

به نام خدا

(۱۱ تجربی)

جزوه ریاضی ۲

تهیه و تنظیم: فاطمه بوربور

دبیر ریاضی شهرستان های استان تهران (وراین)

فصل اول

هندسه تحلیلی و جبر

هندسه تحلیلی

❖ درس اول:

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

❖ درس دوم:

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

❖ درس سوم:

شماره ادی	نوبت دوم	نوبت اول
۲/۵	۲	۶

بارم فصل ۱:

فصل ۱ درس ۱: هندسه تحلیلی

پیش نیازهای درس ۱:

- توانایی رسم نمودار یک خط با داشتن معادله آن
- شناخت معادله خطوط موازی با محورهای مختصات
- آشنایی با معادله خطوط نیمسازهای نواحی مختلف صفحه مختصات
- آشنایی با مفهوم عرض از مبدأ یک خط
- آشنایی با شرط موازی بودن دو خط
- توانایی محاسبه شیب یک خط با داشتن مختصات دو نقطه از آن
- توانایی به دست آوردن معادله یک خط با داشتن مختصات دو نقطه از آن

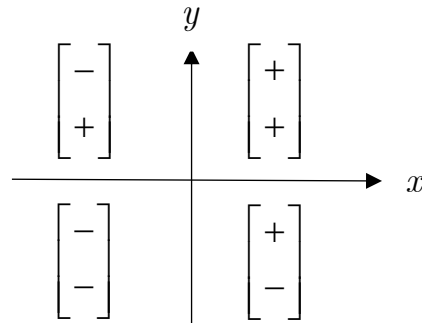
اهداف درس ۱:

- یادآوری معادله خط در حالت کلی و حالت های خاص
- یادآوری شرط موازی بودن دو خط و آموزش شرط عمود بودن دو خط
- توانایی محاسبه فاصله دو نقطه با داشتن مختصات آنها
- توانایی یافتن مختصات نقطه وسط پاره خط
- توانایی به کارگیری فرمول فاصله نقطه از خط

هندسه تحلیلی:

همان مفاهیم نقطه و خط است که دوره متوسطه اول با آن آشنا شده اید.

دستگاه مختصات:



معادله خط:

رابطه ای است که بین نقاط تشکیل دهنده یک خط وجود دارد. هر معادله به شکل $y = mx + h$ یک معادله خط است.

رسم یک خط:

(گارد در کلاسی ۱ و ۲ ص ۲)

① می دانیم از هر دو نقطه متمایز، تنها یک خط عبور می کند؛ بنابراین با داشتن معادله یک خط می توان با مشخص کردن ۲ نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کرد.

② نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید: حل:

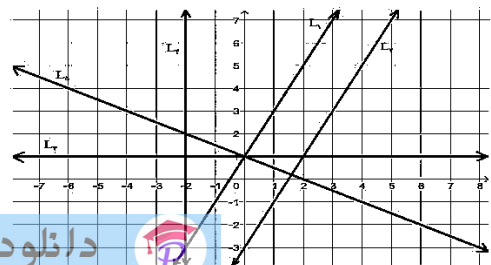
$$L_1: y = 2x + 1 \rightarrow \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 1 \\ \hline y & 1 \quad 3 \end{array}$$

$$L_2: y = 2x - 3 \rightarrow \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 1 \\ \hline y & -3 \quad -1 \end{array}$$

$$L_3: x + 2y = 2 \rightarrow \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 2 \\ \hline y & 1 \quad 0 \end{array}$$

$$L_4: y = 1 \rightarrow \text{نمودار خط موازی محور طول ها}$$

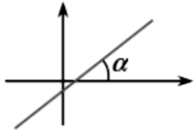
$$L_5: x = -2 \rightarrow \text{نمودار خط موازی محور عرض ها}$$



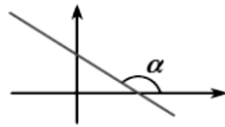
شیب خط (m):

شیب، تانژانت زاویه ای است که خط با جهت مثبت محور x می سازد. که اگر خط، زاویه تند بسازد، شیب مثبت است و اگر زاویه باز بسازد شیب منفی است.

$$\text{شیب خط} = \tan \alpha$$



$$m = \tan \alpha \text{ شیب مثبت}$$



$$m = \tan \alpha \text{ شیب منفی}$$

✓ نکته: برای به دست آوردن شیب خطی که از دو

نقطه می گذرد از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}} \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

عرض از مبدا:

عرض از مبدا را با h نشان می دهیم که به محل برخورد خط با محور عرض ها، عرض از مبدا می گوئیم که اگر در معادله به جای x عدد صفر قرار دهیم مقدار y را عرض از مبدا می نامیم.

