فصل ۲ درس ۲: استدلال و قضیه تالس

پیش نیاز های درس۲:

- نسبت و تناسب
- طرفین وسطین

اهداف درس ۲:

- درک برخی خواص تناسب
- درک قضیه تالس، عکس و تعمیم آن و توانایی کاربرد آن در حل مسائل
- درک استدلال استقرایی، استدلال استنتاجی، برهان خلف، مثال نقض، عکس قضیه و قضیه های دو شرطی

نسبت و تناسب

هر دو نسبت مساوی ، یک تناسب تشکیل می دهند

ویژگی های تناسب:

الف) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc$ (طرفین وسطین)

ب) $ad=bc \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (تبدیل حاصل ضرب به تناسب)

پ) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (معکوس کردن تناسب)

ت) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a}=\frac{d}{b} \\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \end{cases}$ (تعویض جای طرفین با وسطین)

ث) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d} \end{cases}$ (ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)

ج) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \\ \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c} \end{cases}$ (تفصیل نسبت در صورت یا مخرج)

(کاردر کلاس ۲ ص ۳۲)

2) با توجه به ویژگی های تناسب ،کامل کنید.

الف) $\frac{۵}{۱۴}=\frac{۱۵}{۴۲} \Rightarrow ۵\times \_\_\_ = ۱۵\times \_\_\_$

ب) $۳\times ۴۰=۱۲\times ۱۰ \Rightarrow \frac{۳}{\_}=\frac{۱۲}{\_}$

پ) $\frac{۷}{۱۰}=\frac{۲۱}{۳۰} \Rightarrow \frac{۱۰}{۷}= \_\_\_$

ت) $\frac{۶}{۱۱}=\frac{۱۸}{۳۳} \Rightarrow \frac{۶}{۱۸}= \_\_\_$ ، $\frac{۳۳}{۱۱}= \_\_\_$

ث) $\frac{۴}{۱۴}=\frac{۱۰}{۳۵} \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۴}= \_\_\_$ ، $\frac{۴}{۱۸}= \_\_\_$

ج) $\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱۰}{۲۴} \Rightarrow \frac{-۷}{۱۲}= \_\_\_$ ، $\frac{۵}{-۷}= \_\_\_$

(تمرین ۲ ص ۴۱)

2) مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را به دست آورید

الف) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}$

ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}$

استدلال و انواع آن:

عمل دلیل آوردن برای اثبات یک گزاره را استدلال می نامند .به طور کلی دو نوع استدلال وجود دارد.

۱)استدلال استقرایی : استدلالی است که ما را براساس تعداد محدودی مشاهده به یک نتیجه کلی می رساند.

۲)استدلال استنتاجی : استدلالی است که بر اساس حقایق درست پذیرفته شده ما را به یک نتیجه کلی می رساند.

تفاوت استدلال ها:

استدلال استقرایی	استدلال استنتاجی
براساس تعداد محدودی ازمشاهدات است.	بر اساس حقایق پذیرفته شده است
تجربی است	منطقی است
از جزء به کل	از کل به جزء
نتایج آن احتمالی است	نتایج آن قطعی است

مثال نقض:

مثالی است که درستی یک حکم کلی را رد می کند و نشان می دهد که نتیجه گیری کلی نادرست است.

- ✓ نکته: اگر برای یک حدس با حکم کلی نتوانستیم مثال نقض بیاوریم، دلیل بر درستی آن حدس نیست.ممکن است تلاش بیشتر، ما را به مثال نقض برساند .ضمن آنکه برای اثبات حکم کلی، نیازمند به استدلال استنتاجی هستیم.

(مثال ص ۳۹ و ۴۰)

برای هر یک از موارد زیر در صورت وجود یک مثال نقض بیاورید.

الف)تمام اعداد اول فرد هستند.

ب) همه اعداد فرد،اول اند.

پ)حاصل جمع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

ت) به ازای هر عدد طبیعی n مقدار عبارت $n^{۲}+n+۴۱$ عددی اول است.

Homework:(تمرین ۹ص۴۱)

⑨هر یک از حکم های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید .

الف) هیچ عدد اول بزرگتر از ۱۲۷ وجود ندارد.

ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

پ) در هر مثلث میانه و عمود منصف متناظر به هر ضلع بر هم منطبق هستند.

ت) در هر مثلث اندازه هر ضلع از اندازه هر ارتفاع بزرگتر است.

قضیه:

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می آیند، قضیه نامیده می شوند.

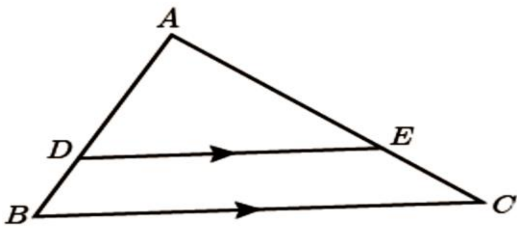
هر قضیه یک جمله شرطی است که دارای فرض (اطلاعات مسئله) و حکم(خواسته مسئله) می باشد که الگوی آن به صورت زیر است:

قضیه شرطی: اگر (فرض) آنگاه (حکم) .

