

آزمايش‌هاى پازى



11

شركه ساراژحه

فصل اول (هندسه تحليلى و جبر)

سيد امير مؤيد

ارائه درسامه هاى فصل به فصل و بيان اشتباهات متداول

 @XY_Riazi

تمرينات و نتهاى آموزشى، تمرينى و ارزشيابى

نتهاى آزمون هاى  الملل، كنگره داخلى و خارجى كشور
دكتر د. ا. ر. (پايپيشن) پ. ش. ر. س.

VERSION DH 9.8

مقدمه ای کوتاه

پس از سالها تدریس ریاضی و درس مهندسی عمران و معماری در دانشگاه، مدارس و آموزشگاه های برتر و شناخت نقاط ضعف و قوت دانش آموزان کنکوری در درس ریاضی، تصمیم گرفتم با تغییر کتاب های درسی جزوه ای کامل و جامع برای دانش آموزان عزیزم گردآوری نمایم. از آنجا که همواره به برابری آموزشی در کشور عزیزمان ایران اعتقاد داشتم مصمم شدم این جزوه را که انشالله به زودی به کتاب تبدیل خواهد شد از طریق فضای مجازی در دسترس تمام دانش آموزان علاقمند کشورم قرار بدهم.

افتخار من تربیت و همراهی شاگردانی با رتبه های برتر کنکور و همچنین دانشجویانی قوی و تملیکر است که همه آنها را اکنون در پست های مدیریتی، اجرایی مهندسی و پزشکی دوستان خود می دانم. امروز نیز هرکسی از این مکتوب استفاده نماید به گروه بزرگ دوستان من اضافه خواهد شد. شما در انتشار و استفاده از این جزوه آزادی چه با نام و چه بی نام و هیچ عقی بر دوش شما نیست...

تنها در صورتی که هرگونه ابهامی در جزوه مشاهده کردید، به تلگرام یا اینستاگرام شماره زیر پیام داده و آنرا مطرح نمایید و به من کمک کنید هر سال کاملتر از سال قبل باشم...

هرگز فراموش نکنید ترسوها همیشه سیاهپوش آرزوهای خود فوهند بود...

پس برای آرزوهایتان ببنگید...

سیدامیر میرمویز

تابستان ۱۳۹۷

Telegram & instageram: @XY_Riazi

۰۹۱۱-۴۳۲-۲۴۲۲

I ♥ MATH

ریاضی یازدهم

کتاب



نیم فصل اول:

- هندسه تحلیلی



@XY_Riazi

دانلود از اپلیکیشن پادرس



Success Is **Not**
A Good
Teacher,

But Failure Is
Brave Master.



با خود فکر میکردم تحقق رویاهایم غیر ممکن است.

اما خدا گفت: (هر چیزی ممکن است)

گم شده بودم، گنج بودم، فکر میکردم هیچ وقت جوابی پیدا نخواهم کرد.

اما خدا گفت: (من هدایت میکنم)

خودم را باخته بودم، فکر می کردم نمی توانم از عهده اش بر آیم.

اما خدا گفت: (تو از عهده هر کاری بر می آیی)

غفلت بودم، احساس کردم زیر کوهی از ناامیدی گیر افتادم.

اما خدا گفت: (غمهایت را روی شانه های من بریز)

فکر کردم نمی توانم، من آنقدر باهوش نیستم.

اما خدا گفت: (من به تو استعداد لازم را میدهم)

از خودم بدم می آمد، فکر می کردم هیچ کس مرا دوست ندارد.

اما خدا گفت: (من به تو عشق می ورزم)

تنها بودم.

اما خدا گفت: (من همیشه با تو هستم)

در روزهای طوفانی زندگی نا خدا بودن مهم نیست

با خدا بودن مهم است...

درس اول: هندسه تحلیلی

یادآوری

سادهای گذشته با خط آشنا شدیم. در این قسمت می‌خواهیم یک یادآوری از سال‌های قبل داشته باشیم. معادله کلی خط رو به صورت $y = ax + b$ می‌نویسند که به این حالت معادله استاندارد خط می‌گویند. یعنی y در سمت چپ تنه است و عدد x سمت راست است. پس تو هر تکی گفت معادله خطی داریم شما بنویسید $y = ax + b$ در این حالت به ضریب a شیب و به b عرض از مبدا می‌گویند.

نکته: گاهی اوقات معادله رو به شکل غیر استاندارد می‌دانند ($by + ax + c = 0$). در این صورت یا باید اول اونو استاندارد کنیم (تمام دنیا یطرف y تنها یطرف عزیزم عزیزم) یا اینکه شیب را از رابطه $m = -\frac{a}{b}$ به دست بیاریم فقط برای استفاده از این فرمول باید اول چپ چپش کنیم (همه سمت چپ و راست فقط صفر).

مثال: در خط‌های زیر شیب و عرض از مبدا و طول از مبدا را بدست آورید.

$$y = 4x + 50$$

$$3y + 4x + 5 = 0$$

$$-3y + 4x + 5 = 3x$$

$$my + 3x - m + 1 = 0$$

رسم خط:

هر خطی را با داشتن دو نقطه از آن رسم می کنند

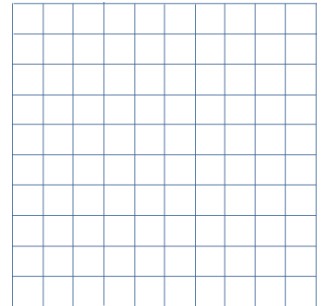
مثال ۲: نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه مختصات مشخص شده، رسم کنید. (کتاب صفحه ۲)

الف) $y = 2x - 1$

ب) $y = 2$

پ) $x = -2$

ت) $x = 2y + 2$



تست: مساحت محصور به خط $y = 2$ و $x = -1$ و $y = -x + 2$ را بدست آورید.

۱ (۲)

۰/۵ (۱)

۰/۷۵ (۴)

۰/۲۵ (۳)

شیب خط

یکی از مهمترین مشخصه های خط شیب آن است. شیب خط به معنی اینست که برای بالا رفتن (۷) چقدر پامان را باز کنیم (x) و جلو برویم. برای اینکه "شیب شاه" را بدست بیاوریم باید از روش های زیر استفاده کنیم:

روش اول: به دست آوردن شیب با کمک خط های موازی و عمود

میدانیم که شیب خط های موازی با هم مساوی هستند و شیب خط های عمود، قرینه و معکوس یکدیگر هستند.

$$a = a' \quad a = -\frac{1}{a'}$$

نکته ۴: حاصل ضرب شیب دو خط عمود بر هم، منفی یک می باشد.

$$a \cdot a' = -1$$

مثال ۳: در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند.

(موازی، عمود یا متقاطع غیر عمود)؟ (کتاب صفحه ۴)

الف) $y = \frac{1}{3}x + 1$

الف) $2x - 3y = 3$

ب) $x - 2y = 5$

ب) $3x + 2y = 5$

الف) $y = 3$

الف) $y + 3x + 1 = 0$

ب) $x = -2$

ب) $x - 2y - 5 = 0$

روش تست سریع:

رابطه دو خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ را میتوان به صورت زیر بیان نمود (چپ چپ)

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$	موازی یا فاصله	موازی
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	موازی منطبق	
$\frac{a}{a'} = -\frac{b}{b'}$	عمود	متقاطع
$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	یک نقطه مشترک	

مثال ۴: خط $2y - 3x = 3$ و خط $y = mx + 2$ را در نظر بگیرید. (کتاب صفحه ۴)

الف) m را طوری بیابید که دو خط موازی باشند.

ب) به ازای چه مقادیر m دو خط بر هم عمودند.

تست ۲: اگر دو خط $y = (m^2 - 4)x + 1$ و $y = (m^2 + m - 6)x + 2$ موازی باشند مقدار m کدام است؟

۱ (۱) ۳ (۲)

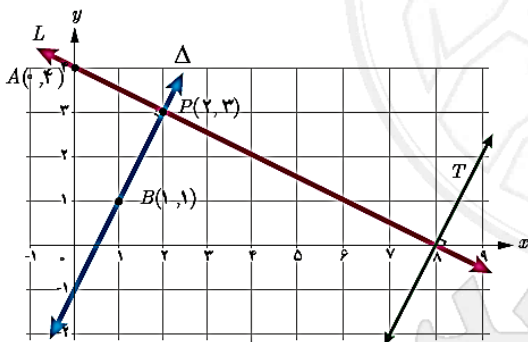
۵ (۳) ۲ (۴)

روش دوم: به دست آوردن شیب با استفاده از دو نقطه

میدونی هر قدر ارتفاع نردبون بالاتر باشه در محوره کمتری متغیر بشه شیب آن بیشتر میشه. بنابراین میتونیم به وسیله دو نقطه از رابطه زیر شیب را به دست بیاریم:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{اختلاف عرض ها}}{\text{اختلاف طول ها}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

مثال ۵: شیب خط های زیر را بدست آورید. (کتاب صفحه ۳)



تست ۳: خطی از دو نقطه $(k, 0)$ و $(0, 5)$ می گذرد. و شیب آن ۴ است. k را بیابید.

۱ (۲) ۱/۲۵ (۱)

-۱ (۴) -۱/۲۵ (۳)

روشن سوچ: به دست آوردن شیب با استفاده از زاویه خط

در سال دهم یاد گرفتیم که با استفاده از تانژانت زاویه، با محور طول ها می توانیم شیب را محاسبه کنیم. بنابراین از رابطه زیر شیب به دست می آید:

$$a = \tan \alpha$$

مثال ۶: شیب خطی را بنویسید که

الف) با جهت مثبت محور x ها زاویه 60° در جهه می سازد و از مبدا مختصات می گذرد.

ب) با جهت مثبت محور x ها زاویه 120° در جهه می سازد و از مبدا مختصات می گذرد.

پ) با جهت مثبت محور y ها زاویه 60° در جهه می سازد و از مبدا مختصات می گذرد.

شیب خط های خاص

خط موازی محور عرض ها: شیب آن تعریف نشده (دیوار راست). پس این خط به x خود وفادار بوده و

معادله آن فقط به اسم x سند می خورد.

$$x = \text{عدد}$$

خط موازی محور طول ها (روز جهانی جوارب): شیب آن صفر (زمین صاف). پس این خط به y

خود وفادار بوده و معادله آن فقط به اسم y سند می خورد.

$$y = \text{عدد}$$

نوشتن معادله خط

برای اینکه معادله خط بنویسیم حالت‌های مختلف وجود دارد. معادله خط نوشتن مثل اینه که تابلو خیابان را نصب نماییم (x و y همه نقطه‌های خط قابل جاگذاری در معادله باشد) و برای نوشتن آن داشتن یک نقطه و شیب خط (شیب شاه) کافی است. بدون داشتن شیب غیر ممکنه...

روش اول: داشتن شیب و عرض از مبدا (جویده و آماده): فقط کافیست عددها را به جای پارامترها معادله استاندارد خط $y = ax + b$ جاگذاری کنیم.

تست: به ازای کدام مقدار m خط $y = mx + m - 3$ از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد (کنکور)

$$0 \leq m \leq 3 \quad (1)$$

$$m \geq 3 \quad (2)$$

$$m \leq 0 \quad (3)$$

$$\emptyset \quad (4)$$

روش دوم: داشتن شیب و یک نقطه: در این حالت کافیست شیب و مختصات نقطه را در جای خودش در رابطه سطحی خط به صورت زیر جاگذاری کنیم (روش سال نهم کنده)

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

مثال ۲: معادله خطی را بنویسید که با محور منفی x زاویه ۴۵ درجه می‌سازد و از نقطه (۳, ۱) می‌گذرد.

