درسنامه های آموزش ریاضی

ویژه کنکور تجربی

(دهم ،یازدهم،دوازدهم و جامع)

مولف : رحیم قهرمان

۰۹۱۲ ۰۷۲ ۶۴۴۰

کانال ریاضی اندیشه قهرمان:

@andishe_gh

اینستاگرام:

rahim.ghahreman

فعالیت های اینجانب در زمینه های تالیف کتاب های آموزشی:

۱) مولف کتاب تست میکرو طبقه بندی حساب دیفرانسیل گاج (چاپ ۹۰)

۲) مولف کتاب تست میکرو طبقه بندی حسابان گاج

۳) مولف کتاب ریاضیات ۳ تجربی مبتکران

۴) مولف کتاب ریاضیات ۲ دوم دبیرستان مبتکران

۵) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته ریاضی جلد (۱) دیفرانسیل و ریاضیات پایه (کتاب لقمه) مهروماه

۶) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته ریاضی جلد (۲) هندسه و گسسته (کتاب لقمه) مهروماه

۷) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته تجربی (کتاب لقمه) مهروماه

۸) مولف کتاب موضوعی مشتق مهروماه

۹) مولف کتاب های آموزشی ریاضی نوبل

۱۰) طراح تست آزمون های کانون فرهنگی آموزش قلم چی (سال های ۹۰-۸۸)

۱۱) طراح تست آزمون های مبتکران (سال های ۹۰-۸۴)

ارادتمند شما رحیم قهرمان

۰۹۳۸۷۷۳۶۴۱۸

Rahim.ghahreman

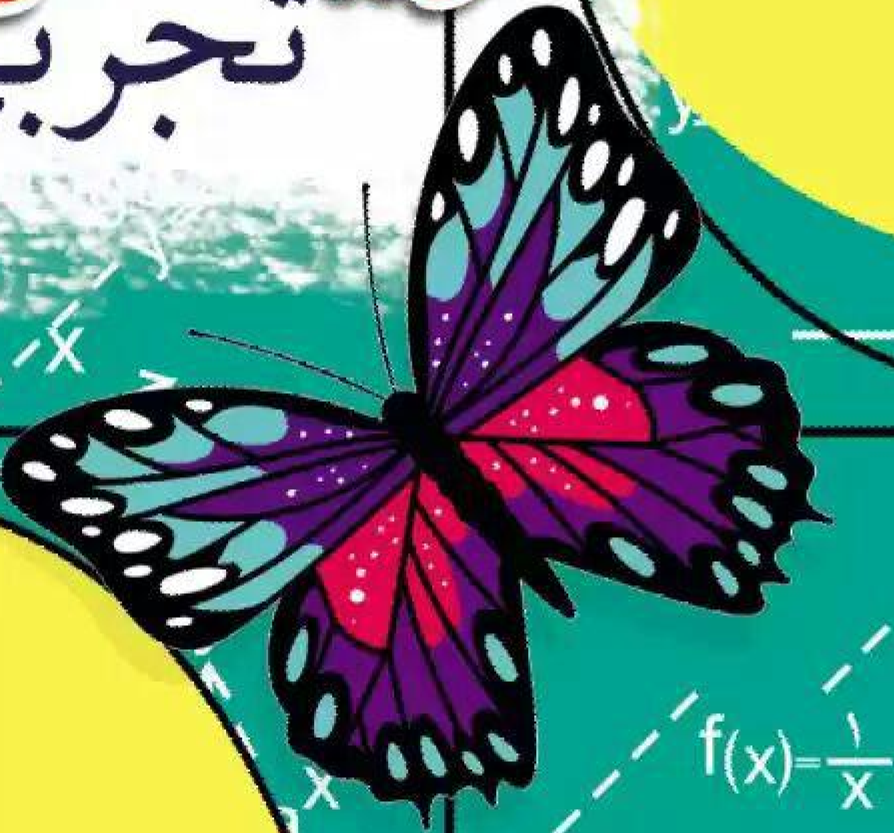
یازدهم

اندیشه قهرمان

به انضمام کنکور ۹۶

ریاضی ۲

تجربی



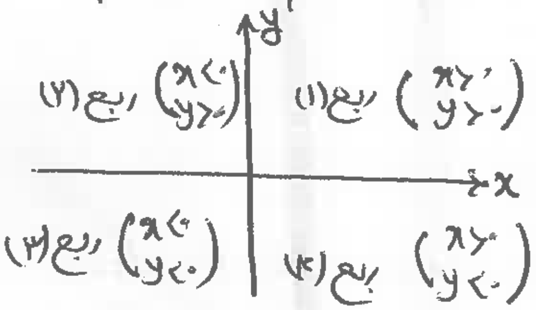
رحیم قهرمان

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی ویژه کنکور
مولف:رحیم قهرمان

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر (ریاضی ۲ تجربی یازدهم)

درسنامه ی (۱) دستگاه مختصات

دستگاه مختصات متشکل از دو محور عمود بر هم x ها و y هاست که در مبدا مختصات متقاطع اند. این محورها صفحه را به ۴ ناحیه تقسیم می‌کنند که هر کدام از آن ها را یک ربع مختصاتی می نامیم.
هر نقطه دلخواه مانند A از صفحه را با زوج مرتب (x و y) نمایش می دهیم. x طول نقطه و y را عرض نقطه می نامیم.



تست: با فرض آنکه $A(m-2, \frac{m-1}{m-4})$ در ربع سوم باشد، نقطه ی $B(m, m^2-5)$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) ناحیه ی ۱ ۲) ناحیه ی ۲ ۳) ناحیه ی ۳ ۴) ناحیه ی ۴

پاسخ: گزینه ی ۴) چون نقطه ی A در ربع سوم قرار دارد پس $x_A<0$ و $y_A<0$، بنابراین:

$$\begin{cases} m-2<0 \rightarrow m<2 \\ \frac{m-1}{m-4}<0 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} 1<m<2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1<m<2 \xrightarrow{\text{توان دو}} 1<m^2<4$$

$$\xrightarrow{+(-5)} -4<m^2-5<-1 \Rightarrow \begin{cases} 1<m<2 \Rightarrow x_B>0 \\ -4<m^2-5<-1 \Rightarrow y_B<0 \end{cases} \Rightarrow$$

نقطه ی B در ناحیه ی چهارم است.

تست: اگر نقطه ی $A(2m-1, |m|-|m+2|)$ پایین محور x ها باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>1$ ۲) $m<-1$ ۳) $m>1$ ۴) $m>-1$

پاسخ: گزینه‌ی ۴) چون نقطه‌ی $A(2m-1, |m|-|m+2|)$ پایین محور x ها قرار دارد، لذا عرض آن منفی است. بنابراین:

$$y_A<0 \Rightarrow |m|-|m+2|<0 \Rightarrow |m|<|m+2| \xrightarrow{|x|<|y| \xrightarrow{\text{توان دو}} x^2<y^2}$$

$$m^2<(m+2)^2 \Rightarrow m^2<m^2+4m+4 \Rightarrow 4m+4>0 \rightarrow m>-1$$

نکات

۱) اگر نقطه‌ی A روی محور x ها باشد، مولفه‌ی دوم یعنی y، صفر است، به بیان دیگر مختصات آن به صورت $A(x,0)$ ظاهر می‌شود.

۲) اگر نقطه‌ی A روی محور y ها باشد، مولفه‌ی اول یعنی x، صفر است. به بیان دیگر مختصات آن به صورت $A(0,y)$ ظاهر می‌شود.

۳) اگر نقطه‌ی $A(x_A,y_A)$ بالای محور x ها باشد، عرض نقطه‌ی A مثبت بوده و اگر پایین محور x ها باشد، عرض نقطه‌ی A منفی بوده.

۴) اگر نقطه‌ی $A(x_A,y_A)$ سمت راست محور y ها باشد، طول نقطه‌ی A مثبت بوده و اگر سمت چپ محور y ها باشد، طول نقطه‌ی A منفی می‌باشد.

تست: اگر $A(5m-40, 3n-1)$ روی محور عرض و $B(m+4, 2n-4)$ روی محور طول باشد، در این صورت مساحت شکل OAB چه قدر است؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۰ ۳) ۲۵ ۴) ۱۷

پاسخ: گزینه‌ی ۲) باید طول نقطه‌ی A و عرض نقطه‌ی B برابر صفر شود. داریم:

$x_A=0 \Rightarrow 5m-40=0 \Rightarrow m=8$ و $y_B=0 \Rightarrow 2n-4=0 \Rightarrow n=2$

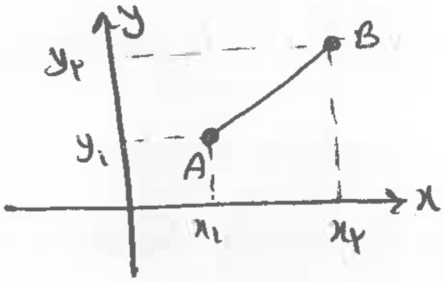
حال با جایگذاری مقادیر m و n در نقطه‌ی A و B داریم:

$$A(0\,,\,3\times 2-1)=(0,5)\qquad\Longrightarrow\qquad S=\frac{5\times 12}{2}=30$$

$$B(8+4\,,\,0)=(12\,,\,0)$$

فاصله‌ی دو نقطه (طول پاره خط)

فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ در صفحه مختصات که آن همان طول پاره خط AB با تشکیل از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود.



$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

تست: اگر $A(4,4)$ و $C(1,1)$ دو رأس متقابل یک مربع باشند، مساحت مربع کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه‌ی ۳) با توجه به اینکه دو نقطه‌ی A و C دو رأس تقابل مربع هستند پس اندازه‌ی پاره خط AC همان قطر مربع است، پس می‌توان نوشت:

$$\text{قطر مربع}=|AC|=\sqrt{(4-1)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2}$$

و با توجه به اینکه مربع نوعی لوزی است پس مساحت مربع برابر است با:

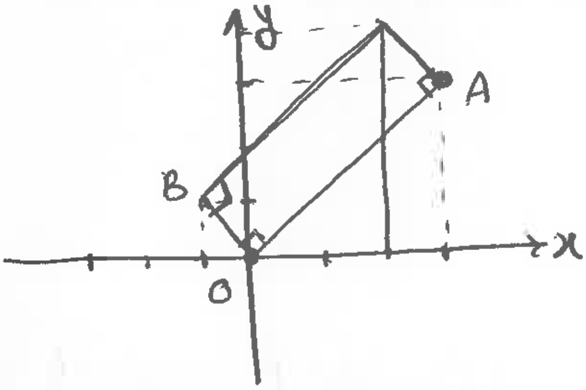
$$S=\frac{3\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}{2}=9$$

تست: نقاط $A(3,3)$ و $B(-1,1)$ و $O(0,0)$ سه رأس یک مستطیل هستند. مساحت مستطیل چقدر است؟

(آزاد ۸۰)

۱) ۳ ۲) ... ۴) ۹

پاسخ تمرین ۲) آ) نقاط A و B و O را در یک دستگاه مختصات مشخص کنیم



مشخص می‌شود که AB و BO طول و عرض مستطیل رسم شده هستند. حال با توجه به این نکته که فاصله نقطه دلخواه $A(x_1,y_1)$ از مبدا مختصات از رابطه $|OA|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ حاصل می‌شود داریم:

$$|AO|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2} \Rightarrow S=|AO|\times|BO|=3\times 2=6$$

$$|BO|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

تست: سه نقطه $A(0,-1)$، $B(3,1)$ و $C(2,-4)$ سه رأس یک مثلث‌اند. این مثلث همواره چگونه است؟

۱) متساوی الاضلاع
۲) متساوی الساقین است ولی قائم الزاویه نیست.
۳) قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین
۴) قائم الزاویه است، ولی متساوی الساقین نیست.