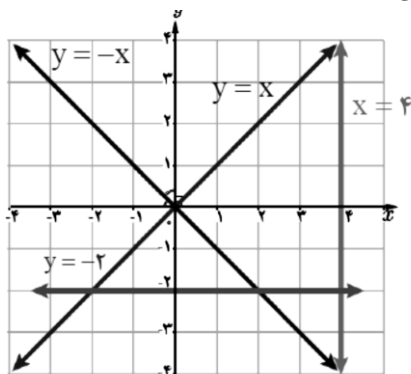
✓ نکته: اگر معادله خط به صورت $ax + by + c = 0$

باشد شیب آن $-\frac{a}{b}$ و عرض از مبدا آن $-\frac{c}{b}$ است

معادله خطوط خاص:

(گارد در کلاسی ۳ ص ۲)

③ معادله هریک از خط های نمایش داده شده روی شکل را بنویسید. حل:



(گارد در کلاسی ۶ ص ۳)

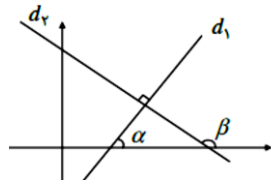
⑥ معادله خط گذرنده از نقطه $P(2, -1)$ را بنویسید. به طوری که با خط $y = 3x - 4$ موازی باشد.

✓ هر گاه دو خط متقاطع باشند همدیگر را با یک زاویه حاده (متقاطع غیر عمود) و یا ۹۰ درجه (متقاطع عمود) قطع می کنند.

✓ شرط عمود بودن دو خط آن است که شیب هر کدام، قرینه معکوس شیب دیگری باشد. یعنی حاصلضرب شیب هایشان -۱ باشد.

$$m \times m' = -1 \Rightarrow m' = -\frac{1}{m}$$

$$m_1 \times m_2 = -1 \Leftrightarrow d_1 \perp d_2$$



معادله ی بسته	
$y = mx + h$	$y = m'x + h'$
۱) $m = m'$, $h \neq h'$	دو خط موازی
۲) $m = m'$, $h = h'$	دو خط منطبق
۳) $m \times m' = -1$	دو خط متعامد (عمود)

(گارد در کلاسی ۱ و ۲ ص ۴)

① در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطع غیر عمود؟)

الف) $L: y = 5x - 2$ $T: y = \frac{-1}{5}x + 3$

ب) $L: y = \frac{1}{4}x + 7$ $T: x - 2y = 1$

پ) $L: 2x - 3y + 3 = 0$ $T: 3x + 2y = 0$

ت) $L: x = 1$ $T: y = -3$

ث) $L: y = 3x + 1$ $T: x = 3y - 1$

۱. $y = x$: نیمساز ربع اول و سوم

۲. $y = -x$: نیمساز ربع دوم و چهارم

۳. $y = b$ خطی موازی محور x ها

$$(m = 0, h = b)$$

۴. $x = a$ خطی موازی محور y ها

$$(m \text{ ندارد}, h = a)$$

۵. $y = 0$ معادله محور x ها

۶. $x = 0$ معادله محور y ها

۷. $y = mx$ خطی که از مبدا می گذرد

نوشتن معادله خط:

برای نوشتن معادله خط از فرمول های زیر کمک می گیریم:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$y = mx + h$$

(گارد در کلاسی ۶ ص ۳)

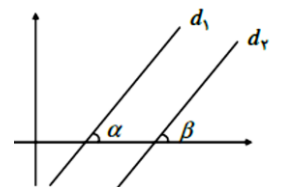
⑥ معادله خط گذرا از دو نقطه $(3, 1)$, $(0, 7)$ را بنویسید.

وضعیت دو خط نسبت به هم:

(گارد در کلاسی ۴ ص ۲)

✓ شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای شیب برابر باشند.

$$\angle \alpha = \angle \beta \Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow d_1 \parallel d_2$$

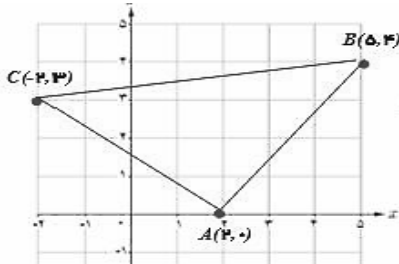


(کاردر کلاسی ۱ و ۳ ص ۶)

③ فاصله ی نقطه ی $N(-6, 8)$ تا مبدا مختصات بدست آورید.

① نقاط $A(2, 0)$ و $B(5, 4)$ و $C(-2, 3)$ را در نظر

بگیرید و رسم کنید.



حل:

الف) محیط مثلث را محاسبه کنید.

ب) نوع مثلث را مشخص کنید. متساوی الساقین قائم الزاویه
پ) به دو روش نشان دهید ABC یک مثلث قائم الزاویه است.

مساحت مثلث را محاسبه کنید.