تست ۴: خط گذرا بر نقطه (۳, -۱) و عمود بر خط $2y - 3x = 4$ محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

$$1 \quad (2) \quad 0 \quad (1)$$

$$-2 \quad (4) \quad 2 \quad (3)$$

روش سوم: داشتن دو نقطه از خط: همانطور که می‌بینیم برای نوشتن معادله خط حضور شیب شاه ضروری است.

بنابراین اولین کاری که می‌کنیم باید مقدار شیب رو به دست بیاریم. سپس توی رابطه سلطنتی خط جاگذاری می‌کنیم

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad y - y_1 = a(x - x_1)$$

نکته ۳: در این حالت می‌تونیم مختصات هر دو نقطه را به صورت همزمان به جای x و y معادله استاندارد جاگذاری کنیم و از دستگاه مقدار شیب و عرض از مبدأ رو به دست بیاریم.

مثال ۸: معادله خط مبدأ گذری که از نقطه $(-1, 3)$ می‌گذرد را بنویسید.

مثال ۹: مربع ABCD در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است. به طوری که $A(5, 1)$ و $B(10, 4)$ دو رأس مجاور آن هستند. (کتاب صفحه ۴)
الف) شیب ضلع AB را بنویسید.

ب) شیب ضلع AD را بنویسید و معادله آنرا بدست آورید.

میر مویک

پ) اگر بدانیم $C(7, 9)$ رأس سوم مربع است مختصات رأس D را بیابید.

تست ۵: خطی با جهت مثبت محور طول ها زاویه 150° می‌سازد. و از نقطه $A(a, 2)$ و $B(-1, 3)$ می‌گذرد. مقدار a کدام است؟

۱) $1 - \sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3} - 1$

۳) $2 - \sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{3} - 2$

روابط هندسی

در هندسه معتمربین قسمت ها نقطه و خط هستند. در این قسمت می خواهیم رابطه بین نقطه ها ، خط ها و روابط متقابل این دو رو بررسی کنیم.

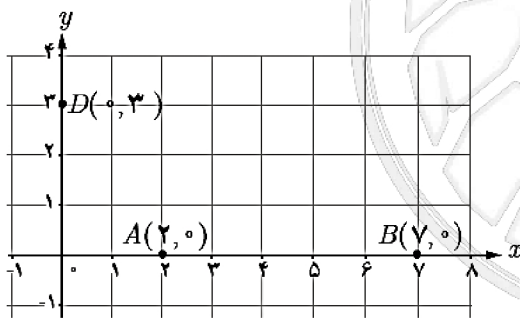
روابط نقطه ها

فاصله دو نقطه

فاصله دو نقطه از هم رو میتونیم از طریق تبدیل خط وصل کننده آنها به وتر یک مثلث قائم الزاویه به دست بیاریم. یعنی فاصله دو نقطه میتونه از فیثاغورث اختلاف طول ها و اختلاف عرض ها بدست بیاد (روش اختلاف بنذارو به دست بیار)

$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

مثال ۱: شکل مقابل را در نظر بگیرید. (کتاب صفحه ۴)



الف) فاصله AB چقدر است؟

ب) فاصله BD چقدر است؟

میر مویک

مثال ۱: فاصله نقطه $(-1, 3)$ از مبدأ مختصات چقدر است (کتاب صفحه ۶)؟

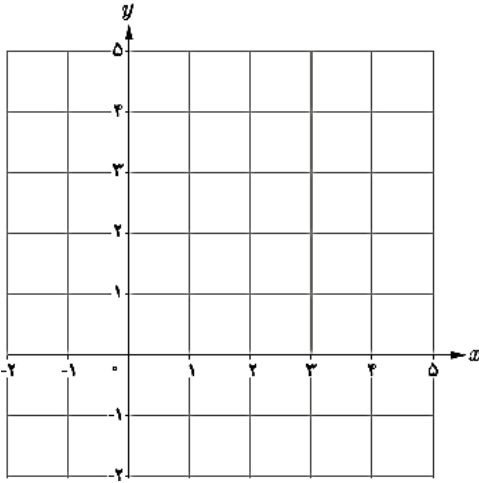
مثال ۲: در یکن از جاده های کشور تصادف رخ داده است که مختصات نقطه تصادف روی نقشه مرکز امداد به صورت

$A(50, 30)$ است. پایگاه های امداد هوایی که به محل تصادف نزدیک اند. در نقاط $A(10, -20)$ و $A(10, 90)$ واقع

اند. شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگرد امداد به محل حادثه پیشنهاد می کنید (کتاب صفحه ۶)؟

مثال ۱۳: سه رأس مثلثی عبارتند از $A(1, 2)$ و $B(2, 5)$ و $C(4, 1)$. (کتاب صفحه ۶) ؟

الف) محیط این مثلث را حساب کنید.



ب) این نقاط را سه چه نوع مثلثی را مشخص می کنند

پ) مساحت این مثلث چقدر است؟

نکته تستی-خبررسانی: مساحت یک مثلث به سه رأس های A و B و C از رابطه زیر بدست می آید اگر جواب منفی

بدست آمد قدر مطلق آن عدد جواب درست است.

$$S = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_A \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} \times |(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A) - (x_B y_A + x_C y_B + x_A y_C)|$$

تست ۱۴: سه رأس مثلثی عبارتند از $A(2, 5)$ و $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$. مساحت مثلث کدام است؟ (تجربین خارج ۹۲)

۶/۵ (۲)

۶ (۱)

۷/۵ (۴)

۷ (۳)

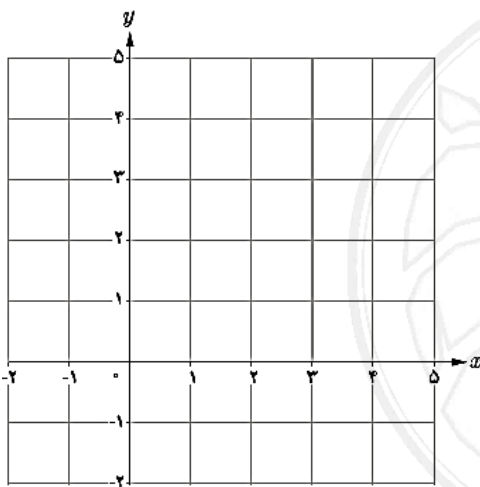
نقطه وسط یک پاره خط (نقطه وسط دو نقطه)

برای اینکه بتوانیم وسط دو نقطه رو پیدا کنیم کافیست بین عرض ها و طول های آنها میانگین بگیریم تا مختصات وسط بدست بیاد.

$$M = \left[\begin{array}{c} \frac{x_2 + x_1}{2} \\ \frac{y_2 + y_1}{2} \end{array} \right]$$

مثال ۱۵: سه رأس مثلث عبارتند از $A(1, 3)$ و $B(2, 5)$ و $C(5, 1)$ (کتاب صفحه ۷)

الف) مختصات نقطه M وسط ضلع BC را بدست آورید.



ب) طول میانگین AM چقدر است؟

پ) معادله میانگین AM چقدر است؟

نکته ۱۴: مختصات نقطه محل برخورد دو خط از حل دستگاه معادلات خطی (ومعادله نومجمول) بدست می آید.

مثال ۱۶: فاصله محل برخورد معادله های $2y + 3x = 8$ و $3y + 4x = 10$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

تست ۶: نقطه $(7, 6)$ را سه یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادله های $2x - 3y = 11$

و $3y + 4x = 8$ هستند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (کنکور ۹۰ تجربی)

(۱) $(1, 5)$ (۲) $(3, 4)$

(۳) $(3, 5)$ (۴) $(4, 3)$

قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر

از رابطه نقطه وسط می‌توانید قرینه هر نقطه A مثل $A(a, b)$ نسبت به نقطه P یعنی $P(\alpha, \beta)$ (همان نقطه وسط) را بیابید که می‌شود $A(a', b')$.

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+a'}{2} \\ \frac{b+b'}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a' = 2\alpha - a \\ b' = 2\beta - b \end{cases}$$

مثال ۱۷: نقطه $M(5, -4)$ وسط پاره خط واصل بین دو نقطه A و $A(7, 2)$ است. (کتاب صفحه ۷)

الف) مختصات نقطه A را بیابید.

ب) قرینه نقطه $C(1, 3)$ را نسبت به نقطه $N(1, 3)$ را بدست آورید.

مثال ۱۸: قرینه مبدا مختصات را نسبت به نقطه $(7, 6)$ بیابید.

میر مویک

مرکز ثقل مثلث:

اگر سه رأس مثلث مشخص باشند، مرکز ثقل از رابطه زیر بدست می‌آید.

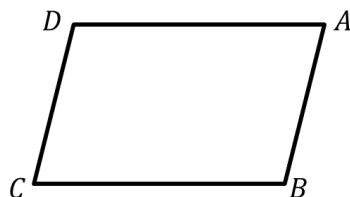
$$G = \begin{bmatrix} \frac{x_3 + x_2 + x_1}{3} \\ \frac{y_3 + y_2 + y_1}{3} \end{bmatrix}$$

مثال ۱۹: سه رأس مثلث عبارتند از $A(1, 2)$ و $B(2, 5)$ و $C(4, 1)$. مرکز ثقل این مثلث کدام است؟

رابطه بین مختصات رئس‌های یک متوازی الاضلاع

اول اینده شکل‌های مربع، مستطیل، لوزی یک نوع متوازی الاضلاع هستند. پس اگر هر متوازی الاضلاع $ABCD$ داشته باشیم چون وسط دو تا قطر روی هم می‌وفتد، می‌توانیم رابطه زیر را بین این رئس‌ها برقرار کنیم

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

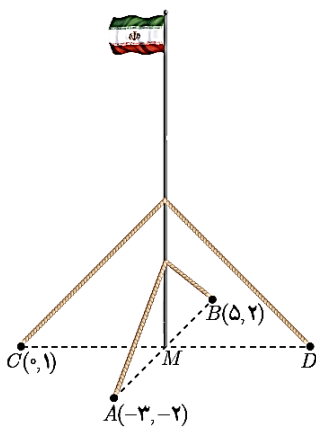


مثال ۲۰: نقاط $A(2, 3)$ و $B(-1, 0)$ و $C(1, -2)$ رئوس یک متطیل هستند. مختصات رئس چهارم کدامست؟ (کتاب صفحه ۹)

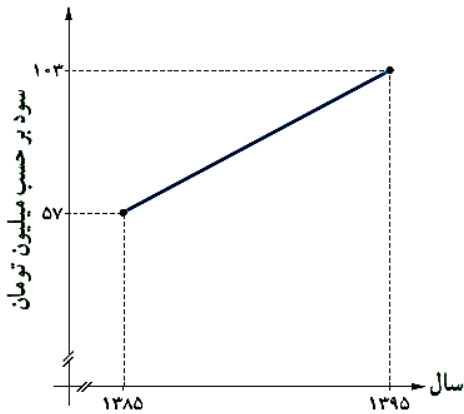
تست ۷: نقاط $A(1, 2)$ و $B(3, 7)$ و $C(4, 5)$ رئوس یک متوازی الاضلاع هستند. مختصات رئس چهارم کدامست؟

- (۱) $(4, -1)$ (۲) $(-1, 4)$
(۳) $(0, 2)$ (۴) $(2, 0)$

مثال ۲۱: یک میله پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است؛ به طوری که فاصله هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا پای میله. مختصات نقطه D را بدست آورید. (کتاب صفحه ۹)