پاسخ گزینه‌ی ۳) برای مشخص کردن نوع مثلث، ابتدا اندازه‌ی اضلاع را حساب می‌کنیم:

$$|AB|=\sqrt{(1-(-1))^2+(3-0)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

$$|AC|=\sqrt{(-4-(-1))^2+(2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

$$|BC|=\sqrt{(-4-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{26}$$

با توجه به اینکه اندازه‌ی اضلاع AB و AC با هم برابرند پس مثلث، متساوی الساقین است. حال اگر رابطه‌ی فیثاغورس بین اضلاع مثلث برقرار باشد علاوه بر متساوی الساقین بودن، قائم الزاویه هم خواهد بود، داریم:

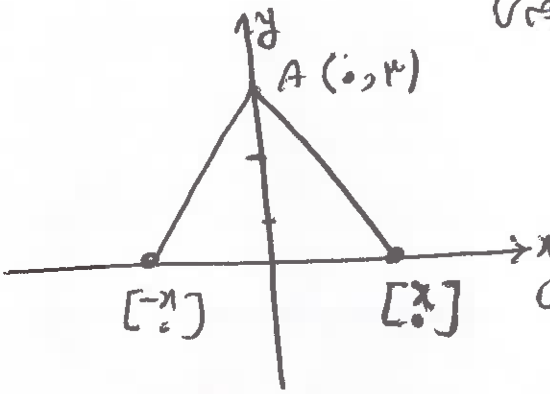
$|AB|^2+|AC|^2=(\sqrt{13})^2+(\sqrt{13})^2=26$ مثلث ABC قائم الزاویه است

با توجه به مطالب فوق مثلث داده شده قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین است.

تست: اگر $A(0,3)$، محیط مثلث متساوی الاضلاعی که یک راس آن نقطه‌ی A و دو راس دیگر آن واقع بر محور x ها باشد، کدام است؟

۱) $8\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $6\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه‌ی ۳) با مشاهده شکل مقابل درمی‌یابیم که چون نقطه‌ی A روی محور عرض‌ها واقع شده است پس دو راس دیگر مثلث متساوی الاضلاع به صورت متقارن بر محور طول‌ها واقع شده است و از طرفی چون اندازه‌ی اضلاع مثلث متساوی الاضلاع برابرند، پس داریم:



$$|AB| = |BC| \Rightarrow \sqrt{(0-(-x))^2+(3-0)^2} = \sqrt{(x-(-x))^2+(0-0)^2} \Rightarrow \sqrt{x^2+9} = \sqrt{4x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را به توان دو می‌رسانیم}} x^2+9 = 4x^2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

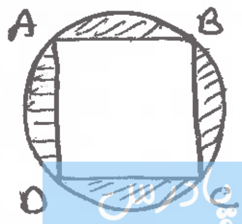
با پیدا کردن مقدار x، با توجه به این که B و C روی محور طول واقع‌اند اندازه‌ی BC برابر است با:

$$|BC| = x-(-x) = 2x = 2\sqrt{3}$$

چون هر سه ضلع مثلث متساوی الاضلاع برابر است پس:

$$\text{محیط مثلث} = 3 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

تست: در شکل مقابل در مربع $ABCD$ اگر $A(2,3)$ و $B(3,5)$ باشد، مساحت قسمت هاشور خورده کدام است؟



۱) $\frac{5\pi}{4} - 1$ ۲) $\frac{5(\pi-2)}{4}$ ۳) $\frac{5\pi-2}{2}$ ۴) $\frac{\pi-2}{4}$

پاسخ تیزهوشی ۲۵] کافی است مساحت های مربع و دایره را به دست آوریم، سپس آن ها را از هم کم کنیم تا مساحت قسمت هاشور خورده حاصل شود. AC که قطر مربع است به دست آوریم.

$$|AC| = \sqrt{(3-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5}$$

از طرفی می دانیم در مربع طول قطر، $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع است.

$$\text{طول قطر مربع} = \sqrt{2}\,|AB| \Longrightarrow \sqrt{5} = \sqrt{2} \times |AB| \Longrightarrow |AB| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Longrightarrow$$

$$\text{مساحت مربع} = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

با توجه به شکل قطر مربع همان قطر دایره است، بنابراین شعاع دایره برابر است با $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

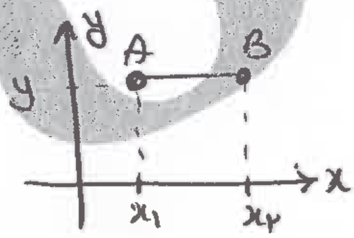
$$\text{مساحت دایره} = \pi\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5\pi}{4}$$

در نتیجه:

$$\text{مساحت هاشور خورده} = \text{مساحت دایره} - \text{مساحت مربع} = \frac{5\pi - 10}{4} = \frac{5(\pi - 2)}{4}$$

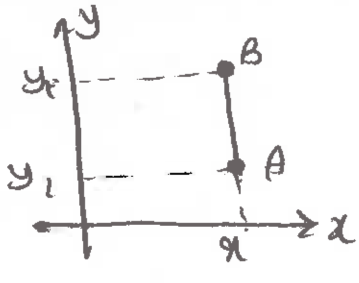
نکات:

۱) اگر نقاط A و B هم عرض باشند، طول پاره خط AB به صورت $|AB| = |x_2 - x_1|$ به دست می آید.



$$|AB| = |x_2 - x_1|$$

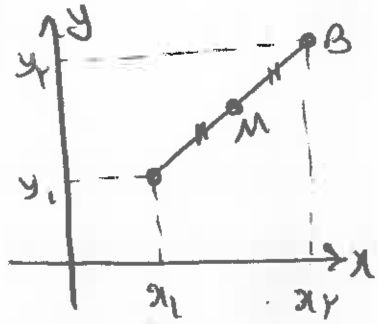
۲) اگر نقاط A و B هم طول باشند، طول پاره خط AB به صورت $|AB| = |y_2 - y_1|$ حاصل می شود.



$$|AB| = |y_2 - y_1|$$

مختصات وسط دونقطه (وسط پاره خط)

مختصات نقطه‌ی M، وسط دو نقطه‌ی A و B (وسط پاره خط AB) که مختصات $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌باشند از فرمول زیر حاصل می‌شود.



$$M_{AB \text{ وسط}} = \frac{A+B}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y_M = \dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$$

تست: نقاط $A(a, 3)$ و $B(3, a-1)$ مفروض‌اند. اگر وسط پاره خط AB روی محور طول‌ها باشد، a کدام است؟

۱) ۳ ۲) -1 ۳) -2 ۴) -4

پاسخ: گزینه‌ی ۳) اگر نقطه‌ای روی محور طول‌ها باشد، عرض آن برابر صفر است.

$$\left.\begin{array}{l} A(a,3) \\ B(3,a-1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{عرض } M \text{ وسط } AB = \frac{a-1+3}{2} = \frac{a+2}{2} = 0 \Longrightarrow a = -2$$

تست: نقطه‌ی B به طول ۲ واقع بر محور طول‌ها، نقطه‌ی C به عرض $\frac{3}{2}$ واقع بر محور عرض‌ها و O مبدا مختصات تشکیل مثلثی می‌دهند. طول میانه وارد بر ضلع BC چقدر است؟

۱) ۱/۷۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۳) مختصات نقطه‌ی B، $(2,0)$ و نقطه‌ی C $(0, \frac{3}{2})$ می‌باشد. مختصات نقطه‌ی M وسط BC برابر است با:

$$M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{\frac{3}{2}+0}{2}\right) \Longrightarrow M\left(1, \frac{3}{4}\right)$$

درنتیجه:

$$OM = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{4} = 1/25$$

تست: اگر $A(m-2,0)$ و $B(m,2m)$ و فاصله‌ی نقطه‌ی C وسط AB از مبدا مختصات $\sqrt{5}$ باشد، مقادیر m کدام است؟

۱) ۲ و ۳- ۲) ۳ و ۱- ۳) ۲ و ۱- ۴) ۲ و ۱-

پاسخ: گزینه ۴) ابتدا مختصات نقطه‌ی C را می‌یابیم:

نقطه C وسط پاره خط AB: $C=\frac{A+B}{2}=(m-1,\ m)$

حال چون فاصله نقطه‌ی C از مبدا مختصات برابر $\sqrt{5}$ می‌باشد، داریم:

$$\sqrt{(m-1)^2+m^2}=\sqrt{5}\xrightarrow{\text{توان دو}}(m-1)^2+m^2=5\Rightarrow m^2-m-2=0\xRightarrow{\text{اتحاد یک جمله مشترک}}$$

$$(m-2)(m+1)=0\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ m=-1\end{cases}$$

نکات:

۱) قرینه یک نقطه: قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به نقطه‌ی $M(\alpha,\beta)$، نقطه‌ی $A'(2\alpha-x,2\beta-y)$ می‌باشد. در حقیقت نقطه M وسط پاره خط AA' می‌باشد.

تست: اگر نقاط $A(a+1,6b-2)$ و $B(4b-1,a-1)$ نسبت به نقطه‌ی $M(b,-a)$ قرینه یکدیگر باشند، حاصل ab کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه ۴)

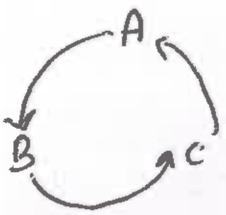
$$M\text{ وسط }AB=\frac{A+B}{2}\Rightarrow(b,-a)=\left(\frac{a+1+4b-1}{2},\frac{6b-2+a-1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow(b,-a)=\left(\frac{a+4b}{2},\frac{6b+a-3}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\frac{a+4b}{2}=b\\ \frac{6b+a-3}{2}=-a\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+4b=2b \\ 4b+a-4=-2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow ab=-1$$

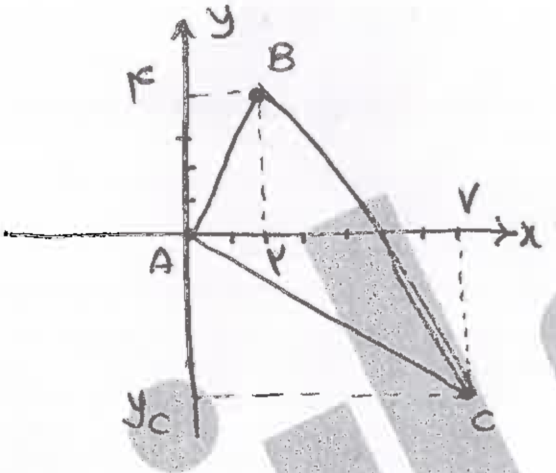
۲) تعیین مساحت مثلث

اگر نقاط $A(x_A,y_A)$ ، $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ سه راس مثلث باشند، مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{1}{2}\left|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)\right|$$

تست: با توجه به شکل، اگر مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر ۲۰ باشد، عرض نقطه C چند است؟



۱) -5 ۲) -6 ۳) -7 ۴) -8

پاسخ: گزینه (۲)

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{1}{2}\left|\underbrace{x_A(y_B-y_C)}_{\text{صفر}}+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|0+2(y_C-0)+\underbrace{7(0-4)}_{-28}\right|=\frac{1}{2}\left|2y_C-28\right|=\left|y_C-14\right|=20$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_C-14=20 \Rightarrow y_C=34 \\ y_C-14=-20 \Rightarrow y_C=-6 \end{cases}$$

مشخص است با توجه به شکل y_C باید منفی باشد، پس $y_C=-6$ قابل قبول است.