قضیه تالس :

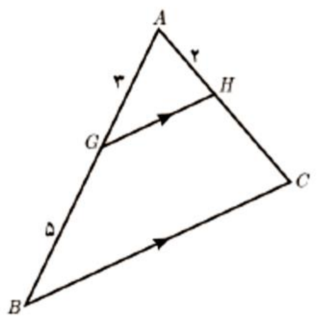
اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند،آنگاه روی آنها پاره خط های متناسب بوجود می آورد.

$$DE \parallel BC \rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$ (جزء به جزء)

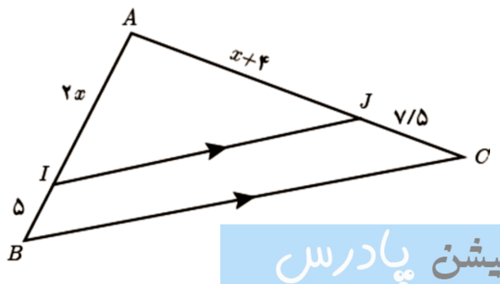


(کاردرکلاس ۱و۲ ص ۳۴)

①در شکل پاره خط های BC , GH موازی اند.اندازه پاره خط های HC , AC را به دست آورید.



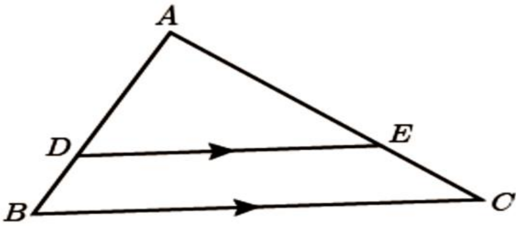
②با تشکیل یک معادله ، مقدار x و اندازه پاره خط های AJ , AI را به دست آورید



تعمیم قضیه تالس:

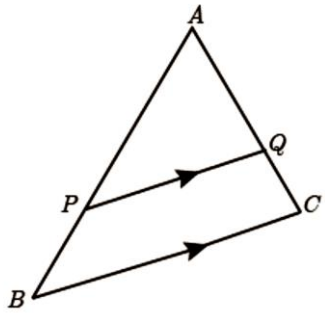
با دوبار استفاده از قضیه تالس و ترکیب نسبت در مخرج به رابطه زیر میرسیم:

$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$ (جزء به کل)



(کاردرکلاس ص ۳۶)

در شکل زیرپاره خط موازی با ضلع است .درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.



الف) $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}=\frac{PQ}{BC}$

ب) $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}$

پ) $\frac{PB}{AP}=\frac{QC}{AC}$

ت) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}=\frac{PQ}{BC}$

ث) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}$

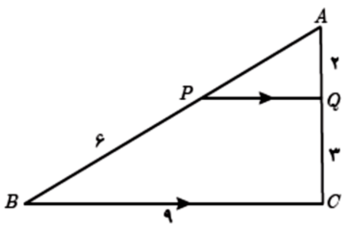
ج) $\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}=\frac{BC}{PQ}$

نکته:

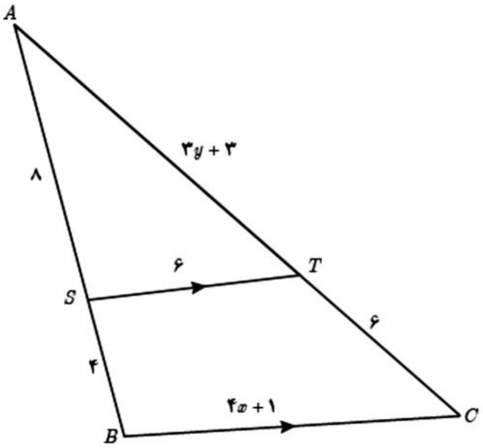
اگر در سوال پاره خط های موازی را بدهند یا بخواهند می توانیم از تناسب جزء به کل استفاده کنیم.

(تمرین۴و۵ ص ۴۱)

④ در شکل $PQ \parallel BC$ است.اندازه پاره خط های PQ, AP را به دست آورید.



⑤ در شکل $ST \parallel BC$ است. x, y را به دست آورید.



عکس قضیه:

اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه جا کنیم، آنچه حاصل می شود «عکس قضیه » است .عکس یک قضیه می تواند درست یا نادرست باشد.

(مثال ۱و۲و۳ص ۳۶)

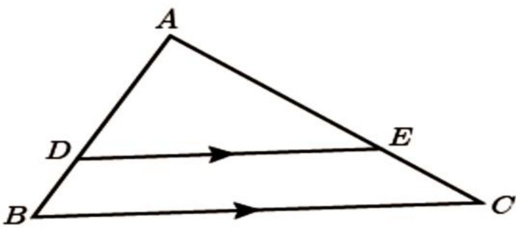
۱)قضیه : اگر یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می کند.