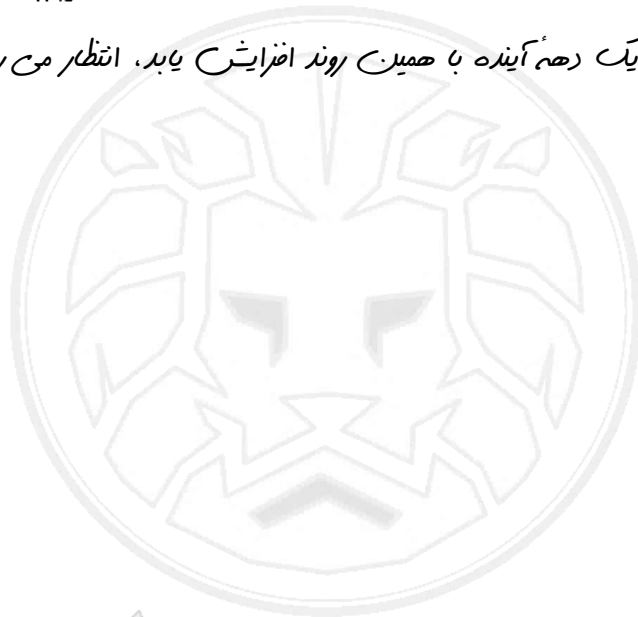
مثال ۲۲: سود سالانه یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۸۵ تا ۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است. به کمک رابطه نقطه وسط پاره خط، به سوالات زیر پاسخ دهید: (کتاب صفحه ۸)



الف) میانگین سود سالانه این شرکت در دهه مورد نظر چقدر بوده است؟

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه، با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

پ) اگر سود سالانه در طول یک دهه آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟



میر مویک

رابطه نقطه و خط

برای اینکه بتوانیم فاصله نقطه (x_1, y_1) از خط $ax + by + c = 0$ را به دست بیاوریم اول این خط رو غیر استاندارد یک طرفه می‌کنیم و بعد با استفاده از رابطه زیر و جاگذاری نقطه، خیلی راحت فاصله نقطه از خط (طول خط عمود از اون نقطه بر خط) به دست میاریم.

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته ۵: قدر مطلق واسه اینکه مطمئن بشیم هیچ وقت فاصله منفی نمیشه...

مثال ۲۳: فاصله نقطه $A(2, 5)$ را از هر یک از خطوط زیر بدست بیاورید. (کتاب صفحه ۹)

الف) $2y - 3x = 4$	ب) $y = 3$	پ) $x = 1$
--------------------	------------	------------

تست ۸: فاصله دو خط به معادله $y - \sqrt{3}x = 2$ و $3y - 3x = -6$ کدام است؟ (تجربیه خارج ۸۸)

میر مویک

$$2 - \sqrt{3} \quad (1)$$

$$2 - \sqrt{3} \quad (1)$$

$$\sqrt{3} + 2 \quad (4)$$

$$1 + \sqrt{3} \quad (3)$$

نکته ۶: فاصله از خط های افقی یا عمودی رو بهتره با رسم شکل مشخص کنیم چون سریعتر به دست می‌آید.

نکته ۷: فاصله هر نقطه از خطی که روی آن واقع شده است صفر میشود.

مثال ۲۴: خط $y + x = 5$ بردایره ای به مرکز $A(3, -4)$ مماس است. مساحت و محیط دایره را بیابید. (کتاب صفحه ۹)

مثال ۲۵: یکی از اضلاع مربعی بر خط $y - x = ۲$ واقع است. اگر $A(۳, ۴)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید. (کتاب صفحه ۹۰)

تست ۲۶: نقطه $A(۳, -۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $۲y - x = ۵$ است. مساحت این مربع کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۴۵ (۲)

۴۰ (۱)

۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

مثال ۲۷: دو اشکالی یکی از قطرهای دایره AC نقاط $A(۳, -۱)$ و $B(۵, ۳)$ هستند. (کتاب صفحه ۹۰)
الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطه $A(۳, -۱)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چه وضعی دارد؟

میر مویک

قرینه یک نقطه نسبت به یک خط

نقطه A قرینه نقطه B نسبت به خط d می‌باشد، وقتی که خط d عمود منصف خط AB باشد. یعنی وسط AB روی d باشد.

نکته کنکوری ۸: وقتی در سوال گفته شد نقطه ای آن نقطه را به صورت زیر پارامتری فرض میکنیم:

$$A(\alpha, \alpha \text{ در معادله خط})$$

مثال ۲۸: نقطه ای بر روی خط $y - x = 0$ را بیابید که فاصله آن از نقطه $A(3, -4)$ برابر با ۶ باشد.

مثال ۲۹: قرینه نقطه $A(3, -4)$ نسبت به خط $y + x = 5$ بدست آورید.

تست ۹: دو نقطه روی خط به معادله $y = x - 1$ قرار دارند که فاصله این نقاط از خط بمعادله $3y + 2x = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است (نسبت به این خط قرینه اند) طول این دو نقطه کدام است؟ (تجربه ۱۸۹)

$$۱۱ - ۱۵ (۲)$$

$$۹ - ۱۵ (۱)$$

$$۱۱ - ۹ (۴)$$

$$-۱۱ - ۱۵ (۳)$$

روابط بین خطوط:

رابطه دو خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ را میتوان به صورت زیر بیان نمود (چپ چین)

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$	موازی (با فاصله همیشه ثابت)	موازی
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	موازی منطبق (فاصله آنها صفر)	
$\frac{a}{a'} = -\frac{b}{b'}$	عمود (فاصله صفر)	متقاطع
$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	یک نقطه مشترک (فاصله صفر)	

روابط خط‌های موازی

فاصله دو خط موازی

برای به دست آوردن فاصله دو خط موازی آنها را غیر استاندارد چپ چین می‌کنیم و بعد از اینکه ضرایب های a و b در معادله خط چپ چین $(ax + by + c = 0)$ مجبور کردیم که مثل هم باشند از رابطه زیر فاصله رو به دست میاریم

$$AH = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: فاصله دو خط منطبق بر هم (نسبت همه ضرایب پس از ساده شدن یکسان) صفر است.

معادله خط وسط دو خط موازی

اگر بخواهیم معادله خط وسط رو بنویسیم، پس از یکسان کردن ضرایب های a و b یقیناً این ضرایب برای خط جدید نیز با آنها یکسان است چون با هم موازیند. بنابراین فقط کافیست عددی (c) معادله غیر استاندارد چپ چین شده متوسط بگیریم.

$$ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$$

مثال ۳۰: دو خط به معادله $6y + 4x = -1$ و $3y - 2x = 5$ چه حالتی نسبت به هم دارند؟ فاصله آنها را پیدا کرده و معادله خط گذرنده از وسط دو خط را بنویسید. (کتاب صفحه ۹)

زاویه بین دو خط

اگر دو خط با شیب های m و m' متقاطع باشند و زاویه بین آنها α باشد در اینصورت، زاویه از رابطه زیر بدست می آید

$$\tan(\alpha) = \frac{|m - m'|}{|1 + mm'|} = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$$

مثال ۳۱: دو خط $y = x + 1$ و $y - 1 = 0$ چه زاویه ای با هم می سازند؟

شراکون تست: دو خط $4y + 2x = 6$ و $-x + 2y = 1$ در ضلع یک مربع هستند. اگر نقطه $(2, -2)$ روی هیچ کدام از این دو خط قرار نداشته باشد، آنگاه محیط و مساحت این مربع چقدر است؟

شراکون تست: دو خط $y + 2x = 5$ و $-4x = 2y + 8$ در ضلع یک مربع هستند. آنگاه محیط و مساحت این مربع چقدر است؟

شراکون تست: در یک مثلث به مشخصات $A(2, -2)$ و $B(3, 2)$ و $C(1, 4)$ اختلاف طول میانه و ارتفاع وارد بر AB چقدر است؟

جمع بندی نیم فصل:



میر موید



میرموید

تست های بخش هندسه تحلیلی

فصل اول - درس اول

۱ اگر دو خط به معادله های $(m+2)y = x+3$ و $y = (2m+1)x+1$ بر هم عمود باشند، m کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $-\frac{2}{3}$
- (۳) -1
- (۴) 1

۲ اگر نقاط $A(0,1)$ ، $B(1,4)$ و $C(3,0)$ رئوس مثلث ABC باشند، با مشخص کردن طول اضلاع، نوع این مثلث کدام است؟

- (۱) قائم الزاویه متساوی الساقین
- (۲) متساوی الاضلاع
- (۳) متساوی الساقین با یک زاویه منفرجه
- (۴) قائم الزاویه با یک زاویه 30°

۳ مثلث ABC با رئوس $A(2,8)$ ، $B(4,0)$ و $C(8,10)$ را در نظر بگیرید. اندازه میانه BM کدام است؟

- (۱) $\sqrt{12}$
- (۲) $\sqrt{41}$
- (۳) 10
- (۴) 5

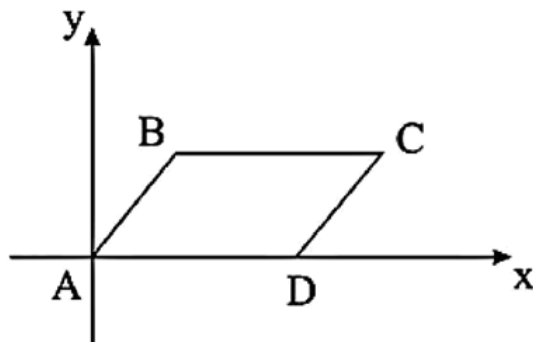
۴ فاصله دو خط $y = 2x + 11$ و $y = 2x - 4$ از یکدیگر چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

- (۱) 1
- (۲) 2
- (۳) 3
- (۴) 4

۵ اگر فاصله نقطه $A(2,3)$ از خط $mx + 2y = 1$ برابر 2 باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{20}$
- (۲) $-\frac{11}{20}$
- (۳) $\frac{9}{20}$
- (۴) $-\frac{9}{20}$

۶ در شکل زیر، چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است. اگر اندازه ضلع BC برابر 5 باشد و معادله خطی که ضلع AB روی آن قرار دارد، $y - 2x = 0$ باشد و معادله خطی که ضلع CD روی آن قرار دارد $ay + bx + 5 = 0$ باشد، آنگاه $a + b$ برابر کدام گزینه است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{3}{2}$
- (۳) -1
- (۴) $-\frac{1}{2}$

۷ مثلث ABC که مختصات رأس های آن $A(3,5)$ ، $B(3,-1)$ و $C(7,2)$ است، چگونه است؟

- (۱) متساوی الساقین
- (۲) متساوی الاضلاع
- (۳) مختلف الاضلاع
- (۴) قائم الزاویه



سه نقطه $(0, 2)$ و $(4, 0)$ و مبدأ مختصات رأس‌های یک مثلث هستند. ارتفاع و میانه وارد بر بزرگترین ضلع این مثلث، آن را به ترتیب در H و M قطع کرده است. طول MH چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

- (۱) $0/8$ (۲) $0/6$
(۳) $0/4$ (۴) $0/2$

نقاط $A(2, 3)$ ، $B(-1, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن کدام است؟

- (۱) $(4, 2)$ (۲) $(4, 1)$
(۳) $(3, 1)$ (۴) $(3, 0)$

نقاط $A(1, 4)$ ، $B(5, -2)$ و $C(0, 6)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم متوازی‌الاضلاع کدام است؟

- (۱) $(-4, 12)$ (۲) $(-4, 10)$
(۳) $(-3, 2)$ (۴) $(-3, 6)$

خط $6x - 8y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. اندازه شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۴ (۴) ۹