تست: اگر مساحت مثلث با رأس های $R=\begin{bmatrix}-3\\a+2\end{bmatrix}$ و $P=\begin{bmatrix}-4\\a\end{bmatrix}$ و $Q=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ برابر $\frac{2a-1}{3}$ باشد، مقدار قابل قبول برای a کدام است؟

۱) ۲۹   ۲) ۲۹ یا $-\frac{25}{7}$ ۳) $-\frac{25}{7}$ یا ۱۳   ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱) از فرمول مساحت استفاده می‌کنیم:

$$S=\frac{1}{2}\left|x_R(y_P-y_Q)+x_P(y_Q-y_R)+x_Q(y_R-y_P)\right| \Rightarrow$$

$$S=\frac{1}{2}\left|-3(a-1)+(-4)\times(1-(a+2))+1\times((a+2)-a)\right|=\frac{1}{2}\left|-3a+3+4a+4+2\right|$$

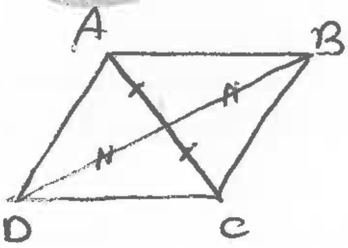
$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}|a+9| \xrightarrow{S=\frac{2a-1}{3}} \frac{1}{2}|a+9|=\frac{2a-1}{3} \xrightarrow{\times 2}$$

$$|a+9|=\frac{2(2a-1)}{3} \Rightarrow \begin{cases} a+9=\frac{2(2a-1)}{3} \Rightarrow a=29 \\ a+9=-\frac{2(2a-1)}{3} \Rightarrow a=-\frac{25}{7} \end{cases}$$

مقدار $a=-\frac{25}{7}$ قابل قبول نیست، زیرا مقدار مساحت یعنی $\frac{2a-1}{3}$ را به ازای $a=-\frac{25}{7}$ منفی می‌کند.

۳) رابطه‌ی بین مختصات رأس‌های متوازی الاضلاع

رابطه‌ی زیر بین مختصات رأس‌های متوازی الاضلاع همواره برقرار است.



$$A+C=B+D \Rightarrow \begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$$

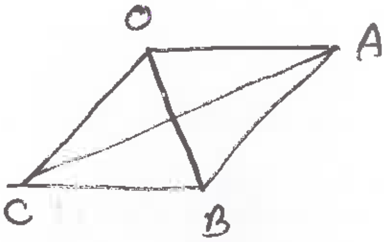
تذکر مهم: لوزی، مستطیل و مربع حالت‌های خاصی از متوازی الاضلاع هستند، بنابراین نکته بالا درمورد آن‌ها نیز صدق می‌کند.

تست: اگر نقاط $O(0,0)$، $A(\alpha+1,\alpha-2)$، $B(\alpha,3)$ و $C(\alpha-4,\alpha-1)$

رئوس متوازی‌الاضلاع OABC که قطرهای OB و AC آن هستند، α کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۴- ۴) ۹-

پاسخ: گزینه‌ی ۲)



$$x_O+x_B=x_A+x_C \Rightarrow 0+\alpha=\alpha+1+\alpha-4 \Rightarrow \alpha=3$$

یا می‌توانیم بنویسیم:

$$y_O+y_B=y_A+y_C \Rightarrow 0+3=\alpha-2+\alpha-1 \Rightarrow \alpha=3$$

تست: چهار نقطه‌ی $A(0,6)$، $B(4,-4)$، $C(3,1)$ و $D(x_D,y_D)$ به گونه‌ای هستند

که پاره‌خط‌های AB و CD یکدیگر را نصف می‌کنند، مختصات نقطه‌ی D کدام است؟

۱) $(1,1)$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $(\frac{5}{2},2)$ ۴) $(2,-9)$

پاسخ: گزینه‌ی ۱) چون AB و CD همدیگر را نصف می‌کنند پس می‌توان متوازی‌الاضلاعی رسم کرد که AB

و CD قطرهای متوازی‌الاضلاع ABCD هستند و در یک متوازی‌الاضلاع قطر AB

داریم:

$$\begin{cases} x_A+x_B=x_C+x_D \\ y_A+y_B=y_C+y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0+4=3+x_D \Rightarrow x_D=1 \\ 6-4=1+y_D \Rightarrow y_D=1 \end{cases} \Rightarrow D(1,1)$$

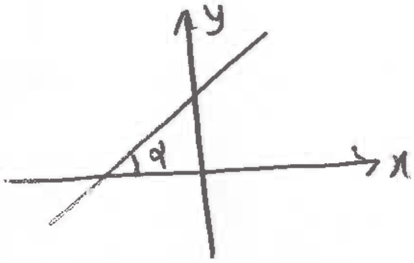
درسنامه‌ی (۲)

شیب خط (ضریب زاویه خط)

شیب خط: شیب خط تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها

(یعنی سمت راست محور xها) می‌سازد.

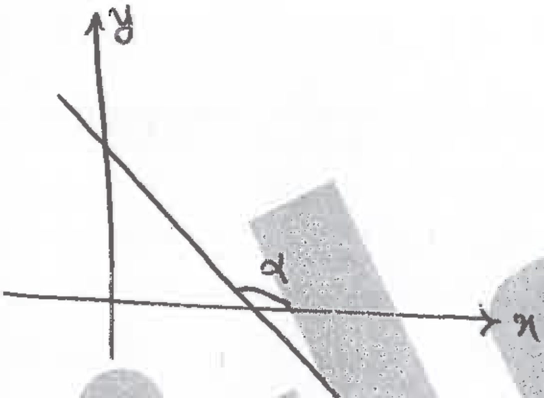
تذکر ۱) اگر شیب خطی مثبت باشد، می‌توان نتیجه گرفت که خط با جهت مثبت محور xها، زاویه‌ی حاده می‌سازد و خط صعودی می‌باشد. دقت شود که اگر شیب خط مثبت باشد، عموماً خط از نواحی اول و سوم می‌گذرد.



$0<\alpha<90°$

شیب خط $= m = \tan\alpha > 0 \Rightarrow$ خط صعودی

تذکر ۲) اگر شیب خط منفی باشد، می‌توان نتیجه گرفت که خط با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی منفرجه می‌سازد و خط نزولی می‌باشد. دقت شود که اگر شیب خط منفی باشد، عموماً خط از نواحی دوم و چهارم می‌گذرد.

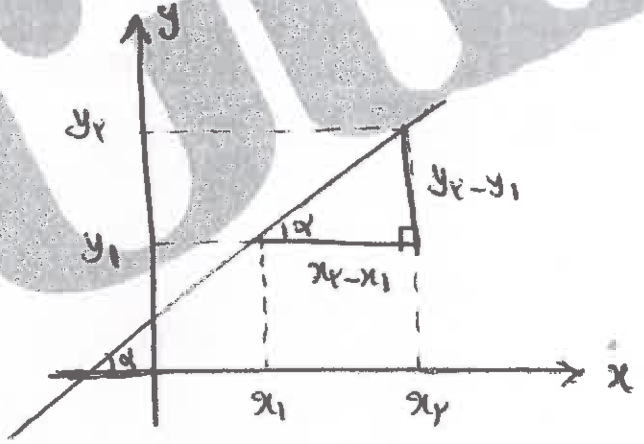


شیب خط $= m = \tan\alpha < 0 \Rightarrow$ خط نزولی

تعیین شیب خط با داشتن دو نقطه از خط

شیب خطی که از دو نقطه متمایز $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ می‌گذرد، از رابطه‌ی $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ به دست می‌آید.

به شکل روبه‌رو دقت کنید:



$$m_{AB}=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

تست: شکل را به صورت مقابل $A(1,1)$ ، $B(2,1)$ و $C(5,3)$ درنظر بگیرید. شیب خطی که وسط پاره خط AB را به وسط پاره خط BC وصل می‌کند، چقدر است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه (۳) ابتدا وسط پاره خط‌های AB و BC را حساب کرده و سپس شیب خط گذرنده از وسط این دو پاره خط را به دست می‌آوریم.

$$AB \text{ وسط پاره خط } N = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$$

$$BC \text{ وسط پاره خط } M = \frac{B+C}{2} = \left(\frac{2+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 2\right)$$

$$m_{MN} = \frac{1-2}{\frac{3}{2}-\frac{7}{2}} = \frac{1}{2}$$

تست: اگر زاویه‌ای که خط $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\,y + (m-2\sqrt{3})x - (m+\sqrt{3}) = 0$ با جهت مثبت محور xها می‌سازد 60° باشد، این خط محور عرض‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱) $-5\sqrt{3}-9$ ۲) $5\sqrt{3}+9$ ۳) $-5\sqrt{3}+9$ ۴) $5\sqrt{3}-9$

پاسخ: گزینه (۲) شیب خط برابر با تانژانت زاویه می‌باشد. پس در این سوال باید شیب خط برابر $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ باشد.

$$\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}-m}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}-m}{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}-m}{\underbrace{|2-\sqrt{3}|}_{(+)}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}-m}{2-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}-3 = 2\sqrt{3}-m \Rightarrow m = 3$$

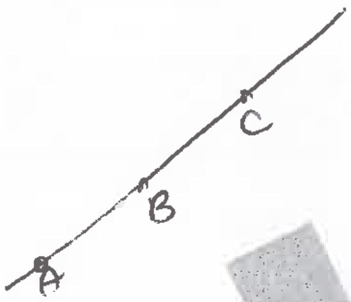
محور عرض ها را در نقطه ای قطع می کند که طول آن برابر با صفر باشد، پس داریم:

$$(2-\sqrt{3})y = m+\sqrt{3} \xrightarrow{m=3} (2-\sqrt{3})y = 3+\sqrt{3} \to y = \frac{3+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow y = 9+5\sqrt{3}$$

نکات:

۱) اگر سه نقطه ی $A(x_A , y_A)$ ، $B(x_B , y_B)$ و $C(x_C , y_C)$ بر یک خط راست واقع باشند (یعنی بر یک استقامت یا بر یک راستا باشند) باید شیب دو پاره خط AB و BC مساوی باشند یعنی:



$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}$$

تست: اگر سه نقطه ی $A(2,3)$ ، $B(a-1,a)$ و $C(a+1,2a-3)$ روی یک خط راست باشند، مقدار a برابر است با: (مشابه سراسری تجربی خارج از کشور ۹۴)

