۰ ۵۶۰۰ ۴۸۰۰

**مسئله:** جمعیت شهری در سال ۱۹۸۰ میلادی ۴۱۵ میلیون نفر بوده و در شانزده ساله آن

دارای ثابت  $k = 1.4 \ln 2$  است جمعیت این شهر در سال ۲۰۰۰ میلادی چند نفر خواهد بود؟



تمرینات بیشتر

1 جواب معادله  $2^{(4-2^x)} - 2^{(2^x-2)} = 2^{(1-x)}$   $2^{(1-x)} + (\frac{1}{2})^{(2x+1)} = 72$

2 اگر  $\log_{50} A = \frac{1}{2}$  و  $\log_{22} B = \frac{1}{2}$   $\frac{A+B}{A \cdot B}$  کدام است؟

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5 (5) 6 (6)

3 اگر  $\log_{50} = 1.499$  و  $\log_{11} = 0.104$  کدام است؟

- 1 (1) -1.087 (2) -1.967 (3) -1.091 (4) -1.112 (5)

4 معادله  $2^x + 7^x - 5 = 0$  چند ریشه دارد؟

- 1 (1) 2 (2) 3 (3)

5 بیشترین مقدار تابع  $f(x) = (\log_3)^{\cos x}$  کدام است؟

- 1 (1)  $\frac{1}{3}$  (2)  $\frac{1}{2}$  (3)  $\log_3 2$  (4)  $\log_2 3$  (5)

6 حاصل  $\log \tan 1^\circ + \log \tan 2^\circ + \dots + \log \tan 89^\circ$  چند است؟

- 1 (1)  $\frac{1}{2} \log 2$  (2)  $\frac{1}{2} \log \frac{2}{3}$  (3)  $\frac{1}{2} \log 3$  (4) 1 (5)