اگر خطوط $y = 2x + 3$ و $2y + x - 6 = 0$ معادله دو ضلع یک مستطیل و نقطه $A(1, 1)$ یکی از رؤس آن باشد، مساحت این مستطیل چقدر است؟

- (۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{7}{5}$
(۳) $\frac{12}{5}$ (۴) $\frac{14}{5}$

فاصله نقطه $A(-2m + 1, 3m - 9)$ از دو محور مختصات به یک اندازه است. در این صورت OA برابر است با:

- (۱) ۳ یا ۵ (۲) $5\sqrt{2}$ یا $15\sqrt{2}$
(۳) $15\sqrt{2}$ یا $3\sqrt{2}$ (۴) ۸ یا ۲

مثلث ABC با رؤس $A(-1, 2)$ ، $B(3, 2m + 1)$ و $C(-2, -2)$ قائمه است. طول ارتفاع AH کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ (۲) $\frac{17}{6}$
(۳) $\frac{\sqrt{34}}{2}$ (۴) $\sqrt{34}$

اگر $A(3, 8)$ و B نقطه‌ای روی محور طول‌ها به طول ۱- باشد، فاصله نقطه M وسط پاره‌خط AB از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{17}$
(۳) ۴ (۴) ۵

خط d و d' بر هم عمودند. خط d محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳ و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض $3\sqrt{3}$ قطع کرده است. اگر نقطه $(-\sqrt{3}, -3)$ روی خط d' قرار داشته باشد، عرض نقطه برخورد دو خط کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{3} - 2}{4}$ (۲) $\frac{3\sqrt{3} - 4}{4}$
(۳) $\frac{3\sqrt{3} - 6}{4}$ (۴) $\frac{3\sqrt{3} - 8}{4}$

۱۷ نقطه $O'(3, 2)$ مرکز لوزی ABCD است. اگر قطرهای لوزی به موازات محورهای مختصات و خط $6x + y = 8$ معادله یکی از اضلاع این لوزی باشد، محیط لوزی چقدر است؟

- (۱) $8\sqrt{37}$
 (۲) ۴۸
 (۳) $10\sqrt{34}$
 (۴) $4\sqrt{68}$

۱۸ دو انتهای یکی از قطرهای مستطیلی $A(1, 7)$ و $C(-4, 19)$ هستند. در صورتی که زاویه بین دو قطر مستطیل 30° باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

- (۱) $\frac{169}{4}$
 (۲) ۱۶۹
 (۳) $\frac{169\sqrt{3}}{4}$
 (۴) $\frac{169}{2}$

۱۹ رأس سهمی $y = -x^2 + 4x - 3$ و نقطه‌های برخورد این سهمی با محور x ها به ترتیب سه رأس A ، B و C از مثلث ABC را تشکیل می‌دهند. طول میانه CM کدام است؟ (نقطه B نسبت به نقطه C، به مبدأ نزدیک‌تر است)

- (۱) $\sqrt{10}$
 (۲) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
 (۳) $2\sqrt{10}$
 (۴) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

۲۰ اگر فاصله دو خط موازی $y = ax + b$ و $y = 3x + 1$ برابر با $\frac{\sqrt{10}}{2}$ باشد، کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) صفر
 (۲) -۱
 (۳) ۹
 (۴) -۹

میرموید

پستخبرگ تست

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

پس خیرگ تست

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

I ♥ MATH

ریاضی یازدهم

کتاب



نیم فصل دوم:

- معادله درجه دوم
- معادله های گویا و رادیکالی



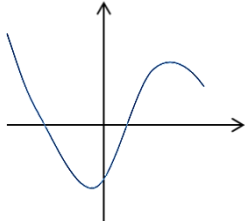
@XY_Riazi

دانلود از اپلیکیشن پادرس



معادله درجه دوم سه‌همی

نکته مهم: ریشه‌های یک معادله را صفرهای تابع می‌گویند. یعنی نقاطی که تابع (همان y) در آن صفر می‌شود یا همان نقاطی که نمودار تابع محور x ها را قطع می‌کند.



محل برخورد
با محور طول = صفرهای تابع را بدست آورید = معادله را حل کنید

نکته: هر معادله‌ای با هر درجه‌ای اگر مجموع ضرایب آن صفر شود حتماً یک ریشه آن یک است.

$$x^2 + 3x - 2 = 0 \quad 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

مثال: عبارت $y = x^2 + 4x - 5$ در چند نقطه محور x و در چند نقطه محور y ها را قطع می‌کند؟

جمع بندی کنکوری حل معادله درجه دوم ($ax^2 + bx + c = 0$):

۱- اگر $b=0$ نگاه از روش ریشه گیری استفاده می‌کنیم.

$$x^2 - 9 = 0 \quad 3x^2 - 6 = 0 \quad 2x^2 + 8 = 0$$

۲- اگر $c=0$ نگاه از روش فاکتور گیری استفاده می‌کنیم.

$$x^2 - 9x = 0 \quad 2x^2 - 3x = 0 \quad x^2 + 4x = 0$$

۳- اگر $a=1$ باشد تلاش می‌کنیم از روش تجزیه جمله مشترک حل کنیم.

$$x^2 - 2x - 48 = 0 \quad x^2 - x - 56 = 0 \quad x^2 + 4x - 32 = 0$$

۴- اگر رابطه بین a و b و c برقرار باشد.

(الف) اگر $a + c = b$ آنگاه ریشه‌ها $x = -1$ و $x = -\frac{c}{a}$

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$-x^2 + 4x + 5 = 0$$

(ب) اگر $a + c = -b$ یا همان $a + c + b = 0$ آنگاه ریشه‌ها $x = 1$ و $x = \frac{c}{a}$

$$7x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

۵- روش ده: اگر هیچکدام از روش‌های بالا جواب نداد ده اچار فرانس معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشد.

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$5x^2 - 2x - 5 = 0$$

شعر:

میتونم ده باشم، میون b^2 و $4ac$ همش منفی ندارم

زیرا در حال بزم

با منفی b و $2a$ ریشه بدم جواب درجه دو رو بدست بیارم

اگه من مثبت باشم جواب حل تو همش دو تا ست عزیزم

اگه من صفر باشم عشق فقط منفی b روی $2a$ تنها ست عزیزم

اگه من منفی باشم همه میگی ریشه نداره

عزیزم ده بودن سخته ولی بریدن محور x چه حالی داره

نکته ۳: تعداد ریشه های یک معادله درجه دو را براساس علامت ده (Δ) تعیین می کنند (به معادله دارم روزی ...)

اگر ده مثبت $(\Delta > 0)$ باشد مرغ معادله دو تا تخم می گذارد (دو ریشه دارد)

اگر ده صفر $(\Delta = 0)$ باشد مرغ معادله یک تخم دوزرده می گذارد (یک ریشه مضاعف $-\frac{b}{2a}$ دارد)

اگر ده کوچکتر از صفر $(\Delta < 0)$ باشد یعنی ده دم دارد و خروس ۱ بنابراین از تخم خبری نیست (ریشه ندارد)

نکته ۴: در صورتی که ac منفی باشد یعنی ضریب اول و اخر مختلف علامت باشند، در اینصورت حتما دو جواب داریم چون ده حتما مثبت است (اگر سر و ته معادله به هم نخوره مرغ معادله دو تخم میاره).

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m + 2 = 0$ فاقد ریشه حقیقی برای x می باشد؟ (تجربین خارج ۸۹)

$$-3 < m < 5 \quad (1)$$

$$-3 < m < 4 \quad (2)$$

$$-2 < m < 4 \quad (3)$$

$$-1 < m < 5 \quad (4)$$

روش مشکل گشای تجزیه عبارت های یک جمله مشترک (روش A)

برای تجزیه به روش اتحاد یک جمله مشترک بزرگترین توان باید خودش و ضریبش جزر داشته باشد. بعضی عبارت های درجه ۲، فقط شرط جزر دار بودن بزرگترین درجه را از نظر عددی ندارد. بنابراین به کمک عدد مشکل گش و بازرس گیری آن در مرحله آخر این مشکل را حل نموده و عبارت را تجزیه می کنیم.

هشدار: بیشترین اشتباه در عدد وسطی این روش می باشد باید آنها به صورت گترده یعنی ضرب یک عدد در جمله مشترک نله داشت.

مثال ۲: عبارت‌های زیر را تا حد امکان تجزیه نمایید.

$$x^2 + 3x - 18 =$$

$$5x^2 + 3x - 8 =$$

$$3x^5 + 2x^3 - 5x =$$

تعیین علامت‌ریشه‌ها

مثال ۳: اگر ضرب دو عدد مثبت باشد و جمع آنها منفی باشد، علامت آن دو عدد چگونه است؟

با توجه به علامت مجموع S و حاصلضرب ریشه‌ها P می‌توانیم علامت آنها را تعیین کنیم

علامت‌ریشه‌ها	ضرب (P)	جمع (S)
هر دو مثبت	مثبت	مثبت
بزرگتر مثبت و کوچکتر منفی	منفی	مثبت
جفت منفی	مثبت	منفی
بزرگتره منفی و کوچکتر مثبت	منفی	منفی

مثال ۴: اگر در معادله درجه دوم $3x^2 + 2x - 4 = 0$ جمع ریشه‌ها منفی و ضرب ریشه‌ها هم منفی باشد، در اینصورت

ریشه‌ها را تعیین علامت کنید.

مثال ۵: اگر در معادله درجه دوم $3x^2 - 2x + 4 = 0$ جمع ریشه‌ها از فرمول $\frac{-b}{a}$ و ضرب ریشه‌ها از فرمول $\frac{c}{a}$ بدست

بیاید، در اینصورت ریشه‌ها را تعیین علامت کنید.

روابط بین ریشه‌ها

اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، می‌توان مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها را بدون حل معادله درجه دوم سریع بدست آورد. (در اتحاد یک جمله مشترک داشتیم جمع غیر مشترک و ضرب غیر مشترک را باید حساب می‌کردیم)

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{مجموع ریشه‌ها: (علامت منفی فراموش نشود)}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad \text{حاصلضرب ریشه‌ها:}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad \text{تفاضل ریشه‌ها:}$$

دقت: وقتی جمع می‌شیم همش میله مویج ایم

وقتی ضرب و شتم می‌شیم همش میله روسی ایم

وقتی هم پول کم می‌اریم زیر را درکمال قایم میله ده‌ایم

نکته مهم: در این بخش وقتی S و P وقتی معنا دارد که معادله دو ریشه داشته باشد. بنابراین اول ده را بررسی کنیم.