۱) $\frac{2}{15}$　　۲) $\frac{3}{15}$　　۳) 5　　۴) $-\frac{15}{7}$

پاسخ: گزینه ی ۳) باید داشته باشیم $m_{AB} = m_{AC}$ بنابراین:

$$m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{a-3}{(a-1)-2} = \frac{2a-3-3}{a+1-2} \Rightarrow \frac{a-3}{a-3} = \frac{2a-6}{a-1} \Rightarrow$$

$$a=5$$

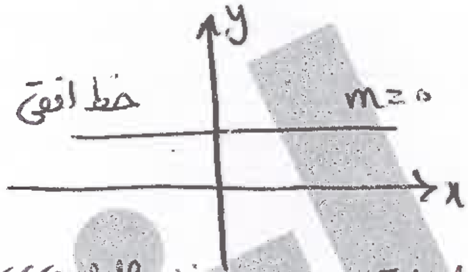
تست: سه نقطه $A(5,4)$، $B(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ و $C(K,0)$ مفروض اند. به ازای چه مقدار K، $AC+BC$ کمترین مقدار را دارد؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینه ۳) مقدار $AC+BC$ زمانی کمترین مقدار را دارد که نقاط A و B و C در یک خط راست باشند. لذا:

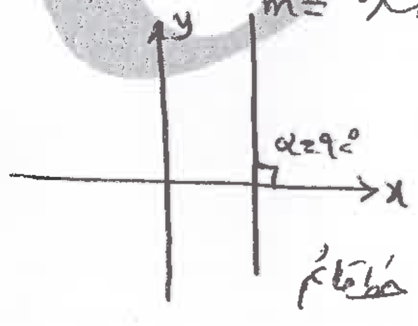
$$m_{AB}=m_{AC} \Rightarrow \frac{-\frac{1}{2}-4}{\frac{1}{2}-5}=\frac{0-4}{K-5} \Rightarrow 1=\frac{-4}{K-5} \Rightarrow K=1$$

۲) شیب هر خط افقی برابر صفر است. چون تمام نقاط واقع بر این خط عرض های مساوی دارند، پس تغییرات عرض آن صفر می شود بنابراین برای این نوع خطوط شیب صفر است.



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \xrightarrow{y_2=y_1} m=\frac{0}{x_2-x_1}=0$$

۳) برای هر خط قائم، شیب تعریف نمی شود چون تمام نقاط واقع بر این خط طول های مساوی دارند، پس تغییرات طول آن صفر می شود بنابراین برای این نوع خطوط شیب تعریف نمی شود.



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \xrightarrow{x_1=x_2} m=\frac{y_2-y_1}{0}=\text{تعریف نشده}$$

درسنامه‌ی (۳) معادله‌ی خط

معادله‌ی استاندارد خط راست: هر رابطه‌ای به صورت $y=ax+b$ ، معادله‌ی استاندارد یک خط راست است.

معادله‌ی غیر استاندارد خط راست: شکل دیگری از معادله‌ی خط به صورت $ax+by+c=0$ است که معادله‌ی غیر استاندارد یک خط راست است.

شیب خط معادله‌ی غیر استاندارد: $m=\frac{\text{منفی ضریب } x}{\text{ضریب } y}$

نکات

۱) اگر در معادله‌ی خطی، مقدار x را برابر صفر قرار دهیم، عددی است که عرض از مبدا و اگر مقدار y را برابر صفر قرار دهیم، عددی است که طول از مبدا خط می‌باشد.

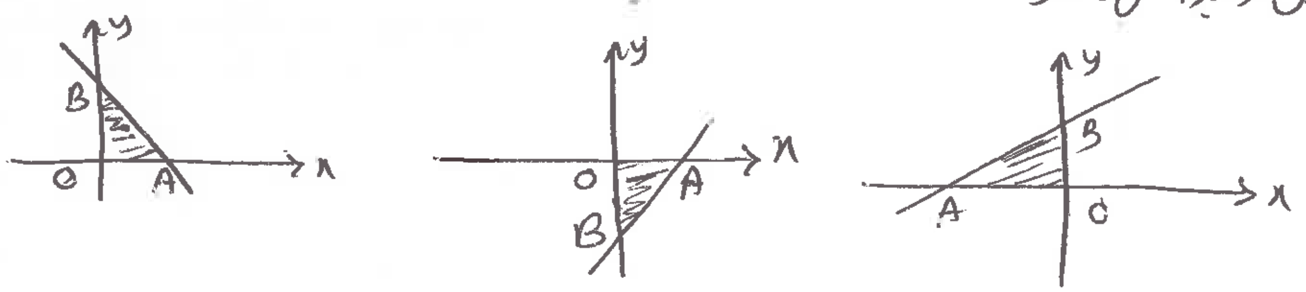
تست: عرض از مبدا خط $(x+y)(x+2)-x^2-xy=4$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -4 ۳) 4 ۴) 2

پاسخ: گزینه‌ی ۴) با جایگذاری عدد صفر به جای x مقدار y به دست می‌آید که همان عرض از مبدا خط می‌باشد.

$(0+y)(0+2)-0-0\times y=4 \Rightarrow y=2$

۲) مطابق شکل‌های زیر، اگر طول از مبدا و عرض از مبدا خطی مخالف صفر باشد، بین خط و محورهای مختصات ناحیه‌ای به شکل یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد می‌شود که OA را طول از مبدا و OB را عرض از مبدا می‌نامند.



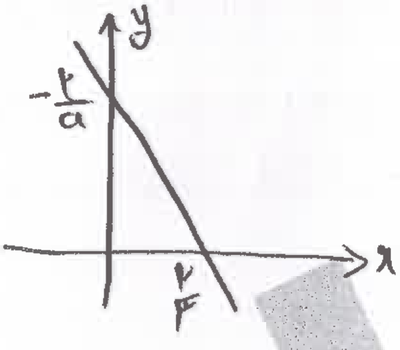
۳) اندازه ی مساحت مثلثی که از برخورد یک خط با محورهای مختصات ایجاد می شود برابر است با:

$S=\frac{1}{2}\Big|$ عرض از مبدا × طول از مبدا $\Big|$

تست: مساحت مثلثی که از برخورد خط $3x-ay-2=0$ با محورهای مختصات به دست می آید برابر ۴ است. آنگاه a برابر است با: $(a<0)$

۱) ۶ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) -2 ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲) طول از مبدا و عرض از مبدا را پیدا می کنیم و شکل را رسم می کنیم



$$3x-ay-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{a} \\ y=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

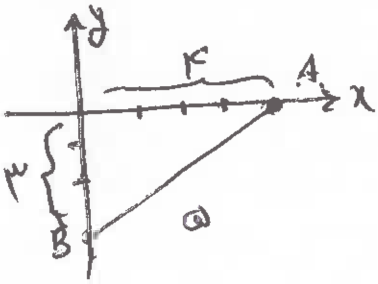
دقت کنید که چون $a<0$ است، پس $-\frac{2}{a}$ مثبت است
و برای محاسبه ی مساحت مثلث باید از $-\frac{2}{a}$ استفاده کنیم

$$S=\frac{-\frac{2}{a}\times\frac{2}{3}}{2}=4 \Rightarrow a=-\frac{1}{6}$$

تست: اگر خط $6x-8y=24$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع کند، محیط مثلث OAB کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۷ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲) برای یافتن نقاط تقاطع خط $6x-8y=24$ طول از مبدا و عرض از مبدا را حساب می کنیم



$6x-8y=24 \xrightarrow{x=0} y=-3$ عرض از مبدا

$6x-8y=24 \xrightarrow{y=0} x=4$ طول از مبدا

با توجه به شکل رسم شده طبق رابطه ی فیثاغورس داریم:

$|AB| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

محیط مثلث $= 3+4+5 = 12$

۴) نقطه ی $A(x_A, y_A)$ نسبت به خط $d: ax+by+c=0$ سه حالت مختلف دارد:

1) $ax_A + by_A + c > 0 \Rightarrow$ نقطه ی A **بالای خط** d قرار دارد.

2) $ax_A + by_A + c < 0 \Rightarrow$ نقطه ی A **زیر خط** d قرار دارد.

3) $ax_A + by_A + c = 0 \Rightarrow$ نقطه ی A **روی خط** d قرار دارد.

تذکر: در هنگام جای گذاری نقطه در معادله ی خط به گونه ای عمل می کنیم که ضریب y ، مقدار مثبت داشته باشد.

تست: اگر نقطه $A = \begin{bmatrix} m^{m-1} \\ 2 \end{bmatrix}$ بر روی خط $4x - \frac{1}{2}y = 3$ قرار داشته باشد، آنگاه مقدار m کدام است! $(m \in \mathbb{N})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ی ۱) باید مختصات نقطه ی A در معادله خط صدق کند.

$4x - \frac{1}{2}y = 3 \xrightarrow{x = m^{m-1} \text{ و } y = 2} 4m^{m-1} - \frac{1}{2} \times 2 = 3 \Rightarrow 4m^{m-1} = 4 \Rightarrow$

$m^{m-1} = 1 \Rightarrow m^{m-1} = 1^0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 & \text{پایه برابر یک:} \\ m-1 = 0 \Rightarrow m = 1 & \text{توان برابر صفر:} \end{cases}$

تست: دو خط $L_1: y = 3x - 21$ و $L_2: 11y - 30x + 29 = 0$ را در صفحه رسم کرده ایم.

نقطه $A(35, 91)$ نسبت به این دو خط چه موقعیتی دارد؟

۱) بالای هر دو خط ۲) بالای L_1 و پایین L_2

۳) پایین L_1 و بالای L_2 ۴) پایین هر دو خط

پاسخ: گزینه‌ی ۲) مختصات نقطه‌ی $A(35,91)$ را در خط‌های L_1 و L_2 جایگذاری می‌کنیم. داریم:

$L_1: y=3x-21 \Rightarrow -3x+y+21=0 \Rightarrow -3\times 35+91+21=+7>0 \Rightarrow$ نقطه‌ی A بالای خط L_1 قرار دارد.

$L_2: 11y-30x+39=0 \Rightarrow 11\times 91-30\times 35+39=-10<0$ نقطه‌ی A زیر خط L_2 قرار دارد.

۵) خط $D: ax+by+c=0$ و $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ مفروضند. $(b>0)$

۱) شرط لازم و کافی برای آن دو نقطه‌ی A و B در یک طرف خط D قرار گیرند، آن است که $D(x_1,y_1)\,D(x_2,y_2)>0$ باشد.

۲) شرط لازم و کافی برای آن که دو نقطه‌ی A و B در طرفین خط D قرار گیرند، آن است که $D(x_1,y_1)\,D(x_2,y_2)<0$ باشد.

تست: خط راست $3x+2y+7=0$ و نقاط $A(3,1)$، $B(-1,-1)$ و $C(0,-4)$ مفروضند. کدام نقطه‌ها در یک طرف این خط راست قرار گرفته‌اند؟

۱) A و B ۲) A و C ۳) B و C ۴) A، B و C

پاسخ: گزینه‌ی ۱) با توجه به نکته (۵) داریم:

$D(3,1)=18$ و $D(-1,-1)=2$، $D(0,-4)=-1$

درسنامه‌ی (۴) تعیین معادله‌ی خط

روش نوشتن معادله‌ی یک خط

۱) معادله‌ی خطی که شیب آن m و از نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ عبور کند، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

۲) برای نوشتن معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ می‌گذرد، از فرمول زیر بهره می‌گیریم.

