

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

فصل ۱ درس ۳:

پیش نیازهای درس ۳:

- آشنایی با عبارت های گویا
- توانایی انجام چهار عمل اصلی با عبارت های گویا
- توانایی محاسبه کوچک ترین مضرب مشترک (ک م م) چند جمله ای ها
- آشنایی با عبارت های رادیکالی
- توانایی محاسبه با عبارت های رادیکالی
- مسلط بودن به اتحاد های جبری، به ویژه اتحاد مربع دو جمله ای

اهداف درس ۳:

- توانایی حل معادلات گویا
- توانایی حل معادلات رادیکالی
- مهارت حل مسائل کلامی مرتبط با معادلات گویا و معادلات گنگ

معادلات گویا:

هر معادله که مجهول (متغیر) در مخرج کسر باشد را معادله گویا

$$\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2 \quad \text{گویند. مثل:}$$

مراحل حل معادلات گویا:

۱. تجزیه کردن مخرج کسرها در صورت امکان
۲. تعیین ک.م.م مخرج ها
۳. ضرب دو طرف تساوی در ک.م.م
۴. خارج کردن معادله از حالت کسری و انتقال عبارات به یک سمت
۵. حل معادله به دست آمده
۶. تست جواب ها در معادله اولیه تا مخرج صفر نشود.

(فعالیت ۱ ص ۲۰)

$$\textcircled{1} \text{ معادله } \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x} \text{ را حل کنید.}$$

حل:

مرحله ۱ و ۲: تجزیه کردن مخرج و تعیین ک.م.م

$$\left. \begin{array}{l} x^2-1 \rightarrow (x+1)(x-1) \\ x+1 \\ x^2-x \rightarrow x(x-1) \end{array} \right\} \rightarrow x(x+1)(x-1)$$

مرحله ۳: ضرب دو طرف تساوی در ک.م.م

$$\frac{2x}{(x+1)(x-1)} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x(x-1)}$$

مرحله ۴: خارج کردن معادله از حالت کسری و انتقال عبارات

به یک سمت

$$x(2x) + 2x(x-1) = (x+1)(2-x)$$

$$2x^2 + 2x^2 - 2x = 2x - x^2 + 2 - x$$

$$5x^2 - 3x - 2 = 0$$

مرحله ۵ و ۶: حل معادله به دست آمده و تست جواب ها

$$5x^2 - 3x - 2 = 0$$

معادله را از راه دلتا یا با توجه به نکته درس قبل حل میکنیم

(اگر جمع ضرایب برابر صفر شود) $(a+b+c=0)$: آنگاه

ریشه ها $(\frac{c}{a}, 1)$ است:

$$5x^2 - 3x - 2 = 0 \xrightarrow{5-3-2=0} \begin{cases} x=1 & \text{قق} \\ x=\frac{-2}{5} & \text{قق} \end{cases}$$

$x=1$ مخرج کسر را صفر می کند و عبارت تعریف نشده می شود پس غیر قابل قبول است

(گارد رگلاسی ۱ ص ۲۱)

① معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب های به دست آمده مورد قبول هستند؟

$$\text{الف) } \frac{3}{x^2} - 12 = 0$$

$$\text{ب) } \frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2+2k}$$

$$\text{پ) } \frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$$

تمرین ۱ (ص ۲۳): Homework

① هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 5 \quad \text{الف)}$$

(کاردرگلاسی ۲ ص ۲۱)

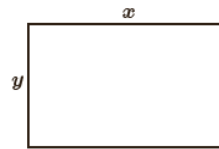
② دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفته اول به صورت $\frac{36}{5} = 7 \frac{1}{5}$ بود او از هفته ششم به بعد در تمام آزمون ها امتیاز ۹ را کسب کرد؛ به طوری که میانگین امتیاز کل آزمون هایش برابر ۸ شد. می خواهیم بدانیم از هفته ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمره ۹ گرفته است.

$$\frac{10}{r} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3r} \quad \text{ب)}$$

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3} \quad \text{پ)}$$

مستطیل طلایی:

مستطیلی است که در آن رابطه $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$ برقرار باشد. نسبت طول به عرض این مستطیل را نسبت طلایی می گویند.



عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ به عدد طلایی معروف است که مقدار

تقریبی آن ۱/۶۱۸ می باشد

✓ نکته: برای به دست آوردن پاسخ برخی از مسائل نیاز به تشکیل و حل یک معادله گویا داریم

(فعالیت ۲ ص ۲۰)

② قطاری مسیر ۶۰ کیلومتری میان دو شهر را با سرعت ثابت v (km/h) طی می کند و مسیر برگشت را با سرعت 1.1 (km/h) کمتر از سرعت مسیر رفت طی می کند و نیم ساعت دیر به مقصد میرسد. زمان رفت و زمان برگشت قطار را به دست آورید.

تمرین ۲ (ص ۲۳): Homework

② علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه ای منتشر می کنند. پس از حروف چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند

چه میزان وقت خواهد بود؟

$$\text{پ) } \sqrt{x+7} = \sqrt{x+1}$$

$$\text{ت) } \frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$$

$$\text{ث) } 2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$$

تمرین ۱ ص ۲۳: Homework

① هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{ت) } \sqrt{t+4} = 3$$

$$\text{ث) } k = \sqrt{6k-8}$$

$$\text{ج) } x + \sqrt{x} = 6$$

$$\text{چ) } \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$$

$$\text{ح) } \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$$

معادلات رادیکالی (گنگ یا اسم):

هر معادله که مجهول (متغیر) زیر رادیکال باشد را معادله رادیکالی می گویند. مثل:

$$\sqrt{x} + 3 = 0$$

مراحل حل معادلات رادیکالی:

۱. بردن عبارت رادیکالی در یک طرف تساوی
۲. به توان ۲ رساندن طرفین معادله
۳. خارج کردن معادله از حالت رادیکالی
۴. حل معادله به دست آمده
۵. تست جواب ها در معادله اولیه تا عبارت زیر رادیکال منفی نشود.

(مثال ص ۲۲)

$$\text{معادله } 2\sqrt{x} = \sqrt{3x-3} \text{ را حل کنید.}$$

حل:

مرحله ۱ و ۲:

$$\left(2\sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{3x-3}\right)^2$$

مرحله ۳: خارج کردن معادله از حالت رادیکالی

$$4x = 3x - 3$$

مرحله ۴ و ۵: حل معادله به دست آمده و تست جواب ها

$$4x - 3x = -3 \rightarrow x = -3 \quad \text{غ ق ق}$$

(گارد رگلاسی ۱ ص ۲۳)

① معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب های حاصل قابل قبول اند؟

$$\text{الف) } 2\sqrt{2t-1} - t = 1$$

$$\text{ب) } 2x = 1 - \sqrt{2-x}$$

④ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

✓ نکته: جمع اعداد نامنفی هیچ گاه صفر نمی شود ولی اگر مجموع چند عبارت نامنفی صفر شد به معنی آنست که هر کدام از عبارت ها صفر خواهند بود.

(گاردنر گلابی ۲ ص ۲۳)

② توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی اند.

$$\text{الف) } \sqrt{t} + 2 = 0$$

$$\text{ب) } \sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$$

$$\text{پ) } \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$$

✓ نکته: برای به دست آوردن پاسخ برخی از مسائل نیاز به تشکیل و حل یک معادله رادیکالی داریم

(مثال ص ۲۲)

نقطه ای روی محور xها بیابید که فاصله آن از نقطه $P(2,3)$ برابر ۵ باشد. مساله چند جواب دارد؟

تمرین ۳ و ۴ ص ۲۴: Homework

③ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار

$$\text{خواهد داشت؛ به طوری که } t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$$

این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