مثال ۶: حاصل جمع و ضرب ریشه‌های معادله‌های زیر را بدست آورده و علامت ریشه‌های را بررسی کنید (کتاب

صفحه ۱۲ و ۱۶)

$$5x^2 + 3x - 8 = 0$$

$$5x^2 + 3x + 8 = 0$$

$$4x^3 + x^2 - 5x = 0$$

اعمال جبری روی ریشه‌ها

در بسیاری از موارد حاصل اعمال ریاضی روی ریشه‌ها خواسته میشود و نه خود ریشه‌ها. در این حالت با توجه به روابط اصلی بین ریشه‌ها (P و S)، عبارت را ساده کرده و با جاگذاری عدد حاصل را بدست می‌آوریم. این عبارت‌ها به روش حل میشوند:

مثال ۷: اگر $\alpha + \beta = S$ و $\alpha\beta = P$ باشد، آنگاه حاصل عبارت‌های زیر را بر حسب P و S بدست آورید.

$$(\alpha + \beta)^2 - \alpha^2\beta^2 =$$

$$\alpha^3\beta^2 - \alpha^2\beta^3 =$$

$$\alpha^2 + \beta^2 =$$

مثال ۸: اگر $\alpha + \beta = 4$ و $\alpha\beta = -2$ باشد، آنگاه حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

$$2(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha^2\beta^2 =$$

$$\alpha^3 + \beta^3 =$$

اولی - برای عبارت‌های متقارن (رفیق گرمابه و گلستان):

در این عبارت‌ها اگر جای ریشه‌ها (α و β) را عوض کنیم پاسخ و همچنین فرم معادله از نظر ریاضی تغییر نمی‌کند (هر بلایی سر α رفته سر β هم اومده). در چنین حالتی با استفاده از اتحادها، تجزیه و روش‌های گسترده سازی باید کل عبارت را به صورت مجموع یا حاصلضرب ریشه‌ها در آوریم و سپس آنها را جاگذاری کنیم.

$$\alpha^2 + \beta^2 =$$

$$\alpha^3 + \beta^3 =$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} =$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} =$$

نکته ۹: در رابطه‌های متقارن آنها را به توان رسانده و در شکل می‌گیریم.

مثال ۱۰: در معادله $4x^2 + 3x - 3 = 0$ مقادیر زیر را بدست آورید.

الف) مربع مجموع ریشه ها

ب) مجموع مربع ریشه ها

مثال ۱۱: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 + 7x - 4 = 0$ باشند، مقدار عددی عبارت های زیر را بدست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} =$$

$$\frac{\alpha}{\beta - 1} + \frac{\beta}{\alpha - 1} =$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} =$$

تست ۲: اگر α و β ریشه های معادله $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\sqrt{\frac{1}{\beta}} + \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ چقدر است؟ (ریاضی ۸۵)

۳ (۲)

۲ (۱)

۶ (۴)

۴ (۳)

میرمویک

دومی - برای عبارت های نامتقارن (رفیق دزد و شریک قافله):

وقتی با تغییر جای دو ریشه عبارت دچار تغییر بنیادی بشود در اینصورت به آن نامتقارن میگویند و باید از خود معادله در حل آن استفاده کرد. یعنی جاگذاری هر کدام از آن ریشه ها یقیناً عبارت را صفر میکند و میتوان بخشی از عبارت را با جاگذاری α و β بدست آورد. در چنین مواردی یقیناً بخشی از معادله را میتوان داخل سوال یافت.

مثال ۱۲: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند، مقدار عددی عبارت های زیر را بدست آورید.

$$\alpha^x - v\alpha + 4 =$$

$$\alpha^x - v\alpha =$$

$$\beta^x \alpha^x - v\alpha^x \beta^x =$$

نکته ۶: از حالت دوم وقتی استفاده می شود که پس از تجزیه و ساده کردن کل یا بخشی از عبارت بر حسب یکی از ریشه های α یا β باشد.

تست ۳: در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است m کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)



میر مویک

نوشتن معادله بلا داشتن ریشه‌ها، مجموع آنها و حاصل ضرب آنها

تا الان معادله داده میشد و ریشه یا حاصل رابطه بین ریشه‌ها خواسته میشد. حالا برعکس ریشه‌ها یا رابطه ریشه‌ها داده میشد و خود معادله یا معادله جدیدی خواسته می‌شود.

$x^2 - Sx + P = 0$	اگر ریشه‌ها گنگ بود
$a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$	اگر ریشه‌ها گویا بود

مثال ۱۳: معادله درجه دومی بنویسید که ۲ و -۳ ریشه‌های آن باشند.

مثال ۱۴: دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها $-\frac{1}{5}$ و حاصل ضربشان -7 باشد. (کتاب صفحه ۱۳)

مثال ۱۵: این مستطیل با محیط ۱۱ و مساحت ۶ وجود دارد؟ ابعاد آن چقدر است؟ (کتاب صفحه ۱۳)

مثال ۱۶: معادله درجه دومی بنویسید که $2 - \sqrt{5}$ و $2 + \sqrt{5}$ ریشه‌های آن باشند.

مثال ۱۷: معادله درجه دومی بنویسید که $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ و $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ ریشه‌های آن باشند. (کتاب صفحه ۱۳)

مثال ۱۸: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 7x - 18 = 0$ باشند معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های وارون این معادله داشته باشند.

مثال ۱۹: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 + 3x - 3 = 0$ باشند معادله ای بنویسید که ریشه های آن جز این معادله باشند.

مثال ۲۰: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 + 3x - 3 = 0$ باشند به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب های معادله $x^2 - kx + 25 = 0$ مربع ریشه های معادله اول است.

تست ۴: اگر α و β ریشه های معادله $x(5x + 3) = 2$ باشند به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب های معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت $\{\frac{1}{\beta^2}$ و $\frac{1}{\alpha^2}\}$ است؟ (ریاضی ۹۰)

۲۷ (۱) ۲۸ (۲)

۲۹ (۳) ۳۱ (۴)

هشدار: در تست های پارامتری رابطه بین ریشه ها را بر اساس α و β حتما پس از چک کردن مثبت بودن

دلتا جواب را بیابید

تست ۵: به ازای کدام مقدار m ریشه های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$ معلوس یکدیگرند؟ (تجربی خارج ۹۰)

-۲ (۱) -۱ (۲)

۱ (۳) ۲ (۴)

تست ۶: به ازای کدام مقدار m مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله $mx^2 - (m + 3)x + 5 = 0$ برابر با ۶ می شود؟ (تجربی ۹۳)

۱ (۲) $-\frac{9}{5}$ (۱)

$-\frac{9}{5}$ و ۱ (۳) $-\frac{9}{5}$ (۴)

تست ۷: به ازای کدام مقدار m مجموع جذر ریشه های حقیقی معادله $\frac{1}{8} = (m+1)x - 2x^2$ برابر با ۲ می شود؟ (ریاضی ۹۶)

- ۳ (۱) ۴ (۲)
۵ (۳) ۶ (۴)

تست ۸: به ازای کدام مقدار m هر یک از ریشه های معادله $8x^2 - mx - 8 = 0$ برابر با توان سوم ریشه های معادله $2x^2 - x - 2 = 0$ می شود؟ (ریاضی خارج ۹۶)

- ۹ (۱) ۱۱ (۲)
۱۳ (۳) ۱۵ (۴)

حل معادله های درجه دوم با برچسب t

برخی از معادله های درجه بالا در درون خود یک معادله درجه دوم دارند که با پیدا کردن داخلشان (تغییر متغیر) میتوانیم آنها را به معادله درجه دوم تبدیل نماییم. در پایان هم جواب را به جای متغیر خودمان برمیگردانیم، تا ریشه اصلی بدست بیاید.

مثال ۹: در معادله $5 \square - 20 = 0$

الف) مقدار \square را بیابید.

ب) اگر در معادله به جای \square مقدار x^2 قرار گیرد، مقدار x چقدر است؟

مثال ۱۰: در معادله $\square^2 - 4\square - 5 = 0$

الف) مقدار \square را بیابید.

ب) اگر در معادله به جای \square مقدار x^2 قرار گیرد، مقدار x چقدر است؟

پ) اگر در معادله به جای \square مقدار \sqrt{x} قرار گیرد، مقدار x چقدر است؟

نکته ۲۸: ویژگی معادله درجه دو اینست که بزرگترین درجه آن زوج و درجه بعدی نصف بزرگترین درجه است و آخری هم درجه ندارد (سریز صفر). پس معادلات درجه بالا سه تنه‌ای با این ویژگی‌ها به این روش شک می‌کنیم.

مثال ۲: معادلات زیر را حل نمایید (کتاب صفحه ۱۱ و ۱۷).

$$4x^7 + 1 = 5x^3$$

$$3x^4 - 7x^2 + 4 = 0$$

$$2x^{10} - 5x^6 = -3$$

$$(3x^2 - 1)^2 - 13(3x^2 - 1) + 22 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 8 = 0$$

$$\frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 5} + \frac{x^2 + 5}{x^2 + 3x - 1} = 2$$

میرمویک

بررسی ریشه‌های معادله با برچسب بدون حل آنها

با توجه به نوع تغییر متغیر انجام شده و ریشه‌های معادله می‌توان در مورد تعداد ریشه‌ها اظهار نظر کرد و یا اینکه حدود پارامترهای معادله درجه دوم خواسته شده را بدست آورد.

نکته: در ابتدا حتما باید ده بررسی شود اما در حالتی که $p < 0$ باشد یعنی ضرب ریشه‌ها منفی باشد نیاز به معاینه ده نیست و معادله حتما دو جواب دارد چون باعث میشود ده مثبت باشد (سروته معادله به هم نمی‌خوره)

مثال ۲۲: در معادله $\square^2 - 4\square - 5 = 0$

الف) تعداد جواب‌های \square را بیابید.

ب) اگر در معادله به جای \square مقدار x^2 قرار گیرد، تعداد جواب‌های x چندتا است؟

پ) اگر در معادله به جای \square مقدار \sqrt{x} قرار گیرد، تعداد جواب‌های x چندتا است؟

ت) اگر در معادله به جای \square مقدار $|x|$ قرار گیرد، تعداد جواب‌های x چندتا است؟

مثال ۲۳: تعداد ریشه‌های معادلات زیر را بدست آورید.

$$3x^4 - 7x^2 + 4 = 0$$

$$x^4 + 7x^2 + 4 = 0$$

بحث چند معادله هم پرچسبے

۱- برابری درجه زوج

در صورتی که عبارتی با شرایط معادله مبدل بینیم که درجه های x زوج و نصف باشند. یقیناً x وسطی قابل بر حسب زنی است.

تست ۱۱: تعداد ریشه های حقیقی متمایز معادله $x^2 + 4x + 5 = (x^2 + 4x + 3)^2$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

تست ۱۲: به ازای کدام مجموعه مقادیر m از معادله $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ چهار جواب متمایز برای x حاصل می شود؟ (تجربی خارج ۸۵)

$m > 4$ (۲)

$m < -4$ (۱)

$4 < m < 9$ (۴)

$-4 < m < 4$ (۳)

۲- گریه قدر مطلق در صورتی که عبارتی با شرایط معادله مبدل بینیم که درجه های x اولی توانش دو و بی قدر مطلق و وسطی داخل قدر مطلق باشد، یقیناً x وسطی داخل قدر مطلق لباس مبدل پوشیده است.

مثال ۲۴: جواب های معادله $x^2 - 4|x| = 5$ بدست آورید؟

میرموید

مثال ۲۵: به ازای چه مقادیری از a معادله $x^2 - 4|x| = a$ چهار ریشه متمایز دارد؟

۳- کریم رادیکالی

در صورتی که عبارت x با شرایط معادله مبدل بینیم که درجه های x اولی توانش زوج و بی رادیکال یا با رادیکال و وسطی داخل رادیکال باشد، یقیناً x وسطی داخل رادیکال لباس مبدل پوشیده است.

تست ۳: به ازای کدام مجموعه مقادیر m از معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ دو جواب متمایز برای x حاصل می شود؟ (تجربی خارج ۸۸)

$$m < 2 \quad (2)$$

$$m \geq 1 \quad (1)$$

$$(4) \text{ هیچ مقدار}$$

$$1 \leq m < 2 \quad (3)$$



میرموید

نمودار تابع درجه دوم (سهه)

در سال قبل با نحوه نمایش معادله درجه دوم به صورت سهمی قائم روی محور مختصات آشنا شدیم و در قسمت های مختلف شکل آنرا رسم نمودیم یا معادله آنرا نوشتیم

سهه خندان سهه گریان

باید بدانیم شکل تریسمی یک عبارت درجه دوم $(y = ax^2 + bx + c)$ به صورت سهمی می باشد.