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

تست : طول از مبدا و عرض از مبدا خط راستی که از نقطه ی $A(3,-1)$ و $B(-2,5)$ را به هم وصل می کند ، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ و $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{13}{6}$ و $\frac{13}{5}$ ۳) $-\frac{13}{6}$ و $-\frac{13}{5}$ ۴) $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{3}$

پاسخ : گزینه ی ۲ ابتدا معادله را می نویسیم :

$$y-(-1)=\frac{-1-5}{3-(-2)}(x-3) \Rightarrow y=-\frac{6}{5}x+\frac{13}{5}$$

عرض از مبدا برابر $\frac{13}{5}$ و برای اینکه بدست آوردن طول از مبدا باید ۰ قرار دهیم .

$$0=-\frac{6}{5}x+\frac{13}{5} \Rightarrow x=\frac{13}{6}$$

تست : برای رسیدن از نقطه ی A به نقطه ی B ، ابتدا ۴ واحد به چپ و سپس ۳ واحد به طرف پایین حرکت می کنیم ، اگر پاره خط AB ، محور ها را در نقطه ی طول ۶ قطع کند ، معادله ی خط AB کدام است؟

۱) $3y+4x=-8$ ۲) $4y-3x=-18$ ۳) $4y-3x=18$ ۴) $4y+3x=8$

پاسخ : گزینه ی ۲

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{3}{4} \Rightarrow y-0=\frac{3}{4}(x-6) \Rightarrow 4y-3x=-18$$

درسنامه ی (۵)

خطهای موازی و عمود بر هم

خطهای موازی : هرگاه شیب های دو خط مساوی باشند ، آن دو خط موازی می باشند .

تست : اگر دو خط $y=3x+1$ و $y=3x+m^2-3$ دو ضلع مقابل یک متوازی الاضلاع باشند :

۱) m هر چه می تواند باشد ۲) m هر چه می تواند باشد ، بجز ۲

۳) m هر چه می تواند باشد ، بجز صفر ۴) m هر چه می تواند باشد ، بجز ۲ و -۲

پاسخ : گزینه ی ۴ در متوازی الاضلاع دو ضلع روبرو با هم موازی هستند . پس داریم :

$y=3x+1 \Rightarrow$ شیب خط $=3$ ، عرض از مبدا $=1$

$y=3x+m^2-3 \Rightarrow$ شیب $=3$ ، عرض از مبدا $=m^2-3$

بنابراین شیب هر دو خط با هم برابر است. اما اگر عرض از مبداها با هم برابر باشند در این صورت دو خط بر هم منطبق می‌شوند و متوازی الاضلاع تشکیل نمی‌شود پس حالتی را که دو ضلع بر هم منطبق اند از کل حالات کم می‌کنیم:

$m^2-3=1 \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2$

پس m نمی‌تواند ۲ یا ۲- باشد. لذا m هر عددی می‌تواند باشد به جز ۲ و ۲-

خط‌های عمود بر هم: دو خط را عمود بر هم می‌گوییم هرگاه شیب‌های دو خط عکس و قرینه هم باشند.

تست: اگر $A(1,1)$ و $C(-3,-3)$ دو رأس مقابل در لوزی ABCD باشند، معادله خطی که رئوس B و D روی آن قرار دارد، کدام است؟

۱) $y=-x-2$ ۲) $y=2x-3$ ۳) $y=-x-2\ (x\neq -1)$ ۴) $y=2x-3\ (x\neq -1)$

پاسخ: گزینه (۳) لوزی متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن با هم برابر و دو قطر آن بر هم عمودند. در ضمن محل تقاطع قطرها، وسط پاره خط واصل بین دو رأس مقابل را آن است. و پس شیب خطی که از نقاط A و C می‌گذرد برابر است با:

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-3-1}{-3-1}=1$$

و مختصات M، وسط پاره خط AC به صورت زیر است

$$M=\frac{A+C}{2}=(-1,-1)$$

در ضمن شیب خطی که از B و D می‌گذرد برابر قرینه‌ی معکوس شیب خط گذرنده از A و C است. پس داریم:

$m_{AC}=1 \Rightarrow m_{BD}=-1$

از طرفی چون این خط از نقطه‌ی M می‌گذرد پس داریم:

$y-(-1)=-1(x-(-1)) \Rightarrow y=-x-2$

اوضاع نسبی دو خط: اگر خط D به معادله $ax+by+c=0$ و خط D' به معادله $a'x+b'y+c'=0$ باشند:

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow$ دو خط D و D' متقاطعند

ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow$ دو خط D و D' موازیند

ج) اگر $aa'+bb'=0 \Rightarrow$ دو خط D و D' بر هم عمودند

د) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow$ دو خط D و D' بر هم منطبقند.

تست: اگر دو خط به معادلات $mx+2(m^2+1)y=3m+2$ و $2x+5my+4m=0$ منطبق بر هم باشند، از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرند؟

۱) $(6,2)$ ۲) $(9,3)$ ۳) $(12,2)$ ۴) $(12,5)$

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} mx+2(m^2+1)y=3m+2 \\ 2x+5my=-4m \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{2}=\frac{2(m^2+1)}{5m}=\frac{3m+2}{-4m} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{m}{2}=\frac{2(m^2+1)}{5m} \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2 \\ \frac{m}{2}=\frac{3m+2}{-4m} \Rightarrow m^2+3m+2=0 \Rightarrow m=-1 \quad m=-2 \end{cases}$$

جواب مشترک دو معادله که حاصل می‌شود قابل قبول است یعنی $m=-2$ و معادلهٔ خط به صورت $L: -x+5y=-2$ یا $-2x+10y=-4$ است. این خط از نقطهٔ $(12,2)$ می‌گذرد چون فقط همین نقطه در معادله خط صدق می‌کند.

تست: اگر دو خط به معادلات $ax+by=c$ و $bx+cy=1$ بر هم منطبق باشند، جواب مضاعف معادله‌ی $ax^2+2bx+c=0$ کدام است؟

۱) $\pm\frac{1}{c}$ ۲) $\pm\frac{1}{a}$ ۳) $\frac{1}{a}$ ۴) $-\frac{1}{c}$

پاسخ: گزینه‌ی (۴) با یادداشت بنویسیم:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{1} \Rightarrow \begin{cases} b^2=ac & (*)\\ b=c^2 & (**)\end{cases} \Rightarrow a=c^3 \quad (***)$$

$$ax^2+2bx+c=0 \Rightarrow \Delta=4b^2-4ac=4(b^2-ac) \overset{(*)}{=} 0 \Rightarrow \text{یک جواب مضاعف} \Rightarrow$$

$$x=-\frac{b}{2a} \xrightarrow{(**),(***)} x=-\frac{c^2}{c^3}=-\frac{1}{c}$$

درسنامه‌ی (۷)

فاصله‌ی یک نقطه از خط

فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

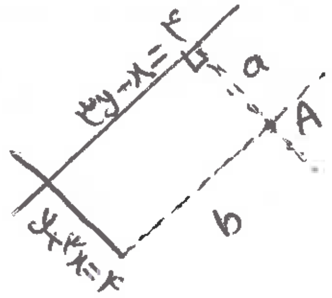
تذکر مهم: در استفاده از فرمول فوق باید دقت شود که معادله خط داده شده حتماً به صورت $ax+by+c=0$ باشد.

نکته: فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

تست: دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $y+3x=4$ و $3y-x=4$ یک راس مستطیل نقطه‌ی $A(-2,-6)$ می‌باشد. مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) $16\sqrt{10}$ ۳) ۳۲ ۴) $32\sqrt{10}$



پاسخ گزینه ۳) مختصات نقطه ی $A(-2,-6)$ در هیچ یک از خطوط داده شده صدق نمی کند. به علاوه چون شیب این دو خط عکس و قرینه ی یکدیگرند لذا این دو خط برهم عمودند. مطابق شکل طول و عرض مستطیل با فاصله ی نقطه ی A از هر یک از این خطوط برابر است داریم:

$$a=\frac{|3y_0-x_0-4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|3(-6)-(-2)-4|}{\sqrt{9+1}}=\frac{20}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow S=a\times b=32$$

$$b=\frac{|y_0+3x_0-4|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|-6+3(-2)-4|}{\sqrt{10}}=\frac{16}{\sqrt{10}}$$

تست: فاصله ی نقطه ی B واقع بر محور طول ها از خطی موازی با نیم ساز ربع دوم با معادله ی $ax+y+5=0$ برابر $4\sqrt{2}$ شده عرض نقطه ی B چه قدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ گزینه ۲) مختصات نقطه ی B به صورت $(x,0)$ می باشد و چون خط $ax+y+5=0$ موازی نیم ساز ربع دوم است پس شیب آن برابر -1 خواهد بود بنابراین داریم:

$$ax+y+5=0 \Rightarrow m=-\frac{a}{1}=-a \Rightarrow -a=-1 \Rightarrow a=1$$

پس معادله ی خط به صورت $x+y+5=0$ می باشد و داریم:

$$d=\frac{|0+x+5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|x+5|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|x+5|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2} \Rightarrow |x+5|=8 \Rightarrow \begin{cases} x+5=8 \\ x+5=-8 \end{cases}$$

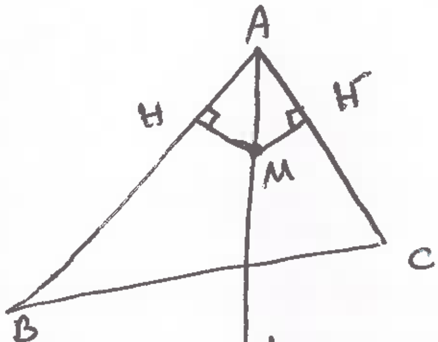
$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-13 \end{cases}$$

و در بین گزینه ها عدد ۳ وجود دارد

تست: اگر $A(1,1)$ ، $B(-2,3)$ و $C(-1,a)$ سه راس یک مثلث باشند و $M(0,1)$ روی نیمساز زاویه‌ی A واقع باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه‌ی (۳) چون M روی نیمساز $\hat{A}$ قرار دارد، از دو خط AB و AC به یک فاصله است.



$AB: y-1=\frac{3-1}{-2-1}(x-1) \Rightarrow 3y+2x-5=0$

$AC: y-1=\frac{a-1}{-1-1}(x-1) \Rightarrow 2y+(a-1)x-a-1=0$

$$\begin{cases} MH=\frac{|3y_0+2x_0-5|}{\sqrt{9+4}}=\frac{|3+0-5|}{\sqrt{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}} \\ MH'=\frac{|2+0-a-1|}{\sqrt{4+(a-1)^2}}=\frac{|1-a|}{\sqrt{4+(a-1)^2}} \end{cases} \Rightarrow MH=MH' \Rightarrow$$

$$\frac{4}{13}=\frac{(1-a)^2}{4+(a-1)^2} \Rightarrow 16+4(a-1)^2=13(a-1)^2 \Rightarrow (a-1)^2=\frac{16}{9} \Rightarrow$$

$$a-1=\pm\frac{4}{3} \xrightarrow{a>0} a=\frac{7}{3}$$

درسنامه‌ی (۷) فاصله‌ی دو خط موازی: فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

تذکر مهم: برای استفاده از فرمول فاصله‌ی دو خط موازی، باید ضرایب x و y در هر دو خط یکسان باشند.