Home work: (تمرین ۳ ص ۹)

③ نشان دهید مثلث با راس های $A(1, 2)$, $B(2, 5)$, $C(4, 1)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است

② خط L به معادله $2y - 3x = 1$ و خط T با عرض از مبدا ۵ به معادله $y = mx + 5$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار m را چنان بیابید که دو خط L, T با هم موازی باشند.

ب) به ازای چه مقدار m ، دو خط بر هم عمودند؟

Home work: (تمرین ۱ ص ۹)

① وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید

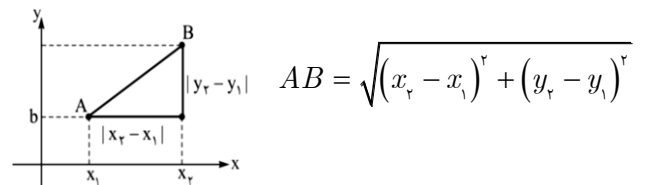
$$L: 2x - y = 1$$

$$T: y = 2x - 3$$

$$\Delta: x + 2y = 0$$

فاصله دو نقطه در دستگاه مختصات:

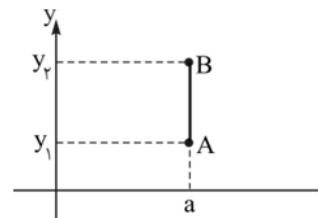
الف) فاصله دو نقطه:



ب) فاصله نقطه از مبدا مختصات:

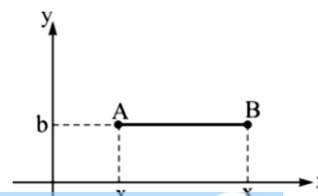
$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

ج) فاصله دو نقطه هم طول:



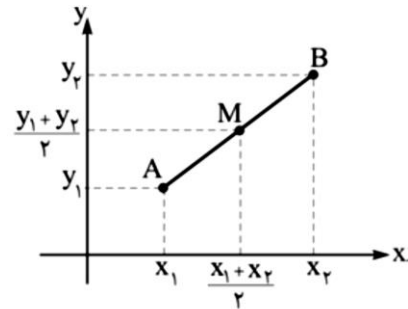
$$AB = |y_2 - y_1|$$

د) فاصله دو نقطه هم عرض:



$$AB = |x_2 - x_1|$$

مختصات نقطه وسط پاره خط:



$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

✓ نکته: با داشتن مختصات وسط پاره خط می توانیم موارد زیر را محاسبه کنیم:

(الف) طول میانه و معادله میانه (میانه خطی است که از رأس به وسط ضلع مقابل کشیده می شود).

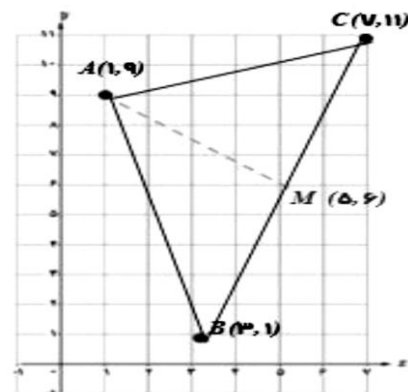
(ب) فاصله مبدا مختصات از وسط یک پاره خط

(ج) مختصات مرکز دایره با داشتن مختصات دوسر قطر
(د) قرینه یک نقطه

(ه) معادله عمود منصف یک پاره خط (عمود منصف خطی است که از وسط ضلع میگذرد و بر آن عمود است).

(گاوردر کلاسی ۱ ص ۷)

① مثلث با رأس های $A(1, 9)$ و $B(3, 1)$ و $C(7, 11)$ را در نظر بگیرید و رسم کنید.



(الف) مختصات M وسط ضلع BC را به دست آورید.

(ب) طول میانه AM را به دست آورید.

(تمرین ۲ ص ۹)

② دو نقطه $A(4, 10)$ و $B(-2, 8)$ را در نظر بگیرید.

فاصله مبدا مختصات را از وسط پاره خط AB به دست آورید

(تمرین ۴ ص ۹)

④ دو انتهای یکی از قطرهای دایره ای نقاط $A(2, -2)$ و $B(6, 4)$ هستند.

(الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز این دایره را بیابید

(ب) آیا نقطه $C(7, 3)$ بر روی محیط دایره قرار دارد؟ چرا؟

(گاوردر کلاسی ۲ ص ۷)

② (الف) نقطه $N(5, -4)$ وسط پاره خط واصل بین دو نقطه $A(7, -2)$ و $B(-1, 4)$ است. مختصات نقطه A را بیابید.

(ب) قرینه نقطه $C(1, 2)$ نسبت به نقطه $M(-1, 4)$ را به دست آورید

(پ) قرینه نقطه $P(\alpha, \beta)$ نسبت به نقطه مبدا مختصات را به دست آورید.