نکته ۹: برای بدست آوردن عرض مختصات سهمی میتوان طول $(-\frac{b}{2a})$ را در معادله سهمی جاگذاری کرد و جواب حاصل را عرض راس سهمی قرار داد.

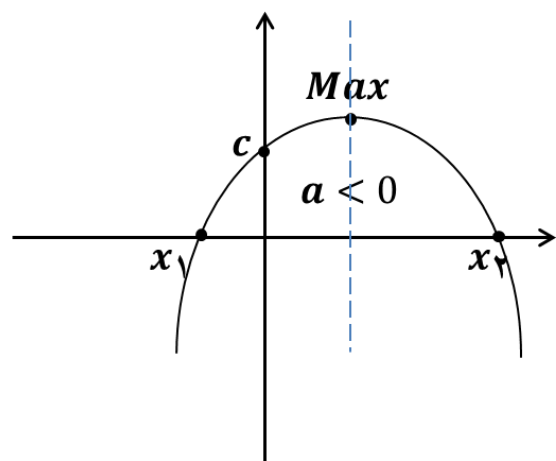
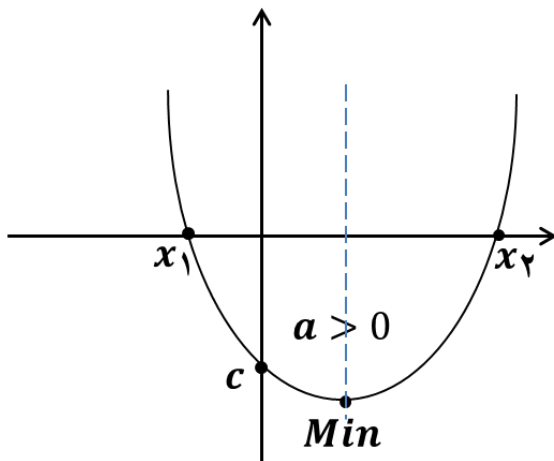
$$S = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) \rightarrow \text{مختصات راس}$$

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, \text{جاگذاری} -\frac{b}{2a} \text{ معادله درجه دو} \right) \rightarrow \text{مختصات راس}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \rightarrow \text{معادله محور تقارن}$$

نکته ۱۰: اگر سهمی رو به بالا باشد $(a > 0)$ آنگاه عرض سهمی مینیمم سهمی خواهد بود (یعنی از آن پایین تر نقطه ای وجود ندارد) و اگر سهمی رو به پایین باشد $(a < 0)$ آنگاه عرض سهمی ماکزیمم سهمی خواهد بود (یعنی از آن بالا تر نقطه ای وجود ندارد).

نکته ۱۱: ریشه های یک معادله درجه دوم نقاطی هستند که سهمی محور طول ها را قطع میکند.



مثال ۲۶: ماکزیمم تابع $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ را بیابید. (کتاب صفحه ۱۴)

کلید مینیمم و ماکزیمم

در مساله هایی که حداقل یا حداکثر عبارتی خواسته می شود، در صورتی که پس از تبدیل عبارت کلامی به معادله با یک مجهول به عبارتی درجه دوم رسیدیم، می توانیم از محاسبه عرض مینیمم یا ماکزیمم استفاده کنیم.

نکته تستی ۱۱: هرگاه مجموع دو عبارت مقدار ثابتی باشد، حاصل ضرب آنها هنگامی حداکثر است که دو عبارت برابر باشند.

مثال ۲۷: یک ماهی گیر می خواهد در کنار رودخانه منطقه ای متطیل را تور نصب کند. او تنها ۱۰۰ متر تور در اختیار دارد. ابعاد متطیل را طوری تعیین کنید بیشترین مساحت را داشته باشد. (کتاب صفحه ۱۵)

تست ۱۴: بیشترین مساحت زمینی که می توان با یک طناب به طول ۸۸ متر و شکل متطیل محصور نمود، چند متر مربع است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

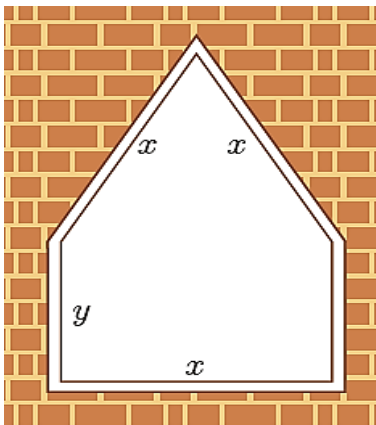
۹۸۸ (۴)

۹۷۸ (۳)

۹۶۸ (۲)

۹۵۸ (۱)

مثال ۲۸: یک پنجره به شکل متطیل است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴ متر باشد، ابعاد متطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد. (کتاب صفحه ۱۴)



مثال ۲۹: فرض کنیم فوتبالیستی توپی را با زاویه ۴۵ درجه نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیه ۲۰ متر بر ثانیه شوت کند. معادله مسیر حرکت این توپ، یک تابع درجه دو با ضابطه $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$ است که نمودار آن مانند شکل مقابل است. در این رابطه x مسافت افقی طی شده و y ارتفاع توپ از سطح زمین است. (کتاب صفحه ۱۵)

الف) حداکثر ارتفاع توپ را به دست آورید.

ب) به نظر شما حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟

مثال ۳۰: راکتی که به طور عمودی رو به بالا شلیک شده t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می گیرد که معادله آن به صورت مقابل است (کتاب صفحه ۱۸):

$$f(t) = -5t^2 + 100t$$

الف) چقدر طول می کشد تا راکت به بالا ترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع نقطه اوج را بیابید.

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین باز می گردد؟

میر مویلد

مثال ۳۱: استادیوم به شکل متطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد متطیل را طوری بیابید که (کتاب صفحه ۱۸):

الف) مساحت متطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

نکته ۱۳: در معادلات سهمی به شکل $f(x) = \pm a(bx \pm c)^2 + d$ مقدار ریشه داخل پراشتر توان دو طول راس سهمی است.

مثال ۳۲: مختصات مینی مم یا ماکزیمم (راس) تابع زیر را بدست آورید. (کتاب صفحه ۱۵)

$$f(x) = -(x + 2)^2 + 3$$

رسم سهمی ها

حالت اول: رسم تقریبی با داشتن مختصات راس و جهت سهمی

ابتدا سهمی رو به بالا ($a > 0$) و سهمی رو به پایین ($a < 0$) را مشخص میکنیم و با بدست آوردن مختصات نقطه راس سهمی، آن را در آن نقطه تعیین شده قرار میدهیم.

حالت دوم: رسم پنج نقطه ای یا سه نقطه ای

جدول زیر را کامل می کنیم سپس با نقطه یابی روی محورهای مختصات آنرا رسم می نماییم

x	عدد کوچکتر	عدد کوچکتر	$-\frac{b}{2a}$	عدد بزرگتر	عدد بزرگتر
y					
(x, y)					

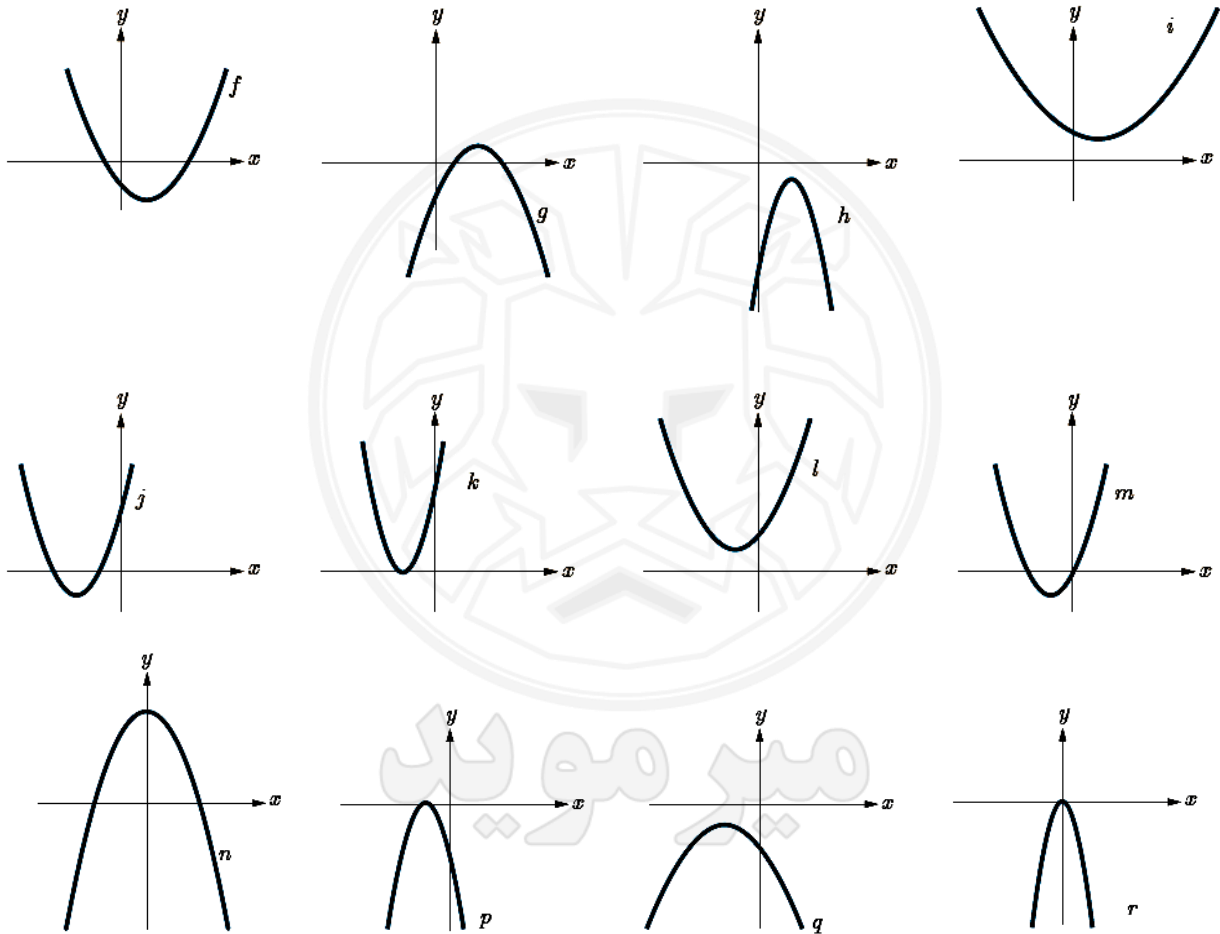
مثال ۳۳: تابع $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ را رسم کنید.

شناخت نمودار سهمی

برای تعیین علامت پارامترهای سهمی داریم:

$$y = ax^2 + bx + c$$

مثال ۳۴: با توجه به شکل های زیر در مورد حدود علامت ضرایب معادله سهمی را تعیین کنید. (کتاب صفحه ۱۷)



تعیین پارامترهای عبارات درجه دوم

در این بخش تابع $ax^2 + bx + c = 0$ داده می شود و همه یا تعدادی از پارامترهای آن خواسته می شود و یا بازه مورد نظر را می خواهد. در بعضی موارد هم شکلی داده می شود و پارامترهای نامشخص تابع یا حدود آنها خواسته می شوند. در چنین شرایطی موارد زیر میتوانند کمک کنند:

۱- در سهمی رو به بالا (خندان) $a > 0$ و در سهمی رو به پایین (گزیان) $a < 0$ است.