تست: اگر $3y=-4x+3a+1$ و $y+\frac{4}{3}x+3=0$ دو ضلع مربعی با مساحت ۱۶ باشند، مقدار صحیح a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ... ۳) ... ۴) -5

مولف:رحیم قهرمان

پاسخ: گزینه‌ی ۴

$3y = -4x + 3a + 1 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$

$y + \frac{4}{3}x + 3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$

این دو معادله دارای شیب‌های مساوی‌اند، پس معادلات دو ضلع مقابل یک مربع‌اند. طول ضلع مربع با فاصله‌ی این دو خط موازی برابر است:

$$\begin{cases} 3y + 4x - 3a - 1 = 0 \\ 3y + 4x + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{طول ضلع مربع} = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|9+3a+1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|10+3a|}{5}$$

از طرفی مساحت مربع برابر ۱۶ در نتیجه طول ضلع آن برابر ۴ می‌باشد، پس داریم:

$$\frac{|10+3a|}{5} = 4 \Rightarrow |10+3a| = 20 \Rightarrow \begin{cases} 10+3a = 20 \Rightarrow a = \frac{10}{3} \\ 10+3a = -20 \Rightarrow a = -10 \end{cases}$$

تست: مقدار a در معادله‌ی خطوط $(a-2)x + y = 2$ و $(a-2)x + y = -1$ چه مقدار باشد تا فاصله‌ی این دو خط بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲) این دو خط موازی‌اند. برای محاسبه‌ی فاصله از فرمول دو خط موازی بهره می‌بریم

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|2-(-1)|}{\sqrt{(a-2)^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{(a-2)^2+1}}$$

برای اینکه این کسر بیشترین مقدار ممکن شود، مخرج آن باید کمترین مقدار را داشته باشد، یعنی باید $(a-2)^2 = 0$ پس $a = 2$.

درسنامه‌ی (۸) معادله‌ی درجه‌ی دوم

روابط بین جواب‌های یک معادله که درجه‌دوم: معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta>0$ دو جواب متمایز دارد. اگر x_1 و x_2 دو جواب معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند، روابط زیر بین جواب‌های معادله برقرار است:

الف) $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ب) $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ج) $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{S^2 - 4P}$

تذکر: حالات زیر را می‌توان به رابطه‌ای از تغییر بین S و P تبدیل کرد، به عنوان مثال داریم:

۱) $x_1^2+x_2^2=S^2-2P$ ۲) $x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$ ۳) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$

۴) $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\sqrt{S-2\sqrt{P}}$ ۵) $\begin{cases} x_1>0 \\ x_2>0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}+\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}=\frac{S}{\sqrt{P}}$

تست: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2-12x+1=0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۹)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$4x^2-12x+1=0 \Rightarrow S=3,\ P=\frac{1}{4}\ (*)$

$$A=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{S+2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}\overset{(*)}{=}\frac{\sqrt{3+2\times\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=4$$

تست: به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2-(m+3)x+5=0$ برابر ۶ می‌باشد؟

(سراسری تجربی ۹۳)

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) ۱ ۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$ ۴) -1 و $\frac{9}{5}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» اگر ریشه‌های معادله را α و β بنامیم داریم:

$$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P=6 \xrightarrow[P=\frac{5}{m}]{S=\frac{m+3}{m}} \left(\frac{m+3}{m}\right)^2-\frac{10}{m}=6 \Rightarrow \frac{m^2+6m+9}{m^2}-\frac{10}{m}=6$$

$$\xrightarrow{\times m^2} 5m^2+4m-9=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} \begin{cases} m=1 \\ m=-\frac{9}{5} \end{cases}$$

از مقادیر به دست آمده برای m باید ببینیم کدام یک ریشه‌های معادله اصلی را نفی می‌کند.

$$\begin{cases} m=1 \Rightarrow x^2-4x+5=0 \Rightarrow \Delta=16-20<0 & \text{غ ق ق} \\ m=-\frac{9}{5} \Rightarrow \Delta>0 & \text{ق ق} \end{cases}$$

تست: عدد $2\sqrt{3}$ واسطه‌ی هندسی بین ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-mx=1-m$ است، m کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) [illegible] ۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ی ۴

یادآوری: اگر a و b دو عدد مثبت باشند، واسطه ی هندسی بین آنها مساوی $\sqrt{ab}$ است

اگر $2\sqrt{3}$ واسطه ی هندسی x_1 و x_2 باشد، آن گاه:

$$\sqrt{x_1x_2}=2\sqrt{3} \Rightarrow x_1x_2=12 \xrightarrow{x_1x_2=\frac{c}{a}} \frac{m-1}{2}=12 \Rightarrow m=25$$

تست: هرگاه یکی از ریشه های معادله ی $ax^2+bx+a=0$ سه برابر ریشه ی دیگر باشد، مقدار $\frac{a^2}{b^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{16}$

گزینه ی ۴) نگاهی دقیق به معادله واضح می سازد که حاصل ضرب ریشه های مساوی (۱) است

$\left(x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{a}{a}=1 \Rightarrow x_1x_2=1\right)$ این مطلب کمک زیادی به ما خواهد کرد:

$$\begin{cases} x_1x_2=1 \\ x_1=3x_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x_2}=3x_2 \Rightarrow x_2^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x_1^2=3$$

در نتیجه:

$$x_1^2+x_2^2=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3} \Rightarrow S^2-2P=\frac{10}{3} \Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2-2=\frac{10}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=\frac{16}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{3}{16}$$

تست: اگر $x_1=\sin\alpha$ و $x_2=\cos\alpha$ ریشه های معادله ی $x^2+bx+c=0$ باشند، حاصل $\frac{x_1}{x_2^3}+\frac{x_2}{x_1^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{2c^2-1}{c^3}$ ۲) $\frac{c^2+2}{c^3}$ ۳) $\frac{1-2c^2}{c^3}$ ۴) $\frac{2c^2-1}{c^4}$

پاسخ: گزینه ی ۳

نکته: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$\frac{x_1}{x_2^3}+\frac{x_2}{x_1^3}=\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^3x_2^3}$$

حال با جایگذاری مقادیر $x_1=\sin\alpha$ و $x_2=\cos\alpha$ در رابطه ی به دست آمده داریم:

$$\frac{x_1^4+x_2^4}{(x_1x_2)^3}=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{(\sin\alpha\cos\alpha)^3}=\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha\cos\alpha)^3}$$

$$=\frac{1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha\cos\alpha)^3}$$

کافی است برای محاسبه ی رابطه ی اخیر حاصل ضرب ریشه های معادله درجه دوم یعنی $\sin\alpha\cos\alpha$ یعنی مقدار c را در آن جایگذاری کنیم، بنابراین:

$$\frac{1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha\cos\alpha)^3}=\frac{1-2c^2}{c^3}$$

ویژگی معادله های درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ (در حالت $\Delta>0$)

۱) اگر $c=0 \Longleftrightarrow$ معادله یک ریشه برابر صفر دارد $\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-\frac{b}{a} \end{cases}$

۲) اگر $b=0 \Longleftrightarrow$ معادله دو ریشه قرینه دارد.

۳) اگر $a=0$ و $b\neq0 \Longleftrightarrow x=-\frac{c}{b}$

۴) اگر $a=c \Longleftrightarrow$ دو ریشه معادله عکس یکدیگرند

۵) اگر $a=-c \Longleftrightarrow$ دو ریشه معادله قرینه عکس یکدیگرند.

۶) اگر $a+b+c=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$

۷) اگر $a+c=b \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-\frac{c}{a} \end{cases}$

تست: به ازای کدام مقدار m ریشه های حقیقی $mx^2+3x+m^2=3$ ، معکوس یکدیگرند؟

(سراسری تجربی خارج ۹۰)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینه ی (۲) معادله دارای دو ریشه حقیقی است، بنابراین:

$$mx^2+3x+m^2-3=0 \xrightarrow{\Delta>0} 9-4m(m^2-3)>0 \quad (*)$$

به علاوه در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ مجموع ریشه ها برابر با $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه ها برابر با $\frac{c}{a}$ است. پس داریم:

$$mx^2+3x+m^2-2=0 \Rightarrow \qquad P=\frac{m^2-2}{m}$$

چون ریشه ها معکوس یکدیگرند، بنابراین $a=c$ یعنی

$$m^2-2=m \Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow (m+1)(m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$$

حال هر یک از مقادیر بدست آمده را در رابطه ی (*) قرار می دهیم:

$$\begin{cases} m=-1 \xrightarrow{(*)} 9-4(-1)(1-2)>0 \Rightarrow 5>0 \Rightarrow \text{قابل قبول} \\ m=2 \xrightarrow{(*)} 9-4\times 2(4-2)\geq 0 \Rightarrow -7<0 \qquad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین فقط به ازای $m=-1$ ریشه های معادله مثبت و معادله دارای دو ریشه است.

نکاتی درباره جواب های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$

۱) اگر $\Delta>0 \Leftarrow$ معادله دو ریشه ی متمایز دارد

الف) $\frac{c}{a}<0 \Rightarrow$ دو ریشه مختلف العلامت دارد $\Rightarrow$

$$\begin{cases} -\frac{b}{a}<0 & |x_1|>|x_2| \\ -\frac{b}{a}=0 & \text{دو ریشه قرینه یکدیگرند} \\ -\frac{b}{a}>0 & |x_2|>|x_1| \end{cases}$$

ب) $\frac{c}{a}=0 \Rightarrow$ یک ریشه صفر و دیگری $-\frac{b}{a}$ است.

ج) $\frac{c}{a}>0 \Rightarrow$ دو ریشه هم علامت اند $\Rightarrow$

$$\begin{cases} -\frac{b}{a}<0 & \text{هر دو ریشه منفی اند} \\ -\frac{b}{a}=0 & \text{غیر ممکن است} \\ -\frac{b}{a}>0 & \text{هر دو مثبت اند} \end{cases}$$

۲) اگر $\Delta=0 \Rightarrow$ معادله دارای ریشه مضاعف است

$$\Rightarrow x_1=x_2=-\frac{b}{2a} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow x_1=x_2>0 \\ -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow x_1=x_2<0 \end{cases}$$

۳) اگر $\Delta < 0 \Rightarrow$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

تست: حدود m برای آن که معادله $(m-1)x^2 + mx + m - 3 = 0$ دو ریشه‌ی مختلف العلامه داشته باشد، کدام است؟

۱) $m > 2$ ۲) $1 < m < 3$ ۳) $m < 1$ ۴) $0 < m < 1$

پاسخ: گزینه‌ی (۲) می‌دانیم معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه‌ی مختلف العلامه است، هرگاه $\frac{c}{a} < 0$ باشد.

$$(m-1)x^2 + mx + m - 3 = 0 \Rightarrow \frac{m-3}{m-1} < 0 \Rightarrow 1 < m < 3$$

تست: به ازای چه مقدار m، معادله‌ی $3x^2 + (m^2-16)x + m + 3 = 0$ دارای دو ریشه‌ی قرینه است؟

۱) -4 ۲) ± 4 ۳) -3 ۴) ± 3

پاسخ: گزینه‌ی (۱) می‌دانیم معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$، شرط $b = 0$، $\frac{c}{a} < 0$ دو ریشه‌ی قرینه هم دارد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m^2 - 16 = 0 \\ \frac{m+3}{3} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \text{ یا } m = 4 \\ m < -3 \end{cases} \Rightarrow m = -4$$

تست: کدام یک از معادلات زیر، دو جواب مختلف العلامه دارد که جواب منفی از نظر قدر مطلق از جواب مثبت بزرگتر است؟

۱) $8x^2 - 4x - 3 = 0$ ۲) $-x^2 - 8x + 7 = 0$
۳) $-x^2 - 9x - 12 = 0$ ۴) $-x^2 + 7x + 8 = 0$

گزینه‌ی (۲) با توجه به اینکه معادله دارای دو جواب مختلف العلامت است، لذا باید $\frac{c}{a} < 0$ باشد، از طرفی از آنجایی که جواب منفی از لحاظ قدر مطلق از جواب مثبت بزرگتر است، پس مجموع دو ریشه علامت منفی است یعنی $\frac{-b}{a} < 0$ است. بنابراین باید $\frac{c}{a} < 0$ و $\frac{-b}{a} < 0$ باشد که تنها معادله گزینه‌ی (۲) دارای این شرایط است.