Homework

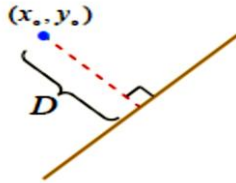
دو نقطه $A(4, 10)$ و $B(-2, 8)$ را در نظر بگیرید. معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید

(ب) معادله ی میانه ی AM را به دست آورید.

فاصله نقطه از خط:

ابتدا خط را به صورت $ax + by + c = 0$ مرتب میکنیم سپس فاصله را از فرمول زیر به دست می آوریم:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



(مثال ص ۸)

⑧ فاصله نقطه $A(7, 5)$ از خط به معادله $4x + 3y = 18$ را بدست آورید.

$$d = \frac{|4(7) + 3(5) - 18|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|25|}{5} = 5$$

Home work: (کار در کلاس ص ۹)

① فاصله نقطه $P(7, -4)$ از خط به معادله $2x + y = 5$ را بدست آورید.

فاصله نقطه $P(7, -4)$ از خط به معادله $x = 5$ را بدست آورید.

فاصله نقطه $P(7, -4)$ از خط به معادله $y = 0$ را بدست آورید.

✓ نکته: با داشتن فاصله نقطه از خط (d) می توانیم موارد زیر را حساب کنیم.

ارتفاع مثلث،

ضلع مربع،

شعاع دایره

دانلود از اپلیکیشن پادرس



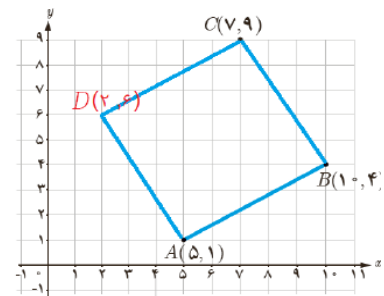
(کار در کلاس ص ۳ ص ۴)

③ مربع $ABCD$ در ناحیه اول مختصات واقع است، به طوری که دو راس مجاور آن هستند
الف) شیب ضلع AB را به دست آورید

الف) شیب ضلع AD را به دست آورید و معادله آن را بنویسید.

پ) اگر بدانیم نقطه $C(7, 9)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید

ت) مربع را به طور کامل رسم کنید. حل:

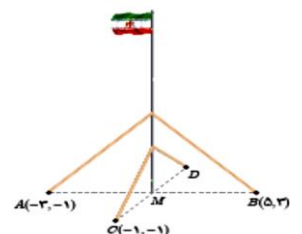


(تمرین ۵ ص ۹)

⑤ نقاط $A(2, 3)$, $B(-1, 0)$, $C(1, -2)$ سه راس یک مستطیل هستند مختصات راس چهارم را بیابید.

Home work: (تمرین ۶ ص ۹)

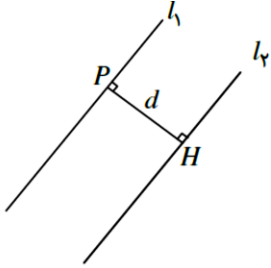
⑥ یک میله پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است؛ به طوری که فاصله هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا پای میله مختصات نقطه D را به دست آورید



فاصله دو خط موازی:

فاصله دو خط موازی (ضریب های x, y یکسا نند)

$ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:



$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(تقریبی ۸ ص ۹)

⑧ الف) نشان دهید دو خط با معادلات

$$5x - 12y + 8 = 0, \quad -10x + 24y + 10 = 0$$

با یکدیگر موازی اند.

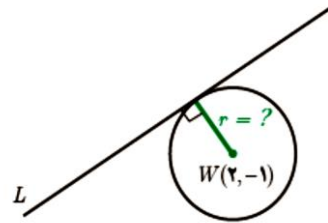
ب) فاصله این دو خط را محاسبه کنید.

(گارد رگلاسی ۲ ص ۹)

② خط $L: 3x - 4y = 0$ بر دایره ای به مرکز

$W(2, -1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.

(خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است.)

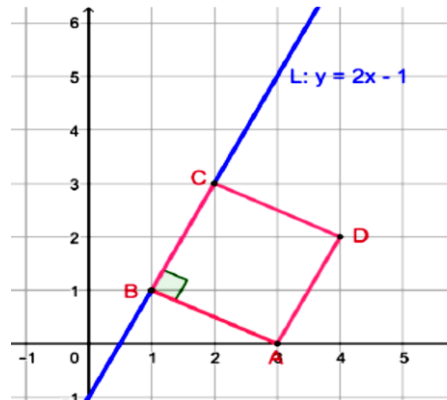


(تقریبی ۷ ص ۹)

⑦ یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = 2x - 1$ واقع

است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت

آن را به دست آورید.



Homework

مثلث با رئوس $A(2, 0)$ و $B(-2, -2)$ و $C(5, 12)$

مفروض است. طول ارتفاع AH را به دست آورید.