۲- در تابع درجه دو c عرض از مبدا یعنی محلی که محور عرض ها را قطع میکند می باشد.

۳- در سهمی برای محاسبه b میتوانیم از طول راس یعنی $-\frac{b}{2a}$ استفاده کنیم.

تذکر: علامت b از علامت شیب خط مماس در نقطه عرض از مبدا هم میتواند بدست بیاید. یعنی شیب مثبت b مثبت و برعکس شیب منفی b منفی.

۴- با توجه به تعداد نقاطی که سهمی محور x ها را قطع میکند (ریشه های معادله درجه دوم) میتوانیم حدود ده را بدست بیاوریم. (بدون قطع ده کوچکتر از صفر، مماس ده صفر، دو نقطه قطع ده مثبت)

۵- با استفاده از علامت ریشه ها میتوان از S و P هم استفاده کرد.

۶- جاگذاری نقاط داده شده هم که از بدیهی ترین کارها می باشد.

۷- طول راس همیشه وسط طول ریشه ها و ریشه ها در دو طرف محور تقارن و راس

روش تعیین ضابطه سهمی:

در هر شکل داده شده دو حالت زیر به وجود می آید:

روش پراش ریشه های α و β

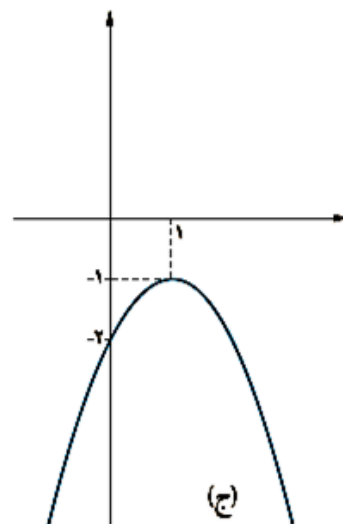
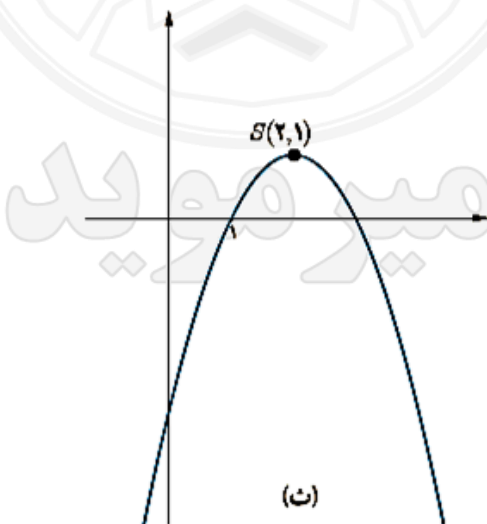
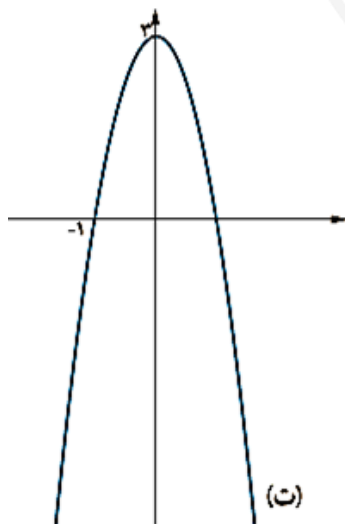
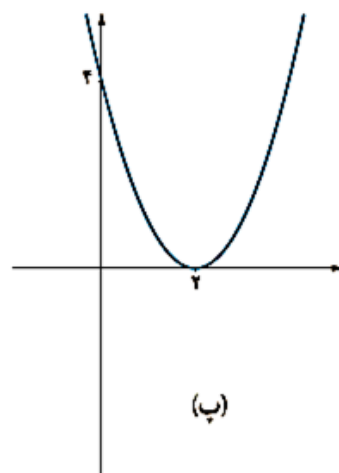
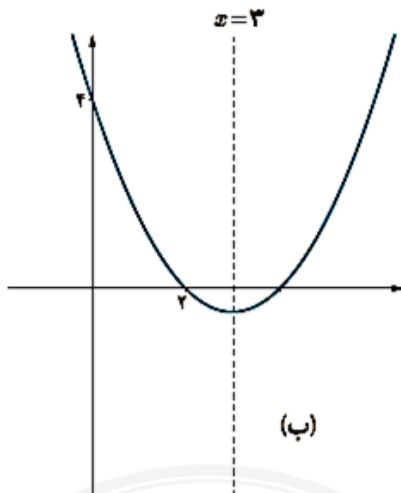
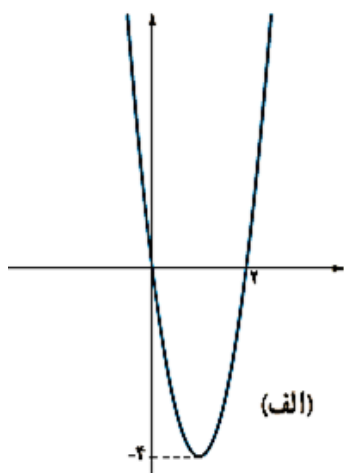
$$a(x - \alpha)(x - \beta) = \square$$

(وقتی ریشه روی شکل تعیین شده یا قابل تعیین باشد)

$$ax^2 + bx + c = \square$$

روش جاگذاری حداقل سه نقطه

مثال ۳۵: با توجه به شکل های زیر معادله سهمی را بنویسید. (کتاب صفحه ۱۸)



تست ۱۵: اگر منحنی به معادله $f(x) = 2x^2 - 4x + m - 3$ محور طول ها را در دو نقطه با طول های مثبت قطع کند.

آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ (ریاضی داخل ۸۷)

(۱) $m \geq 3$ (۲) $3 \leq m < 4$

(۳) $3 < m < 5$ (۴) $4 < m < 5$

تست ۱۶: اگر منحنی به معادله $f(x) = (a-1)x^2 - 2\sqrt{2}x + a$ بالای محور طول ها باشد، آنگاه مجموعه مقادیر a به

کدام صورت است؟ (ریاضی خارج ۱۸۹)

(۱) $a < -1$ (۲) $a > 1$

(۳) $a > 2$ (۴) $1 < a < 2$

تست ۱۷: اگر منحنی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور طول ها را در نقطه ای به طول یک و محور عرض ها را در

نقطه ای به عرض -6 قطع کرده باشد و از نقطه $(-2, -6)$ بگذرد، آنگاه $f(-1)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۱۸۹)

(۱) -8 (۲) -7

(۳) -5 (۴) -4

تست ۱۸: اگر منحنی به معادله $f(x) = (a-3)x^2 - ax - 1$ از ناحیه اول محور های مختصات بگذرد، آنگاه مجموعه

مقادیر a به کدام صورت است؟ (ریاضی خارج ۱۸۹)

(۱) $a \leq +2$ (۲) $0 < a \leq 2$

(۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$

تست ۱۹: اگر منحنی به معادله $f(x) = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور طول ها را در دو طرف مبدا مختصات قطع نماید.

آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

(۱) $m < -2, m > +1$ (۲) $-2 < m \leq 1$

(۳) $m < -2$ فقط (۴) $m > +1$ فقط

تست ۲۰: منحنی به معادله $f(x) = (1-a)x^2 - 2\sqrt{6}x - a$ همواره بالای محور طول ها است، آنگاه مجموعه مقادیر a

به کدام صورت است؟ (ریاضی خارج ۹۶)

(۱) $a \leq +1$ (۲) $a \leq -2$

(۳) $3 < a$ (۴) $-2 < a < 1$

تست ۲: اگر منحنی به معادله $f(x) = x^2 - 2(a-2)x - a + 14$ دارای دو ریشه مثبت باشد، آنگاه مجموعه مقادیر a به کدام صورت است؟ (ریاضی داخل ۹۶)

$$-2 < a < 2 \quad (1)$$

$$2 < a < 5 \quad (2)$$

$$5 < a < 14 \quad (4)$$

$$2 < a < 14 \quad (3)$$



میر مویک

معادله‌های گویا (سواره نظام)

متطیل طلایی

متطیل طلایی، متطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول متطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض متطیل به ترتیب x و y باشند، داشته باشیم:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

نسبت طول به عرض این متطیل را نسبت طلایی می‌گویند.

مثال ۳۶: عرض متطیل را یک در نظر می‌گیریم. مقدار نسبت طلایی را محاسبه کنید (کتاب صفحه ۱۹):

معادله کسری:

معادله‌هایی که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای باشند را معادلات گویا می‌گویند. چند جمله‌ای یعنی مثلاً متغیر زیر رادیکال یا داخل قدر مطلق نداشته باشیم.

برای حل این نوع معادلات ابتدا باید با ضرب عبارت در $m \cdot m$ مخرج را از بین ببریم (تبدیل سواره نظام به پیاده نظام) و سپس معادله یک خطی بدست آمده را حل نماییم. در پایان باید جواب‌هایی را بپذیریم که مخرج کسر را صفر نکنند.

یادآوری ک.م.م: برای محاسبه $m \cdot m$ طمحه‌کسری از تجزیه کامل مخرج از هر کدام غیر مشترک و مشترک با توان بیشتر را برای خودمان بر می‌داریم.

مثال ۳۷: معادله‌های زیر را حل نمایید. (کتاب صفحه ۲۰ و ۲۱)

$$\frac{2x-1}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x}$$

$$\frac{3}{x^2} - 12 = 0$$

$$\frac{2}{k} + \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2+2k}$$

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$$

$$\frac{x-1}{x-2} + \frac{1+x}{x} = \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} \quad \frac{1}{2x^2-x+1} + \frac{3}{2x^2-x+3} = \frac{10}{2x^2-x+7}$$

میرمویک

نکته ۱۴: در معادله‌هایی که هر طرف موی فقط یک کسره است (یا قابل تبدیل به یک کسره است) می‌توانیم از خاصیت طرفین وسطین استفاده کنیم.

$$\frac{1}{x} + 1 = x$$

مسائل معادله‌های گویا

در بعضی مسائل پس از تبدیل مسئله به عبارت جبری به یک معادله گویا می‌رسیم. مخصوصاً مسائل مربوط به همکاری و عدم همکاری کارگر در کاری.

مثال ۳۸: دیر ریاضی آزمون هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می‌کند. پس از ۵ هفته، آزمون جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود. او از هفته ششم به بعد در تمام آزمون‌ها امتیاز ۹ را کسب کرد؛ به طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌ها شش برابر ۸ شد. تعیین کنید از هفته ششم به بعد، آزمون در چند آزمون متوالی نمره ۹ گرفته است. (کتاب صفحه ۲۱)

مثال ۳۹: خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی امام خمینی متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت ۷ کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت متوسط قطار ۱۰ کیلومتر بر ساعت کاسته شود، زمان برگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب است محاسبه طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار. (کتاب صفحه ۲۰)

الف) رابطه زمان رفت بر حسب v را بدست آورید.

ب) عبارت v بر حسب v بنویسید که زمان برگشت را نشان دهد.

پ) سرعت قطار در مسیر رفت را بیابید و به کمک آن زمان رفت و زمان برگشت قطار را بدست آورید.