مولف:رحیم قهرمان

درسنامه‌ی (۹) تشکیل معادله درجه دوم

۱) معادله‌ی درجه‌ی دومی که جواب‌های آن اعداد حقیقی x_1 و x_2 باشند و داشته باشیم $S=x_1+x_2$ و $P=x_1x_2$ آن‌گاه معادله‌ی درجه دوم آن به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$x^2-Sx+P=0$$

تست: معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ و $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2-(3+\sqrt{2})x+\frac{1}{2}=0$

۲) $x^2+(3+\sqrt{2})x+\frac{1}{2}=0$

۳) $x^2-(3-\sqrt{2})x+\frac{1}{2}=0$

۴) $x^2-(3+\sqrt{2})x+1=0$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ ابتدای S و P را می‌یابیم:

$$\begin{cases} S=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=3+\sqrt{2} \\ P=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

حال با داشتن $S=3+\sqrt{2}$ و $P=\frac{1}{2}$ معادله درجه دوم را تشکیل می‌دهیم:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-(3+\sqrt{2})x+\frac{1}{2}=0$$

۲) اگر عدد اصم $\alpha+\sqrt{\beta}$ ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دومی با ضرایب گویا باشد، در این صورت ریشه‌ی دیگر، $\alpha-\sqrt{\beta}$ خواهد بود.

تست: عدد $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ ریشه‌ی کدام یک از معادلات زیر است؟

۱) $x^2-4x+1=0$ ۲) $x^2+3x-1=0$ ۳) $x^2-2x-1=0$ ۴) $x^2-7x+2=0$

پاسخ: گزینه‌ی ۱

$$x_1=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=|2-\sqrt{3}|=2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x_1=2-\sqrt{3} \Rightarrow x_2=2+\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=1 \end{cases} \Rightarrow x^2-4x+1=0$$

۲) برای یافتن معادله درجه دومی جدید که ریشه های آن رابطه ای با ریشه های معادله ی قبلی داشته باشد، P و S را برای معادله ی جدید به دست آورده و آن گاه معادله ی $x^2-Sx+P=0$ را تشکیل می دهیم.

تست : اگر α و β ریشه های معادله ی $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه جواب های کدام معادله به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha}+1, \frac{1}{\beta}+1\right\}$ است؟

(سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $4x^2-5x+1=0$ ۲) $4x^2-3x+1=0$ ۳) $4x^2-5x-1=0$ ۴) $4x^2-3x-1=0$

پاسخ : گزینه ی ۳

$$2x^2-3x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{3}{2} \\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-2 \end{cases}$$

ریشه های معادله مورد نظر عبارتند از $\alpha'=\frac{1}{\alpha}+1$ و $\beta'=\frac{1}{\beta}+1$ ، پس :

$$\begin{cases} S'=\alpha'+\beta'=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+2=\frac{5}{4} \\ P'=\alpha'\beta'=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+1=\frac{-1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)+1=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2-S'x+P'=0$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}=0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2-5x-1=0$$

تست : ریشه های کدام معادله، از معکوس ریشه های معادله درجه دوم $2x^2-3x-1=0$ ، یک واحد کم تر است؟

(سراسری تجربی ۹۴)

۱) $x^2-3x+1=0$ ۲) $x^2+3x+1=0$ ۳) $x^2-5x+2=0$ ۴) $x^2+5x+2=0$

پاسخ : گزینه ی ۴) اگر ریشه های این معادله را α و β بنامیم داریم :

$$2x^2-3x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2} \\ \alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{3}{2} \end{cases}$$

معادله‌ای که ریشه‌های آن از معکوس ریشه‌های معادله‌ی اولیه یک واحد کم‌تر است، به صورت زیر خواهد بود:

$$\left\{\frac{1}{\alpha}-1 ,\ \frac{1}{\beta}-1\right\}$$

$$S'=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-2=-5$$

$$P'=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\beta}-1\right)=\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+1=\frac{1}{\alpha\beta}-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+1\Rightarrow$$

$$P'=\frac{1}{-\frac{1}{2}}-(-3)+1=2$$

با توجه به رابطه‌ی $x^2-S'x+P'=0$ می‌توانیم معادله‌ی مورد نظر را به دست آوریم.

$$\begin{cases} S'=-5 \\ P'=2 \end{cases}\Rightarrow x^2+5x+2=0$$

معادلات درجه دو و بعدی که به روش تغییر متغیر قابل حل می‌باشند

در برخی از معادلات می‌توان با در نظر گرفتن یک متغیر جدید، آن معادله را به یکی از معادلاتی که می‌شناسیم، تبدیل کرد. در این حالت بعد از حل معادله‌ی حاصل، جواب‌ها را در عبارت تغییر متغیر قرار داده و مقادیر مجهول اصلی معادله‌ی اولیه را به دست می‌آوریم.

تست: مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

پاسخ: گزینه‌ی ۲ معادله را از روش تغییر متغیر حل می‌کنیم. داریم:

$$(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0 \xrightarrow{x^2+x=t} t^2-18t+72=0\Rightarrow(t-6)(t-12)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} t=x^2+x=12\Rightarrow x^2+x-12=0 \xrightarrow{\text{۲ ریشه حقیقی دارد}} x_1+x_2=-1 \\ t=x^2+x=6\Rightarrow x^2+x-6=0 \xrightarrow{\text{۲ ریشه حقیقی دارد}} x_3+x_4=-1 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=x_1+x_2+x_3+x_4=-2$$

درسنامه ی (۱۰) نمودار تابع درجه ی دوم (سهمی)

۱) اگر $a>0$ باشد، دهانه ی سهمی به سمت بالا و به صورت ⌣ است (تابع مینیمم دارد.)

۲) اگر $a<0$ باشد، دهانه سهمی به سمت پایین و به صورت ⌢ است. (تابع ماکزیمم دارد.)

۳) مختصات راس سهمی از فرمول $S(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ بدست می آید که به آن نقطه ی مینیمم (در $a>0$) یا نقطه ی ماکزیمم (در $a<0$) نیز گویند و خط $x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی است.

تست: اگر یکی از منحنی های تابع درجه دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ خط $x=2$ محور تقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می کند؟ (سراسری تجربی ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

گزینه ی ۴) $x=2$ محور تقارن تابع درجه دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ می باشد لذا:

محور تقارن: $x=\frac{-1}{2(a-1)} \xrightarrow{x=2\ \text{محور تقارن}} \frac{-1}{2(a-1)}=2 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$

بنابراین ضابطه ی تابع به شکل $y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$ در می آید و محل تقاطع اش با جهت مثبت محور x ها به راحتی است لذا:

$y=0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2+x+3=0 \Rightarrow x^2-4x-12=0 \Rightarrow (x+2)(x-6)=0 \xrightarrow{x>0} x=6$

تست: نقطه ی مینیمم تابع $y=x^2+ax+2$ روی نیمساز قرار دارد. a کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

پاسخ: گزینه ی ۴)

$y=x^2+ax+2 \Rightarrow S\left(-\frac{a}{2}, \frac{-(a^2-4(2)(1))}{4}\right) \Rightarrow S\left(-\frac{a}{2}, \frac{8-a^2}{4}\right)$

که روی نیمساز ربع اول و سوم یعنی روی خط $y=x$ قرار دارد، بنابراین:

$y_S=x_S \Rightarrow \frac{8-a^2}{4}=-\frac{a}{2} \Rightarrow 2a^2-4a-16=0 \Rightarrow a^2-2a-8=0 \Rightarrow$

$(a+2)(a-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ a=4 \end{cases}$

اما چون نقطه‌ی مینیمم S روی نیم‌ساز ربع سوم قرار دارد، لذا $x_S<0$، یعنی:

$-\frac{a}{2}<0 \Rightarrow a>0$

بنابراین فقط $a=4$ قابل قبول است.

۴) هر تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ را می‌توان به صورت $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ نیز نوشت که در آن $S(\alpha,\beta)$ راس سهمی است.

تست: نقاط $A(1,3)$ و $B(-3,3)$ روی منحنی تابع $y=a(x-b)^2+c$ قرار دارند، هرگاه:

(مشابه سراسری تجربی خارج از کشور ۸۹)

۱) $b=-1$ ۲) $b=1$

۳) $b=0$ ۴) $b=-2$

پاسخ: گزینه‌ی (۱) نقاط A و B روی منحنی تابع y قرار دارند؛ پس مختصات آن‌ها در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند:

$A(1,3) \xrightarrow{y=a(x-b)^2+c} 3=a(1-b)^2+c \Rightarrow 3-c=a(1-b)^2 \quad (I)$

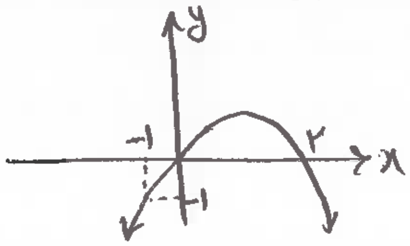
$B(-3,3) \xrightarrow{y=a(x-b)^2+c} 3=a(-3-b)^2+c \Rightarrow 3-c=a(-3-b)^2 \quad (II)$

$(I,II) \Rightarrow a(1-b)^2=a(-3-b)^2 \xrightarrow{a\neq 0} (1-b)^2=(-3-b)^2 \Rightarrow |1-b|=|-3-b|$

$\xrightarrow{|x|=|y| \Rightarrow x=\pm y} \begin{cases} 1-b=-3-b \Rightarrow 1=-3 \times \\ 1-b=3+b \Rightarrow 2b=-2 \rightarrow b=-1 \end{cases}$

۵) اگر تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ محور xها را در نقاطی به طول‌های x_1 و x_2 قطع کند، آنگاه معادله را به صورت $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ نیز می‌توان نوشت.

تست: نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ مانند شکل مقابل است. حاصل $a+3b-c$ کدام است؟



۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$

۳) 4 ۴) 2

پاسخ: گزینه‌ی (۲) با توجه به این‌که $x=$ ... تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ است، بنابراین

معادله‌ی آن را می‌توان به صورت $f(x)=a(x)(x-2)$ در نظر گرفت. داریم:

$$f(x)=a(x)(x-2) \xrightarrow{f(-1)=-1} -1=a(-1)(-1-2) \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

$$f(x)=-\frac{1}{3}(x)(x-2)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+0 \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow a+3b-c=\frac{5}{3}$$

۶) اگر تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ محور xها را فقط در یک نقطه مانند x_1 قطع کند آنگاه معادله‌اش را به صورت $y=a(x-x_1)^2$ می‌توان نوشت.