عکس قضیه : اگر در یک چهار ضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

۲) قضیه : اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

عکس قضیه : اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشندآنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع ها نیز با هم برابرند.

۳)قضیه تالس: $DE \parallel BC \rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$



عکس قضیه تالس : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \rightarrow DE \parallel BC$

برهان خلف(استدلال غیر مستقیم):

اگر اثبات درستی یک قضیه از طریق مستقیم دشوار باشداز روش برهان خلف کمک می گیریم.

برای اثبات یک قضیه به روش برهان خلف، ابتدا فرض می کنیم حکم درست نباشد(فرض خلف) و به یک تناقض (نتیجه غیرممکن) می رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می شود.

مسئله: فرض $(A) \Rightarrow$ حکم (B)

$$\left.\begin{array}{c} A \text{ درست} \\ \text{و} \\ B \text{ نادرست} \end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow}_{\text{استدلال، منطق و حقایق}}$$

① A درست نیست

② تناقض منطقی

پس نتیجه می گیریم حکم (B) درست است.

(مثال ص ۳۸ و ۳۷)

① اگر $n\in N$ و n^2 عددی فرد باشد، آنگاه n نیز عددی فرد است.

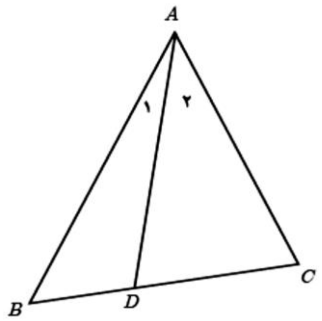
مسئله : فرض(n^2 فرد است) $\Rightarrow$ حکم (n فرد است)

برهان خلف:

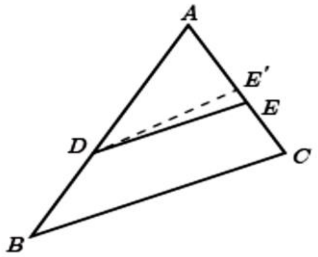
n زوج است $\Rightarrow n = ۲k \Rightarrow n^۲ = ۴k^۲ = ۲\left(۲k^۲\right) = ۲m$

حکم درست است $\Leftarrow$ تناقض $\Leftarrow$ باید طبق فرض، فرد باشد $\Leftarrow$

② فرض کنیم AD نیمساز زاویه A از مثلث ABC باشد.اگر $BD \neq DC$ باشد آن گاه $AB \neq AC$.



③ با استفاده از برهان خلف درستی عکس قضیه تالس را ثابت کنید.



Homework:(تمرین ۸ ص ۴۱)

⑧ با برهان خلف ثابت کنید نمی توان از یک نقطه غیر واقع بر یک خط دو عمود بر آن خط رسم کرد.

قضیه‌های دو شرطی:

اگر عکس یک قضیه شرطی درست باشد آن را قضیه دوشرطی می نامیم.که به صورت های زیر نوشته می شود:

- ❖ p اگر و تنها اگر q
- ❖ اگر p آنگاه q و برعکس

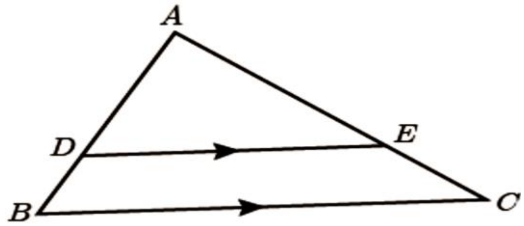
قضیه های دو شرطی را با نماد $(\Leftrightarrow)$ نشان می دهند.

(مثال ص ۳۹)

۱)در یک مثلث دو ضلع با هم برابرند ; اگر و تنها اگر زاویه های رو به رو به آنها با هم برابرباشند.

۲)در مثلث متساوی الاضلاع یک پاره خط نیمساز است ; اگر و تنها اگر میانه باشد .

۳)قضیه تالس وعکس آن به صورت یک قضیه دو شرطی :



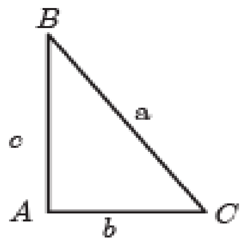
اگر $DE \parallel BC$ آنگاه $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ و برعکس

یا

$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

(کاردرکلاس ص ۳۹)

قضیه فیثاغورس وعکس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بنویسید.



اگر $A = ۹۰^\circ$ آنگاه $a^۲ = b^۲ + c^۲$ وبرعکس

یا

$$A = ۹۰^\circ \Leftrightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$

میان خط در مثلث و ذوزنقه:

۱) در هر مثلث پاره خطی که وسط های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

۲)در هر ذوزنقه پاره خطی که وسط های دو ساق را به هم وصل کند با قاعده موازی و طول آن برابر میانگین قاعده هاست.

(تمرین ۳و۶ ص ۴۱)

③ثابت کنیددر هر مثلث پاره خطی که وسط های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است

⑥در ذوزنقه مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است.ثابت کنید

$$\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$$