مثال ۴۰: اگر دو ماشین چمن زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کاری آن‌ها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آن‌ها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟ (کتاب صفحه ۲۱)

مثال ۴۱: ۳ کارگر کاری را در ۸ روز انجام می‌دهند ۶ کارگر همان کار را در چند روز انجام می‌دهند؟

مثال ۴۲: ۵ اتفر کاری را در ۱۰ روز انجام می دهند. اگر پس از ۲ روز از انجام کار ۳ نفر سر کار حاضر نشوند بقیه کار چند روزه تمام میشود؟ کل کار در چند روز به اتمام می رسد؟

مثال ۴۳: در یک مزرعه دو کارگر با هم نشکاری را در ۱۸ روز تمام می کنند. چنانچه هر یک به تنهایی کار کنند، کارگر اول کار را در ۱۵ روز زودتر از کارگر دومی تمام میکنند. هر کدام از این کارگرها به تنهایی کار را در چند روز تمام می کنند؟

مثال ۴۴: علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه ای مشترک می کنند. پس از حروف چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدوداً ۲۰ دقیقه به طول می انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟ (کتاب صفحه ۲۳)

تست ۲۲: ۱۱ کیلو رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلو رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده اند. با تبخیر چند کیلو رنگ از آن، غلظت محلول ۵۰ درصد می رسد؟ (داخل ۹۲)

۰/۵ (۲)

۰/۴ (۱)

۰/۸ (۴)

۰/۶ (۳)

معادله گنگ

معادله هایی که در آنها مجهول زیر رادیکال باشد را معادله گنگ می گوئیم. برای حل معادلات گنگ باید آنها را به توان رساند تا جایی که همه رادیکال ها از بین بروند. ولی پیش از توان رساندن بهتر است رادیکال یکطرف و بقیه عبارت سمت دیگر باشد.

در پایان باید جواب های قبول شوند که زیر رادیکال فرجه زوج را منفی نکنند. (اداره ضد جاسوسی)

مثال ۴۵: معادله های گنگ زیر را حل نمایید (کتاب صفحه ۲۳)

$$x - \sqrt{x} = 20$$

$$2\sqrt{2t-1} - t = 1$$

$$2x = 1 - \sqrt{2-x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$$

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{3x+7} = 3$$

$$2x - x^2 = \sqrt{6x^2 - 12x + 7}$$

میر مویک

$$\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}$$

$$\sqrt{t} + 2 = 0$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+1} = 0$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-3} = 0$$

مثال ۴۸: الف) عدد صحیح بیاید که تفاضل آن از جزرش برابر نصف آن عدد باشد. مثله چند جواب دارد؟

ب) عدد صحیح بیاید که تفاضل جزرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مثله چند جواب دارد؟ (کتاب صفحه ۲۴)



میر هوید

ساخت معادله از روابط نمودارها

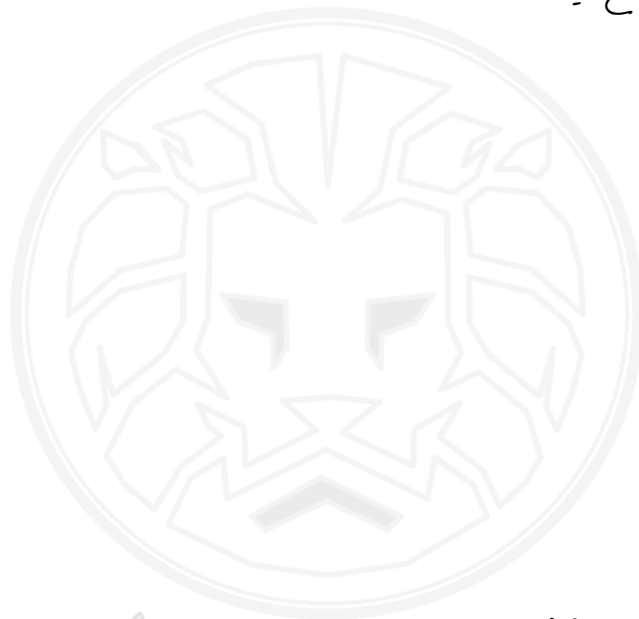
۱- محل تلاقی دو نمودار:

در بعضی از سوالات محل تلاقی دو نمودار را می‌خواهد یعنی دو معادله را مابین هم قرار دهیم و ریشه حاصل را بدست آوریم

اگر دو ریشه قابل قبول داشته یعنی دو نقطه برخورد دارند

اگر یک ریشه داشته یعنی یک نقطه برخورد دارند

اگر ریشه نداشته یعنی یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



۲- دو معادله بر هم مماس باشند:

در صورتی که حاصل برخورد دو معادله ریشه مضاعف داشته باشد، حتما در آن نقطه نمودارها بر هم مماس می‌شوند.



میر مویک



میر مویذ

تست های بخش هندسه تحلیلی

فصل اول - درس اول

۱ اگر دو خط به معادله های $(m+2)y = x+3$ و $y = (2m+1)x+1$ بر هم عمود باشند، m کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
 (۲) $-\frac{2}{3}$
 (۳) -1
 (۴) 1

۲ اگر نقاط $A(0,1)$ ، $B(1,4)$ و $C(3,0)$ رئوس مثلث ABC باشند، با مشخص کردن طول اضلاع، نوع این مثلث کدام است؟

- (۱) قائم الزاویه متساوی الساقین
 (۲) متساوی الاضلاع
 (۳) متساوی الساقین با یک زاویه منفرجه
 (۴) قائم الزاویه با یک زاویه 30°

۳ مثلث ABC با رئوس $A(2,8)$ ، $B(4,0)$ و $C(8,10)$ را در نظر بگیرید. اندازه میانه BM کدام است؟

- (۱) $\sqrt{12}$
 (۲) $\sqrt{41}$
 (۳) 10
 (۴) 5

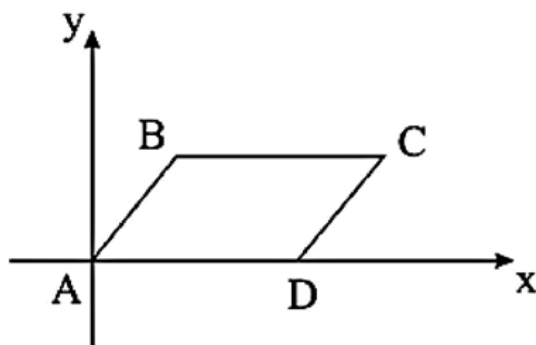
۴ فاصله دو خط $y = 2x + 11$ و $y = 2x - 4$ از یکدیگر چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

- (۱) 1
 (۲) 2
 (۳) 3
 (۴) 4

۵ اگر فاصله نقطه $A(2,3)$ از خط $mx + 2y = 1$ برابر 2 باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{20}$
 (۲) $-\frac{11}{20}$
 (۳) $\frac{9}{20}$
 (۴) $-\frac{9}{20}$

۶ در شکل زیر، چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است. اگر اندازه ضلع BC برابر 5 باشد و معادله خطی که ضلع AB روی آن قرار دارد، $y - 2x = 0$ باشد و معادله خطی که ضلع CD روی آن قرار دارد $ay + bx + 5 = 0$ باشد، آنگاه $a + b$ برابر کدام گزینه است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{3}{2}$
 (۳) -1
 (۴) $-\frac{1}{2}$

۷ مثلث ABC که مختصات رأس های آن $A(3,5)$ ، $B(3,-1)$ و $C(7,2)$ است، چگونه است؟

- (۱) متساوی الساقین
 (۲) متساوی الاضلاع
 (۳) مختلف الاضلاع
 (۴) قائم الزاویه

سه نقطه $(0, 2)$ و $(4, 0)$ و مبدأ مختصات رأس‌های یک مثلث هستند. ارتفاع و میانه وارد بر بزرگترین ضلع این مثلث، آن را به ترتیب در H و M قطع کرده است. طول MH چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

- (۱) $0/8$ (۲) $0/6$
(۳) $0/4$ (۴) $0/2$

نقاط $A(2, 3)$ ، $B(-1, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن کدام است؟

- (۱) $(4, 2)$ (۲) $(4, 1)$
(۳) $(3, 1)$ (۴) $(3, 0)$

نقاط $A(1, 4)$ ، $B(5, -2)$ و $C(0, 6)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم متوازی‌الاضلاع کدام است؟

- (۱) $(-4, 12)$ (۲) $(-4, 10)$
(۳) $(-3, 2)$ (۴) $(-3, 6)$

خط $6x - 8y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. اندازه شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۴ (۴) ۹

اگر خطوط $y = 2x + 3$ و $2y + x - 6 = 0$ معادله دو ضلع یک مستطیل و نقطه $A(1, 1)$ یکی از رئوس آن باشد، مساحت این مستطیل چقدر است؟

- (۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{7}{5}$
(۳) $\frac{12}{5}$ (۴) $\frac{14}{5}$

فاصله نقطه $A(-2m + 1, 3m - 9)$ از دو محور مختصات به یک اندازه است. در این صورت OA برابر است با:

- (۱) ۳ یا ۵ (۲) $5\sqrt{2}$ یا $15\sqrt{2}$
(۳) $15\sqrt{2}$ یا $3\sqrt{2}$ (۴) ۲ یا ۸

مثلث ABC با رئوس $A(-1, 2)$ ، $B(3, 2m + 1)$ و $C(-2, -2)$ در رأس A قائمه است. طول ارتفاع AH کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ (۲) $\frac{17}{6}$
(۳) $\frac{\sqrt{34}}{2}$ (۴) $\sqrt{34}$

اگر $A(3, 8)$ و B نقطه‌ای روی محور طول‌ها به طول -1 باشد، فاصله نقطه M وسط پاره‌خط AB از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{17}$
(۳) ۴ (۴) ۵

خط d و d' بر هم عمودند. خط d محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳ و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض $3\sqrt{3}$ قطع کرده است. اگر نقطه $(-\sqrt{3}, -3)$ روی خط d' قرار داشته باشد، عرض نقطه برخورد دو خط کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{3} - 2}{4}$ (۲) $\frac{3\sqrt{3} - 4}{4}$
(۳) $\frac{3\sqrt{3} - 6}{4}$ (۴) $\frac{3\sqrt{3} - 8}{4}$

۱۷

نقطه $O'(3, 2)$ مرکز لوزی ABCD است. اگر قطرهای لوزی به موازات محورهای مختصات و خط $6x + y = 8$ معادله یکی از اضلاع این لوزی باشد، محیط لوزی چقدر است؟

- (۱) $8\sqrt{37}$
 (۲) ۴۸
 (۳) $10\sqrt{34}$
 (۴) $4\sqrt{68}$

۱۸

دو انتهای یکی از قطرهای مستطیلی $A(1, 7)$ و $C(-4, 19)$ هستند. در صورتی که زاویه بین دو قطر مستطیل 30° باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

- (۱) $\frac{169}{4}$
 (۲) ۱۶۹
 (۳) $\frac{169\sqrt{3}}{4}$
 (۴) $\frac{169}{2}$

۱۹

رأس سهمی $y = -x^2 + 4x - 3$ و نقطه‌های برخورد این سهمی با محور x ها به ترتیب سه رأس A ، B و C از مثلث ABC را تشکیل می‌دهند. طول میانه CM کدام است؟ (نقطه B نسبت به نقطه C ، به مبدأ نزدیک‌تر است)

- (۱) $\sqrt{10}$
 (۲) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
 (۳) $2\sqrt{10}$
 (۴) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

۲۰

اگر فاصله دو خط موازی $y = ax + b$ و $y = 3x + 1$ برابر با $\frac{\sqrt{10}}{2}$ باشد، کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) صفر
 (۲) -۱
 (۳) ۹
 (۴) -۹

میر مویک

پس خیرگ تست

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

پس خیرگ تست

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