۷) در سهمی $y=ax^2+bx+c$ اگر $\begin{cases} \Delta=0 \\ a>0 \end{cases}$ سهمی بالای محور xها و بر آن مماس است.

$-\frac{b}{2a}$

تست: به ازای کدام مقدار m نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=(m-2)x^2-3x+m+2$ بالای محور xها و مماس بر آن است؟

۱) -3 ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 3 (سراسری ریاضی ۸۲)

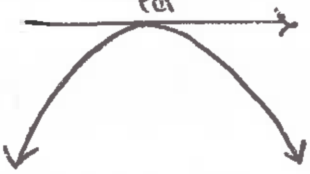
پاسخ: گزینه‌ی ۳. تابع بالای محور xها است، پس رو به بالا است و در نتیجه $a>0$ است. از طرفی بر محور xها مماس است، پس معادله‌ی $y=0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است و در نتیجه $\Delta=0$.

$$\begin{cases} \Delta=0 \Rightarrow 9-4(m-2)(m+2)=0 \Rightarrow 9-4(m^2-4)=0 \\ a>0 \Rightarrow m-2>0 \Rightarrow m>2 \end{cases}$$

$$9-4(m^2-4)=0 \Rightarrow m^2=\frac{25}{4} \xrightarrow{m>2} m=\frac{5}{2}$$

۸) در سهمی $y=ax^2+bx+c$ اگر $\begin{cases} \Delta=0 \\ a<0 \end{cases}$ سهمی پایین محور xها و بر آن مماس است.

$-\frac{b}{2a}$



تست: به ازای کدام مقدار m نمودار سهمی $f(x)=(2m-1)x^2-2mx+2m-1$ پایین محور xها بر آن مماس باشد؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{9}$

پاسخ: گزینه ی ۳)

$$\begin{cases}\Delta=0\\ a<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4m^2-4(2m-1)^2=0\Rightarrow m^2-(2m-1)^2=0\\ 2m-1<0\Rightarrow m<\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}(m+2m-1)(m-2m+1)=0\\ m<\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{1}{3} \text{ یا } m=1\\ m<\frac{1}{2}\end{cases}$$

با توجه به اینکه $m<\frac{1}{2}$ غیرقابل قبول است پس $m=\frac{1}{3}$ جواب است.

۹) نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره بالای محور xها است (به عبارت دیگر چند جمله‌ای ax^2+bx+c همواره مثبت است) اگر و فقط اگر $a>0$ و $\Delta<0$ باشد.

تست: به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=(m+2)x^2-2mx+1$ همواره بالای محور xها است؟

(سراسری ریاضی خارج کشور ۸۵)

۱) $m>2$ ۲) $-2<m<-1$ ۳) $-2<m<2$ ۴) $-1<m<2$

پاسخ: گزینه ی ۴) نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ همواره بالای محور xها است اگر $a>0$ و $\Delta<0$ باشد، داریم:

$$\begin{cases}a>0\Rightarrow m+2>0\Rightarrow m>-2 \quad (*)\\ \Delta<0\Rightarrow m^2-m-2<0\Rightarrow (m+1)(m-2)<0\Rightarrow -1<m<2 \quad (**)\end{cases}$$

$$(*)\cap(**)\Rightarrow -1<m<2$$

۱۰) نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور xها است (به عبارت دیگر چند جمله‌ای ax^2+bx+c همواره منفی است) اگر و فقط اگر $a<0$ و $\Delta<0$ باشد.

تست: به ازای کدام مقادیر m، نمودار $y=(m-1)x^2+\sqrt{3}x+m$ همواره در زیر محور xها است؟

(سراسری ریاضی داخل ۸۵)

۱) $m<-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}<m<1$ ۳) $1<m<\frac{3}{2}$ ۴) $m>\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه‌ی (۱) می‌دانیم نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور xها است اگر $a<0$ و $\Delta<0$ باشد. داریم:

$$\begin{cases} a<0 \Rightarrow m-1<0 \Rightarrow m<1 \quad (*) \\ \Delta<0 \Rightarrow 3-4m(m-1)<0 \Rightarrow -4m^2+4m+3<0 \Rightarrow 4m^2-4m-3>0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$(2m+1)(2m-3)>0 \Rightarrow m<-\frac{1}{2} \text{ یا } m>\frac{3}{2} \quad (**)$$

$$(*)\cap(**) \Rightarrow m<-\frac{1}{2}$$

۱۱) نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ از هر چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور کند هرگاه $\frac{c}{a}<0$ باشد، یعنی دارای دو ریشه‌ی مختلف العلامت باشد.

تست: با کدام مقادیر m، منحنی به معادله‌ی $y=(m+2)x^2-2x+1$ از هر چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات می‌گذرد؟

(سراسری ریاضی داخل ۸۷)

۱) $m<-2$ ۲) $m<-1$ ۳) $-2<m<-1$ ۴) $-4<m<-2$

پاسخ: گزینه‌ی (۱) تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ به شرطی از هر چهار ناحیه عبور می‌کند، هرگاه دارای دو ریشه‌ی مختلف العلامت باشد، به عبارت دیگر $\frac{c}{a}<0$ شود:

$$\frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{1}{m+2}<0 \Rightarrow m<-2$$

۱۲) صفرهای تابع درجه دوم: نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور xها، طول این نقاط مشترک آنها را صفرهای تابع می‌نامیم، چرا که به ازای این نقاط مقدار تابع صفر می‌شود.

مولف:رحیم قهرمان

تست: اگر $x=m$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^2-(3m+1)x+3$ باشد، صفر دیگر آن کدام است؟ $(m\in N)$

۱) $2m+1$ ۲) $2m$ ۳) $2m-1$ ۴) $-m$

پاسخ: گزینه (۱)

$$f(x)=x^2-(3m-1)x+3 \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}=3m+1 \quad (*)$$

یکی از صفرهای تابع $x_1=m$ است. در نتیجه:

$$(*) \Rightarrow m+x_2=3m+1 \Rightarrow x_2=2m+1$$

درسنامه ی (۱۱) روش یافتن ماکزیمم یا مینیمم توابع درجه دوم

در سهمی با ضابطه ی $y=ax^2+bx+c$ ، نقطه ی $S(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ نقطه ی اکسترمم یا رأس سهمی است. توجه داریم که:

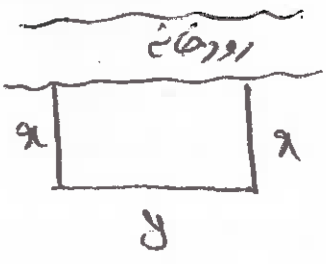
۱) اگر $a>0$ ، $y=\frac{-\Delta}{4a}$ مقدار مینیمم تابع است.

۲) اگر $a<0$ ، $y=\frac{-\Delta}{4a}$ مقدار ماکزیمم تابع است.

تست: بیشترین مساحت از زمینی را که می توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر در شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، چند متر مربع است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۱)

۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸ ۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

پاسخ: گزینه (۲) با توجه به شکل و فرض مسئله $2x+y=88$ است، پس $y=88-2x$. تابع مساحت مستطیل برابر است با:



$$S=xy \Rightarrow S(x)=x(88-2x)=88x-2x^2$$

$$S_{max}=\frac{-\Delta}{4a}=-\frac{(88^2-4(-2)(0))}{4(-2)}=968$$

درسنامه‌ی (۱۲) معادلات شامل عبارات گویا

معادله‌هایی که در آنها عبارات گویا وجود داشته باشند، معادله‌هایی شامل عبارت‌های گویا می‌نامند.

برای حل این گونه معادلات باید مراحل زیر را انجام دهیم.

۱) دامنه‌ی معادله را بدست می‌آوریم.

۲) همه‌ی عبارات جبری را به یک طرف معادله انتقال می‌دهیم.

۳) ک.م.م مخرج‌ها را بدست می‌آوریم و معادله را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب و ساده‌تر می‌کنیم و جواب‌ها را بدست می‌آوریم (یعنی ریشه‌ی مخرج نباشد)

۴) جواب‌هایی قابل قبول هستند که در دامنه‌ی جواب معادله قرار داشته باشند.

تست: در معادله‌ی $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=3$ حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۳

$\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=3 \Rightarrow$ ک.م.م مخرج‌ها $=(x-2)x$

$\left(\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=3\right)\times x(x-2) \Rightarrow x^2+x-2=3(x-2)x \Rightarrow 2x^2-7x+2=0$

معادله‌ی $2x^2-7x+2=0$ دارای دو ریشه متمایز است چون $x=2$ یا $x=0$ ریشه‌های معادله نیستند (صفرکننده‌های مخرج کسرها). بنابراین هر دو ریشه قابل قبول می‌باشند. با توجه به اینکه $\frac{c}{a}=\frac{2}{2}=1$ لذا حاصل ضرب ریشه‌ها برابر با ۱ است.

درسنامه‌ی (۱۳) معادلات رادیکالی

برای حل یک معادله شامل رادیکال مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

۱) رادیکال را در یک طرف تنها نگه می‌داریم و بقیه جملات را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم.

۲) طرفین معادله را به توان عدد فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم.

۳) معادله را ساده می‌کنیم. حال اگر رادیکال باقی مانده باشد بار دیگر دوباره آن را در یک طرف تنها نگه می‌داریم و طرفین معادله را به توان عدد فرجه می‌رسانیم و نتیجه را ساده و حل می‌کنیم.

۴) تمام جواب‌هایی است آمده را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم. و جواب‌های غیرقابل‌قبول را حذف کنیم.

تست: مجموع جواب‌های معادله رادیکالی $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=1$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=1 \Rightarrow \sqrt{3x+4}=1+\sqrt{2x+1} \xrightarrow{\text{به توان دو}}$$

$$3x+4=1+2\sqrt{2x+1}+2x+1 \Rightarrow x+2=2\sqrt{2x+1} \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$x^2+4x+4=8x+4 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=4$$

هر دو جواب بدست آمده در معادله اصلی صدق می‌کنند. بنابراین قابل قبول می‌باشند. پس مجموع دو جواب بدست آمده برابر ۴ است.

تست: معادله $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2+a}=0$ به ازای چند مقدار a، دارای جواب است؟

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) ۴　　۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۲) می‌دانیم مجموع دو عدد نامنفی همواره نامنفی است. مجموع چند عبارت نامنفی زمانی می‌تواند صفر باشد که تمام عبارات هم‌زمان صفر شوند. $\sqrt{x^2-3x+2}$ همواره نامنفی است و به ازای $x=1$ و $x=2$ صفر می‌شود. اگر عبارت همواره نامنفی $\sqrt{x^2+a}$ نیز به ازای $x=1$ یا $x=2$ صفر شود، در این صورت معادله $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2+a}=0$ جواب خواهد داشت:

الف) اگر $x=1$ جواب معادله $\sqrt{x^2+a}$ باشد آنگاه $1^2+a=0$ در نتیجه $a=-1$ است.

ب) اگر $x=2$ جواب معادله $\sqrt{x^2+a}$ باشد آنگاه $2^2+a=0$ در نتیجه $a=-4$ است.

به ازای $a=-4$ یا $a=-1$، معادله داده شده دارای جواب است.